Didaktik der MATHEMATIK (Primarstufe)

Kognitive Anforderungen in geometrischen Aufgaben des vierten Schuljahres

Eine Untersuchung zu den Anforderungsbereichen der Bildungsstandards

von
Ines Wiese (geb. Maurer)
aus Rockenhausen

Angenommene Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Philosophie
Fachbereich 7: Natur- und Umweltwissenschaften
- Institut für Mathematik -
Universität Koblenz-Landau

Berichterstatter:
Prof. Dr. Renate Rasch, Landau
Prof. Dr. Marianne Grassmann, Berlin

Tag der Disputation: 18.05.2016

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als externe Doktorandin in der Arbeitsgruppe der Didaktik der Mathematik (Primarstufe) am Campus Landau unter der Leitung von Frau Prof. Dr. Renate Rasch. Die Motivation zu der behandelten Thematik entstammt meinem Eintritt in den Schulalltag nach der Absolvierung des Ersten Staatsexamens für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen an der Universität Koblenz-Landau (Campus Landau) 2008 und blieb auch nach Abschluss des Vorbereitungsdienstes am Staatlichen Studienseminar Rohrbach 2010 sowie während meiner bis heute andauernden Tätigkeit als Lehrkraft an einer Grundschule erhalten.

An dieser Stelle möchte ich all jenen Personen danken, die mich auf ganz unterschiedliche Art und Weise auf diesem Weg unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt meiner Betreuerin Frau Prof. Dr. Renate Rasch für die langjährige vertrauensvolle Begleitung meines Promotionsvorhabens. Der anregende und hilfreiche Austausch über theoretische und praktische Fragen brachte die Planung und Umsetzung meines Forschungsvorhabens stetig voran. Ihre Zuverlässigkeit, ihre Erreichbarkeit, ihr offenes Ohr und ihre ermutigenden Worte unterstützten meine Arbeit sehr. Ebenso gilt mein Dank Herrn Dr. H. Walter Schreiber, dessen methodische Hilfen wesentlich zur Darstellung und Interpretation der gewonnenen empirischen Daten beitrugen. Auch Robin Friedel danke ich für seine methodischen Hinweise.

Des Weiteren danke ich Frau Prof. Dr. Marianne Grassmann dafür, dass sie sich als Zweitgutachterin meiner Arbeit zur Verfügung gestellt hat.

Ganz herzlich danke ich meinem Mann und meiner Familie, die mich mit viel Geduld und Verständnis durch diese arbeitsintensive Zeit begleiteten.

Außerdem danke ich den insgesamt 18 Lehrkräften, die sich neben ihrem Schulalltag die Zeit nahmen, an meiner Untersuchung teilzunehmen, und natürlich den 270 Schülerinnen und Schülern, die alle vorgelegten geometrischen Aufgaben bearbeiteten.

Würzweiler, im Februar 2016 Ines Wiese

Zusammenfassung

In der vorliegenden Untersuchung stehen geometrische Aufgaben und die in den seit 2004 national verbindlichen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich formulierten Anforderungsbereiche im Zentrum. Diese zeigen die kognitiven Anforderungen an Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben auf, wobei zwischen „Reproduzieren", „Zusammenhänge herstellen" und „Verallgemeinern und Reflektieren" unterschieden wird (KMK, 2005a, S. 13). Durch die drei Anforderungsbereiche sollen Lehrkräfte unter anderem die Chance zur Entwicklung einer anforderungsbezogenen Aufgabenkultur erhalten. Des Weiteren soll die Integration von Aufgaben aus allen drei Anforderungsbereichen im Unterricht angeregt und einem einseitig ausgerichteten Unterricht entgegen gewirkt werden.

Da die Anforderungsbereiche bislang nicht empirisch validiert wurden und in den Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz nicht klar zur Schwierigkeit von Aufgaben abgegrenzt werden (KMK, 2005a, S. 13; KMK, 2005b, S. 17; KMK, 2004b, S. 13), wurde in der vorliegenden Untersuchung zum einen die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung geometrischer Aufgaben zu den drei Anforderungsbereichen geprüft. Zum anderen wurde untersucht, inwiefern die in den geometrischen Aufgaben enthaltenen kognitiven Anforderungen in Zusammenhang mit der empirischen Schwierigkeit von Aufgaben, der mathematischen Leistungsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern, dem Geschlecht und den Anforderungen der im Unterricht gestellten Aufgaben stehen.

Vor dem Hintergrund der dem deutschen Mathematikunterricht nachgesagten Kalkül- beziehungsweise Fertigkeitsorientierung (Baumert et al., 2001, S. 296; Granzer & Walther, 2008, S. 9) und den damit einhergehenden Stärken deutscher Schülerinnen und Schüler im Bereich von Routineaufgaben und Schwächen im Bereich von Aufgaben mit höheren kognitiven Anforderungen (Grassmann et al., 2014, S. 11; Reiss & Hammer, 2013, S. 82; Schütte, 2008, S. 41) wurde zudem die Verteilung der im Rahmen der Untersuchung gewonnenen, schriftlich fixierten geometrischen Schulbuch- und Unterrichtsaufgaben auf die drei Anforderungsbereiche analysiert.

Durch die Betrachtung geometrischer Aufgaben konnte stichprobenartig der quantitative Geometrieanteil in den Schulbüchern und im Unterricht der vierten Jahrgangsstufe ermittelt werden, um so den Forschungsstand zum Stellenwert des Geometrieunterrichts (Maier, 1999; Backe-Neuwald, 2000; Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004) zu aktualisieren beziehungsweise zu ergänzen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

> „Die Klassifikation der Aufgaben nach Anforderungsbereichen ist die zentrale Schwachstelle der `Bildungsstandards für das Fach Mathematik - Jahrgangsstufe 4´." (Schipper, 2005, S. 356)

Dieses Zitat stammt von Wilhelm Schipper, einem Mitglied der Steuerungsgruppe „Bildungsstandards", die sich knapp zwei Jahre mit der Entwicklung eben dieser beschäftigte. In den seit 2004 national verbindlichen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich wurden bis zum Ende der Grundschulzeit zu erreichende allgemeine und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen formuliert und anhand von Aufgabenbeispielen hinsichtlich dreier Anforderungsbereiche konkretisiert. Diese zeigen die kognitiven Anforderungen an Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben auf und sollen den Lehrkräften die Chance der Entwicklung einer anforderungsbezogenen Aufgabenkultur bieten (KMK, 2005b, S. 11). Dabei werden die Anforderungen „Reproduzieren", „Zusammenhänge herstellen" und „Verallgemeinern und Reflektieren" unterschieden (KMK, 2005a, S. 13). Das oben aufgeführte Zitat bezieht sich auf die bislang fehlende empirische Validierung der Anforderungsbereiche. Die vorliegende Erhebung möchte im Zusammenhang mit geometrischen Aufgaben klären, inwieweit die Anforderungsbereiche transparent, anwendbar und hilfreich für Lehrkräfte sind beziehungsweise worin deren Nutzen für die Unterrichtsarbeit liegt. Dazu wurde die Möglichkeit der übereinstimmenden Zuordnung geometrischer Aufgaben im vierten Schuljahr zu den drei in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen geprüft. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse konnten zur Darstellung der Verteilung der kognitiven Anforderungen in den geometrischen Aufgaben des vierten Schuljahres genutzt und vor dem Hintergrund der Erkenntnisse aus internationalen Schulleistungsstudien, wie beispielsweise der dem deutschen Mathematikunterricht nachgesagten Fertigkeitsorientierung (Baumert et al., 2001, S. 296; Criblez et al., 2009, S. 121; Granzer & Walther, 2008, S. 9), den damit einhergehenden Stärken deutscher Schülerinnen und Schüler im Bereich von Routineaufgaben und Schwächen im Bereich von Aufgaben mit höheren kognitiven Anforderungen (Grassmann et al., 2014, S. 11; Reiss & Hammer, 2013, S. 82; Schütte, 2008, S. 41) und der weniger erfolgreichen Förderung der leistungsstarken Schülerinnen und Schüler im Vergleich zu den leistungsschwächeren (Wendt et al., 2012, S. 14ff; Selter et al., 2012, S. 93ff), betrachtet werden (Kap. 8).

Neben der fehlenden empirischen Prüfung führt die Kultusministerkonferenz an verschiedenen Stellen die in den Aufgaben enthaltenen Anforderungen im Zusammenhang mit der Schwierigkeit von Aufgaben an (KMK, 2005a, S. 13; KMK, 2005b, S. 17; KMK, 2004b, S. 13), wohingegen an anderer Stelle die Eignung der Anforderungsbereiche zur Beschreibung der Aufgabenschwierigkeit verneint wird (Walpuski et al., 2010, S. 175; Blum, 2006, S. 14). Um zu prüfen, inwiefern die Anforderungsbereiche zur Bestimmung der Schwierigkeit von Aufgaben herangezogen werden können, wurden 24 geometrische Schulbuchaufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen von 270 Schülerinnen und Schülern bearbeitet und die Lösungshäufigkeiten empirisch ermittelt. Des Weiteren wurde mit Hilfe des zu Beginn und zum Ende des vierten Schuljahres durchgeführten normierten Schulleistungstests DEMAT die Leistungsfähigkeit der 270 Schülerinnen und Schülern erfasst. So konnten zudem Zusammenhänge zwischen den kognitiven Anforderungen und der Leistungsfähigkeit beziehungsweise dem Geschlecht von Schülerinnen und Schülern untersucht werden. Ebenfalls wurden die gewonnenen Daten hinsichtlich der Zusammenhänge zwischen den Geometrieleistungen, den Lösungshäufigkeiten bei der Bearbeitung geometrischer Aufgaben mit unterschiedlichen kognitiven Anforderungen und der Quantität beziehungsweise Qualität des Geometrieunterrichts analysiert (Kap. 9).

Ein zweiter Schwerpunkt wurde auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form (KMK, 2005a, S. 10) gelegt. Trotz der unumstrittenen Bedeutsamkeit des Geometrielernens sind bis heute zahlreiche Aussagen zur defizitären Realisierung geometrischer Inhalte im Mathematikunterricht zu finden. Es werde nur sporadisch und in zu geringem Umfang Geometrie unterrichtet, wobei der ermittelte Anteil des Geometrieunterrichts am Mathematikunterricht zwischen 7,5% und 10% beziehugnsweise 14 bis 15 Minuten pro Woche bei Backe-Neuwald (2000, S. 66 und 1998, S. 5), 18% bei Maier (1999, S. 233ff) und 20% bei Roick, Gölitz und Hasselhorn (2004, S. 14) variiert. Die Geometrie spiele „in der alltäglichen Unterrichtspraxis ein eher stiefmütterliches Dasein“ (Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 4) und führe „in der Praxis des Grundschulunterrichts gegenüber der Arithmetik und dem Sachrechnen nicht selten ein Mauerblümchendasein" (Krauthausen & Scherer, 2001, S. 51). Die geometrischen Teile blieben „allzu oft außen vor, weil die inhaltlich wichtigen arithmetischen Bereiche selbst schon recht umfangreich sind“ (Radatz & Schipper, 1983, S. 138). Krauthausen und Scherer (2001, S. 51) sprechen von einem vermeintlichen Zeitdruck, dem geometrische Erfahrungsbereiche und Inhalte allzu oft zum Opfer fallen, da sie nachrangig behandelt werden und das erste sind, was entbehrlich erscheint. Zudem wird angenommen, dass die in Schulbüchern willkürlich eingestreuten, zusammenhangslos angeordneten und vergleichsweise isoliert von arithmetischen Fragestellungen stehenden Geometrieanteile ein Überspringen oder Zurückstellen dieser Seiten unterstützen und sinnvolle Interdependenzen noch zu wenig explizit gemacht beziehungsweise nahe gelegt werden (Backe-Neuwald, 1998, S. 6; Krauthausen & Scherer, 2001, S. 52; Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 4; Radatz & Schipper, 1983, S. 139).

Die vorliegende Dissertation widmet sich dem Erkenntnisgewinn bezüglich des aktuellen quantitativen Anteils geometrischer Inhalte in Schulbüchern und im Unterricht, indem zehn Schulbüchern für das vierte Schuljahr alle geometrischen Aufgaben entnommen und der Geometrieunterricht durch eine Stichprobe von 16 Lehrkräften über ein Schuljahr hinweg protokolliert wurde (Kap. 7).

Zusammenfassend wurden folgende Fragestellungen formuliert:

1. *Wie hoch ist der quantitative Anteil geometrischer Inhalte in Schulbüchern und im Unterricht des vierten Schuljahres?*
2. *Können geometrische Aufgaben eindeutig den in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen zugeordnet werden?*
3. *Welche kognitiven Anforderungen enthalten die geometrischen Aufgaben in den Schulbüchern und im Unterricht des vierten Schuljahres?*
4. *Inwiefern können die Anforderungsbereiche zur Bestimmung der Aufgabenschwierigkeit herangezogen werden?*
5. *Inwiefern bewältigen Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit von Leistungsfähigkeit und Geschlecht die geometrischen Aufgaben aus den drei verschiedenen Anforderungsbereichen?*
6. *Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Geometrieleistungen und den Anforderungen in den Aufgaben im Geometrieunterricht?*

Insgesamt gliedert sich die vorliegende Dissertation zum Thema „Kognitive Anforderungen in geometrischen Aufgaben des vierten Schuljahres - Eine Untersuchung zu den Anforderungsbereichen der Bildungsstandards" in drei Teile.

Im ersten Teil (Teil I) wird der theoretische Hintergrund dargestellt, wobei aufgrund des doppelten Schwerpunktes zunächst Grundlagen zum Geometrielernen (Kap. 1) geschaffen werden. Dabei werden für das geometrische Lernen bedeutsame Aspekte wie die visuelle Wahrnehmung, das räumliche Vorstellungsvermögen, die Entwicklung des räumlichen Denkens nach Piaget und van Hiele sowie die Bildung von Begriffen thematisiert und Erkenntnisse zum Geometrieunterricht dargestellt. Anschließend wird der im Zuge internationaler Schulleistungsstudien und der Veröffentlichung der Bildungsstandards Einzug in den Bildungsbereich haltende Kompetenzbegriff erörtert (Kap. 2). Um die in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik im Primarbereich formulierten Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form verständlich darstellen zu können, wird sowohl der Entstehungskontext der Bildungsstandards unter Berücksichtigung der aus den Schulleistungsstudien gewonnenen Erkenntnisse, als auch der Kompetenzbegriff an sich und das den Bildungsstandards zugrunde liegende Kompetenzmodell erläutert. Das Kapitel schließt mit der Vorstellung der inhaltsbezogenen Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form und der Abstufung von Kompetenzen in Form sogenannter Kompetenzstufen. Da die Anforderungsbereiche die kognitiven Anforderungen an Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben aufzeigen, werden im dritten Kapitel sowohl kognitionstheoretische Grundlagen geschaffen als auch Aufgabenmerkmale betrachtet. Zunächst erfolgen allgemeine Aussagen zu Aufgaben und die Darstellung einiger der zahlreich in der Literatur existierenden Vorschläge zur Klassifikation von Aufgaben. Aufbauend auf allgemeinen Theorien zur kognitiven Entwicklung und der daraus hervorgehenden einvernehmlichen Annahme, dass der Mensch aktiv Informationen verarbeitet und das so erworbene Wissen im Gedächtnis speichert, werden kognitive Prozesse im Zusammenhang mit einem Modell zum Informationsverarbeitungsprozess dargestellt. Gleichfalls wird die durch Bloom et al. (1972) entwickelte Taxonomie, in der kognitive Prozesse hierarchisch angeordnet wurden und die bei der Entwicklung von Klassifikationsschemata für Mathematikaufgaben und im Rahmen der Standardüberprüfung immer wieder aufgegriffen, angewendet oder erweitert wurde (vgl. Wilson, 1971; Anderson & Krathwohl, 2001), erläutert. Im Anschluss erfolgen Anmerkungen zu kognitiven Anforderungen in Aufgaben und die häufig genannten Aufgabenmerkmale Qualität und Schwierigkeit werden erörtert. Daran knüpft die Darstellung der in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereiche an, wobei Beispiele vorgestellt werden und deren Nutzen reflektiert wird (Kap. 4). Aufgrund der nur hinreichend konkreten Ausführungen werden ergänzend die Formulierungen aus den Bildungsstandards weiterer Fächer und Schularten dargelegt. Die Schilderung der Aussagen zum Zusammenhang zwischen den Anforderungsbereichen und der Aufgabenschwierigkeit leitet zum zweiten Teil der Arbeit über.

Im zweiten Teil (Teil II) erfolgt die Darstellung der empirischen Untersuchung. Dazu werden die für die vorliegende Untersuchung zentralen Fragestellungen und Hypothesen formuliert (Kap. 5) und das Untersuchungsdesign vorgestellt (Kap. 6).

Im dritten Teil (Teil III) werden die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung dargestellt (Kap. 7,8 und 9) und in Kapitel 10 in Bezug auf die formulierten Hypothesen bewertet und diskutiert. Die Dissertation schließt mit praktischen Implikationen und einem Ausblick.

Teil 1: Theoretischer Hintergrund

1 Grundlagen zum Geometrielernen

Zu Beginn werden die für das Geometrielernen bedeutsamen Aspekte (Kap. 1.1) der visuellen Wahrnehmung nach Frostig et al. (Kap. 1.1.1) und des räumlichen Vorstellungsvermögens (Kap. 1.1.2) erläutert. Ebenfalls werden entwicklungspsychologische Theorien zum räumlichen Denken dargestellt. Grundlegend sind dabei Piagets Erkenntnisse zur Entwicklung des räumlichen Denkens (Kap. 1.1.3) und die Niveautheorie nach van Hiele (Kap. 1.1.4). Es schließen sich Ausführungen zur geometrischen Begriffsbildung an (Kap. 1.1.5). Zuletzt erfolgen einige Anmerkungen zur Gestaltung und zur Rolle des Geometrieunterrichts (Kap. 1.2).

Das folgende Zitat leitet die Darstellung der für das Geometrielernen bedeutsamen Aspekte in den folgenden Kapiteln ein:

> „Gerade geometrische Aufgabenstellungen erlauben das Entwickeln spezifischer Denkweisen (z.B. das Aufsuchen von Regeln und Beziehungen, das Zerlegen in leichter lösbare Teilprobleme, das Wechselspiel zwischen einem kreativen Probieren und systematischen Problemlösen) und die Förderung grundlegender, kognitiver Kompetenzen (z.B. Einzelfähigkeiten der visuellen Wahrnehmung, das räumliche Vorstellungsvermögen und das räumliche Denkenkönnen)." (Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 8)

1.1 Aspekte des Geometrielernens

1.1.1 Visuelle Wahrnehmung

Die Wahrnehmung, also das Aufnehmen von Reizen und deren kognitive Verarbeitung, wird in den zahlreich entwickelten Modellen zum räumlichen Vorstellungsvermögen als zentrale Voraussetzung für die Generierung von Raumvorstellungen angesehen. Je nach Sinneskanal, mit dem der Mensch seine Umgebung wahrnimmt, werden verschiedene Wahrnehmungsarten unterschieden. Neben der olfaktorischen, der gustatorischen, der passiv taktilen, der aktiv haptischen, der auditiven, der kinästhetischen und der vestibulären Wahrnehmung ist für die Wahrnehmung von Raum und Form die visuelle Wahrnehmung grundlegend (Franke & Reinhold, 2016, S. 41ff). Diese beinhaltet nicht nur das Sehen, sondern schließt das Assoziieren, Verarbeiten, Interpretieren und Behalten der wahrgenommenen Objekte und damit das visuelle Gedächtnis ein (Franke, 2009, S. 29). Dieses umfassende Begriffsverständnis basiert auf Studien mit blinden Personen, die trotz fehlender visueller Informationen erstaunliche räumlich-visuelle Leistungen erbrachten (Gardner, 1991, S. 174).

Nach Frostig, Horne und Miller (1972, S. 5ff) erlernen Kinder aufgrund der Leistungsfähigkeit der visuellen Wahrnehmung mehr oder weniger erfolgreich lesen, schreiben, rechnen und weitere Fertigkeiten. Da die visuelle Wahrnehmung somit für den Schulerfolg notwendig und für die Lernfähigkeit bedeutsam ist, entwickelten die genannten Autoren ein Diagnostik- und Übungsprogramm für Schulanfänger zur Vorbeugung und zur Aufarbeitung von Defiziten. Frostig, Horne und Miller (1972) unterschieden dabei fünf Bereiche der visuellen Wahrnehmung (Visuomotorische Koordination, Figur-Grund-Wahrnehmung, Wahrnehmungskonstanz, Wahrnehmung der Raumlage, Wahrnehmung räumlicher Beziehungen). Visuomotorische Koordination meint die Fähigkeit des Menschen, das Sehen mit den Bewegungen des eigenen Körpers oder Teilen des Körpers zu koordinieren (Frostig, Horne & Miller, 1972, S. 5). Ohne die

Fähigkeit zur Figur-Grund-Unterscheidung könnte der Mensch keine Gegenstände im Raum erkennen oder sich darin orientieren. Es wäre also nicht möglich, bei einem komplexeren optischen Hintergrund oder einer Gesamtfigur die Aufmerksamkeit auf eingebettete Teilfiguren zu richten, diese zu erkennen und zu isolieren (Frostig, Horne & Miller, 1972, S. 6). Die Wahrnehmungskonstanz wird beispielsweise beim Sortieren von Gegenständen nach Form oder Größe benötigt und bezeichnet die Fähigkeit, Figuren in der Ebene oder im Raum in verschiedenen Größen, Anordnungen, räumlichen Lagen oder Färbungen wieder zu erkennen und von anderen Figuren zu unterscheiden (Franke, 2009, S. 41; Frostig, Horne & Miller, 1972, S. 6f; Maier, 1999, S. 12). Die Wahrnehmung der Raumlage definieren Frostig, Horne und Miller (1972, S. 7) als die Wahrnehmung der Raum-Lage-Beziehung eines Gegenstandes im Verhältnis zum Standpunkt des Wahrnehmenden, der das Zentrum seiner eigenen Welt ist und Gegenstände als hinter, vor, über, unter oder seitlich von sich lokalisiert. Schwierigkeiten mit der Raumlage führen beispielsweise zur Wahrnehmung der Ziffer 6 als Ziffer 9. Unter Wahrnehmung räumlicher Beziehungen verstehen die Autoren die Fähigkeit, die Lage von zwei oder mehr Gegenständen in Bezug zu sich selbst und in Bezug zueinander wahrzunehmen. Diese Fähigkeit entwickelt sich aus der Wahrnehmung der Raumlage, die einfacher strukturiert ist (Frostig, Horne & Miller, 1972, S. 7).

Franke (2009, S. 32ff) greift die bei Frostig, Horne und Miller (1972) verwendeten Bereiche für ihre eigene Darstellung auf und fasst die Wahrnehmung der Raumlage und die Wahrnehmung von Beziehungen zwischen räumlichen Objekten unter der Bezeichnung räumliche Orientierung zusammen (Abb. 1).

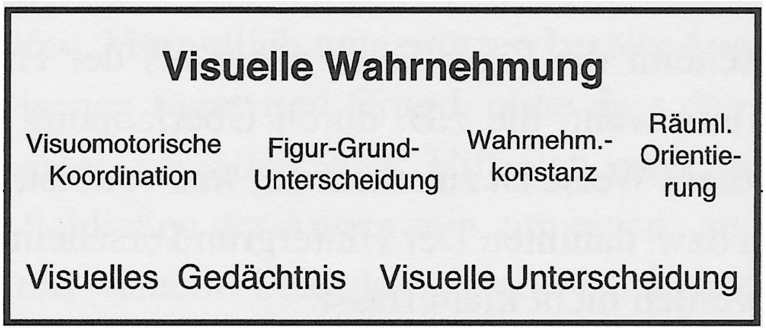


Abbildung 1: Visuelle Wahrnehmung nach Franke (2009, S. 33).

Diese somit vier Bereiche werden ergänzt durch die von Hoffer (1977) ermittelten beiden weiteren Fähigkeiten, dem visuellen Gedächtnis und der visuellen Unterscheidung, sodass sich schließlich die abgebildeten sechs Komponenten der visuellen Wahrnehmung ergeben. Mit Hilfe des visuellen Gedächtnisses können charakteristische Merkmale eines nicht mehr präsenten Objektes vorstellungsmäßig auf andere präsente Objekte bezogen werden, es ist damit also die Merkfähigkeit gemeint (Franke, 2009, S. 50). Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Objekten zu erkennen, gelingt den Menschen dank der Fähigkeit zur visuellen Unterscheidung (Franke, 2009, S. 50f). Franke (2009, S. 32ff) zeigt Aufgabenbeispiele zu den einzelnen Komponenten der visuellen Wahrnehmung auf.

Die Fähigkeit zur visuellen Wahrnehmung ist nach Besuden (1984a, S. 70) Voraussetzung für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens, das im folgenden Kapitel erläutert wird.

1.1.2 Räumliches Vorstellungsvermögen

Räumliches Vorstellungsvermögen, auch Raumvorstellungsvermögen oder Raumvorstellung genannt, bezeichnet die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und zu denken. Es geht über die sinnliche Wahrnehmung hinaus, indem Sinneseindrücke registriert und gedanklich verarbeitet werden. Die entstandenen Vorstellungsbilder sind ohne das Vorhandensein der realen Objekte verfügbar, gespeichert und abrufbar. Hinzu kommt der aktive Umgang mit diesen, sprich das mentale Umordnen oder das Entwickeln neuer Bilder aus den bereits vorhandenen (Maier, 1999, S. 14). Besuden (1984b, S. 66) definiert Raumvorstellung als ein durch geistige Verarbeitung beziehungsweise Verinnerlichung von Wahrnehmungen an dinglichen Gegenständen erworbenes Vermögen, das sich der Raumbezüge bewusst geworden ist und diese reproduzieren kann. Die lebenspraktische Bedeutung der dreidimensionalen Wahrnehmung unserer räumlichen Welt, der Orientierung darin und des gedanklichen Operierens damit ist offensichtlich, weshalb die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens als eines der Hauptziele des Geometrieunterrichts in der Grundschule bezeichnet wird (Besuden, 1984b, S. 64; Franke, 2009, S. 27; Steiner & Winkelmann, 1981, S. 219). Die Bedeutsamkeit des räumlichen Vorstellungsvermögens für die menschliche Intelligenz, den Berufserfolg und das schulische Lernen ist seit einigen Jahrzehnten unumstritten (Grassmann et al., 2014, S. 97ff; Maier, 1999, S. 123ff; Rost, 1977, S. 82ff). Es wurden verschiedene Forschungsperspektiven eingenommen.

In Arbeiten aus psychologisch-psychometrischer Perspektive wird das räumliche Vorstellungsvermögen als Bestandteil in Intelligenzmodellen ausgewiesen. Gardner (1991, 2002) kennzeichnete in seiner Theorie der multiplen Intelligenzen die räumliche Intelligenz als Fähigkeit, die visuelle Welt richtig wahrzunehmen, die ursprüngliche Wahrnehmung zu transformieren und zu modifizieren, und Bilder der visuellen Erfahrung auch dann zu reproduzieren, wenn entsprechende physische Stimulierungen fehlen (Gardner, 1991, S. 163). Zur räumlichen Intelligenz gehört demnach der theoretische und praktische Sinn für die Strukturen großer Räume und für das Erfassen der enger begrenzten Raumfelder (Gardner, 2002, S. 57). Auch Thurstone (1938) unterteilte die menschliche Intelligenz in sieben Faktoren. Das räumliche Vorstellungsvermögen differenziert er dabei weiter in die drei Subfaktoren räumliche Beziehungen (spatial relations), räumliche Veranschaulichung (visualization) und räumliche Orientierung (spatial orientation). Der Subfaktor räumliche Beziehungen (S1) bezieht sich darauf, räumliche Konfigurationen von Objekten oder Teilen von ihnen und deren Beziehungen untereinander zu erfassen, sich also Transformationen wie zum Beispiel Rotation oder Translation von unbewegten, formfesten, starren Objekten vorzustellen. Häufig muss beispielsweise ein Objekt außenstehend identifiziert werden können, das aus verschiedenen Blickwinkeln gezeigt wird (Franke, 2009, S. 57ff; Maier, 1999, S. 38). Der Subfaktor Veranschaulichung (S2) umfasst die gedankliche Vorstellung von räumlichen Bewegungen wie Drehungen, Verschiebungen und Faltungen von Objekten oder Teilen von ihnen, ohne Verwendung anschaulicher Hilfen. Zur Lösung von Testaufgaben, wie zum Beispiel bei Aufgaben zu Abwicklungen und Netzen, sind teilweise komplizierte und mehrstufige analytische Denkvorgänge notwendig (Franke, 2009, S. 60ff; Maier, 1999, S. 35). Bei der Fähigkeit zur räumlichen Orientierung (S3) liegt, im Gegensatz zum Faktor räumliche Beziehungen, der Standort der Person innerhalb der Aufgabensituation. Die räumliche Einordnung der eigenen Person in eine räumliche Situation, wie beispielsweise das Versetzen in eine andere Perspektive, das mentale Wechseln des Standortes sowie die Orientierung darin, ist damit gemeint (Franke, 2009, S. 64f; Maier, 1999, S. 40ff). Die aus der Re-Analyse von Lohman gewonnenen Forschungsergebnisse unterstützten diese Drei-Faktoren-Hypothese nach Thurstone nachhaltig (vgl. Maier, 1999, S. 49f). Thurstones Testaufgaben werden häufig rezipiert (Maier, 1999, S. 36ff; Franke, 2009, S. 59ff; Lüthje, 2010, S. 30ff; Plath, 2013, S. 17ff).

Linn und Petersen (1986, p. 70f) nahmen zur Überprüfung der Hypothese, dass geschlechtsspezifische Unterschiede in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Leistungen auf dem Raumvorstellungsvermögen basieren, eine kognitive Perspektive ein und richteten das Augenmerk auf die im Individuum ablaufenden Prozesse. Sie unterschieden im Rahmen ihrer Meta-Analyse drei Kategorien der Raumvorstellung (spatial ability). Die Kategorie der Räumlichen Wahrnehmung (spatial perception) bezieht sich auf die Orientierung des eigenen Körpers und meint die Fähigkeit, die Horizontale und Vertikale zu identifizieren. Eine weitere Kategorie ist die Vorstellungsfähigkeit von Rotationen (mental rotation) zwei- oder dreidimensionaler Objekte. Der dritte Faktor Räumliche Visualisierung oder Veranschaulichung (spatial visualization) integriert wesentliche Komponenten des Subfaktors räumliche Beziehungen nach Thurstone (1938). Validität und Nutzen dieses Kategoriensystems zeigten sich bei der Beschreibung und Deutung geschlechtsspezifischer Differenzen im räumlichen Vorstellungsvermögen (Linn & Petersen, 1986, p. 72ff). Weitere Strukturkonzepte der Raumvorstellung, wie Ein- und Zwei-Faktor-Theorien oder weitere Drei-Faktor-Theorien, sind bei Maier (1999, S. 31ff) dargestellt.

In der neueren mathematikdidaktischen Literatur wird das von Maier (1999) entwickelte Modell zum räumlichen Vorstellungsvermögen verschiedenen Studien zugrunde gelegt (Lüthje, 2010, S. 99ff; Plath, 2013, S. 93ff). Maier (1999, S. 50ff) ergänzte die drei Faktoren nach Thurstone (1938) um die von Linn und Petersen (1986) formulierten Kategorien zu seinem eigenen Modell (Abb. 2), das er unter anderem in Bezug zu geometrischen Unterrichtsinhalten stellt (Maier, 1999, S. 237ff). Nach Maier (1999, S. 49) war die durch Linn und Petersen (1986) vorgenommene Abgrenzung des Subfaktors räumliche Wahrnehmung und die Extraktion der elementaren Vorstellungsfähigkeit von Rotationen gewinnbringend. Er unterschied in seinem Modell zudem, ob die Versuchspersonen innerhalb oder außerhalb der Situation stehen, ob sie dynamisch oder statisch denken und ob Einsatz analytischer Strategien möglich beziehungsweise hilfreich ist:

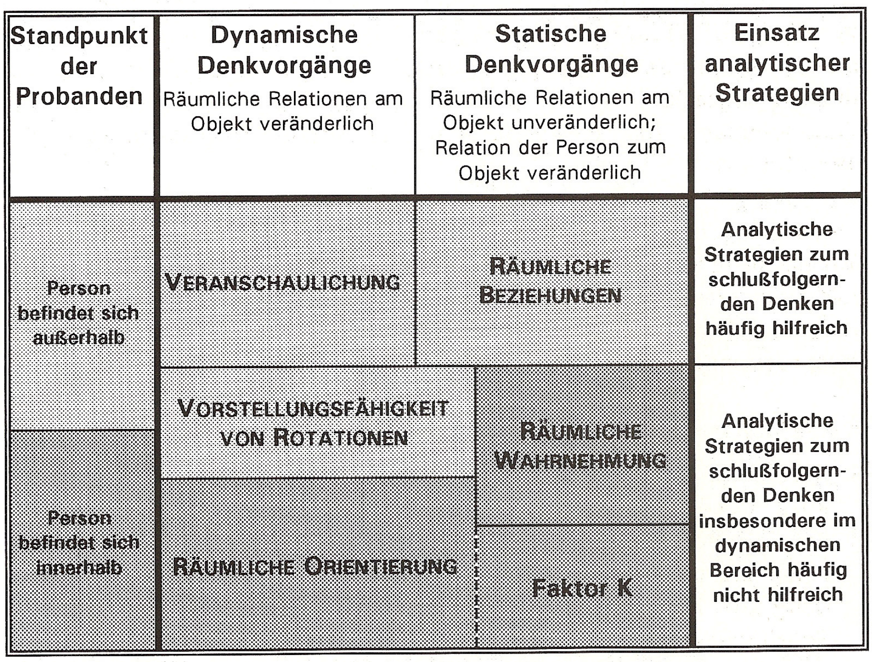


Abbildung 2: Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens nach Maier (1999, S. 71).

Ebenfalls mathematikdidaktisch orientiert sind die drei Komponenten der Raumvorstellung nach Besuden (1984a, 1984b), zu deren Förderung er Unterrichtsvorschläge unterbreitet (Besuden, 1984b, S. 66ff; Besuden, 1984a, S. 72f). Es sind Bezüge zu Thurstone (1938) zu finden, da er räumliche Orientierung (spatial orientation) und räumliches Vorstellungsvermögen (spatial visualization) als Unterfaktoren nennt. Räumliche Orientierung ist nach Besuden die Fähigkeit, sich wirklich oder gedanklich im Raum zu bewegen und die eigene Person richtig räumlich einzuordnen (Besuden, 1984a, S. 71). Die Fähigkeit, räumliche Objekte oder Beziehungen durch Sprache oder Handlungen auch bei deren Abwesenheit reproduzieren zu können, bezeichnet er als räumliches Vorstellungsvermögen (Besuden, 1984a, S. 71). Mit dem dritten Aspekt des räumlichen Denkens knüpft Besuden an die Theorie von Piaget und Inhelder (1975) an und meint damit die Fähigkeit, mit räumlichen Vorstellungsinhalten beweglich umgehen zu können. Voraussetzung dafür ist die Verinnerlichung von Handlungen an Objekten, wie Verschiebungen oder Drehungen (Besuden, 1984a, S. 71; Besuden, 1984b, S. 65f).

Dass die bewusste Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch den Einsatz passender Aufgaben im Geometrieunterricht der Grundschule bedeutsam ist, wurde durch empirische Untersuchungen belegt. Besuden (1984a, S. 71f; 1984b, S. 69) betont, dass kognitive Leistungen wie die Raumvorstellungsfähigkeit trotz erblicher Determination trainierbar und somit entwicklungsfähig sind. Nach Rost (1977, S. 120f) entwickelt sich die Raumvorstellung vor allem vom 7. bis zum 12. Lebensjahr. Er stellt Studien dar, die sich mit dem Training der Raumvorstellung befassten (Rost, 1977, S. 101ff) und führte eine Pilot-Studie zur Förderung des Intelligenzfaktors Raumvorstellung mittels ausgewählter Spiele durch (Rost, 1977, S. 117ff). Auch Maier (1999, S. 80ff) widmet ein Kapitel der Trainierbarkeit der Raumvorstellung.

Neben Besuden (1984b, S. 66ff; 1984a, S. 72f) unterbreiten viele weitere Mathematikdidaktiker Unterrichtsvorschläge oder zeigen Aufgabenbeispiele zur Überprüfung und Förderung der einzelnen Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens auf (Franke, 2009, S. 55ff; Grassmann et al., 2014, S. 99ff; Maier, 1999, S. 34ff; Lüthje, 2010, S. 30ff; Grüßing, 2012, S. 80ff, Plath, 2013, S. 15ff). Rost (1977, S. 21) erachtet die Unterscheidung verschiedener Teilkomponenten der räumlichen Vorstellung als sinnvoll, weist aber zudem darauf hin, dass es angebracht ist, von Raumvorstellung allgemein zu sprechen, da die differenzierbaren Komponenten nicht voneinander unabhängig sind, sondern vielmehr in einer positiven Relation zueinander stehen. Franke und Reinhold (2016, S. 73f) zeigen anhand eines Beispiels die Schwierigkeit auf, konkrete Unterrichtsbeispiele mit Hilfe der genannten Teilkomponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens zu differenzieren. Eine besondere Schwierigkeit von Raumvorstellungsaufgaben ist, dass diese sich zusätzlich hinsichtlich weiterer Merkmale wie Komplexität oder Darstellungsweise unterscheiden und je nach Individuum unterschiedliche kognitive Prozesse und Strategien zum Lösen der Aufgaben eingesetzt werden. Mit Prozessanalysen beschäftigen sich vor allem Mathematikdidaktiker. Unterschiedliche Lösungsstrategien sind wiederum je nach Aufgabenart unterschiedlich effektiv. Offenbar kann bei der Konstruktion von Testaufgaben also nicht davon ausgegangen werden, dass Probanden tatsächlich beziehungsweise ausschließlich die in der Konzeption einer Aufgabe intendierte Raumvorstellungsleistung erbringen (Franke & Reinhold, 2016, S. 75). Franke (2009, S. 66ff) thematisiert unter anderem die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch kopfgeometrische Aufgaben. Die Kopfgeometrie umfasst alle mündlich und im Kopf zu lösenden geometrischen Aufgaben, die das visuelle Wahrnehmungs- und das räumliche Vorstellungsvermögen schulen (Franke, 2009, S. 66), wobei auch Skizzen angefertigt, Modelle genutzt und die Hände zu Hilfe genommen werden dürfen.

Zum Beitrag der Raumvorstellung zu unterschiedlichen Anforderungen im schulischen, beruflichen und privaten Bereich gibt es Erkenntnisse aus Hunderten von Studien (Maier, 1999, S. 161ff). Nach Gardner (1991, S. 169) wurde über räumliche Fähigkeiten, vielleicht mit Ausnahme der Sprache, vermutlich mehr geforscht als über jede andere menschliche Fähigkeit. Existierende Studien untersuchten unten anderem Zusammenhänge zwischen räumlicher Vorstellungskraft und der

Leistung in unterschiedlichen mathematischen beziehungsweise geometrischen Bereichen. Sie bedienten sich teilweise faktoranalytischer oder entwicklungspsychologischer Methoden und bestätigten einen positiven Zusammenhang mehrheitlich (vgl. Maier, 1999, S. 161ff; Klieme, 1986). So wurden im Bereich der Darstellenden Geometrie hohe korrelative Zusammenhänge zum räumlichen Vorstellungsvermögen ermittelt (Maier, 1999, S. 168). Treumann (1974) hob insbesondere die Teilkomponenten Veranschaulichung und räumliche Beziehungen nach Thurstone (1938) als einflussreich auf die Geometrieleistung hervor. Klieme (1986) konstatiert einen Zusammenhang zwischen Mathematikleistung und dem dritten Faktor nach Thurstone (1938), der räumlichen Orientierung. Fennema (1975, p. 7ff) betont, dass die Raumvorstellung bereits im mathematischen Primarbereich bedeutsam ist. Dies wurde durch die Daten von Guay und McDaniel (1977, p. 215) gestützt, die den Zusammenhang zwischen mathematischem und geometrischem Denken im Primarbereich sowohl für einfache als auch für anspruchsvolle Raumvorstellungsleistungen nachwiesen. Krutetskii (1976, p. 183ff) kam zu der Erkenntnis, dass die Entwicklung beziehungsweise Ausprägung der räumlichen Vorstellung den Typ der mathematischen Begabung mitbestimmt, da im Sinne der Kompensation das Verhältnis zwischen der verbal-logischen und der visuell-bildlichen Komponente entscheidend ist (vgl. zusammenfassend Maier, 1999, S. 103ff).

Der Faktor Raumvorstellung wurde zudem hinsichtlich geschlechtsspezifischer Unterschiede untersucht. Rost (1977, S. 29ff) stellt einige Studien und Erkenntnisse zu geschlechtsspezifischen Differenzen in der Raumvorstellung vor. Auch Maier (1999, S. 169ff) betrachtet diesbezügliche Studien hinsichtlich der Aussagekraft zur Abhängigkeit vom Lebensalter und zu den unterschiedlichen Komponenten der Raumvorstellung. In über 100 Studien manifestierten sich mehrheitlich Leistungsvorteile zugunsten von Männern und Jungen, die sich vor allem bei den anspruchsvollsten Raumvorstellungskomponenten, der räumlichen Orientierung und der Vorstellungsfähigkeit von Rotationen, zeigten. Geringere Unterschiede waren bei Aufgaben zu den Subfaktoren räumliche Wahrnehmung und räumliche Visualisierung sowie bei Aufgaben mit geringen räumlich-visuellen Anforderungen erkennbar. Des Weiteren scheint die mathematische Leistungsfähigkeit vor allem beim weiblichen Geschlecht von einer geringen Raumvorstellungsfähigkeit beeinflusst zu werden (Maier, 1999, S. 208; Böhme & Roppelt, 2012, S. 178f).

Weitere empirische Studien zum Zusammenhang von räumlichen und mathematischen Konzepten und Arbeiten zur Rolle von visuell-räumlichen Vorstellungen beim mathematischen Problemlösen sind bei Grüßing (2012, S. 125ff) zusammenfassend dargestellt.

1.1.3 Entwicklung des räumlichen Denkens nach Piaget et al.

Im Rahmen des bedeutsamen Piaget`schen Gesamtwerkes zur Entwicklung der Intelligenz auf vier Stufen (vgl. Kap. 3.2.1) wurden ebenfalls Erkenntnisse zur Entwicklung der Raumvorstellung gewonnen. 1975 veröffentlichten Piaget, Inhelder und weitere 18 Mitarbeiter nach umfangreichen Untersuchungen mit Kindern unterschiedlichen Alters das Buch mit dem Titel „Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde". Nach den Autoren stellt der Raum ein kognitives Schema dar. Die räumlichen Operationen entwickeln sich durch Verinnerlichung von gegenständlichen Handlungen. Dabei werden die in Abbildung 3 aufgezeigten Grundformen räumlicher Beziehungen unterschieden, die den Entwicklungsstufen der präoperationalen und konkret-operationalen Intelligenz zugeordnet wurden und demnach nacheinander auftreten sowie aufeinander aufbauen (Oeveste, 1987, S. 42ff).

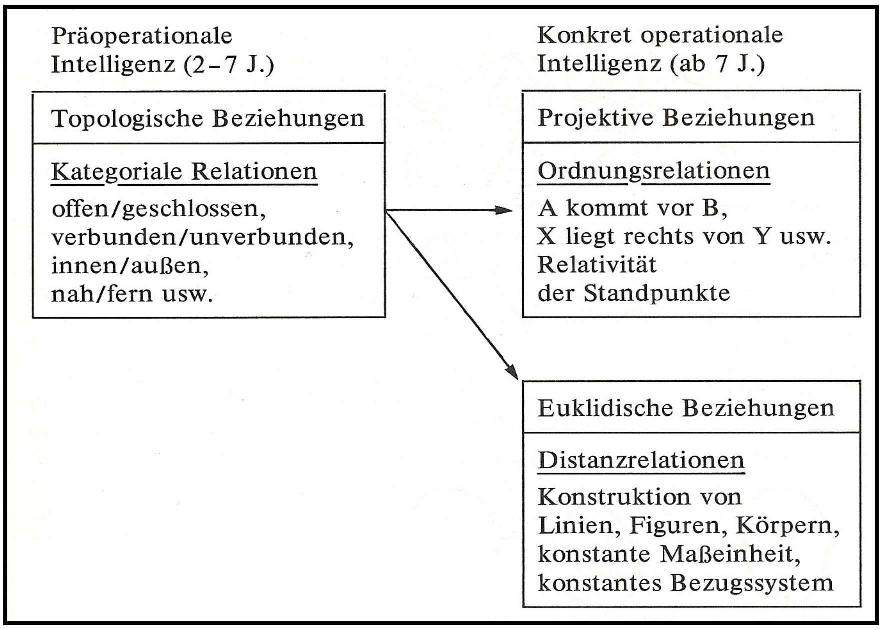


Abbildung 3: Grundformen räumlicher Beziehungen nach Piaget & Inhelder (Oeveste, 1987, S. 43).

An die erste Stufe der Intelligenzentwicklung, auf der konkret mit geometrischen Objekten gehandelt wird (sensomotorische Entwicklungsstufe), schließt sich das Handeln mit Vorstellungsbildern an, wenn sich die Vorstellungsfähigkeit im Alter von zwei bis drei Jahren zu entwickeln beginnt. Wie aus Abbildung 3 hervorgeht, sind nach Piaget et al. (1975, S. 21ff) bereits Kinder im Vorschulalter, die sich auf der Stufe der präoperationalen Intelligenz befinden, zum Erfassen der genannten topologischen Beziehungen in der Lage (Oeveste, 1987, S. 42). Projektive (Piaget et al., 1975, S. 187ff) und euklidische (Piaget et al., 1975, S. 349ff) Beziehungen können erst in der konkret-operationalen Phase erkannt und genutzt werden. Grundlegend ist dabei das Verständnis für Distanzrelationen zwischen verschiedenen Objekten. Zum Beginn der Grundschulzeit sind Kinder demnach dazu in der Lage, projektive Geraden, Winkel, Flächen, Umfänge, Volumina und vieles mehr zu konstruieren, Perspektiven, Schnittoperationen oder Flächenabwicklungen zu erfassen und Schrägbilder zu zeichnen. Auch die zentralen Bereiche der Invarianz und Kongruenz, wie das Erhalten von Abständen und Längen von Flächen und Volumina, entwickeln sich. Längen in verschiedenen Dimensionen können gemessen und Volumina können berechnet werden. Die Ordnung von Objekten relativ zueinander ist möglich (Maier, 1999, S. 90ff; Oeveste, 1987, S. 42f).

Ob ein Kind topologische Sachverhalte erkennt, testeten Piaget und seine Mitarbeiter, indem sie vorgegebene Figuren abzeichnen ließen (Piaget et al., 1975, S. 80ff). Dabei konnten die Kinder topologische Beziehungen sicher unterscheiden, die Nachzeichnungen eines Quadrats und eines Kreises unterschieden sich jedoch erst bei den Kindern ab etwa vier Jahren (Hasemann, 2007, S. 154f). Neben dem Anfertigen von Zeichnungen geometrischer Formen wurden auch Tastversuche durchgeführt. Dabei wurden zunächst vertraute Gegenstände und später geometrische Formen aus Pappe ins Blickfeld der Kinder gelegt. Die gleichen Gegenstände wurden verdeckt und mussten dann durch die Kinder ertastet und gezeigt werden. Dabei wurden einfache und symmetrische (Kreis, Quadrat, Rechteck), komplexere und symmetrische (Stern), asymmetrische mit geraden Rändern (Trapeze) und Formen mit einfachem topologischen Charakter unterschieden (Piaget et al., 1975, S. 38ff).

Das bekannteste Beispiel zur Untersuchung projektiver Beziehungen ist die Versuchsreihe, bei der drei Berge auf einer quadratischen Grundfläche modelliert wurden (Piaget et al., 1975, S. 251). Jedes

Kind erhielt zehn Bilder mit den gleichen Bergen, die aus verschiedenen Blickwinkeln dargestellt wurden, sowie drei farbliche Pappstücke zur Nachbildung und eine Holzpuppe. Die Ergebnisse zeigten, dass erst Kinder ab sieben Jahren die unterschiedlichen Beobachtungsstandpunkte in der Vorstellung zielführend koordinieren und sich von ihrer egozentrischen Perspektive lösen konnten (Piaget et al., 1975, S. 249ff).

Die sich teilweise parallel zur Erfassung des projektiven Raumes entwickelnden euklidischen Raumvorstellungen untersuchten Piaget und seine Mitarbeiter unter anderem mit Hilfe verschiedener Gefäße, die mit bläulich gefärbtem Wasser gefüllt waren. Die Kinder sollten Strichzeichnungen dazu anfertigen, wie die Oberfläche des Wassers bei verschiedenen Neigungen der Gläser verlaufen würde. Ebenfalls erst im Alter ab sieben Jahren gelang es den Kindern, sowohl die Horizontale als auch die Vertikale, dargestellt mittels eines kleinen Korkens mit Streicholz-Mast, zu entdecken und richtig anzuwenden (Piaget et al., 1975, S. 440ff).

Im Rahmen der Hamburger Untersuchung zur Überprüfung der inhaltlichen Generalisierbarkeit von Piagets Hypothesen wurden seine Erkenntnisse zum Raumkonzept konkretisiert, indem festgestellt wurde, dass sich nach einfachen euklidischen Relationen zunächst einfache projektive Relationen entwickeln, gefolgt von komplexen euklidischen Relationen und zuletzt von multiplen projektiven Relationen (vgl. Oeveste, 1987). Neben den allgemeinen Kritikpunkten an Piagets Untersuchungen (vgl. Kap. 3.2.1) ist die fehlende Beachtung einer größeren räumlichen und lebensnahen Umgebung zu ergänzen. Am Beispiel des Drei-Berge-Versuchs wird deutlich, dass für die Kinder verständliche Motive fehlen: Es ist für sie egal, was die Puppe sieht. Die Aufgabe wird beispielsweise von Schütte (2008, S.63) als abstrakt eingestuft, da sie nicht mit den Erfahrungen, Gefühlen und Bestrebungen der Kinder verbunden ist. Die Autorin weist darauf hin, dass nicht alle Handlungen und alle Bilder schon verständlich sind, nur weil sie konkret materialisiert sind, und dass auch „Abstraktes" verständlich sein kann, wenn es in einem für Kinder einsichtigen Sinnzusammenhang steht.

1.1.4 Niveautheorie nach van Hiele

Das Ehepaar van Hiele (1964, 1986) beschrieb den Prozess des Mathematiklernens mit einer Folge von Denkniveaus, die sie vor allem anhand von Beispielen aus der Geometrie und dem Bruchrechnen erläuterten. Sie zeigten, wie aus Handlungen und Betrachtungen geometrische Begriffe entstehen und betonten die Rolle der Sprache beim Begreifen der mathematischen Gegenstände und der geometrischen Zusammenhänge auf den jeweiligen Denkebenen (Hasemann, 2007, S. 158f). Wie bei Piaget (vgl. Kap. 3.2.1) handelt es sich um eine Stufenfolge, die jedoch nicht altersabhängig als Vorgang biologischer Reifung, sondern als Lernprozess formuliert wurde. Ein weiterer Unterschied zu Piaget ist, dass die formulierten Niveaustufen beziehungsweise Denkniveaus oder Denkebenen auf der Beobachtung von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht und nicht auf Laboruntersuchungen basieren (Maier, 1999, S. 95ff). Die Anzahl und die Bezeichnungen der zu durchlaufenden Niveaustufen zum Verständnis des Lernprozesses in der Geometrie variieren in der Literatur je nach Autor. In frühen Veröffentlichungen (van Hiele, 1964, S. 110) wurden vier Niveaus unterschieden und mit räumlichem Denken (Grundniveau), geometrisch räumlichem Denken (erstes Niveau), mathematisch geometrischem Denken (zweites Niveau) und logisch mathematischem Denken (drittes Niveau) bezeichnet. Bereits nach einigen Jahren wurden Veränderungen vorgenommen (van Hiele, 1986, S. 39ff). Tabelle 1 zeigt in der linken Spalte die englischen Bezeichnungen nach Crowleys Synopse der Niveautheorie (1987, p. 2f) und in der rechten Spalte die bei Franke (2009, S. 114) aufgeführten, übersetzten Bezeichnungen.

Tabelle 1: Begriffsbildung nach van Hiele (Crowley, 1987, p. 2f; Franke, 2009, S. 114)

Bezeichnungen nach Crowley	**Bezeichnungen nach Franke**
Level 0: Visualization	0. Niveaustufe: Räumlich-anschauungsgebundenes Denken
Level 1: Analysis	1. Niveaustufe: Geometrisch-analysierendes Denken
Level 2: Informal Deduction	2. Niveaustufe: Geometrisch-abstrahierendes Denken
Level 3: Deduction	3. Niveaustufe: Geometrisch-schlussfolgerndes Denken
Level 4: Rigor	4. Niveaustufe: Strenge, abstrakte Geometrie

Ein sich auf der nullten Niveaustufe (Grundniveau) befindendes Kind kann beispielsweise Quadrate unter anderen Vierecken identifizieren, benennen und auf dem Geobrett reproduzieren oder zeichnen. Das Denken ist, wie auch bei Piagets Theorie (1975), an Handlungen mit Material gebunden. Geometrische Figuren werden an ihrer anschaulichen, äußeren Gestalt erkannt beziehungsweise wiedererkannt und als Ganzheiten erfasst. Die Eigenschaften der Figuren spielen keine nachweisbare Rolle (van Hiele, 1964, S. 107). Die Sprache auf dem nullten Niveau macht es möglich, über direkte Wahrnehmungen zu sprechen (Hasemann, 2007, S. 158). Auf der ersten Niveaustufe kann ein Kind geometrische Objekte hinsichtlich ihrer Eigenschaften analysieren und zweifelt auch bei undeutlicher Darstellung der Figuren nicht (van Hiele, 1964, S. 108). Dadurch, dass über Beobachtungen auf dem nullten Niveau gesprochen wird, können die Kinder beispielsweise die Symmetrie von Figuren erkennen und somit feststellen, warum beide Seiten gleich aussehen (Hasemann, 2007, S. 160). Beziehungen zwischen den Figuren können noch nicht erfasst werden. Passende Tätigkeiten sind das Sortieren nach sowie das Überprüfen und Beschreiben von Eigenschaften. Die zweite Stufe beinhaltet das Verstehen von Klassifikationen und Klasseninklusionen. Verwandte Figuren werden in Definitionen, Argumentationen und logisches Schlussfolgern einbezogen. Das Haus der Vierecke (vgl. Abb. 5) kann erarbeitet werden, da die Beziehungen zwischen den Eigenschaften einer Figur und den Eigenschaften verwandter Figuren im Mittelpunkt stehen. Es geht um den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften, wonach die Gleichheit zweier Seiten impliziert, dass auch zwei Winkel einander gleich sind und umgekehrt (van Hiele, 1964, S. 108). Die Niveaustufen drei und vier werden meist erst in der Sekundarstufe erreicht. Auf Stufe drei können durch das Anwenden von Schlussfolgerungen geometrische Axiome, Definitionen, Sätze und Beweise erfasst werden. Auf der letzten Stufe können geometrische Sätze zu Axiomensystemen zusammengefasst und miteinander verglichen werden. Die Lehrkraft kann den Lernprozess zur nächsthöheren Ebene durch entsprechende Anregungen fördern und beschleunigen, sollte aber vor allem den jeweils aktuellen Wissensstand der Lernenden berücksichtigen (Burger & Shaughnessy, 1986, p. 31ff; van Hiele, 1986, S. 49ff).

Tätigkeiten und Aufgabenstellungen auf den jeweiligen Denkniveaus sind bei Crowley (1987, p. 2ff), Franke (2009, S. 113ff) und Maier (1999, S. 95ff) dargestellt.

Die jeweils nächsthöhere Denkebene wird nach dem Durchlaufen von fünf Phasen erreicht. Die erste Phase der Information (information) besteht im Präsentieren des Materials, das in der zweiten Phase (bound or guided orientation or exploration) unter Anleitung durch die Lehrkraft systematisch im Hinblick auf charakteristische Strukturen untersucht wird. Nach dieser Exploration beziehungsweise gesteuerten Orientierung folgt die dritte Phase der Explizierung beziehungsweise Verdeutlichung (explicitation), wobei die bisherigen Erfahrungen mit Fachausdrücken belegt werden. In der vierten Phase der freien Orientierung (free orientation) werden Aufgaben unter Einsatz der zuvor entwickelten Fachsprache individuell gelöst. In der letzten Phase der Integration (integration) muss der Lernende schließlich einen Überblick über die erworbenen Einsichten besitzen und die Struktur der Objekte erkannt haben, um das nächsthöhere Niveau zu erreichen (vgl. Maier, 1999, S. 97ff; van Hiele, 1964, S. 111ff; van Hiele, 1986, S. 96ff).

Auf die von Stückrath (1955, S. 14ff) aufgestellte Theorie zur Entwicklung räumlicher Qualifikationen im Leib-, Ich-, Lauf- und Handlungsraum, die eine große Nähe zur Niveautheorie nach van Hiele aufweist und diese nachhaltig unterstützt, sei an dieser Stelle nur verwiesen. Sie ist unter anderem bei Maier (1999, S. 73ff) zusammenfassend dargestellt.

1.1.5 Geometrische Begriffsbildung

Begriffe werden oft als Bausteine menschlichen Wissens bezeichnet, sie benennen Kategorien, in die verschiedene konkrete Objekte eingeordnet werden können (Franke, 2009, S. 93). Woolfolk (2008, S. 351ff) definiert einen Begriff als eine Kategorie, der ähnliche Einheiten, Ereignisse, Ideen, Gegenstände oder Menschen zugeordnet werden. Begriffe sind demnach Abstraktionen, die große Informationsmengen in leichter zu verarbeitende Einheiten bündeln. Während Psychologen früher annahmen, dass Begriffe aus definierenden Eigenschaften oder unterscheidenden Merkmalen bestehen, wird heute vom Begriffserwerb durch Protoypen, Exemplare oder typische Vertreter von Kategorien und dem in Schemata verankerten Wissen ausgegangen. Ein Prototyp ist der typischste Vertreter einer Begriffskategorie, mit dem neu auftauchende Varianten verglichen werden. Visuelle Unterrichtsmittel wie Bilder, Diagramme oder Karten können das Lernen vieler Begriffe erleichtern. Das Begriffsverständnis wird durch Beispiele und Nicht-Beispiele, zutreffende und nicht-zutreffende Merkmale, die Bezeichnung des Begriffs und eine Definition konstruiert. Woolfolk (2008, S. 354) nennt folgendes Beispiel einer guten Definition, da die Verknüpfung des Begriffs erleichtert wird: „Ein gleichseitiges Dreieck ist eine Fläche, eine einfache, geschlossene Figur (allgemeine Kategorie) mit drei gleich langen Seiten und drei gleich großen Winkeln (definierende Eigenschaften)." Es besteht stets die Gefahr der Untergeneralisierung, also des Ausschlusses von Vertretern einer Kategorie, oder der Übergeneralisierung, das heißt der Einbeziehung von falschen Anwendungsfällen. Wurde ein Begriff erworben, sollte er genutzt und angewendet werden, um so mit dem vernetzten Wissen über andere damit in Zusammenhang stehende Begriffe verknüpft werden zu können.

Es gibt verschiedene Ansätze zur Art der Anbahnung der Begriffsbildung. Nach Bruner (vgl. Kap. 3.2.1) sollten die Schülerinnen und Schüler spezielle Anwendungsfälle analysieren und durch induktives Schlussfolgern aktiv selbst auf allgemeine Begriffe schließen. Nach Ausubel (vgl. Kap. 3.2.1) sollte der Begriffserwerb rezeptiv verlaufen. Ausgehend von allgemeinen Ideen sollte deduktives Schlussfolgern zu den spezifischen Anwendungsfällen erfolgen. Ein weiterer Ansatz ist die Begriffsvermittlung durch Analogien, wobei das bereits vorhandene Wissen der Schülerinnen und Schüler den Ansatzpunkt für das Lernen des neuen, komplexen Materials bietet (Woolfolk, 2008, S. 360). Im Alltag werden Begriffe sozial vermittelt durch den aktiven Umgang mit Dingen in Verbindung mit der Sprache. Typische Repräsentanten werden den Kategorien zunächst generalisiert zugeordnet. Später werden weitere funktionale Zusammenhänge erkannt und differenzierende Merkmale in Form von Basis-, Ober- und Unterbegriffen, also Begriffshierarchien, können unterschieden werden. Gespeichert werden kann dieses Begriffswissen auf der Handlungsebene, auf der Bildebene oder auf verbaler Ebene. Die Grenzen zwischen Begriffsbildung und Wissenserwerb sind also fließend (Franke, 2009, S. 93ff).

Nach Weigand (2009) bilden geometrische Begriffe und deren Eigenschaften die Grundlage der Geometrie. Er unterscheidet folgende Kategorien geometrischer Begriffe: Objekte (Gerade, Strecke, Winkel, Vieleck, Kreis, Würfel), Relationen (liegt auf, parallel, senkrecht, kongruent, ähnlich), Abbildungen (Achsenspiegelung, Drehung, Scherung) und Maße (Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Rauminhalt). Diese werden anhand unterschiedlicher Vorgehensweisen und Strategien im Unterricht erarbeitet. In den zu entwickelnden Denkstrukturen sollte dann jeweils das Wissen über den Begriff und die Beziehungen zu bereits gelernten Begriffen enthalten sein, sodass die Schülerinnen und Schüler verständnisbezogen damit operieren können. Im Geometrieunterricht muss also das Verständnis grundlegender geometrischer Begriffe entwickelt werden, das heißt angemessene Vorstellungen und Kenntnisse über diese Begriffe sowie Fähigkeiten im Umgang mit diesen Begriffen und Eigenschaften müssen aufgebaut werden (Weigand, 2009, S. 25).

Franke (2009) nimmt eine differenziertere Unterscheidung geometrischer Begriffe vor, indem sie Sie räumliche und ebene Begriffe unterscheidet, die sich wiederum entweder auf Objekte, Eigenschaften oder Relationen beziehen können (Abb. 4).

	Objektbegriffe	Eigenschaftsbegriffe	Relationsbegriffe
räumliche Begriffe	Würfel Quader Zylinder Pyramide Kegel Kugel	Ecke Kante Seitenfläche kreisförmig dreieckig viereckig rechteckig quadratisch	steht neben liegt hinter schneiden sich ist parallel zu ist senkrecht zu
ebene Begriffe	Dreieck Viereck Rechteck Quadrat Kreis	rund, eckig, gerade krumm (gekrümmt) Ecke, Linie, Gerade Seite Strecke	ist deckungsgleich mit ist symmetrisch zu ist parallel zu ist senkrecht zu ist genau so lang wie

Abbildung 4: Geometrische Begriffe nach Franke (2009, S. 101).

Das sogenannte Haus der Vierecke (Abb. 5) stellt ein Beispiel für eine geometrische Begriffshierarchie dar, anhand derer man beispielsweise erkennen kann, dass jedes Quadrat auch ein Rechteck und jedes Rechteck wiederum ein Parallelogramm und ein gleichschenkliges Trapez ist.

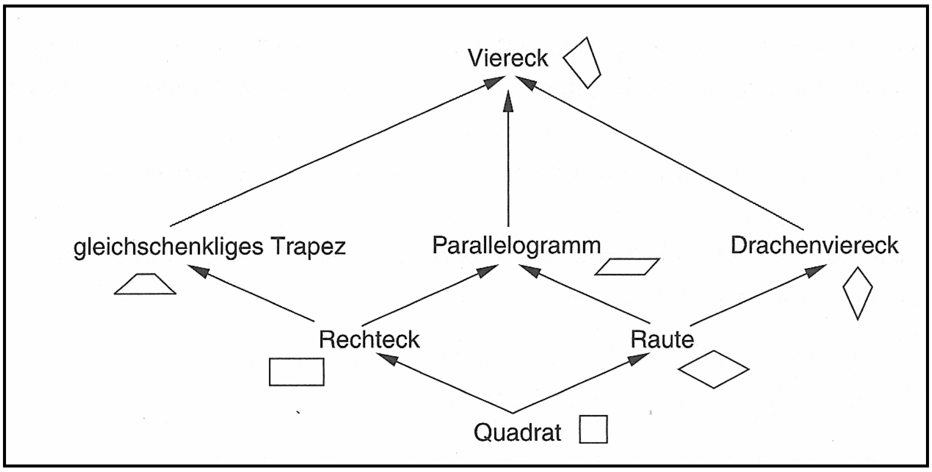


Abbildung 5: Haus der Vierecke (Franke, 2009, S. 103).

Zahlreiche dieser geometrischen Begriffe werden bereits im Alltag erworben, da sie sich im natürlichen Lebensumfeld der Kinder wiederfinden. In der Schule werden diese Fachbegriffe auf den Alltagserfahrungen der Kinder aufbauend nach und nach genauer betrachtet und definiert. Dabei wird zunächst die Einbeziehung der Umgangssprache und eigener Formulierungen zur Beschreibung geometrischer Phänomene als legitim angesehen, da die Kinder so neue Begriffe in die bereits bestehenden semantischen Netze einbinden können und es ihnen auf diese Weise möglich ist, neue Wissensinhalte in Beziehung zu ihrem bisherigen Wissen abzuspeichern. Typischen Objekten (Prototypen) können durch Vergleiche weitere ähnliche Objekte zugeordnet werden, ohne dass Merkmale benannt werden. Darauf aufbauend sollte dann die logische Struktur der Fachbegriffe erfasst werden, was durch Spezifikation aus einem Oberbegriff, durch Abstrahieren oder auf konstruktive Art und Weise erfolgen kann. Bei dieser Begriffsgewinnung im Unterricht sollten die Kinder durch aktive Auseinandersetzung mit den Phänomenen den Prozess vom intuitiven über das inhaltliche und integrierte bis hin zum formalen Begriffsverständnis durchlaufen, sodass sie am Ende dazu in der Lage sind, Objekte auf unterschiedliche Weise zu betrachten (Franke, 2009, S. 93ff).

1.2 Erkenntnisse zum Geometrieunterricht

Zur Gestaltung des Geometrieunterrichts im Primarbereich finden sich zahlreiche Anmerkungen in der Literatur. Der Unterricht sollte nach Franke (2009, S. 18ff) so erteilt werden, dass die Schülerinnen und Schüler geometrische Erfahrungen sammeln, Raumvorstellung entwickeln, Begriffswissen erwerben, Problemlösefähigkeiten ausbilden und andere Inhalte des Grundschulunterrichts mit Hilfe geometrischer Phänomene durchdringen, veranschaulichen und erklären können. Dazu müssen für die Kinder im Rahmen einer offenen Unterrichtsgestaltung herausfordernde Situationen geschaffen werden. Sollen die Kinder beispielsweise einen Würfel herstellen oder eine Zeichnung anfertigen, so stellen sie sich die Objekte und das Ergebnis ihrer Handlung im Kopf vor (Raumvorstellung), reproduzieren und erweitern ihr geometrisches Wissen (Begriffsbildung), suchen nach Strategien und entdecken Eigenschaften und Zusammenhänge (Problemlösefähigkeiten) (Franke, 2009, S. 20).

Radatz und Rickmeyer (1991, S. 18) schlagen die folgenden Prinzipien zur Gestaltung des Geometrieunterrichts in der Grundschule vor: Umwelt- und Erfahrungsbezug, Anwendungsorientierung, offener Unterricht mit offenen Aufgaben, handelndes Lernen, konstruktiv entdeckendes Lernen, fächerübergreifendes Lernen, inhaltlich-integratives Lernen, soziales Lernen, materialintensives Lernen, alle Kinder fördern und integrieren, differenzieren, Lern- und Handlungserfahrungen ermöglichen, Übung der räumlichen Vorstellungsfähigkeit, Stoffverteilung, wiederholendes Üben, Berücksichtigen und Entwickeln eines individuellen Verständnisses, Fördern eines strategischen Denkens der Kinder und vieles mehr. Didaktische Prinzipien nach Reiss und Hammer (2013, S. 65ff) sind das Spiralprinzip, das Prinzip des kumulativen Lernens, das genetische Prinzip und das operative Prinzip. Besuden (1984c, S. 75f) ergänzt das Prinzip der Stabilisierung durch die wiederkehrende Behandlung geometrischer Inhalte und verweist zudem auf die Darstellungsebenen nach Bruner (1966, S. 21). De Moor und van den Brink (1997, S. 14ff) nennen das Be-greifen und das Erklären der Umwelt auf elementare Weise als das zentrale Ziel des realistischen Geometrieunterrichts der ersten Grundschuljahre. Sie formulierten zudem das Orientieren und Anvisieren, das Anvisieren und Abbilden, das praktisch anschauliche Denken und Beweisen, das Transformieren und das Konstruieren und Messen als fünf Kernbereiche (de Moor & van den Brink, 1997, S. 16f). Wittmann (1999, S. 210ff) erstellte eine Liste mit sieben geometrischen Grundideen, die in der fachdidaktischen Literatur häufig aufgegriffen wird, um geometrische Rahmenthemen auszuweisen (Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 9f; Hasemann, 2007, S. 163ff; Franke, 2009, S. 15ff; Krauthausen & Scherer, 2001, S. 57ff; Schipper, 2009, S. 258ff).

Wie einleitend dargestellt thematisieren zahlreiche Autoren die Rolle des Geometrieunterrichts im Unterrichtsalltag der Grundschule und weisen in diesem Zusammenhang, trotz der zahlreichen didaktischen Hinweise und der theoretischen Legitimation, auf die defizitäre Behandlung der geometrischen Inhalte hin (Besuden, 1984a, S. 71; Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 4; Krauthausen & Scherer, 2001, S. 51; Radatz & Schipper, 1983, S. 138f; Schipper, 2009, S. 248). Die geometrischen Inhalte werden im Vergleich zum Rechnenlernen häufig als weniger wichtig und damit als inhaltliche Reserve betrachtet, auf die nur zurückgegriffen wird, wenn alle anderen Dinge erledigt sind (Hasemann, 2007, S. 153).

Roick, Gölitz und Hasselhorn (2004, S. 14) fanden im Rahmen ihrer Testkonstruktion, bei der das intendierte und das implementierte Curriculum analysiert wurde, heraus, dass bei der Zeitzuteilung im Mathematikunterricht ungefähr 2/5 der Unterrichtszeit auf den Themenbereich Arithmetik und Zahlenverständnis verwandt werden, 2/5 auf den Bereich Sachrechnen und Größen und 1/5 auf den Bereich der Geometrie.

Maier (1999, S. 233ff) ermittelte die prozentualen Anteile geometrischer Inhalte in allen Lehrplaneinheiten verschiedener Schularten, wobei zusätzlich die vorgegebenen Richtstundenzahlen maßgeblich waren. Dabei zeigte sich, dass der Geometrieunterricht in der Grundschule mit einem Anteil von nur 18% des Mathematikunterrichts quantitativ an letzter Stelle der ausgewiesenen Arbeitsbereiche liegt (Maier, 1999, S. 234f). Der festgestellte Geometrieanteil in der Realschule unterscheidet sich mit 37% stark davon. Des Weiteren ordnete Maier (1999, S. 233ff) die in den Mathematik-Lehrplänen der Grundschule genannten Inhalte den Komponenten der Raumvorstellung (vgl. Kap. 1.1.2) zu und kam dabei zu der Erkenntnis, dass die Inhalte der ebenen Geometrie gegenüber der räumlichen Geometrie klar dominieren. Die dreidimensionale Geometrie sei mit einem Anteil von nur rund einem Drittel der geometrischen Inhalte deutlich unterrepräsentiert (Maier, 1999, S. 237ff).

Ausführlicher soll an dieser Stelle die Untersuchung von Backe-Neuwald (1998, 2000) dargestellt werden, die durch die Aussagen von 108 Lehrerinnen und 20 Lehramtsanwärterinnen mittels eines in sechs Themenkomplexe gegliederten Fragebogens die aktuellste Momentaufnahme zur gegenwärtigen unterrichtlichen Praxis des Geometrieunterrichts vorlegte. Dabei stellte sich heraus, dass die Lehrkräfte Vorzüge des Geometrieunterrichts wie die Möglichkeit für selbstständige Entdeckungen, die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens und den Beitrag zur Erschließung der Wirklichkeit zu schätzen wissen. 81% der Befragten gaben an, dass sich der Geometrieunterricht vor allem hinsichtlich der Unterrichtsprinzipien Handlungsorientierung, Lebensnähe, Förderung des sozialen Lernens, Schülerorientierung und der freieren Unterrichtsatmosphäre stark und überwiegend vorteilhaft vom restlichen Mathematikunterricht unterscheide. Als Folge wurde die Verwunderung der Kinder oder die Skepsis der Eltern beschrieben, da die Geometrie häufig nicht als Teilgebiet der Mathematik wahr- oder ernst genommen wird (Backe-Neuwald, 2000, S. 33ff).

Bezüglich des Kinderverhaltens wurde eine hohe Motivation und positive Einstellung, vor allem von Kindern mit Schwierigkeiten im Mathematikunterricht beziehungsweise mit arithmetischen Aufgaben, rückgemeldet (Backe-Neuwald, 2000, S. 39). Diese Feststellung ist auch bei Radatz und Schipper (1983, S. 139) zu finden, indem sie auf jene Lernenden verweisen, die im arithmetischen Bereich häufig Schwierigkeiten haben, sich aber bei geometrischen Fragestellungen zur Überraschung der Lehrkräfte als besonders leistungsfähig erweisen.

Des Weiteren sollten die durch Backe-Neuwald (1998, S. 4ff) Befragten die tatsächlich unterrichteten geometrischen Inhalte und Aktivitäten ankreuzen. Die Auszählung ergab, dass vor allem Inhalte und Aktivitäten aus den Bereichen Figuren und Lagebeziehungen thematisiert wurden, dass sich diese hauptsächlich den für das 1. und 2. Schuljahr vorgesehenen Zielen zuordnen ließen, dass es sich dabei um sprachfreie Aktivitäten handelte und dass der Umgang mit konkreten Dingen für bedeutsam gehalten wird. Innerhalb der Kategorie der am seltensten erarbeiteten Inhalte waren zumeist Themen des 3. und 4. Schuljahres, wie die Bereiche Körper oder Rauminhalte, zu finden. Die Autorin vermutet, dass dies mit der fachlich höheren Komplexität begründet werden kann, oder damit, dass diese Inhalte nicht zu den traditionellen Inhalten des Geometrieunterrichts gehören. Sie schlägt des Weiteren vor, die in Unterrichtswerken zu diesen Themen bereitgehaltenen Vorschläge zu prüfen.

Im Widerspruch dazu steht der in der Befragung von Backe-Neuwald (1998, S. 5) der angegebene Umfang der Geometriestunden, der in den Klassenstufen 3 und 4 mit durchschnittlich 14 bis 15 Minuten pro Woche größer war als die 11 bis 12 Minuten, die für das 1. und 2. Schuljahr im Durchschnitt genannt wurden.

Die Unterrichtswerke wurden durch die Befragten insgesamt als wenig hilfreich für die Vorbereitung und Durchführung des Geometrieunterrichts eingeschätzt und überwiegend als zufriedenstellend, mittelprächtig oder ausreichend bewertet (Backe-Neuwald, 1998, S. 6). Auch andere Autoren kritisieren die scheinbar willkürliche, zusammenhangslose und isolierte Einstreuung der geometrischen Inhalte in den Schulbüchern (Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 4; Krauthausen & Scherer, 2001, S. 52), wodurch der Eindruck erweckt wird, dass sie ohne Schaden überschlagen werden könnten (Radatz & Schipper, 1983, S. 139). Damit einher geht die Feststellung, dass sich die Geometrie doch oft auf wenige Stunden am Ende des Schuljahres kurz vor Ferienbeginn zu beschränken scheint (Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 4).

Wünsche äußerten die befragten Lehrkräfte hinsichtlich der Hinweise für die Unterrichtspraxis in den Lehrerhandbüchern (44 Nennungen) und der Aufgabenstellungen in den Schülerbüchern (41 Nennungen). Die Aufgaben werden als zu trivial beziehungsweise einfach beschrieben, weshalb sie das Interesse der Kinder nicht wecken können und in ihrem Gehalt häufig nicht dem Leistungsvermögen der Kinder entsprechen. Backe-Neuwald (1998, S. 6ff) stellte somit die Notwendigkeit der Konzeption von interessanten, an der Lebenswelt der Kinder orientierten, kindgerecht aufbereiteten und vom Anspruch aus- und aufbaufähigen Aufgaben fest, damit die wenige Unterrichtszeit mit sinnvollen Aufgaben gefüllt werden kann. Ebenfalls stark wurde die Verteilung und der geringe Umfang der Geometrie-Kapitel bemängelt (35 Nennungen), weshalb die Lehrkräfte eigene Arbeitsblätter erstellen müssten.

Als besonders wichtige und bedeutsame geometrische Inhalte und Aktivitäten nannten die Befragten solche, die mit ihrem direkten Umweltbezug oder Lebensnähe begründet werden konnten, was darauf hin deutet, dass die innermathematische Bedeutung geometrischer Inhalte hinter anderen Überlegungen zurücksteht. Dies zeigt sich auch in den zahlreich genannten geometrischen Erfahrungen, die in anderen Unterrichtsfächern gesammelt werden können. „Es bleibt jedoch zu fragen, inwiefern auch in anderen Unterrichtsfächern geometrische Aktivitäten nicht nur beim Tun stehen bleiben, sondern auch reflektiert, Erlebnisse strukturiert und in einen übergeordneten geometrischen Kontext gestellt werden" (Backe-Neuwald, 1998, S. 11). Durch das Anknüpfen, das Aufgreifen, das Bewusstmachen, das Vertiefen der in vielfältigen Bereichen und Fächern erworbenen Handlungserfahrungen, das Strukturieren, das Hinterfragen und das begriffliche Durchdringen im

Geometrieunterricht sollte die Erfahrbarkeit der Komplexität geometrischer Elemente und Sachverhalte verstärkt werden. Auch weitere Autoren betonen, dass der Geometrieunterricht nicht bei reinem Hantieren stehen bleiben kann, sondern dass das Reflektieren über solche Tätigkeiten und Beobachtungen wesentlicher Bestandteil sein muss und auch herausfordernde kognitive Aktivitäten integriert werden müssen (Besuden, 1984b, S. 64ff; Radatz & Schipper, 1983, S. 141; Steiner & Winkelmann, 1981, S. 219; Vollrath, 1981, S. 24; Schipper, 2009, S. 252).

Nach Aussage der durch Backe-Neuwald (2000, S. 46ff) befragten Lehrkräfte liegt der Anteil des Geometrieunterrichts am gesamten Mathematikunterricht zwischen 7,5% und 10% und ist somit eine Randerscheinung in der unterrichtlichen Praxis (Backe-Neuwald, 2000, S. 66). Knapp 80% der Befragten stimmten zu, dass der Geometrieunterricht in der Grundschule zugunsten des Arithmetikunterrichts und aufgrund des hohen Vorbereitungsaufwandes hinsichtlich der Er- und Bereitstellung von Materialien vernachlässigt würde. Die Autorin schlussfolgert, dass es demnach bis heute nicht gelungen zu sein scheint, ein überzeugendes Konzept für den Geometrieunterricht und seine Vorzüge hinsichtlich der kognitiven und emotionalen Entwicklung von Kindern vorzulegen (vgl. Backe-Neuwald, 1998, 2000). Insgesamt lässt sich keine Verbesserung zu der 1980 durch Radatz et al. durchgeführten Befragung feststellen (vgl. Radatz & Schipper, 1983, S. 138ff; Schipper, 2009, S. 248ff).

Obgleich die in den national verbindlichen Bildungsstandards vorgenommene Formulierung von inhaltsbezogenen Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form (vgl. Kap. 2) die bisher aufgezeigte theoretische Bedeutsamkeit und Anerkennung des Geometrieunterrichts bestätigt, finden sich auch nach Franke (2009, S. 9f) heute noch Grundschulen, in denen es nicht zur Selbstverständlichkeit geworden ist, dass Geometrie kontinuierlich unterrichtet wird. Die Autorin verweist auf die großen Unterschiede in der Praxis des Geometrieunterrichts, die trotz der vielfältigen Bemühungen in den vergangenen 40 Jahren und neben vielen positiven Beispielen existieren. Sie nennt als Ursachen die im Vergleich zur Arithmetik offener formulierten und damit unklaren geometrischen Lernziele, die Beliebigkeit bezüglich Stoffauswahl und deren Anordnung, Zeitnot im Unterrichtsalltag und damit einhergehender Verzicht auf geometrische Inhalte, hoher Vorbereitungs- und Organisationsaufwand, schwer überprüfbare Ergebnisse und vieles mehr. Radatz und Rickmeyer (1991, S. 4) ergänzen die Vernachlässigung der Geometrie in der Lehrerausbildung, und dass geometrische Fähigkeiten schwer zu unterrichten, abzuprüfen und zu zensieren seien (vgl. auch Krauthausen & Scherer, 2001, S. 51f). Nach Bauersfeld (1993b, S. 11; 1993a, S. 153) liegt das Problem des üblichen geometriefreien Rechenunterrichts an den Lehrerköpfen. Radatz und Schipper (1983, S. 138) sehen den großen Umfang der inhaltlich wichtigen arithmetischen Bereiche als einen Grund dafür, dass in dem alljährlichen Rennen durch das Pensum des Mathematikunterrichts die geometrischen Teile allzu oft außen vor bleiben. Die arithmetischen Rechenfertigkeiten werden traditionsgemäß für wichtiger gehalten (Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 4).

Die durch Backe-Neuwald (2000, S. 51) befragten Lehrkräfte nannten zudem das Argument, dass der Geometrieunterricht in der Sekundarstufe „unten" anfängt und deshalb die Ziele des primarbezogenen Geometrieunterrichts, vor allem für die existierende Leistungsgesellschaft, nicht so wichtig seien im Vergleich zu der notwendigen Beherrschung der vier Grundrechenarten beim Verlassen der Grundschule. Hinzu kommt die festgestellte, teilweise fehlende fachliche und didaktische Kompetenz und die damit verbundene Unsicherheit bei der Durchführung geometrischer Inhalte sowie die bereits genannten fehlenden Hilfen durch die Unterrichtswerke (vgl. Backe-Neuwald, 2000). In diesem Zusammenhang stellten bereits Steiner und Winkelmann (1981, S. 218) fest, dass sich die vorfindbaren Lehrgänge sehr stark in der Auswahl und Quantität der Inhalte unterscheiden.

Einen weiteren Erklärungsansatz für die Vernachlässigung geometrischer Inhalte in der Grundschule liefert die erst im Rahmen der Reform der Grundschulmathematik beginnende Geschichte des Geometrieunterrichts. Radatz und Schipper (1983, S. 138) sprechen in diesem Zusammenhang von der Geometrie als Baby unter den Inhalten des Mathematikunterrichts und de Moor und van den Brink (1997, S. 14) verweisen auf die nicht vorhandene Tradition der Geometrie im Anfangsunterricht. Bevor nämlich der Geometrieunterricht im Jahre 1968 für die Grundschule verankert (Franke, 2009, S. 6) und als eigenständiger Lernbereich anerkannt wurde, fanden sich geometrische Inhalte vor allem in den Richtlinien anderer Fächer, wie beispielsweise dem Sachunterricht. Bis in die 90er-Jahre galt der Geometrieunterricht dann für die Kinder in Westdeutschland als „freudvolle Beschäftigung“ (Franke, 2009, S. 11), im Gegensatz zur systematischen Stoffvermittlung, wie sie in der DDR ausgeübt wurde. Daraufhin folgte die Tendenz, elementare geometrische Sachverhalte systematisch zu bearbeiten und dabei geometrische Grundvorstellungen in Einheit mit geometrischem Grundwissen zu entwickeln (Franke, 2009, S. 11). Die geometrischen Inhalte erhielten schließlich neben den Bereichen Arithmetik und Sachrechnen/Größen einen eigenen Platz in den Rahmenplänen der Bundesländer und bildeten fortan gemeinsam ein sogenanntes mathematisches Triumvirat. Geometrische Kernideen sollten ab diesem Zeitpunkt im Sinne eines Spiralcurriculums in Bezug zur mathematischen Bildung in allen Schulstufen stehen und mit den anderen mathematischen Bereichen verknüpft werden. In der mathematikdidaktischen Literatur sind neben der in Kapitel 1.1.2 aufgezeigten Bedeutsamkeit des räumliches Vorstellungsvermögens weitere zahlreiche und vielseitige Argumente zur Legitimation des Geometrieunterrichts zu finden, in denen Funktionen und Ziele herausgestellt werden (vgl. Besuden, 1984b, S. 64; Besuden, 1984c, S. 74f; Franke, 2009, S. 5; Freudenthal, 1981, S. 87ff; Grassmann et al., 2014, S. 94ff; Hasemann, 2007, S. 153ff; Kempinsky, 1952, S. 9ff; Krauthausen & Scherer, 2001, S. 55ff; Radatz & Schipper, 1983, S. 139ff; Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 7ff; Schipper, 2009, S. 250ff). Aussagen wie die folgende verdeutlichen, dass die Bedeutsamkeit des Geometrielernens unumstritten ist:

> „Geometrische Fähigkeiten und geometrisches Denken sind notwendige Grundlagen für die Erschließung der vorwiegend räumlichen Umwelt durch das Kind sowie für die kognitive Entwicklung. Aber auch gerade für die arithmetischen Anforderungen [...] bilden geometrische Kenntnisse und Fähigkeiten wichtige Grundlagen, sollen an all den vielen Materialien und Darstellungen Vorstellungen entwickelt und Beziehungen erkannt werden. Zudem lassen sich aktuelle Intentionen der Grundschuldidaktik wie offener Unterricht oder Lernen in Sinnzusammenhängen im Mathematikunterricht sicher eher über Geometrie als über die Arithmetik anstreben und realisieren." (Radatz & Rickmeyer, 1991, S. 5)

2 Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form

Seit dem Beschluss einer gemeinsamen vierjährigen Grundschule für alle Kinder im Jahre 1920 haben die jeweils vorherrschenden theoretischen Annahmen sowie die darauf basierenden didaktischen Konzeptionen und Vorgaben in Lehrplänen und Rahmenrichtlinien der einzelnen Länder den Mathematikunterricht auf verschiedenste Weise geprägt (Schütte, 2008, S. 23ff) und sind somit für den Wandel verantwortlich, in dessen Rahmen die Bildungsstandards erlassen und somit schließlich der Begriff der Kompetenz zunehmend an Bedeutung gewann beziehungsweise gewinnt (Schütte, 2008, S. 41ff; Ufer, Reiss & Heinze, 2009, S. 62). Es sei an dieser Stelle auf Grassmann et al. (2014, S. 1ff) verwiesen, die die Funktionen des Mathematikunterrichts rückblickend umfassend darstellen.

In Kapitel 2.1 wird der Entstehungskontext der Bildungsstandards aufgezeigt. Dazu wird der Mathematikunterricht hinsichtlich der didaktischen Orientierungen seit 1920 knapp geschildert (Kap. 2.1.1) und es wird erläutert, wie die durch Schulleistungsstudien gewonnenen Erkenntnisse (Kap. 2.1.2 und 2.1.3) zur Formulierung national verbindlicher Bildungsstandards führten (Kap. 2.1.4). Im Anschluss daran wird der Kompetenzbegriff an sich zusammenfassend erörtert (Kap. 2.2). Abschließend erfolgen Anmerkungen zu den Bildungsstandards für den Primarbereich im Fach Mathematik (Kap. 2.3), indem das zugrunde liegende Kompetenzmodell (Kap. 2.3.1), die inhaltsbezogenen Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form (Kap. 2.3.2) und die dazugehörigen Kompetenzstufen (Kap. 2.3.3) vorgestellt werden.

2.1 Entstehungskontext der Bildungsstandards

2.1.1 Mathematikunterricht im Rückblick

War der Mathematikunterricht in den 20er und 30er Jahren nach behavioristischen Prinzipien kleinschrittig lehrgangsartig ausgerichtet, vom Einüben verschiedener Aufgabentypen geprägt und eingebunden in heimatkundliche Inhalte des Gesamtunterrichts, so vollzog sich nach dem Bekanntwerden der entwicklungs- und denkpsychologischen Arbeiten Piagets und den diesbezüglichen didaktischen Rezeptionen in den 60er Jahren ein enormer Wandel. Den mit einer großen Lernfähigkeit ausgestatteten Kindern wurden mehr Lerninhalte zugemutet. Diese sollten unter wissenschaftlich fundierter Beachtung der Stufenfolge, das heißt vom Konkreten zum Abstrakten gemäß der drei Darstellungsebenen nach Bruner (1966, S.21), vermittelt werden mit dem Ziel, an das kognitive Potenzial der Kinder angepasste, wissenschaftliche Begriffsschemata aufzubauen. Im Sinne des Strukturgedankens sollten die Lerninhalte im Gleichschritt möglichst effektiv, operativ und fachspezifisch vermittelt werden, ohne dabei ein Kind aufgrund seiner Vorbildung anderen Kindern gegenüber zu bevorteilen. Kennzeichnend für diese Zeit war Bruners Annahme, dass jeder Stoff jedem Kind in jeder Altersstufe wirksam vermittelt werden kann. Hinzu kamen die mit der rasanten technischen Entwicklung einhergehenden höheren Anforderungen an die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung. Dies spiegelte sich in fachorientierten Lehrplänen wider, in denen detaillierte Ziele, Inhalte, Methoden und Vorschläge für Lernzielkontrollen explizit formuliert wurden. Systematische Betrachtungen und begriffliche Aspekte standen im Vordergrund, der Unterricht orientierte sich an kurzfristigen Lerninhalten (Radatz & Schipper, 1983, S. 44ff; Schütte, 2008, S. 24ff).

Aufgrund der Kritik der Wissenschaftsorientierung, der Überfrachtung mit Fachbegriffen und mathematischen Inhalten, und der zu geringen Berücksichtigung der Erfahrungswelt des Kindes fand in den 80er Jahren eine neue Kindorientierung statt, die sich in Lehrplanrevisionen und Korrekturen der Schulbücher sowie Individualisierungstendenzen (Differenzierung, verschiedene Abstraktionsniveaus) manifestierte. Im Fokus standen nicht mehr die Entwicklungsstadien des Durchschnittskindes wie bei Piaget, sondern individuelle Denkprozesse und Studien zum Lösungsverhalten. Die unter anderem durch Heinrich Winter geforderten Konzepte wie Anwendungs- und Strukturorientierung oder die Einbeziehung problemhaltiger Situationen konnten sich zu dieser Zeit in der Unterrichtspraxis noch nicht etablieren (Schütte, 2008, S. 28ff).

In den 90er Jahren setzten sich die Betonung von Individualität, Selbstbestimmung und Differenzierung sowie die Anerkennung von Heterogenität fort und gingen als Vorgaben in die neuen Lehrpläne ein. Jedes Kind sollte nach seinen individuellen Möglichkeiten optimal gefördert werden. Als gemeinsames Ziel wurde ein Minimalniveau formuliert. Für die Unterrichtsgestaltung bedeuteten diese allgemeineren Zielformulierungen eine methodisch-organisatorische, didaktisch-inhaltliche und auch pädagogisch-politische Öffnung. Schüleraktivitäten und Prozessorientierung standen im Mittelpunkt (Schütte, 2008, S. 35ff).

Im Anschluss an die Veröffentlichung der ernüchternden Ergebnisse von TIMSS 1995 (vgl. Kap. 2.1.2) wurde im Oktober 1997 durch die Kultusministerkonferenz mit den „Grundsätzlichen Überlegungen zu Leistungsvergleichen innerhalb der Bundesrepublik Deutschland - Konstanzer Beschlüsse", fortan bekannt als sogenannter Konstanzer Beschluss, festgelegt, die Erträge institutionalisierter Bildungsprozesse zukünftig mit Hilfe von Schulleistungstests auf nationaler und internationaler Ebene systematisch und regelmäßig zu messen und zu vergleichen. Es folgte die Teilnahme an PISA 2000 und IGLU 2001 (Granzer & Walther, 2008, S. 7; Hosenfeld, Groß Ophoff & Bittins, 2006, S. 6f; Klieme et al., 2010, S. 277ff; Köller, 2008, S. 64;). Klieme et al. (2003) resümierten die gewonnenen Erkenntnisse wie folgt:

> „Unabweisbar haben die empirischen Studien, die nach fast 20 Jahren erstmals die Realität der Schulen analysiert und im internationalen Kontext verglichen haben, gravierende Mängel offen gelegt." (Klieme et al., 2003, S. 11)

Allgemein zeigten sich diese Mängel unter anderem in der Platzierung deutscher Schülerinnen und Schüler im Ranking der Lernergebnisse der teilnehmenden Staaten, wobei das Kompetenzniveau der Fünfzehnjährigen in allen Domänen unter dem Mittelwert lag und eine hohe Streuung aufwies. Weitere Ergebnisse waren die zu Tage getretenen strukturellen Disparitäten zwischen Regionen und Kindern aus unterschiedlichen sozialen Schichten innerhalb Deutschlands, der große Rückstand schwächerer Schülerinnen und Schüler und die beträchtlichen herkunftsbedingten Unterschiede. Des Weiteren wurde die hohe Zahl von Klassenwiederholungen, von verspäteten Einschulungen und die Kompetenzunterschiede zwischen Schularten aufgedeckt (Klieme et al., 2010, S. 277). Deutsche Schülerinnen und Schüler wiesen Stärken im Bereich von Routineaufgaben, die Routineprozeduren, Grundfertigkeiten, Standardverfahren und Faktenwissen abfragen, und Schwächen bei komplexeren Aufgaben, zu deren Lösung tiefergehende Denkprozesse notwendig sind, auf, wie beispielsweise bei der flexiblen Anwendung und dem Verknüpfen von Wissen beziehungsweise mathematischen Konzepten sowie in den Leistungen beim Problemlösen, beim Modellieren, beim inhaltlichen Durchdringen und Strukturieren von Sachkontexten, beim Argumentieren oder im begrifflichen Verständnis (Baumert et al., 2001, S. 296f; Granzer & Walther, 2008, S. 7; Grassmann et al., 2014, S. 11; Reiss & Hammer, 2013, S. 82; Schütte, 2008, S. 41), die auf die im deutschen Mathematikunterricht vorherrschende Kalkül- beziehungsweise Fertigkeitsorientierung hinwiesen (Baumert et al., 2001, S. 296; Criblez et al., 2009, S. 121; Granzer & Walther, 2008, S. 9). Im folgenden

Kapitel werden die genannten Studien und daraus gewonnene Erkenntnisse im Einzelnen knapp dargestellt, die schließlich zu einem Paradigmenwechsel in der deutschen Bildungspolitik führten.

2.1.2 Allgemeine Erkenntnisse aus Schulleistungsstudien

Die international vergleichende Bildungsforschung hat ihren Ursprung bereits im Jahr 1958, als europäische und amerikanische Wissenschaftlicher, darunter unter anderem Benjamin Bloom und R.L. Thorndike, in Hamburg die International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) gründeten und erste internationale Vergleichsstudien wie FIMS (First International Mathematics Study, 1964) und SIMS (Second International Mathematics Study 1980-1982) organisierten (Jude & Klieme, 2010, S.11). Die ebenfalls durch die IEA verantwortete Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) zur Erhebung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Grundverständnisses von Schülerinnen und Schülern wird seit 1995 alle vier Jahre im 4. (1995, 2003, 2007, 2011, 2015) und im 7./8. Schuljahr (1995, 1999, 2003, 2007, 2011, 2015) durchgeführt, um Einblicke in das tatsächlich vorhandene Wissensniveau auf Seiten der Schülerinnen und Schüler zu gewinnen. Zusätzlich werden die Leistungen der Berufsschülerinnen und Berufsschüler im letzten Jahr der Ausbildung und der Gymnasiastinnen und Gymnasiasten im letzten Jahr der Oberstufe untersucht (Köller, Baumert & Bos, 2001, S. 271).

Deutschland beteiligte sich an TIMSS 1995 mit den Klassenstufen 7 und 8 und in den Jahren 2007, 2011 und 2015 mit Klassenstufe 4 (Euen, Wendt & Bos, 2012, S. 313ff). Dies spiegelt die 1997 im Rahmen des Konstanzer Beschlusses geforderte Einbeziehung der Grundschule wider (Granzer & Hornberg, 2008, S. 7). Zentraler Befund von TIMSS 1995 war, dass Schülerinnen und Schülerin in Deutschland zum Ende der Pflichtschulzeit im mathematischen Bereich ein bestenfalls mittleres Grundbildungsniveau erreichten (Baumert, Bos & Lehmann, 2000, S. 163; Granzer & Walther, 2008, S. 7; Walther et al., 2003, S. 211). Hosenfeld, Groß Ophoff und Bittins (2006, S. 6) sprechen vom sogenannten TIMSS-Schock. Im internationalen Vergleich lagen die mathematisch-naturwissenschaftlichen Leistungen deutscher Schülerinnen und Schüler unter den durchschnittlichen Leistungen der meisten west-, nord- und osteuropäischen Nachbarländer, wobei die Defizite insbesondere bei der Anwendung von Kenntnissen auf alltagsnahe Probleme lagen (Köller, Baumert & Bos, 2001, S. 278f; Granzer & Hornberg, 2008, S .7). Es wurden große Leistungsunterschiede in Mathematik und in den naturwissenschaftlichen Fächern innerhalb der gleichen Schulart und zwischen verschiedenen Bundesländern festgestellt (Weinert, 2001, S. 20). TIMSS nahm mit der Feststellung des im internationalen Maßstab unerwartet schwachen Kompetenzstands und der starken herkunftsbedingten Kompetenzunterschiede die beiden zentralen Problemdiagnosen von PISA vorweg (Klieme et al., 2010, S. 288).

Das durch die Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) durchgeführte Programme for International Student Assessment (PISA) misst seit 2000 alle drei Jahre die kognitiven Leistungen der Schülerinnen und Schüler am Ende der Pflichtschulzeit in den Bereichen des Lesens (Reading Literacy), der Mathematik (Mathematical Literacy) und den Naturwissenschaften (Scientific Literacy) sowie fächerübergreifende Kompetenzen (Cross-Curricular Compentencies) und den Einfluss von Kontextvariablen wie familiärer Hintergrund, schulisches Umfeld und vieles mehr. Die Erkenntnisse wurden in Kompetenzmodellen abgebildet (vgl. Kap. 2.3.3). Im Gegensatz zu TIMSS wurde bei PISA auf transnationale curriculare Validität verzichtet und auf die Erfassung von Basiskompetenzen in variierenden, authentischen Anwendungssituationen gesetzt (Baumert et al., 2001, S. 287f; zum Kompetenzbegriff bei PISA vgl. Kap. 2.2). Erkenntnisse aus PISA 2000 waren, dass die mathematische Grundbildung der 15-Jährigen in Deutschland nach didaktischen und curricularen

Maßstäben als unzureichend angesehen werden muss. So war die Spitzengruppe äußerst klein, weniger als die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler konnte Standardaufgaben lösen und ein Viertel wurde als Risikogruppe eingestuft. Abgesehen von dieser kriterialen Bewertung stellte sich Deutschland im internationalen Vergleich als wenig erfolgreich bei der Förderung schwächerer Schülerinnen und Schüler und der Sicherung von Mindeststandards heraus. Die Leistungsunterschiede zwischen den sozialen Extremgruppen betrug mehr als eine ganze Kompetenzstufe, die Sozialschichtzugehörigkeit erklärte 14 Prozent der Leistungsvarianz (Baumert & Schümer, 2001, S. 368). Der Mittelwert lag mit 490 Punkten signifikant unterhalb des OECD-Durchschnitts (500 Punkte). Die deutschen Schülerinnen und Schüler schnitten im internationalen Vergleich bei technischen Aufgaben und im Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformaten relativ gut ab, ihre Schwäche wurde in der Modellierung anspruchsvoller innermathematischer Kontexte festgestellt. Damit bestätigte PISA im Wesentlichen die Befunde der TIMS-Studie, nach dem TIMSS-Schock war nun von der PISA-Katastrophe die Rede (Hosenfeld, Groß Ophoff & Bittins, 2006, S. 8). Das erarbeitete Pfadmodell zur Erklärung der Mathematikleistung zeigte einen engen Zusammenhang der mathematischen Grundbildung mit der Lesekompetenz und mit dem mathematischen Selbstkonzept (Klieme, Neubrand & Lüdtke, 2001, S. 167ff). Die PISA-Stichproben wurden zudem für innerdeutsche Vergleiche erweitert zum nationalen Ergänzungsprogramm (PISA-E), sodass die Leistungen zwischen den Bundesländern verglichen werden konnten. Der innerdeutsche Vergleich zeigte deutliche Unterschiede zwischen den Bundesländern (Reiss & Hammer, 2013, S. 84). Von PISA 2003 (503 Punkte) über PISA 2006 (504 Punkte) und PISA 2009 (513 Punkte) bis PISA 2012 (514 Punkte) war für Deutschland eine kontinuierliche Steigerung der mathematischen Kompetenz auf einen Wert signifikant über dem OECD-Durchschnitt zu verzeichnen und der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit nur rudimentären mathematischen Kenntnissen verringerte sich (Blum et al., 2004, S. 47ff; Frey et al., 2010, S. 162ff; OECD, 2013, S. 51ff).

Bezüglich der Lesekompetenz, worin die Leistungen der deutschen Schülerinnen und Schüler bei PISA 2000 auf der Gesamtskala signifikant unterhalb des Durchschnitts und somit sogar im unteren Teil des Feldes der OECD lagen, wurde im internationalen Vergleich für Deutschland sowohl eine erheblich größere Spannweite der Leistungen (Artelt et al., 2001, S. 101ff) als auch substanzielle soziale Disparitäten als Folge der differenziellen Förderung in den unterschiedlichen Bildungsgängen am Ende der Sekundarschulzeit festgestellt (Baumert & Schümer, 2001, S. 360ff). Trotz der Verbesserung des durchschnittlichen Lesekompetenzwertes in den sukzessiven PISA-Erhebungen (OECD, 2013, S. 188ff), der zu verzeichnenden Abnahme der Heterogenität in der Lesekompetenz und der Halbierung des Anteils deutscher Schülerinnen und Schüler auf den unteren Kompetenzstufen (Naumann et al., 2010, S. 59ff) ist der Zusammenhang zwischen dem sozioökonomischen Status des Elternhauses und den erreichten Kompetenzen im internationalen Vergleich weiterhin hoch ausgeprägt (Ehmke & Jude, 2010, S. 241).

Da die deutschen Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 7 und 8 sowohl bei TIMSS 1995 als auch in den PISA-Studien unterdurchschnittlich abschnitten, sollte untersucht werden, ob sich die Befunde auf bereits im Grundschulalter vorhandene, defizitäre Leistungen zurückführen lassen. Deshalb wurde die alle fünf Jahre durch die IEA durchgeführte Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung (IGLU) zur Erfassung der Lesekompetenz am Ende der Grundschulzeit, international als Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS) bezeichnet, in den Jahren 2001 und 2006 um die Erhebung der mathematischen und naturwissenschaftlichen Kompetenzen sowie der Kompetenzen im Rechtschreiben und im Verfassen von Aufsätzen erweitert (IGLU-E). Durch Linking der bei IGLU-E 2001 erhobenen Leistungsdaten in Mathematik wurde der deutsche

Leistungskennwert anhand der internationalen Skala der an TIMSS-Grundschule beteiligten Länder rekonstruiert. Dabei lagen die deutschen Schülerinnen und Schüler mit einem Skalenwert von 545 deutlich oberhalb des internationalen Mittelwerts von 529. Der eingefügte rekonstruierte deutsche Mittelwert gab keine Hinweise auf ausgeprägte Defizite am Ende der Grundschulzeit. Das schwache Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler bei TIMSS und PISA konnte somit nicht auf die Leistungen der Grundschülerinnen und Grundschüler zurückgeführt werden (Grüßing, 2012, S. 64ff). Die weiterführenden Schulen sollten das in der Grundschule vorhandene Leistungspotenzial zielführender nutzen (Walther et al., 2003, S. 206ff). Bezüglich des Kompetenzniveaus im Leseverständnis der deutschen Viertklässler, das sich bei den IGLU-Erhebungen in den Jahren 2001, 2006 und 2011 im internationalen Vergleich zwar nicht in der Spitzengruppe, aber im oberen Drittel der Rangreihe bei relativ geringer Streuung befand (Tarelli et al., 2012, S. 11ff), sei verwiesen auf Bos et al. (2012).

Auch bei TIMSS 2007 (525 Punkte) und 2011 (528 Punkte) erreichten die deutschen Grundschülerinnen und Grundschüler im Mittel einen Platz im oberen Drittel der Rangreihe, signifikant über dem internationalen Mittelwert (491) sowie über den mittleren Leistungsmittelwerten aller teilnehmenden EU-Staaten und aller OECD-Staaten mit einer geringen Streuung der mathematischen Kompetenzen (Wendt et al., 2012, S. 14ff; Grüßing, 2012, S. 61ff). Trotzdem besteht für die deutschen Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe erhebliches Entwicklungspotential. 13 Teilnehmerstaaten erzielten bei TIMSS 2011 bessere Leistungsmittelwerte und das deutsche Leistungsniveau von 2007 konnte lediglich gehalten, aber nicht, wie beispielsweise in den USA oder Dänemark, signifikant gesteigert werden. Zudem erreichten fast 20% der Viertklässlerinnen und Viertklässler nur die erste und zweite Kompetenzstufe. Diese Schülerinnen und Schüler können lediglich vertraute Aufgaben bearbeiten, bei denen elementares Wissen und elementare Fertig- und Fähigkeiten benötigt werden. Die leistungsschwächsten 5% aller deutschen Viertklässlerinnen und Viertklässler erzielten höchstens 420 Punkte, die gleiche Gruppe in Hongkong erzielte 488 Punkte. Nur 5% aller deutschen Grundschülerinnen und Grundschüler erreichten die höchste Kompetenzstufe, in Singapur waren es 43%. Die leistungsstärksten 5% aller deutschen Viertklässlerinnen und Viertklässler erzielten mindestens 626 Punkte, die gleiche Gruppe in Hongkong erzielte 702 Punkte und in Singapur 723 Punkte. Somit scheint in Deutschland die Förderung der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler sogar erfolgreicher zu sein als die der leistungsstarken (Wendt et al., 2012, S. 14ff; Selter et al., 2012, S. 93ff).

Um die nationalen Ergänzungen der internationalen Schulleistungsstudien (IGLU-E) zu ersetzen und das Erreichen der in den Bildungsstandards beschriebenen inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der vierten Jahrgangsstufe zu überprüfen, erfolgte 2011 im Primarbereich ein stichprobenbasierter Ländervergleich, der im Fünfjahresrhythmus (2011, 2016 usw.) fortgesetzt werden soll (Böhme et al., 2012, S. 12f; Weirich, Haag & Roppelt, 2012, S. 277ff). Um alle Facetten der getesteten Kompetenzbereiche hinreichend präsentieren zu können, wurde eine große Zahl von Aufgaben eingesetzt, die sich im Fach Mathematik auf 35 Testhefte verteilten. Beim Vergleich aller 16 Länder lag der Kompetenzmittelwert der rheinland-pfälzischen Schülerinnen und Schüler auf der Globalskala Mathematik in der Mittelgruppe mit fünf weiteren Bundesländern und unterschied sich nicht signifikant vom deutschen Mittelwert. Bei der Betrachtung der einzelnen inhaltlichen Kompetenzbereiche wichen insgesamt die Ergebnisse für den Kompetenzbereich Raum und Form am stärksten von denen für die Globalskala ab (Haag & Roppelt, 2012, S. 117ff). Für diesen Kompetenzbereich wurden Aufgaben ausgewählt, bei denen die Schülerinnen und Schüler Figuren spiegeln, Spiegelachsen einzeichnen und Eigenschaften von Figuren oder Körpern erkennen sowie beschreiben mussten (zusammenfassende Befunde sind nachzulesen in Stanat et al., 2012a, S. 291ff).

In der Sekundarstufe I wird der Ländervergleich im Dreijahresrhythmus anstelle von PISA-E bereits seit 2009 durchgeführt, sodass Ergebnisse aus den Jahren 2009, 2012 und 2015 vorliegen.

Die als Längsschnittuntersuchung angelegte SCHOLASTIK-Studie (Schulorganisierte Lernangebote und Sozialisation von Talenten, Interessen und Kompetenzen) untersuchte von 1987 bis 1997 die Entwicklung kognitiver Kompetenzen anhand der Mathematik- und Deutschleistungen sowie motivationale Schülermerkmale, Intelligenzkomponenten und Qualitätsmerkmale des Unterrichts während der Grundschulzeit. Das Max-Planck-Institut in München integrierte zusätzlich Daten über das Vorschul- und Sekundarschulalter aus der auf 20 Jahre angelegten LOGIK-Studie (Longitudinale Genese individueller Kompetenzen). Ein Ergebnis war unter anderem die Persistenz individueller Differenzen von Kindern mit über- und unterdurchschnittlicher Intelligenz (Weinert & Stefanek, 1997, S. 425ff), wobei intelligentere Kinder im Durchschnitt im Verlauf der Grundschule konstant bessere Schulleistungen erbrachten, ohne dass sich dadurch jedoch ein Schereneffekt einstellte. Weitere Erkenntnisse waren, dass eine ausreichende Intelligenz eine notwendige Bedingung für den Erwerb anspruchsvoller schulischer Lernleistung darstellt und die kognitiven Kompetenzen sowohl Bedingung als auch Folge schulischen Lernens waren. Auf curricular organisierten, schulischen Fertigkeitserwerb beruhende Leistungen waren weniger durch vorschulische Intelligenzunterschiede aufklärbar als denkabhängige Leistungen. Für die mathematische Kompetenz konnte festgestellt werden, dass die beiden Intelligenzgruppen bei mit Hilfe prozeduralisierten Wissens zu erbringenden, standardisierten und automatisierten Leistungen weniger differieren als bei Problemlöseaufgaben (Weinert & Stefanek, 1997, S. 433f). Beim Übergang in die weiterführende Schule nahm die Stabilität der Unterschiede zwischen Kindern im Bereich der sprachlichen Intelligenz weiter zu, nicht jedoch bei der fluiden Intelligenz (Weinert & Stefanek, 1997, S. 441ff). Fachspezifische Leistungen wurden immer stärker durch die eigene Lerngeschichte determiniert, bei der Determination der Mathematikleistungen waren die empirischen Befunde unbefriedigend (Weinert & Stefanek, 1997, S. 446ff).

Trotz des festgestellten weiterhin bestehenden Entwicklungspotentials der Leistungen deutscher Schülerinnen und Schüler, auch in der Primarstufe, kann zusammenfassend festgehalten werden, dass Deutschland zu den wenigen Staaten gehört, die sich seit den ersten internationalen Erhebungen kontinuierlich und im internationalen Vergleich bemerkenswert verbessert haben (Klieme et al., 2010, S. 291). TIMSS 1995 und PISA 2000 können somit rückblickend als lehrreicher Schock bezeichnet werden, woraus die Folgerung der Kultusministerkonferenz, dass die in Deutschland vorrangige Inputsteuerung in Form von Inhaltsvorgaben durch Lehrpläne um die Festlegung und Überprüfung erwarteter Leistungen ergänzt werden muss, hervorging. Die seit den ersten internationalen Erhebungen insgesamt höheren Leistungen der Schülerinnen und Schüler skandinavischer und angloamerikanischer Staaten wurden unter anderem mit der dort vorherrschenden systematischen Rechenschaftslegung in Form regelmäßiger Schulleistungsstudien, zentraler Prüfungen, Standards, Schulevaluation und der Formulierung von Kompetenzen, einer sogenannten Outcome-Orientierung, in Zusammenhang gebracht. Die Kultusministerkonferenz sah es als zentrale Aufgabe an, die Qualität schulischer Bildung, die Vergleichbarkeit schulischer Abschlüsse sowie die Durchlässigkeit des Bildungssystems zu sichern (KMK, 2005b, S. 5) und beschloss am 23./24.Mai 2002 die Erarbeitung bundesweit geltender Bildungsstandards in Kernfächern für bestimmte Jahrgangsstufen und Abschlussklassen. In diesen Bildungsstandards wurde der durch die allgemeinbildenden Schulen zu erfüllende Bildungsauftrag konkretisiert, indem die erwünschten Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler in Form von Kompetenzanforderungen formuliert wurden (Granzer, 2008, S. 16), wodurch der Anschluss an die internationalen Entwicklungen erfolgte (Artelt & Riecke-Baulecke, 2004, S. 11; Granzer & Hornberg, 2008, S. 7).

Die Einführung der national verbindlichen Bildungsstandards und die Maßnahmen zu deren Implementation (Vergleichsarbeiten, Systemmonitoring, Unterrichtsentwicklungsprogramme wie beispielsweise SINUS, Fortbildungsmaßnahmen, Handbücher) stellen somit einen wichtigen Einflussfaktor auf die Entwicklung der Leistungen deutscher Schülerinnen und Schüler dar (Granzer, 2008, S. 16; Klieme et al., 2010, S. 277ff).

2.1.3 Erkenntnisse zu Geschlechterdifferenzen

> „In der Diskussion über Fragen der Bildungsqualität und des Bildungserfolgs von Kindern und Jugendlichen spielen Geschlechterunterschiede noch immer eine zentrale Rolle." (Böhme & Roppelt, 2012, S. 173)

Wie bei den Studien zu Raumvorstellungsfähigkeiten (vgl. Kap. 1.1.2) wurden im Rahmen der internationalen Schulleistungsstudien Erkenntnisse zu Geschlechterdifferenzen gewonnen. Während bei TIMSS 1995 kein statistisch nachweisbarer Unterschied im Bereich Mathematik ermittelt werden konnte, erzielten die Jungen bei TIMSS 2007 signifikant bessere Mathematikleistungen (Walther et al., 2008, S. 49ff). Auch bei den sukzessiven PISA-Erhebungen wurden im OECD-Durchschnitt signifikante Leistungsvorteile im mathematischen Bereich für die Jungen festgestellt (Frey et al., 2010, S. 166ff). Relative Schwächen wiesen die Mädchen bei PISA 2000 insbesondere bei mathematischen Aufgaben auf, die den Umgang mit mentalen oder mathematischen Modellen erforderten (Stanat & Kunter, 2001, S. 251ff). Zwischen PISA 2003 und PISA 2009 stieg lediglich die mathematische Kompetenz der Jungen signifikant an (Frey et al., 2010, S. 166ff). PISA 2012 konstatiert im mathematischen Bereich einen höheren Anteil der Jungen unter den besonders leistungsstarken Schülerinnen und Schülern in fast allen teilnehmenden Ländern. In Deutschland wurden die beobachteten Unterschiede mathematischer Kompetenz zwischen Mädchen und Jungen von PISA 2006 (20 Punkte) zu PISA 2009 (16 Punkte) nominell, aber nicht signifikant kleiner (Frey et al. 2010, S. 166f), und lagen bei PISA 2012 bei 14 Punkten (OECD, 2013, S. 79ff). Insgesamt war der Trend festzustellen, dass sich der Leistungsvorsprung der Jungen im mathematischen Bereich in den meisten Ländern verringerte und bei separater Betrachtung nur noch in 37 von insgesamt 65 teilnehmenden Ländern bestand. Die Unterschiede im mathematischen Bereich waren und sind jedoch deutlich kleiner als die im Lesen durch die Mädchen in allen Teilnehmerstaaten erreichten signifikant höheren Testwerte (Naumann et al., 2010, S. 52ff, OECD, 2013, S. 214ff).

Die beschriebenen Unterschiede in den geschlechtsspezifischen Leistungen lassen sich, wenn auch in einem geringerem Ausmaß, bereits am Ende der Grundschulzeit feststellen. IGLU-E 2001 zeigte, dass die Mädchen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich auf den unteren Kompetenzstufen überrepräsentiert und auf den oberen Kompetenzstufen unterrepräsentiert waren. TIMSS 2007 und TIMSS 2011 bestätigten diesen Befund und ermittelten ebenfalls signifikant höhere Leistungsmittelwerte für die Jungen (Brehl, Wendt & Bos, 2012, S. 208ff).

Um das Erreichen der Bildungsstandards zu überprüfen, werden in der Sekundarstufe I seit 2009 und in der Primarstufe seit 2011 Ländervergleiche durchgeführt. 2006 erfolgte die Pilotierung der auf den Bildungsstandards basierenden Testaufgaben. Dabei wurden signifikant höhere Kompetenzstände der Jungen in der globalen mathematischen Kompetenz ermittelt. Die Höhe dieser Differenzen variierte in Abhängigkeit vom jeweiligen inhaltsbezogenen und allgemeinen Kompetenzbereich. Inhaltsbezogen wurde im Bereich Raum und Form der geringste Effekt und im Bereich Größen und Messen der stärkste Effekt gefunden. Innerhalb des Bereichs Raum und Form konnte der Großteil der festgestellten geschlechtsspezifischen Differenz auf Items zurückgeführt werden, bei denen die Anforderung im Erkennen, Benennen und Darstellen von geometrischen Figuren oder Abbildungen bestand (Winkelmann & van den Heuvel-Panhuizen, 2009, S. 147f). Winkelmann und van den Heuvel-Panhuizen (2009, S. 142ff) bezeichnen die Erkenntnisse zu geschlechtsspezifischen mathematischen Kompetenzen für die Grundschule als bescheiden und teilweise widersprüchlich.

Bezüglich der geschlechtsbezogenen Kompetenzunterschiede ergaben sich im Ländervergleich 2011 für die Kompetenzbereiche des Faches Deutsch Vorteile zugunsten der Mädchen. Dies geht unter anderem einher mit den durch die IGLU-Studie gewonnenen Erkenntnissen, wonach ebenfalls die Mädchen bessere Ergebnisse erzielten als die Jungen (Tarelli et al., 2012, S. 11ff). Im Fach Mathematik verzeichneten die Jungen insgesamt einen Vorsprung, der jedoch geringer war als der Vorsprung der Mädchen im Fach Deutsch. Bezüglich der einzelnen inhaltlichen Leitideen variierten die Ergebnisse. Für die Bereiche Raum und Form und Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit war der Kompetenzvorsprung der Jungen sehr klein. Für die Bereiche Zahlen und Operationen, Muster und Strukturen und Größen und Messen waren die Geschlechterdifferenzen wesentlich größer. Ausgeprägter als die Unterschiede zwischen den Geschlechtern waren jedoch die Unterschiede in den Kompetenzständen innerhalb der Geschlechtergruppen. Über alle Kompetenzbereiche hinweg waren die Kompetenzstände der Mädchen etwas homogener (Böhme & Roppelt, 2012, S. 180ff). Gemeinsam mit den Erkenntnissen von Winkelmann und van den Heuvel-Panhuizen (2009, S. 147f) aus dem Jahr 2006 ist der Befund, dass die Unterschiede in den Bereichen Raum und Form sowie Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit eher geringer, und im Bereich Größen und Messen am stärksten ausgeprägt waren.

Verschiedene Autoren stellen fest, dass seit einigen Jahren die Jungen als mögliche „Bildungsverlierer" in den Blick gerückt sind und dass nicht mehr von einer Benachteiligung der Mädchen in der Schule die Rede ist (Brehl, Wendt & Bos, 2012, S. 204; Rohrmann, 2007, S. 221ff). Hinsichtlich der Schulleistungen allgemein haben die Mädchen die Jungen überholt. Den Daten des Statistischen Bundesamtes ist zu entnehmen, dass die Mädchen an Gymnasien überrepräsentiert sind, deutlich bessere Schulabschlüsse als die Jungen haben und wesentlich seltener die Schule ohne Abschluss verlassen (Rohrmann, 2007, S. 221ff; Böhme & Roppelt, 2012, S. 174ff). Die Verhaltensweisen der Mädchen werden als angemessen und besser angepasst wahrgenommen. Der überwiegende Anteil weiblicher Betreuungspersonen und Lehrkräfte wird ebenfalls als Ursache für den größeren Erfolg der Mädchen angenommen (Böhme & Roppelt, 2012, S. 173f). Die geschlechtsspezifischen Unterschiede beim Kompetenzerwerb, der Bildungsbeteiligung und dem Erwerb von Bildungsabschlüssen werden häufig biologisch oder neurowissenschaftlich, vor allem aber sozialisationstheoretisch erklärt. Empirische Untersuchungen weisen auf geschlechtstypische Unterschiede bezüglich der Interaktionsstile, des schulischen Selbstkonzepts, der Interessen, der Fächerpräferenzen, der Leistungen und des Schulerfolgs allgemein hin. Bei Halpern (2012) ist eine Übersicht der in der Forschungsliteratur existierenden Erklärungsansätze für Geschlechterunterschiede zu finden.

Klieme et al. (2010, S. 282) halten fest, dass trotz der insgesamt für das deutsche Bildungssystem zu verzeichnenden positiven Entwicklung der Abbau geschlechtsspezifischer Kompetenzprofile zusammen mit der Spitzenförderung zum jetzigen Zeitpunkt ungelöste Aufgaben für das deutsche Schulsystem darstellen.

2.1.4 National verbindliche Bildungsstandards

Im Anschluss an den in Kapitel 2.1.2 erwähnten Beschluss vom Mai 2002 regte das Bundesministerium für Bildung und Forschung zunächst die Erstellung einer Expertise durch eine interdisziplinäre Expertengruppe an und beauftragte damit das Deutsche Institut für Internationale Pädagogische Forschung in Frankfurt a.M., das diese dann in Kooperation mit dem Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) in Kiel und Experten aus weiteren Hochschulen innerhalb weniger Monate erarbeitete. In dieser sogenannten „Klieme-Expertise“ (vgl. Klieme et al., 2003) wurden Vorschläge für die Gestaltung von Bildungsstandards gemacht. Es wurde darin gefordert, dass sich Bildungsstandards an Bildungszielen orientieren und diese in Form von konkreten Kompetenzanforderungen, systematisch geordnet in Kompetenzmodellen, umgesetzt werden sollten. Die Autoren betonten, dass darin Systemziele wie etwa der Abbau von Disparitäten, die Förderung von Kindern und Jugendlichen mit Benachteiligungen, die Integration von Migranten und die Begabtenförderung oder die Flexibilität und Offenheit von Bildungsverläufen berücksichtigt werden müssten (Klieme et al., 2003, S. 12). Als Merkmale guter Bildungsstandards wurden Fachlichkeit, Fokussierung, Kumulativität, Verbindlichkeit für alle, Differenzierung, Verständlichkeit und Realisierbarkeit herausgearbeitet. Des Weiteren wurden in der Expertise der Begriff des Standards und die Funktionen von Standards für die Qualitätsentwicklung im Bildungswesen beleuchtet, der Kompetenzbegriff definiert und das Kompetenzstufenmodell von PISA als Orientierung aufgezeigt. Die Bildungsstandards als Ergebnisse von Lernprozessen sollten in Aufgabenstellungen und schließlich Verfahren konkretisiert werden, mit denen das tatsächlich durch die Lernenden erreichte Kompetenzniveau empirisch zuverlässig erfasst werden kann (Klieme et al., 2003, S. 23). Die Expertengruppe riet nachdrücklich zu einer deutlichen Trennung zwischen der Verwendung standardbezogener Tests für Evaluation, Bildungsmonitoring und als Entscheidungshilfe für individuelle Förderung einerseits, und Noten und Abschlussprüfungen andererseits (Klieme et al., 2003, S. 48f). Die Expertise stellte des Weiteren die im Folgenden aufgeführten Beispiele für Standards und Curricula anderer Staaten aus dem Bereich der Mathematik zur Orientierung dar, die zu dieser Zeit bereits als Vorgaben für die Schulen vorlagen (amerikanisches, kanadisches, schwedisches und englisches Curriculum).

Die im Jahr 2000 durch den amerikanischen Verband der Mathematiklehrer und -didaktiker (NCTM = National Council of Teachers of Mathematics) vorgelegten und sehr einflussreichen Principles and Standards for School Mathematics wurden innerhalb von 20 Jahren mit dem Ziel einer Umorientierung hin zu einem verständnisbasierten und problembezogenen Unterricht für alle Klassenstufen entwickelt (NCTM, 2000). Es handelt sich dabei um eine Revision der bereits 1989 herausgegebenen „Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics" (NCTM, 1989). Durch die Principles wurden fachübergreifende Leitlinien guten Unterrichts wie das Chancengleichheitsprinzip, das Curriculumsprinzip, das Lehr- beziehungsweise Lernprinzip, das Bewertungsprinzip oder das Technologieprinzip formuliert. Die fachspezifischen Standards betreffen konkrete Lerninhalte und gliedern sich in einen inhaltlichen und einen methoden- beziehungsweise prozessorientierten Teil. Inhaltliche Themenbereiche sind Zahlen und Operationen (1), Muster, Funktionen und Algebra (2), Geometrie und Raumorientierung (3), Messen (4) und Datenanalyse, Statistik und Wahrscheinlichkeit (5). Methodische Aspekte sind Problemlösen, Argumentieren und Beweisen, Kommunikation, Verbindungen und Darstellungen. Diese klassenstufenübergreifenden Inhalte und Methoden sollen den gesamten Mathematikunterricht vom Beginn bis zum Abschluss der Sekundarstufe II prägen und werden durch zahlreiche Beispiele für die verschiedenen Klassenstufen konkretisiert, wobei die Bezüge zwischen den Klassenstufen beachtet werden. Die

Standards können im Sinne der Expertise als eine Art Kompetenzmodell verstanden werden. Die fünf Inhaltsaspekte und die fünf Prozessaspekte beschreiben insgesamt, was mathematisches Denken und Arbeiten ausmacht. Die konsequente Strukturierung aller zehn Aspekte über alle Jahrgangsstufen vom Vorschulunterricht bis zum Ende der High School hinweg ("K-12") beinhaltet das Konzept des systematischen, kumulativen Lernens für die gesamte Schullaufbahn (Klieme et al., 2003, S. 38). Empfehlungen zur Gestaltung von Leistungsmessungen wurden gegeben, eine Umsetzung der Principles and Standards for School Mathematics in Testverfahren erfolgte jedoch nicht.

Die Curricula der anderen genannten Staaten orientierten sich sehr stark an diesen Standards und erweiterten diese. Für das kanadische Curriculum der Provinz Alberta wurden die mathematischen Inhaltsbereiche und Ziele zusätzlich einzeln für die verschiedenen Klassenstufen - im Sinne eines Kompetenzmodells - beschrieben, inklusive Zeitvorgaben für Unterrichtsaktivitäten. Im Curriculum der Provinz Ontario wurde das Leistungsniveau der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich verschiedener Kategorien graphisch dargestellt. Es wurden allgemeine und spezifische Erwartungen in fünf Hauptbereichen des Wissens und der Fähigkeiten (Number Sense and Numeration, Measurement, Geometry and Spatial Sense, Patterning and Algebra, Data Management and Probability) formuliert. Zudem sind vier Kategorien des Wissens und der Fähigkeiten enthalten (Knowledge and Understanding, Thinking, Communication, Application) (Ministry of Education, 2005, p. 19f). Zu diesen vier Kategorien werden in den Achievement Charts jeweils weitere Kriterien unterschieden und vier Level beschrieben (Ministry of Education, 2005, p. 20). Abbildung 6 veranschaulicht diese Achievement Levels am Beispiel der Kategorie „Knowledge and Understanding".

Achievement Chart – Mathematics, Grades 1–8

Categories	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4
Knowledge and Understanding *Subject-specific content acquired in each grade (knowledge), and the comprehension of its meaning and significance (understanding)*				
	The student:			
Knowledge of content (e.g., facts, terms, procedural skills, use of tools)	– demonstrates limited knowledge of content	– demonstrates some knowledge of content	– demonstrates considerable knowledge of content	– demonstrates thorough knowledge of content
Understanding of mathematical concepts	– demonstrates limited understanding of concepts	– demonstrates some understanding of concepts	– demonstrates considerable understanding of concepts	– demonstrates thorough understanding of concepts

Abbildung 6: Achievement Chart: Knowledge and Understanding (Ministry of Education, 2005, p. 22).

Das bereits seit 1994 in Schweden geltende Curriculum unterscheidet zwei Ebenen der Zielbestimmung. Das sogenannte „nationale Curriculum“ beinhaltet die Ebene der allgemeinen, den Unterricht bestimmenden Werte und Normen (friedliches Miteinander, Fähigkeit zur Kommunikation in einer fremden Sprache, Kenntnis elementarer mathematischer Konzepte), in dessen Rahmen auch Minimalziele definiert werden. Die Ebene der fachspezifischen Inhalte von Unterricht sind im sogenannten „Syllabus“ festgehalten, wo auch ein Minimalkatalog von Wissen aufgeführt wird, das zum Ende der dritten, sechsten und neunten Jahrgangsstufe, untergliedert nach den Noten A-E, erworben sein muss (National Agency for Education, 2011).

Das englische Curriculum wurde bereits 1988 erstmals implementiert und seitdem überarbeitet beziehungsweise ergänzt. Es umfasst sowohl fachbezogene Inhalte (Programmes of Study), die über konkrete Leistungsziele (Attainment Targets) in vier Bereichen (using and applying mathematics, number and algebra, shape, space and measures, handling data) operationalisiert sind, als auch Hinweise zur Bewertung der erreichten Schülerleistungen in den regelmäßig durchgeführten Tests in Form von Kompetenzniveaus (Level Descriptions) bezüglich vier key stages, die sich mehrheitlich am Alter von sieben, elf und vierzehn Jahren orientieren (Department for Education and Employment, 1999).

In Deutschland wurden unter Berücksichtigung der in der Expertise zusammengetragenen Vorschläge und Informationen schließlich am 4.12.2003 die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss in den Fächern Deutsch, Mathematik und Erste Fremdsprache beschlossen und galten somit im Schuljahr 2004/2005 in den Schulen aller Länder der Bundesrepublik als Grundlage. Insgesamt wurden bis heute chronologisch die in Tabelle 2 aufgelisteten Bildungsstandards erlassen.

Tabelle 2: Beschluss von Bildungsstandards (eigene Darstellung in Anlehnung an IQB und KMK)

Bildungsstandards...	**Fach**	**Jahr**
...für den Mittleren Schulabschluss	Deutsch	2003
	Mathematik	2003
	Erste Fremdsprache	2003
...für den Primarbereich	Deutsch	2004
	Mathematik	2004
...für den Hauptschulabschluss	Deutsch	2004
	Mathematik	2004
	Erste Fremdsprache (Englisch/Französisch)	2004
...für den Mittleren Schulabschluss	Biologie	2004
	Chemie	2004
	Physik	2004
...für die Allgemeine Hochschulreife	Deutsch	2012
	Mathematik	2012
	Fortgeführte Fremdsprache (Engl./Franz.)	2012

Die für die vorliegende Arbeit bedeutsamen Standards im Fach Mathematik vom 15.10.2004 wurden zu Beginn des Schuljahres 2005/2006 verbindlich als Grundlagen der fachspezifischen Anforderungen für den Unterricht im Primarbereich eingeführt (KMK, 2005a, S. 3). Ufer (2009, S. 95) bezeichnet sie als wichtigen Ausgangspunkt zur Definition mathematischer Kompetenzen am Übergang, die einerseits als Ziel mathematischer Kompetenzentwicklung im Grundschulalter anzustreben sind und andererseits als Orientierung für die weitere Arbeit in der Sekundarstufe dienen. Wie in der Expertise gefordert, greifen die Bildungsstandards allgemeine Bildungsziele auf und legen fest, welche Kompetenzen die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an wesentlichen Inhalten erworben haben sollen. Sie konzentrieren sich auf Kernbereiche eines Faches, beschreiben erwartete Lernergebnisse, stellen eine Mischung aus Inhalts- und Outputstandards dar, beziehen sich auf das im Durchschnitt erwartete Niveau der Leistungen und sind damit Regelstandards (KMK, 2005b, S. 9; Reiss & Winkelmann, 2009, S. 122). Die Formulierung von Mindeststandards ist unbedingt notwendig, was aber einem längeren Prozess der Erfahrung im Umgang mit den Bildungsstandards bedarf und voraussetzt, dass die Schwierigkeitsgrade von Aufgabenbeispielen getestet wurden, dass Niveaustufen präzisiert und insgesamt die Standards und Aufgabenbeispiele validiert wurden (KMK, 2005b, S. 14).

In der Vereinbarung über Bildungsstandards für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) heißt es zudem, dass sich die Länder verpflichten, die Standards zu implementieren und anzuwenden. Dies betrifft insbesondere die Lehrplanarbeit, die Schulentwicklung und die Lehreraus- und - fortbildung. Des Weiteren kommen die Länder überein, weitere Aufgabenbeispiele zu entwickeln und in landesweiten länderübergreifenden Orientierungs- und Vergleichsarbeiten festzustellen, in welchem

Umfang die Standards erreicht werden (KMK, 2005a, S. 3). Den Bildungsstandards kommt neben dieser Überprüfungsfunktion auch eine Entwicklungsfunktion zu, da sich die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht nicht nur Kenntnisse und Fertigkeiten aneignen, sondern auch Verständnis für mathematische Inhalte entwickeln sollen. Bildungsstandards sind also Bestandteile eines umfassenden Systems der Qualitätssicherung, das Schulentwicklung, interne und externe Evaluation umfasst (KMK, 2005b, S. 5).

Wissenschaftlich begleitet wird die Qualitätsentwicklung durch das im Juni 2004 gegründete Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) an der Humboldt-Universität zu Berlin, dessen Auftrag es ist, die Bildungsstandards durch geeignete Aufgaben zu operationalisieren, diese zu normieren und zu überprüfen. Durch die Arbeit des IQB werden so, neben der Beteiligung an den internationalen Schulleistungsstudien (PISA, IGLU, TIMSS), seit 2007 alljährlich flächendeckend die nationalen Vergleichsarbeiten (VERA 3, VERA 8) durchgeführt, um die 2006 im Rahmen der Plöner Beschlüsse vorgelegte Gesamtstrategie zur Qualitätssicherung zu realisieren (Köller, 2008, S. 64ff). Als Ersatz für die nationalen Ergänzungen der internationalen Schulleistungsstudien (PISA-E, IGLU-E) erfolgt seit 2009 im Dreijahresrhythmus der innerdeutsche Schulleistungsvergleich als zentrale Überprüfung des Erreichens der Bildungsstandards in der Sekundarstufe I durch den Ländervergleich, sodass Ergebnisse aus den Jahren 2009, 2012 und 2015 vorliegen. Im Primarbereich erfolgt dieser stichprobenbasierte Ländervergleich seit 2011 und soll im Fünfjahresrhythmus (2011, 2016 usw.) fortgesetzt werden (Böhme et al., 2012, S. 12f). Auch die Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen und die Weiterentwicklung der Bildungsstandards sind Aufgaben des IQB. Darüber hinaus führt das IQB Studien zur Implementation der Bildungsstandards in der Schulpraxis durch oder begleitet diese. Exemplarisch sei auf Heller und Asbrand (2012, S. 222ff) verwiesen, die den Einsatz von kompetenzorientierten Aufgaben im Unterricht untersuchten und große Unterschiede bezüglich des Umgangs mit den Bildungsstandards und deren Umsetzung durch die Lehrkräfte berichteten.

SINUS, das Projekt zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, wurde bereits 1997, im Anschluss an die Ergebnisse der TIMS-Studie 1995, gestartet. Das Pilot-Programm SINUS (1998-2003) wurde schließlich als SINUS-Transfer in Form zweier Programmwellen (2003-2005, 2005-2007) in der Fläche ausgebreitet und seit 2007 in Eigenverantwortung der Länder fortgesetzt. Von 2009 bis 2013 lief zusätzlich das Programm SINUS-Transfer an Grundschulen und wird seither ebenfalls nach landesspezifischen Konzepten durch die Länder weitergeführt. Ziel ist die Förderung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Kompetenz deutscher Schülerinnen und Schüler, indem Lehrkräfte unter wissenschaftlicher Begleitung durch den Programmträger, dem IPN in Kiel, ihre Unterrichtsmethodik weiterentwickeln. In Nordrhein-Westfalen fokussiert die Landesvereinigung von Unternehmensverbänden seit 2001 die Stärkung der MINT-Fächer (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik) in Schulen. Im gleichen Bundesland ist das Kooperationsprojekt zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe PIK AS (Prozessbezogene und Inhaltsbezogene Kompetenzen und Anregung von fachbezogener Schulentwicklung) angesiedelt, in dessen Rahmen Materialien zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe erarbeitet werden, um die aus den Bildungsstandards in die Lehrpläne der Bundesländer übertragenen Vorgaben in der Praxis umzusetzen (SINUS).

Neben diesen qualitätssteigernden Maßnahmen und Hoffnungen äußerten kritische Stimmen die Gefahr eines sogenannten „teaching to the test“ durch die Outcome-Orientierung der Bildungsstandards, womit die Abprüfbarkeit mittels Schulleistungsstudien einhergeht und die Möglichkeit zur individuellen prozessorientierten Förderung in Frage gestellt wird (Asbrand, Heller & Zeitler, 2012, S. 12; Schütte, 2008, S. 42). Auch Granzer und Walther (2008, S. 7) hinterfragen eine

Standardsetzung im pädagogischen Kontext kritisch. Zeitler, Köller und Tesch (2010, S. 24ff) betonen, dass die Bildungsstandards nicht nur der Evaluation der Schülerleistungen dienen, sondern selbst im Hinblick auf ihre zu erfüllenden Funktionen stets kritisch betrachtet werden sollten. Anhand der im Rahmen der Expertise formulierten Kriterien guter Standards (Klieme et al., 2003, S. 24ff) messen die Autoren die Bildungsstandards mit dem Fazit, dass ein insgesamt positives Bild entsteht, obgleich die Bildungsstandards noch nicht „fertig" seien (Zeitler, Köller & Tesch, 2010, S. 26). Von großer Bedeutung für die Realisierung der mit den Bildungsstandards angestrebten Verbesserungen im Sinne eines kognitiv aktivierenden Unterrichts sei zudem die zentral bundeseinheitliche Implementierung, die bislang nicht erfolgte (Zeitler, Köller & Tesch, 2010, S. 32f). In diesem Zusammenhang sei beispielsweise auf den an die Vorgaben der Bildungsstandards angepassten rheinland-pfälzischen Teilrahmenplan Mathematik verwiesen, der erst zum 01.08.2015 in Kraft trat (Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend, 2014).

2.2 Kompetenzbegriff

Wie bereits erläutert, stellt die Entwicklung von Kompetenzen einen wesentlichen Bestandteil des Bildungsauftrags der Grundschule dar. Der Begriff der Kompetenz ist komplex und vielschichtig. Er unterscheidet sich bei verschiedenen Autoren hinsichtlich inhaltlicher Fokussierung und kontextueller Einbettung. Gemeinsam ist allen Definitionen, dass es bei Kompetenzen nicht um isolierte Fakten, die etwa im Rahmen von Leistungstests abgefragt werden, sondern um den erfolgreichen Umgang mit Situationen geht, in denen spezifisches Wissen in einem sinnvollen Kontext angewendet werden soll, um Probleme selbstständig zu lösen (Reiss, Heinze & Pekrun, 2008, S. 108; Ufer, Reiss & Heinze, 2009, S. 62).

Criblez et al. (2009) verstehen unter dem Begriff der Kompetenz in einem ganzheitlichen Sinne die Fähig- oder Fertigkeit, komplexe Anforderungen und Aufgaben in einem konkreten Kontext erfolgreich zu bewältigen, indem man Ressourcen mobilisiert. Ressourcen umfassen dabei das Wissen, die Fertigkeiten und Fähigkeiten sowie die Ressourcen des Umfeldes (Criblez et al., 2009, S. 35).

Auch Klieme und Leutner (2006) betonen die Kontextabhängigkeit und definieren Kompetenzen als kontextspezifische kognitive Leistungsdispositionen, die sich funktional auf Situationen und Anforderungen in bestimmten Domänen beziehen. Unter Domänen verstehen sie Lernfelder (zum Beispiel Lesen) oder fachbezogene Leistungsbereiche (zum Beispiel mathematisches Modellieren). Je nach Ausprägung einer Kompetenz können Anforderungen in spezifischen Situationen bewältigt werden (Klieme & Leutner, 2006, S. 879).

Nach Schott und Azizi Ghanbari (2008, S. 30ff) beschreiben Kompetenzen Fähigkeiten einer Person, die als Eigenschaft nachhaltig sein sollten. Eine Kompetenz besteht aus einer bestimmten Menge von Aufgaben, die man ausführen kann, wenn man die Kompetenz besitzt und aus einem oder mehreren Kompetenzgraden, die angeben, wie gut man diese Aufgaben ausführen kann, wenn man die entsprechende Kompetenz besitzt.

Nach Ufer, Reiss und Heinze (2009) liegt der wesentliche Aspekt von Kompetenzen nicht in der Aufzählung einzelner Wissenskomponenten, sondern in der konkreten Beschreibung von Aufgaben, die auf der Basis dieses Wissens erfolgreich bearbeitet werden sollen. Das kleine Einmaleins wird beispielsweise im zweiten Schuljahr behandelt, muss aber auch zu einem späteren Zeitpunkt verfügbar sein und sollte in Sachsituationen angewendet werden können (Ufer, Reiss & Heinze, 2009, S. 61).

Die bisher genannten Autoren beschränken ihren Kompetenzbegriff inhaltlich auf kognitive Dispositionen. Weinert (2001) geht über den kognitiven Bereich hinaus. So versteht er unter Kompetenzen die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können. Er unterscheidet zwischen fachlichen Kompetenzen, wie beispielsweise physikalischer, fremdsprachlicher oder musikalischer Art, fachübergreifenden Kompetenzen, wie zum Beispiel Problemlösen oder Teamfähigkeit, und Handlungskompetenzen, die neben kognitiven auch soziale, motivationale, volitionale und oft moralische Kompetenzen enthalten und es erlauben, erworbene Kenntnisse und Fertigkeiten in sehr unterschiedlichen Lebenssituationen erfolgreich, aber auch verantwortlich zu nutzen (Weinert, 2001, S. 27f).

Ziener (2008) schließt sich der von Weinert vorgenommenen inhaltlichen Ausdehnung des Kompetenzbegriffes an. Nach ihm umfassen Kompetenzen drei Dimensionen und beschreiben die Befähigung eines Menschen im Blick auf seine Kenntnisse, Fertigkeiten und Einstellungen in ihrem wechselseitigen Zusammenspiel (Ziener, 2008, S. 21).

Auch Reiss, Heinze und Pekrun (2008) gehen davon aus, dass kognitive Leistungen schon in einem frühen Alter durch motivationale und emotionale Faktoren mitbedingt werden. Es ist daher von wesentlicher Bedeutung, auch bei Grundschulkindern einen breiten Kompetenzbegriff zugrunde zu legen und auf dieser breiten Basis Entwicklungsprozesse zu beschreiben (Reiss, Heinze & Pekrun, 2008, S. 109).

Sowohl bei TIMSS als auch bei PISA kann von einer funktionalistischen Orientierung der Rahmenkonzeption gesprochen werden, da die Bewährung der bis zum Ende der Pflichtschulzeit erworbenen Kompetenzen in authentischen Anwendungssituationen bedeutsam ist. Der Ursprung dieser Konzeption ist in der anglo-amerikanischen Diskussion zu finden, woraufhin die Definition von fünf Zieldimensionen der mathematischen Literalität (mathematical literacy), analog zur sprachlichen Literalität, in den Empfehlungen des NCTM erfolgte (Baumert, Stanat & Demmrich, 2001, S. 19). Diese beinhalten die Wertschätzung der Mathematik, das Vertrauen in die eigene Fähigkeit, mit Mathematik umgehen zu können, die Anwendung mathematischer Kenntnisse auf innermathematische und außermathematische Aufgabenstellungen, die Kommunikation mit Hilfe der Mathematik und das mathematische Denken (NCTM, 1989, S.5f). In diesem Sinne soll der Mathematikunterricht dazu qualifizieren, offene Aufgabenstellungen zu bearbeiten, Anwendungsmöglichkeiten mathematischer Konzepte und Modelle auf alltägliche und komplexe Problemstellungen zu erkennen, die einem Problem zugrunde liegende mathematische Struktur zu sehen, Aufgabenstellungen in geeignete Operationen zu übersetzen und Lösungsroutinen zu beherrschen (Köller, Baumert & Bos, 2001, S. 273f).

TIMSS wurde dieses Verständnis der mathematischen Grundbildung (mathematical literacy) zugrunde gelegt (Köller, Baumert & Bos, 2001, S. 273f). Im Unterschied zu PISA wurde bei TIMSS neben der Anwendungsorientierung die curriculare Anbindung der Testaufgaben versucht.

PISA verzichtet auf transnationale curriculare Validität und fokussiert die Erfassung von Basiskompetenzen in variierenden, authentischen Anwendungssituationen (Baumert, Stanat & Demmrich, 2001, S. 19). Nach der Vorstellung der OECD sind diese Basiskompetenzen Voraussetzung für eine persönlich und wirtschaftlich befriedigende Lebensführung und eine aktive Teilhabe am gesellschaftlichen Leben als konstruktiver, engagierter und reflektierender Bürger, der kontinuierlich weiter lernt (Baumert et al., 2001, S. 285; Klieme, Neubrand & Lüdke, 2001, S. 141). Damit lehnte sich das PISA zugrunde liegende normative Konzept der mathematischen Grundbildung neben dem Verständnis der NCTM an die Idee der Realistic Mathematics Education (RME) nach Freudenthal (vgl. Heuvel-Panhuizen, 2003, S. 25ff) an, wonach mathematische Konzepte, Strukturen und Ideen als Werkzeuge zur Erschließung und Strukturierung der Phänomene der physischen, sozialen und geistigen Welt ihre Daseinsberechtigung erfahren (Baumert et al., 2001, S. 294; Baumert, Stanat & Demmrich, 2001, S. 25). Statt dem ausschließlichen Beherrschen mathematischer Sätze, Regeln und Verfahren geht es darum, mathematische Konzepte zu vernetzen und zu modellieren, die Rolle der Mathematik in der sozialen, kulturellen und technischen Welt zu verstehen, Sachverhalte unter mathematischen Gesichtspunkten angemessen zu beurteilen und Mathematik aktiv zu nutzen. Voraussetzung für diese verständige Anwendung im Alltag ist ein begriffliches Verständnis mathematischer Sachverhalte (Baumert, Stanat & Demmrich, 2001, S. 25).

2.3 Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich

2.3.1 Kompetenzmodell der Bildungsstandards

Die in den Bildungsstandards für den Primarbereich bis zum Ende der Grundschulzeit zu erreichenden Kompetenzen beschreiben Dispositionen zur Bewältigung bestimmter Anforderungen und sind fach- beziehungsweise lernbereichsspezifisch ausformuliert, da sie an bestimmten Inhalten erworben werden müssen (KMK, 2005b, S. 16). Klieme et al. (2003, S. 75) betonen die starke fachliche Bindung von Kompetenz. Dies entspricht zwar einem breit akzeptierten und häufig verwendeten Verständnis von Kompetenz, spiegelt aber, wie aus Kapitel 2.2 hervorgeht, nur ein mögliches Kompetenzkonzept wider. Die Kompetenzerwartungen werden in diesen fachspezifischen Leistungsstandards (Zeitler, Köller & Tesch, 2010, S. 23) durchgängig als pragmatische Könnensbeschreibungen (Can Do-Statements) formuliert (Köller, 2008, S. 61; Pant, Böhme & Köller, 2012, S. 49). So werden notwendige Schülerhandlungen und Verhaltensweisen für Anwendungssituationen beziehungsweise zur Bewältigung komplexer Problemstellungen beschrieben, die die dahinter liegenden, zu erreichenden Kompetenzen indizieren, da diese selbst nicht direkt beobachtbar sind.

Im Fach Mathematik wird zwischen den in Abbildung 7 aufgeführten allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen unterschieden.

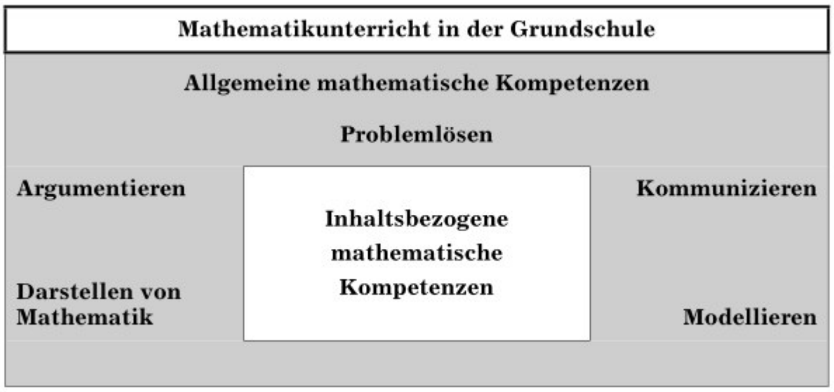


Abbildung 7: Allgemeine mathematische Kompetenzen in den Bildungsstandards (KMK, 2005a, S. 7).

Neben den fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen, worunter Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Darstellen zu zählen sind, werden eng damit verbundene inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen zu den Leitideen Zahlen und Operationen, Raum und Form, Muster und Strukturen, Größen und Messen sowie Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit aufgezeigt, wobei erwartet wird, dass die Schülerinnen und Schüler diese Kompetenzen in außermathematischen („Anwendungsorientierung") und in innermathematischen („Strukturorientierung") Kontexten nutzen können. Der Mathematikunterricht in der Primarstufe dient also sowohl dazu, das Mathematiklernen in der weiterführenden Schule vorzubereiten, als auch dazu, für die Auseinandersetzung mit mathematischen Anforderungen im Alltag zu befähigen. Das Mathematiklernen in der Grundschule darf nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten reduziert werden, vielmehr ist die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathematischer Inhalte anzustreben (KMK, 2005a, S. 6f). Die aufgeführten Kompetenzen sollen Lehrkräften bei aller notwendigen Offenheit für die individuellen kindlichen Prozesse der Aneignung von Mathematik eine klare Perspektive für die anzustrebenden Ziele aufzeigen (KMK, 2005a, S. 7). Im Zuge der Operationalisierung der mathematischen Kompetenzen für den Ländervergleich 2011 fanden Roppelt und Reiss (2012, S. 42) heraus, dass sich die inhaltlichen Kompetenzen relativ gut gegeneinander abgrenzen lassen.

Neben diesen allgemeinen und inhaltsbezogenen Kompetenzen (vgl. zusammenfassend Roppelt & Reiss, 2012) werden drei Anforderungsbereiche unterschieden, die in den Bildungsstandards anhand von Aufgabenbeispielen konkretisiert werden und im Kompetenzmodell von Walther und Granzer (2009), das in Abbildung 8 aufgezeigt wird, eine dritte Achse bilden (vgl. Criblez et al., 2009, S. 74).

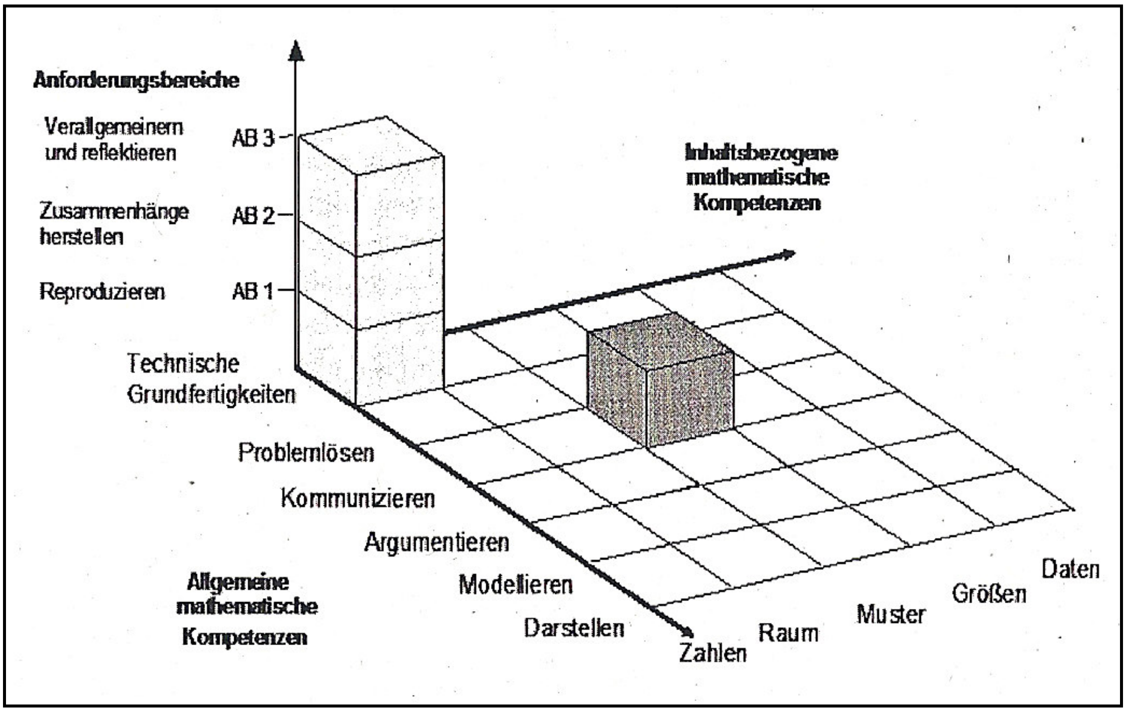


Abbildung 8: Kompetenzmodell der Bildungsstandards (Walther & Granzer, 2009, S. 115).

Mathematische Aufgaben lassen sich stets in Bezug auf alle drei Dimensionen charakterisieren, die untrennbar miteinander verwoben sind (Roppelt & Reiss, 2012, S. 35f). Dem Beschluss der Bildungsstandards folgte eine Reihe fachdidaktischer Publikationen, die sich mit der Umsetzung der formulierten Kompetenzen im konkreten Unterricht beschäftigen. Wollring und Rinkens (2008, S. 119ff) konkretisieren anhand einiger Aufgabenbeispiele für Lehrkräfte, wie die allgemeinen mathematischen Kompetenzen für den Inhaltsbereich Raum und Form im Sinne eines kompetenzorientierten Geometrieunterrichts angewendet werden können. Walther, Selter und

Neubrand (2008, S. 16ff) verdeutlichen das Zusammenspiel von inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen sowie den Anforderungsbereichen anschaulich an einem Unterrichtsbeispiel zum inhaltlichen Bereich Zahlen und Operationen. Viele weitere Autoren thematisieren die in den Bildungsstandards formulierten Kompetenzen, um Lehrkräften bei deren Implementation Hilfestellungen zu bieten (Freißler & Mayr, 2007; Frühwacht, 2012; Grassmann et al., 2014; Schütte, 2008; Walther, 2004; Walther, Selter & Neubrand, 2008; Zeitler, Heller & Asbrand, 2012; Ziener, 2008). Im folgenden Kapitel werden die inhaltsbezogenen Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form erläutert, die Darstellung der drei Anforderungsbereiche erfolgt in Kapitel 4.

2.3.2 Inhaltsbezogene Kompetenzen zur Leitidee

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik werden insgesamt 47 inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen formuliert, die sich wie in Tabelle 3 dargestellt auf die fünf Leitideen verteilen.

Tabelle 3: Leitideen und inhaltsbezogene Kompetenzen
(eigene Darstellung in Anlehnung an KMK, 2005a, S. 8ff)

Leitidee	Anzahl inhaltsbezogener Kompetenzen
Zahlen und Operationen	15
Raum und Form	13
Muster und Strukturen	6
Größen und Messen	9
Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	4

Aufgrund des Fokus der vorliegenden Untersuchung auf geometrische Aufgaben erfolgt nun die Darstellung der Leitidee Raum und Form zur Konkretisierung der formulierten inhaltsbezogenen Kompetenzen.

> „Mit Raum und Form verbindet man zunächst „Geometrie“ schlechthin und damit das Beschreiben, Zeichnen und Ausmessen von Figuren und Körpern. Das aber ist nur ein Teil dessen, was die Bildungsstandards mit Raum und Form ansprechen." (Wollring & Rinkens, 2008, S. 118)

Nach Wollring und Rinkens (2008, S. 118ff) umfasst der Begriff Raum sowohl den drei- als auch den zweidimensionalen Anschauungsraum sowie die Gegenstände und deren Beziehungen in diesen Räumen. Mit dem Begriff Form sind Eigenschaften und Funktionen von Flächen, Linien und Körpern gemeint. Die Behandlung dieser Inhalte soll gestaltend und erschließend erfolgen sowie experimentelles und entdeckendes Arbeiten unterstützen. Die Autoren betonen, dass für die Grundschule zentrale Kompetenzen herausgehoben werden, die für die Weiterentwicklung geometrischen Denkens bedeutsam sind, und dass das Arbeiten im Inhaltsbereich Raum und Form darauf abzielt, sich Objekte im Raum verinnerlicht vorstellen, verinnerlicht bewegen und verinnerlicht ändern zu können.

Nach Grassmann et al. (2014, S. 97ff) ergeben sich aus sachlogischer Sicht vier Bereiche der Kompetenzentwicklung im Geometrieunterricht: Das räumliche Vorstellungsvermögen soll sich entwickeln, geometrische Begriffe sollen angeeignet werden, abbildungsgeometrische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen erworben werden und geometrische Objekte sollen hinsichtlich ihrer Längen, Flächen und Volumina quantifiziert werden können.

Diese vier Bereiche finden sich in den Bildungsstandards zur Leitidee Raum und Form wieder. Abbildung 9 zeigt die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche (IKB) auf, denen die 13 inhaltsbezogenen Kompetenzen zugeordnet wurden und die in den folgenden Ausführungen mit den in Klammern angegebenen Bezeichnungen abgekürzt werden: „sich im Raum orientieren" (IKB 1), „geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen" (IKB 2), „einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen" (IKB 3) sowie „Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen" (IKB 4).

3.2 Raum und Form

IKB 1	**sich im Raum orientieren**	○ über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen, ○ räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten), ○ zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen).
IKB 2	**geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen**	○ Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen, ○ Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen, ○ Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden, Falten...), ○ Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen.
IKB 3	**einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen**	○ ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern), ○ Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen, ○ symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln.
IKB 4	**Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen**	○ die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen, ○ Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen, ○ Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen.

Abbildung 9: Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form (in Anlehnung an KMK, 2005a, S. 10).

Bei den zum ersten inhaltsbezogenen Kompetenzbereich (IKB 1) formulierten Kompetenzen geht es beispielsweise darum, die räumliche Wahrnehmung zu fördern. Durch Aufgaben, in denen die Schülerinnen und Schüler sich auf Plänen (Stadtpläne mit Planquadraten, Gitternetzen oder Ähnliches) orientieren sowie Wege verfolgen oder finden sollen ohne die Pläne zu drehen, sollen diese Kompetenzen gefördert werden. Ebenso widmen sich Aufgaben zu Ansichten, in denen der Standort der Person innerhalb der Aufgabensituation liegt und die Schülerinnen und Schüler sich zur Aufgabenlösung in eine andere Perspektive versetzen oder den Standort mental wechseln müssen, und Aufgaben, in denen sich die Schülerinnen und Schüler Transformationen von Objekten vorstellen beziehungsweise ein Objekt identifizieren müssen, das aus verschiedenen Blickwinkeln gezeigt wird, der Förderung der räumlichen Orientierung, die IKB 1 zuzuordnen ist. Die genannten Tätigkeiten rund um Bauwerke, wie beispielsweise Würfelgebäude, werden durch Aufgaben angeregt, in denen den Würfelbauten verschiedene Baupläne zugeordnet oder selbst aufgeschrieben werden. Ebenfalls gefördert wird diese inhaltsbezogene Kompetenz in Aufgaben, in denen die Würfel innerhalb von Würfelbauten anzahlmäßig erfasst und noch fehlende Würfel bestimmt werden müssen, sodass ein Quader oder Würfel entsteht. Die Fähigkeit zur Veranschaulichung ist vor allem bei Aufgaben zu Abwicklungen und Netzen gefordert, die die gedankliche Vorstellung von räumlichen Bewegungen wie Drehungen, Verschiebungen und Faltungen von Objekten (Franke, 2009, S. 60) umfassen. In den

Aufgaben der Schulbücher werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, Körpernetze zu identifizieren oder zu vervollständigen. Abbildung 10 zeigt eine mögliche Aufgabe zu IKB 1.

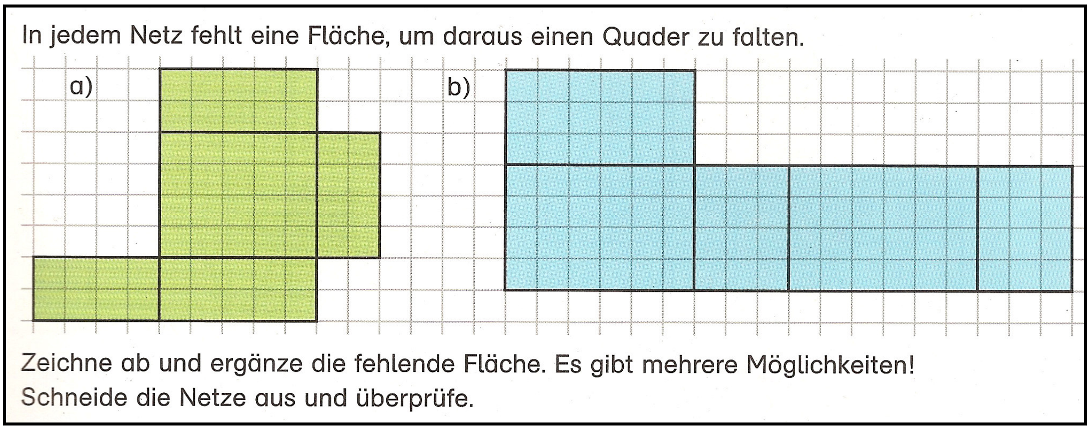


Abbildung 10: Aufgabe aus dem Lehrwerk Nussknacker 4 (Leininger et al., 2005, S. 29).

Der zweite inhaltsbezogene Kompetenzbereich (IKB 2) umfasst das Erkennen, Benennen und Darstellen geometrischer Figuren. Zur Förderung dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler der ersten und zweiten Jahrgangsstufe beispielsweise Gegenstände nach ihrer Form sortieren (Kugeln, Quader usw.) und die Körper benennen. Bis hin zur vierten Klasse sollten die Schülerinnen und Schüler zusätzlich genauere Kenntnisse über die jeweiligen Eigenschaften besitzen. Exemplarisch für Förderung dieser Kompetenz sind Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der Körper und ein Beispiel aus der Lebenswelt nennen oder Behauptungen zu geometrischen Figuren überprüfen sollen. Abbildung 11 zeigt eine solche Aufgabe auf. Ebenfalls diesem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich zuzuordnen sind Anregungen zum Herstellen der Figuren und derer Modelle sowie zur Anfertigung von Zeichnungen, mit und ohne Hilfsmittel, die in zahlreichen Aufgaben zu finden sind.

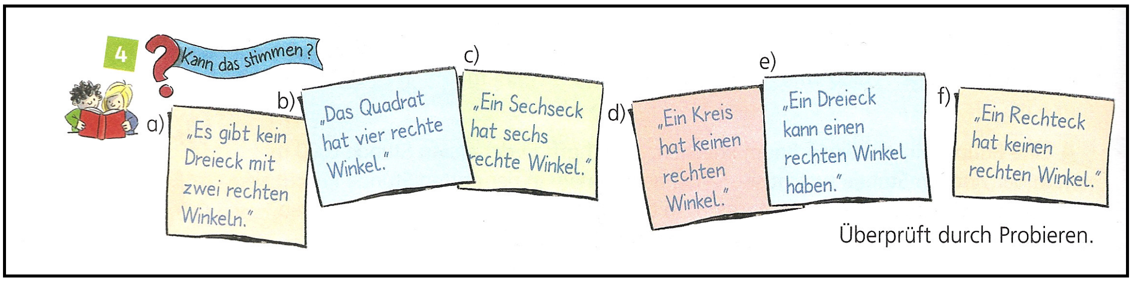


Abbildung 11: Aufgabe aus dem Lehrwerk Denken und Rechnen 4 (Eidt et al., 2009, S. 61).

Innerhalb des dritten inhaltsbezogenen Kompetenzbereichs (IKB 3) geht es darum, einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen zu können. Die Schülerinnen und Schüler sollen beispielsweise ebene Figuren in Gitternetzen abbilden und diese verkleinern oder vergrößern können. Sie sollen Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen können. In Abbildung 12 ist eine mögliche Aufgabe zum Spiegeln zu sehen. Auch Aufgaben, in denen symmetrische Muster fortgesetzt oder entwickelt werden sollen, fördern die Kompetenzen des IKB 3.

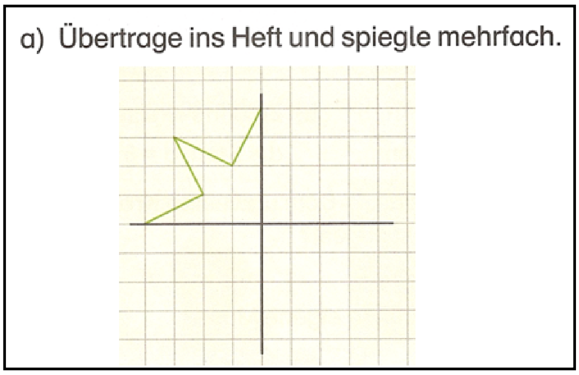


Abbildung 12: Aufgabe aus dem Lehrwerk Mathehaus 4 (Fuchs & Käpnick, 2008, S. 112).

Innerhalb des vierten inhaltsbezogenen Kompetenzbereichs (IKB 4) geht es um das Vergleichen und Messen von Flächen- und Rauminhalten. Der Flächeninhalt ebener Figuren soll beispielsweise durch Auslegen mit Einheitsflächen bestimmt werden können. Des Weiteren sollen Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren untersucht und durch Zerlegen verglichen werden. Generell sollten die Schülerinnen und Schüler die Zusammenhänge zwischen Flächeninhalt und Umfang kennen und erkennen. Bei einigen Aufgaben müssen die Begriffe Länge, Breite und Höhe abgerufen und miteinander in Verbindung gebracht werden (Abb. 13).

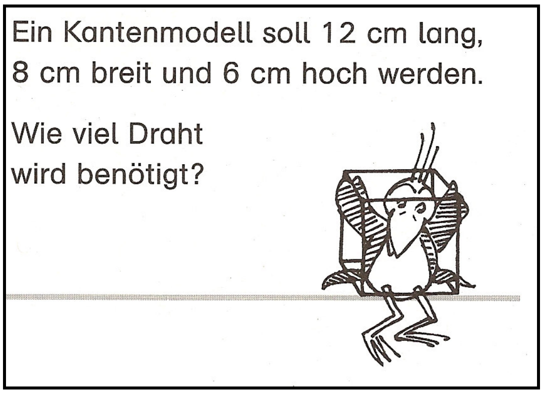


Abbildung 13: Aufgabe aus dem Lehrwerk Nussknacker 4 (Leininger et al., 2005, S. 31).

IKB 2, IKB 3 und IKB 4 spiegeln eher die klassische Geometrie wider, während IKB 1 das Fassen des realen Raumes, in dem wir leben und durch den wir uns bewegen, beinhaltet (Roppelt & Reiss, 2012, S. 39f). In den Bildungsstandards wurden zur Leitidee Raum und Form drei Aufgabenbeispiele zu den Themen Würfel, Würfelbauten und Dreiecken mit den jeweiligen zu fördernden Kompetenzen und Anforderungen abgebildet (2005a, S. 18ff). Sie werden in Kapitel 4.1 dargestellt.

Sowohl Grassmann et al. (2014, S. 109ff) als auch Wollring und Rinkens (2008, S. 118ff) stellen ausführlich Anregungen zur Entwicklung der in den Bildungsstandards zur Leitidee Raum und Form formulierten Kompetenzen in Form von Aufgabenbeispielen für Lehrkräfte dar.

Walther und Granzer (2009, S. 112) merken an, dass bei den durch die Bildungsstandards formulierten (inhaltsbezogenen) Kompetenzen vieles von dem wiederzufinden ist, was neuere Lehrpläne seit den 1980er-Jahren vorschreiben und worauf kompetente Lehrerinnen und Lehrer in ihrem Unterricht ohnehin Wert legen (Walther & Granzer, 2009, S. 112). Ein Blick auf den bereits vor dem Beschluss der Bildungsstandards und bis 2014 in Rheinland-Pfalz geltenden Teilrahmenplan Mathematik (hier: Orientierungsrahmen für Geometrie) bestätigt diese Aussage (Abb. 14).

Geometrie

	Klassenstufen 1 / 2	Klassenstufen 3 / 4
Raum	Bewegungen und Orientierung im Raum, räumliche Beziehungen, Lagebeziehungen (über – unter – auf, vor – hinter, links von – rechts von, ...)	
	Wege	Grundrisszeichnungen, Wegeskizzen, Pläne,
	Die Ebene mit Richtungen, Entfernungen und Koordinaten	
Ebene Figuren	Formenkenntnisse (Quadrat, Rechteck, Kreis, Dreieck, ..) Figuren auf dem Geobrett Muster, Ornamente, Parkettierungen	
	Punkt, Gerade, Strecke, Ecke , Winkel, ...	Senkrechte, Parallele, rechter Winkel
	Ähnlichkeitsuntersuchungen	Abbildungen (z.B. Vergrößern, Verkleinern)
Körper	Würfel, Quader, Kugel, Kegel, Pyramide, Zylinder verschiedene Ansichten, Kante, Seitenfläche, Grundfläche, Oberfläche,.... Modelle und Netze	
Symmetrie	Symmetrien in der Natur, Symmetrien bei von Menschen hergestellten Dingen	Achsen-, Dreh-, Schubsymmetrie
Geometrische Maße	Länge, Fläche, Volumen (Grundvorstellung)	Flächengrößen, Umfang Rauminhalt (Vorerfahrungen)

Abbildung 14: Ausschnitt zur Geometrie aus dem rheinland-pfälzischen Orientierungsrahmen (Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend, 2002, S. 34).

Zum 01.08.2015 trat der neue Teilrahmenplan Mathematik in Kraft, der an die in den Bildungsstandards definierten Kompetenzen angepasst und inhaltlich nicht grundlegend neugestaltet wurde. Veränderungen werden an dem deutlich strukturierteren und ausführlicheren Orientierungsrahmen und der Integration des Bereichs Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit ersichtlich. Der Inhaltsbereich Muster und Strukturen wird als übergreifend und als integraler Bestandteil aller Inhaltsbereiche bezeichnet. Zusätzlich werden die Kompetenzerwartungen zum Ende des zweiten Schuljahres aufgeschlüsselt. Die Anforderungsbereiche wurden nicht aufgenommen, es wird ein zweidimensionales Konzept verwirklicht, wobei inhaltsbezogene und prozessbezogene mathematische Kompetenzen miteinander verknüpft sind. Ausführungen zum Bereich Raum und Form finden sich auf den Seiten 19 bis 23 (Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend, 2014, S. 6ff).

2.3.3 Kompetenzstufen

Neben der Erstellung internationaler Ranglisten war die Beschreibung von empirischen Kompetenzstufen ein weiteres Ergebnis der international vergleichenden Schulleistungsstudien (Grüßing, 2012, S. 67). Um Kompetenzen, über die eine Schülerin oder ein Schüler zu einem bestimmten Zeitpunkt im jeweiligen Fach verfügt, differenziert beschreiben und einschätzen zu können, ist es wichtig, die strukturellen Aspekte, die Abstufung und die Entwicklung der gewünschten Kompetenzen zu kennen (Ufer, Reiss & Heinze, 2009, S. 61). Durch Kompetenzstufenmodelle werden kognitive Leistungsdispositionen auf unterschiedlichen Niveaus oder Stufen beschrieben und festgelegt (Reiss & Winkelmann, 2009, S. 120). Diese Konkretisierungen von Anforderungen an die Kinder auf verschiedenen Niveaus können für die Lehrkräfte hilfreich sein, um Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern gezielt fördern und Aufgaben mit entsprechenden Schwierigkeitsgraden passgenau generieren zu können (Reiss & Winkelmann, 2008, S. 37). Zeitler, Köller und Tesch (2010, S. 29) weisen zudem darauf hin, dass es neben den Lehrkräften auch für die Schülerinnen und Schüler und deren Eltern leichter sei, sich an diesen anschaulich beschriebenen Kompetenzstufen zu orientieren als an Mittelwerten.

Die Kompetenzstufenmodelle von TIMSS und PISA beschreiben Niveaustufen der mathematischen Kompetenz innerhalb der untersuchten Schülerpopulation der Sekundarstufe II (Klieme et al., 2003, S. 77). Bei TIMSS wurden zunächst die Aufgaben und ihre empirischen Schwierigkeitsparameter analysiert. Das gesamte Fähigkeitsspektrum beziehungsweise die Kompetenzskala wurde durch Experten in mehrere, inhaltlich sinnvoll voneinander abgrenzbare Abschnitte eingeteilt und die kognitiven Anforderungen, die Schülerinnen und Schüler bewältigen können, wurden auf vier Kompetenzstufen dargestellt. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Anordnung von Personen und Aufgaben auf demselben Maßstab, sodass am Kriterium der beschriebenen Aufgabenklassen, die eine Person löst beziehungsweise nicht löst, auf deren Verfügbarkeit kognitiver Operationen und somit auf das jeweilige Kompetenzniveau geschlossen werden kann (kriteriumsorientierte Testinterpretation). Eine Aufgabenschwierigkeit von 500 bedeutet demnach, dass Personen mit einer Fähigkeit von 500 diese Aufgabe mit hinreichender Sicherheit lösen können, nicht jedoch Personen mit einer Fähigkeit von 400 (Köller, Baumert & Bos, 2001, S. 276ff). Bei der Konstruktion des PISA-Tests wurden ebenfalls Personen mit ihren Fähigkeiten und Aufgaben mit ihren Schwierigkeitskennwerten auf einer Skala angeordnet. Zum Verständnis der mathematischen Kompetenz muss man sich demnach die Anforderungsmerkmale der unterschiedlich schwierigen Aufgaben betrachten. Das Kompetenzstufenmodell von PISA besteht aus fünf Niveaus (Klieme, Neubrand & Lüdtke, 2001, S. 160).

Im Rahmen der um Tests in Mathematik und Naturwissenschaft erweiterten IGLU-E-Studie im 4. Schuljahr und in Anbindung an die internationalen Vorarbeiten bildeten Walther et al. (2003, S. 202) erstmals Fähigkeitswerte zur mathematischen Grundbildung von Schülerinnen und Schülern der 4. Jahrgangsstufe auf fünf Kompetenzstufen ab, sodass ein a-posteriori-Modell mathematischer Kompetenz für die Primarstufe vorlag (Walther et al., 2003, S. 202; Ufer, Reiss & Heinze, 2009, S. 64).

Auf der Grundlage dieses von empirischen Daten ausgehenden Modells entwickelte Reiss auf einer theoretischen Basis ein verfeinertes a-priori-Modell mit fünf Niveaubeschreibungen, das neben der vierten auch die anderen Jahrgangsstufen der Grundschule einbezieht. Mit Hilfe dieses jahrgangsstufenübergreifenden Modells sollen die mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler, die sich während der gesamten Grundschulzeit entwickeln, eingeschätzt und entsprechende Fördermaßnahmen abgeleitet werden. Die Kompetenzstufen spiegeln dabei in allen Jahrgangsstufen dasselbe Anspruchsniveau wider, woraus sich ergibt, dass die in der vorhergehenden Jahrgangsstufe dem Niveau II zugeordneten Kompetenzen im darauffolgenden Schuljahr zu Niveau I zu zählen sind und somit stets als Grundlage für den Erwerb neuer Konzepte gelten (Ufer, Reiss & Heinze, 2009, S. 66ff). Davon ausgehend, dass die aufsteigende Schwierigkeit der Items ein höheres Entwicklungsniveau charakterisiert, wurden Items mit ähnlicher Schwierigkeit den beschriebenen Kompetenzentwicklungsniveaus hypothetisch zugeordnet. Die Zuordnung der Items erfolgte somit ausschließlich auf einer theoretischen Grundlage, nicht wie bei PISA auf der Grundlage von empirischen Daten, und konnte bisher nicht vollständig empirisch geprüft werden (Reiss, Heinze & Pekrun, 2008, S. 115ff).

Allerdings diente das Modell als Grundlage für die Entwicklung der bayerischen Orientierungsarbeiten, die von den rund 600 Schülerinnen und Schülern des zweiten und dritten Schuljahres geschrieben werden. Dabei zeigte sich, dass sich Items aus dem Bereich der Geometrie insgesamt weniger leicht in ein bestimmtes Niveau (Reiss, Heinze & Pekrun, 2008, S. 120) einordnen zu lassen scheinen, dass mit Blick auf die Lösungsraten einige Geometrieaufgaben schwieriger als vermutet waren und dass die Varianz der Schwierigkeitswerte geringer wird, wenn die Items aus dem Bereich der Geometrie nicht berücksichtigt werden (Reiss, Heinze & Pekrun, 2008, S. 121). Die Gründe für diese Schwierigkeit, die Geometrie angemessen einzuordnen, sind nach Reiss, Heinze und Pekrun (2008, S. 124) der eher geringe Umfang des Geometrieunterrichts in der Grundschule und die eher geringe Systematik der Unterrichtsangebote. Erklärungsbedarf entstand beispielsweise in Jahrgangsstufe 2 hinsichtlich eines besonders leichten Items des Kompetenzniveaus IV. Es handelte sich um eine geometrische Aufgabenstellung, bei der in Gedanken eine Figur an einem Geobrett gespannt werden sollte. Das Ergebnis war ein gleichschenkliges Dreieck und wurde von über der Hälfte der Kinder korrekt identifiziert. Reiss, Heinze und Pekrun (2008, S. 117f) führen die Tatsache, dass dieses Item leichter war als erwartet, darauf zurück, dass das Erkennen von aus dem Alltag vertrauten Dreiecken und somit einfachen Figuren dem Grundwissen zugeordnet werden kann. Für diese Interpretation spricht, dass ein ähnlicher Effekt für die Aufgabe, bei der ein Rechteck zu identifizieren war, nicht auftrat (Ufer, Reiss & Heinze, 2009, S. 75). Insgesamt konnte das Modell im Rahmen der Pilotierung von Items für die bayerischen Orientierungsarbeiten in einzelnen Aspekten, nämlich bezüglich der Einordnungen für die zweite und dritte Jahrgangsstufe, bestätigt werden (Reiss, Heinze & Pekrun, 2008, S. 115). Ufer, Reiss und Heinze (2009) sprechen den beschriebenen Kompetenzmodellen insgesamt eine gute Prädiktionskraft für die relativen Itemschwierigkeiten zu und führen Fälle, in denen die Modelle fehlschlagen, auf unglückliche Itemformate zurück. Wenn tatsächlich eine fehlerhafte Einschätzung der Verfügbarkeit einzelner Wissenskomponenten zugrunde liege, sollte versucht werden, die Unterschiede adäquater beschreiben zu können (Ufer, Reiss & Heinze, 2009, S. 78).

Während bei den beiden soeben beschriebenen Kompetenzstufenmodellen die verschiedenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen integrativ behandelt wurden, beinhaltet das neuere Modell von Reiss und Winkelmann (2009, S. 125ff) neben einem globalen Modell die gesonderte Beschreibung der Niveaus für die fünf inhaltlichen Leitideen aus den Bildungsstandards, unter genauer Verwendung der dort zu findenden Formulierungen. Es besteht somit aus fünf Teilmodellen mit jeweils fünf Kompetenzstufen und ist nur für Jahrgangsstufe 4 spezifiziert. Parallel zu der theoretischen Erarbeitung dieser Stufen erfolgte 2006 im Rahmen von IGLU die Pilotierung der Aufgaben durch die Kultusministerkonferenz in Zusammenarbeit mit dem IQB, sodass bei der Modellgenerierung fortlaufend empirische Ergebnisse berücksichtigt beziehungsweise abgeglichen werden konnten (Reiss & Winkelmann, 2009, S. 123). 2007 schloss sich die Normierungsstudie im Rahmen von TIMSS an, wobei den Items, wie auch bei PISA und IGLU, über die empirisch gewonnenen Lösungshäufigkeiten im Rahmen der Item-Response-Theorie Schwierigkeitsparameter zugewiesen wurden, sodass sie in eine Rangreihenfolge (aufsteigende Schwierigkeit) gebracht und gemeinsam mit den Fähigkeitswerten der Schülerinnen und Schüler auf einer Skala abgebildet werden konnten (M = 500, SD = 100). Dadurch war gleichzeitig die Anbindung an die internationale Diskussion gewährleistet (Köller, 2008, S. 61ff; Zeitler, Köller & Tesch, 2010, S. 30). Es ergab sich eine Breite der Stufen von 70 Punkten und die in Abbildung 15 in Klammern angegebenen prozentualen Anteile der Viertklässler auf den jeweiligen Kompetenzstufen.

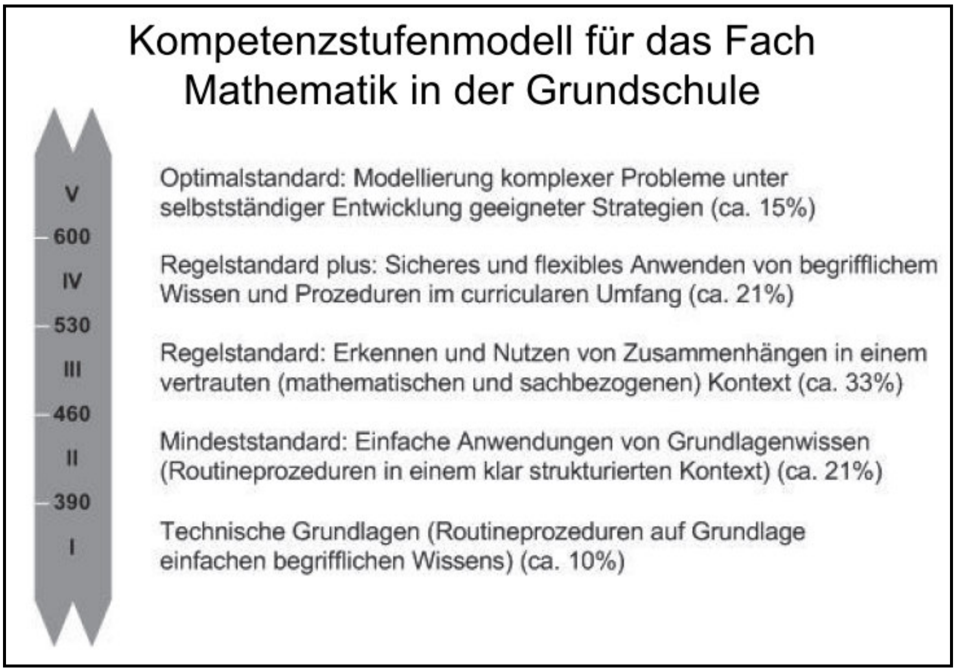


Abbildung 15: Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule (KMK & IQB, 2013, S. 11).

Die zusätzlich zu dieser empirisch abgesicherten Stufenfolge mathematischer Kompetenz für die 4. Jahrgangsstufe formulierten Kompetenzen auf den jeweiligen Stufen für alle fünf Leitideen wurden mit Aufgaben illustriert, um die beschriebenen Fähigkeiten zu konkretisieren. Für die allgemeinen Kompetenzen ist eine solche Darstellung nicht möglich, da die meisten Aufgaben nicht eindeutig nur einer allgemeinen Kompetenz zugeordnet werden können (KMK & IQB, 2013, S. 15). Im Jahr 2013 schließlich veröffentlichten die Kultusministerkonferenz und das IQB dieses Modell als „Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)".

Beim Teilmodell für die Leitidee Raum und Form werden auf Stufe 1 in allen Bereichen Grundkenntnisse nachgewiesen, die reproduktiv eingesetzt werden können. Das begriffliche Wissen kann nur in eingeschränkten Kontexten angewendet werden und beschränkt sich auf einfache Formen der ebenen Geometrie mit klar trennbaren Eigenschaften. Spiegelbilder einfacher, geradlinig begrenzter Figuren, wie in Abbildung 16 aufgezeigt, werden korrekt gezeichnet. Mit geometrischen Formen kann auf Grundlage bildlicher Darstellungen beziehungsweise des Gitternetzes gearbeitet werden. Räumliche Orientierung ist nur in sehr einfachen Situationen möglich (KMK & IQB, 2013, S. 16).

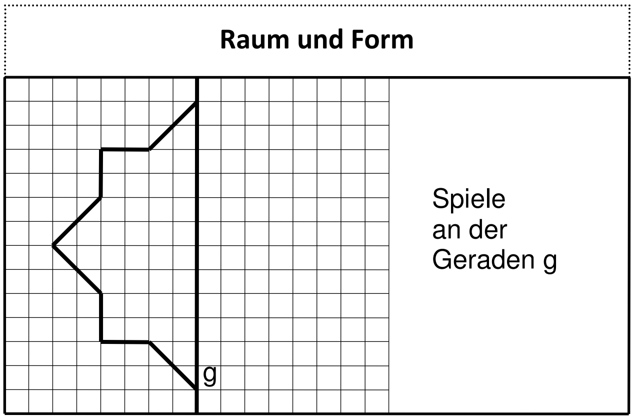


Abbildung 16: Beispielaufgabe auf der Stufe 1 für den Bereich „Raum und Form"
(Reiss & Winkelmann, 2009, S. 130).

Auf Stufe 2 werden einfache Grundbegriffe der ebenen und der im Alltag verankerten räumlichen Geometrie korrekt verwendet. Strukturelle Eigenschaften und räumliche Beziehungen einfacher räumlicher Gebilde können zur Problemlösung genutzt werden. Trotz Perspektivwechsel können Lagebeziehungen korrekt gesehen und komplexere geometrische Muster fortgesetzt werden.

Auf Stufe 3 können die Schülerinnen und Schüler das curricular vorgegebene begriffliche Wissen korrekt verwenden. Räumliche Beziehungen werden zur Lösung komplexer Aufgaben genutzt. Achsenspiegelungen werden in strukturierten Umgebungen, wie beispielsweise Gitternetz oder Geobrett, ausgeführt. Vertraute ebene Figuren wie Quadrat, Rechteck oder Kreis können im Hinblick auf ihre Symmetrieeigenschaften untersucht werden. Bei Körpern wird mit verschiedenen Darstellungen sinnvoll gearbeitet, wobei Zusammenhänge und räumliche Orientierung genutzt werden. Exemplarisch ist die in Abbildung 17 aufgezeigte Aufgabe zum Würfelnetz dargestellt (KMK & IQB, 2013, S.16f).

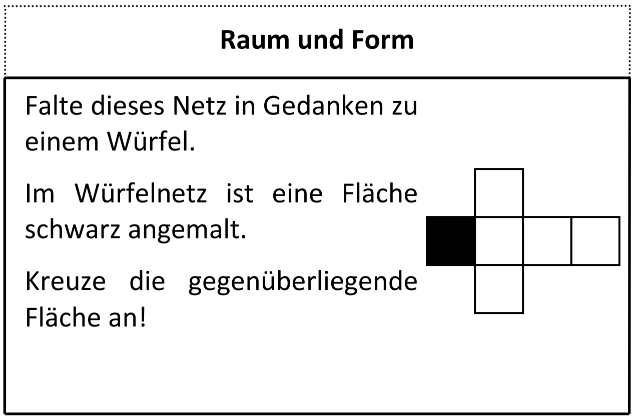


Abbildung 17: Beispielaufgabe auf der Stufe 3 für den Bereich „Raum und Form"
(Reiss & Winkelmann, 2009, S. 131).

Flexibel verwendet werden kann das begriffliche Wissen auf Stufe 4. Bei Konstruktionen können Lage und Größe der Figuren berücksichtigt werden. Körpernetze werden erkannt und korrigiert. Maßstabsgerechtes Zeichnen und das Vollziehen mentaler Operationen im Raum gelingen. Begründungen für geometrische Zusammenhänge können angemessen beurteilt werden. Auf der 5. Stufe schließlich kann umfangreiches begriffliches Wissen flexibel verwendet werden. Ungewohnte oder komplexe Situationen bereiten keine Probleme, Zusammenhänge können begründet werden. Verallgemeinern, räumliches Denken, analytische Durchdringung und Reflexion gelingen.

Auf der Grundlage dieses Kompetenzstufenmodells konnten folgende Mindest-, Regel- und Optimalstandards definiert werden. Mindest- oder Minimalstandards (Stufe II) beziehen sich auf ein Minimum an Kompetenzen, das alle Schülerinnen und Schüler bis zu einem bestimmten Bildungsabschnitt erreicht haben sollten (KMK & IQB, 2013, S. 10). Nach Ziener (2008, S. 61) haben diejenigen, die den Mindeststandard nicht erreichen, das jeweilige Bildungsziel nicht erreicht. Durchschnittliche Leistungserwartungen beziehungsweise das mittlere Kompetenzniveau (Stufe III), das von Schülerinnen und Schülern sowohl unter- als auch überschritten werden kann, wird durch die Regelstandards formuliert. Diese beziehen sich auf Kompetenzen, die im Durchschnitt von den Schülerinnen und Schülern erreicht werden sollen (KMK & IQB, 2013, S. 10). Zwischen diesen Regelstandards und den Optimalstandards liegt der Leistungsbereich, der als Regelstandard plus bezeichnet wird (KMK & IQB, 2013, S. 10). Die Optimal- beziehungsweise Idealstandards schließlich „beziehen sich auf Leistungserwartungen, die unter sehr guten bzw. ausgezeichneten individuellen Lernvoraussetzungen und der Bereitstellung gelingender Lerngelegenheiten innerhalb und außerhalb der Schule erreicht werden und die Erwartungen der Bildungsstandards übertreffen" (KMK & IQB, 2013, S. 10).

Beim Ländervergleich 2011 wurden die rheinland-pfälzischen Schülerinnen und Schüler den fünf Kompetenzstufen zugeordnet. Im Bereich Mathematik (global) verfehlten rund 13 Prozent den Mindeststandard (Kompetenzstufe I), knapp 22 Prozent erreichten den Mindeststandard (Kompetenzstufe II) und ungefähr 65 Prozent erreichten beziehungsweise übertrafen den Regelstandard (Kompetenzstufen III, IV oder V). 14 Prozent erzielten herausragende Leistungen (Kompetenzstufe V). Diese Verteilung auf die Kompetenzstufen liegt im Mittelfeld aller Bundesländer (Stanat et al., 2012b, S. 158ff).

3 Kognitive Anforderungen in Aufgaben

In Kapitel 3.1 erfolgen zunächst allgemeine Anmerkungen zu Aufgaben und die Darstellung einiger der zahlreich in der Literatur existierenden Klassifikationsmöglichkeiten, um einen Einblick in deren Vielfalt zu geben. Bei manchen Betrachtungsweisen taucht das Aufgabenmerkmal der kognitiven Anforderungen bereits implizit auf (Büchter & Leuders, 2005; Christiansen & Walther, 1986; Schmidt-Thieme, 2003; Winter, 1987). Bevor in Kapitel 3.3 auf Aufgabenbeschreibungen eingegangen wird, die explizit von kognitiven Anforderungen sprechen, werden in Kapitel 3.2 kognitionstheoretische Grundlagen gelegt. Der Begriff Kognition (lat. cognito = Erkenntnis, Erkennen, die Erkenntnis betreffend) bezeichnet als Sammelbegriff alle geistigen Prozesse, die eine höhere Ebene der Verarbeitung benötigen, wie beispielsweise Wahrnehmung, Aufmerksamkeit, Erinnern, Vergessen, Denken, Verstehen und Sprachverstehen, Lernen, Begriffsbildung, Regellernen, Erkennen, Vergleichen, Urteilen, Problemlösen, Schlussfolgern, Entscheiden, Einsetzen von Strategien oder Organisieren. Eine kognitive Sichtweise auf das Lernen war bereits im antiken Griechenland vorherrschend und kann heute wieder als allgemein vertretene, übereinstimmend akzeptierte philosophische Orientierung gelten (Woolfolk, 2008, S. 307). Kognitive Psychologen sehen den Menschen als informationsverarbeitendes Wesen, das aktiv und auf einer individuellen Wissensgrundlage aufbauend die soeben genannten kognitiven Prozesse steuert. Im 20. Jahrhundert beschäftigten sich viele Psychologen mit der kognitiven Entwicklung von Kindern, sodass zahlreiche Erkenntnisse vorliegen. Es werden die Theorien zur kognitiven Entwicklung von Piaget, Bruner, Aebli, Galperin und Lompscher sowie Ausubel erläutert (Kap. 3.2.1) und kognitive Prozesse innerhalb eines Informationsverarbeitungsprozessmodells (Kap. 3.2.2) sowie die bis heute einflussreichen Taxonomien für den kognitiven Bereich dargestellt (Kap. 3.2.3). Im Anschluss daran werden kognitive Anforderungen geschildert (Kap. 3.3), wie sie beispielsweise in den Aufgabensystemen von Schulleistungsstudien und in den im vierten Kapitel zu erläuternden Anforderungsbereichen der Bildungsstandards unterschieden werden. Neben kognitiven Anforderungen werden abschließend weitere Aufgabenmerkmale (Qualität, Schwierigkeit, Bekanntheitsgrad) thematisiert (Kap. 3.4).

3.1 Aufgaben und Möglichkeiten der Klassifikation

Durch die aktuelle Präsenz von Schulleistungsstudien, Vergleichsarbeiten und Ländervergleichen sowie den Beschluss der Bildungsstandards liegt ein Schwerpunkt im deutschen Bildungswesen aktuell in der Weiterentwicklung der Aufgabenkultur (Büchter & Leuders, 2005, S. 13), unter anderem mit dem Ziel der Förderung eines vertieften, konzeptuellen Verstehens im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht (Blum & Wiegand, 2000). Durch die Erarbeitung kompetenzorientierten Unterrichtsmaterials soll sowohl ein nachhaltiger Wissenserwerb ermöglicht werden als auch die Implementierung der Bildungsstandards mit dem Ziel der Qualitätsentwicklung im Bildungswesen erfolgen (Granzer & Walther, 2008, S. 9). Käpnick (2003, S. 169) bezeichnet Aufgaben als Hauptmittel für das Erarbeiten, das Üben, das Anwenden und das Prüfen von Lerninhalten. In der fachdidaktischen Literatur sind zahlreiche Hinweise zur Unterscheidung zwischen Aufgaben zum Lernen und Aufgaben zum Leisten zu finden (Büchter & Leuders, 2005, S. 114ff; Leuders, 2006, S. 82ff). Neubrand (2002, S. 17) zählt Aufgaben neben Definitionen, Sätzen, Wiederholungen, Zusammenfassungen, Reflexionen, Erklärungen, Einordnungen und vielem mehr zu den Elementen des Mathematikunterrichts und grenzt sie dahingehend voneinander ab, dass Aufgaben auf Einzelfälle bezogen sind im Gegensatz zu den weiteren Elementen, die eher theoretisch und somit allgemeiner beziehungsweise abstrakter ausgerichtet sind. Somit sind Aufgaben nach

Neubrand (2002, S. 17) eine Aufforderung zur gezielten Bearbeitung eines eingegrenzten mathematischen Themas und die Auseinandersetzung mit einem Beispiel eines Sachverhalts (Neubrand, 2002, S. 17). Mit dieser Auffassung von Aufgaben befindet sich Neubrand (2002) in der Mitte zwischen Doyle (1983), der den Begriff Aufgabe so weit fasst, dass eine ganze Unterrichtsstunde darin bestehen kann, eine einzige Aufgabe zu bearbeiten, und Renkl (1991), für den bereits eine einzelne Lehrerfrage eine Aufgabe darstellt. Renkl unterscheidet zudem performanzorientierte und strukturorientierte Aufgaben und zerlegt auch einzelne Textaufgaben in mehrere Aufgaben. Klauer (2001, S. 105) differenziert zwischen freien und gebundenen Aufgabenformen. Christiansen und Walther (1986) unterschieden, wie in Tabelle 4 gegenüber gestellt, zwischen Übungen (exercises) und Problemen (problems), und ob die Aufgabe den Schülerinnen und Schülern schriftlich oder mündlich gestellt wird.

Tabelle 4: Unterscheidung zwischen exercises und problems nach Christiansen & Walther (1986, p. 274)

Routine tasks (exercises)	**Nonroutine tasks (problems)**
Recognition exercises	Process problems
Algorithmic exercises	Open search problems
Application exercises (word problems)	Problem situations

Christiansen und Walther (1986, p. 276) nennen den Kontext, die Komplexität, den Grad der Offenheit, die Präsentationsart und den Ursprung der Aufgaben als Kriterien, nach denen sie analysiert und reflektiert werden sollten. Wie in Abbildung 18 veranschaulicht, ordnen sie Aufgaben im Zentrum des Unterrichtsgeschehens ein und betonen damit deren Bedeutung, die in der Steuerung des Unterrichts durch die Lehrkraft und in der Anregung der Schüleraktivitäten liegt.

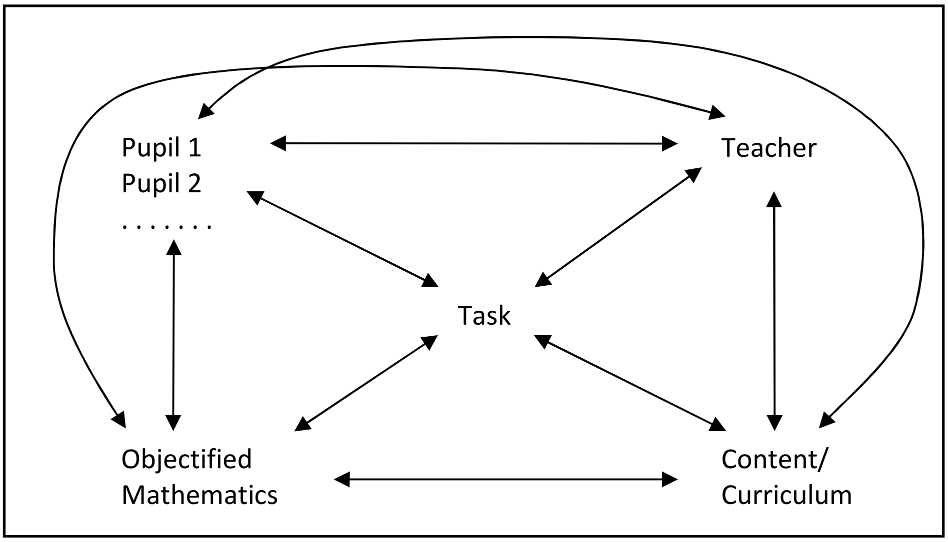


Abbildung 18: Aufgaben im Unterrichtsgeschehen nach Christiansen & Walther (1986, p. 247).

Aeblis (1987, S. 20ff) Taxonomie der Schülertätigkeiten eignet sich ebenfalls zur Klassifikation von Aufgaben. Aus den Abbildung 19 zu entnehmenden drei Dimensionen ergeben sich durch die Kombination der Merkmale insgesamt acht Tätigkeitsformen. Aufgaben können somit in Abhängigkeit der bei den Schülerinnen und Schülern hervorgerufenen Aktivitäten oder Denkprozessen gruppiert werden.

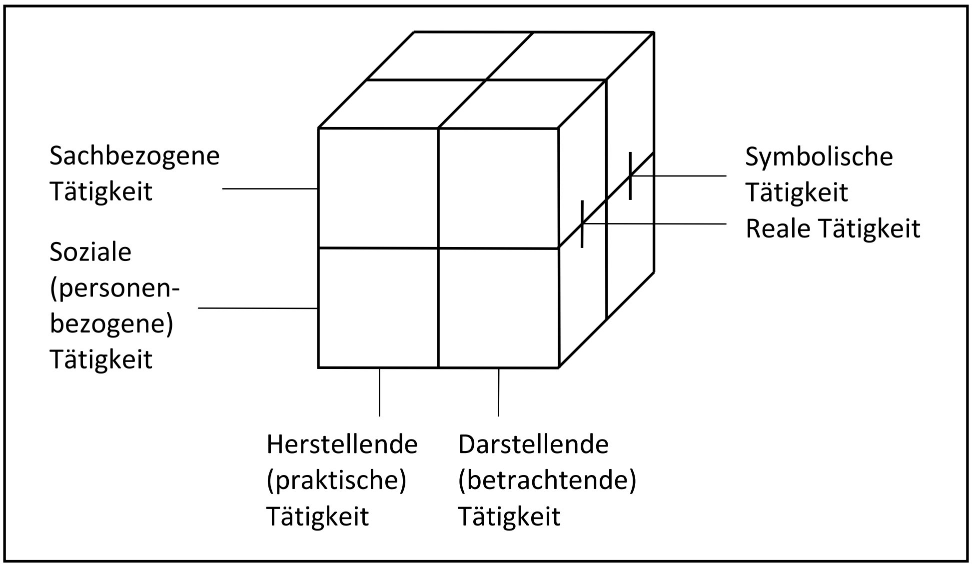


Abbildung 19: Taxonomie der Schülertätigkeiten nach Aebli (Aebli, 1987, S. 22).

Diese Betrachtungsweise verwenden auch Büchter und Leuders (2005, S. 14ff), die Aufgaben aus drei unterschiedlichen Perspektiven beschreiben. Neben der Einordnung nach den mathematischen Prozessen, die durch die Aufgaben angestoßen werden sollen, also den Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler wie Modellieren, Problemlösen, Argumentieren und das Bilden von Begriffen, nennen sie das Ordnen der Aufgaben nach wesentlichen übergreifenden und qualitätsbestimmenden Merkmalen und nach den Funktionen der Aufgaben im Schulalltag, also ob es Aufgaben zum Lernen oder zur Einschätzung von Kompetenzen sind. Herget (2006, S. 178ff) betrachtet Aufgaben hinsichtlich der verschiedenen Schülertätigkeiten und der äußeren Gestaltung.

Schmidt-Thieme (2003, S. 162f) bestimmt Aufgaben durch vier Faktoren, nämlich durch die Mathematik (zum Beispiel Aufgaben mit Zahlen, eingekleidete Aufgaben, Textaufgaben, Sachaufgaben), durch das Verhältnis von Sache und mathematischen Operationen (Erarbeiten, Üben, Verstehen mathematischer Sachverhalte vs. Bewältigung von Alltagsproblemen mithilfe der Mathematik), nach der Form (mündlich oder schriftlich, mit Bildern oder sprachlichen Zeichen, nach der Art der Kodierung, dem Verhältnis von Symbol- zu Wortgebrauch, mit fach- oder umgangssprachlichen Elementen) und nach den Funktionen in Unterrichtsphasen (Problementdeckung, Lösungserarbeitung, Üben von Verfahren beziehungsweise Festigung von Verständnis, Anwendung).

Neubrand (2002, S. 15) ordnet mathematische Aufgaben hinsichtlich ihrer Funktionen auf der Ebene der konzeptionellen Gestaltung des Lehrens und Lernens von Mathematik, auf der Ebene der Steuerung des Unterrichts durch die Lehrerinnen und Lehrer und auf der Ebene der Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler.

Für Winter (1987, S. 14ff), der sich mit dem Prinzip des entdeckenden Lernens beschäftigte, sind Lerninhalte fundamentale bedeutsame mathematische Ideen, die angeordnet werden nach dem genetischen Prinzip, das heißt durch eigentätiges Entwickeln von Begriffen durch Entdecken und Schematisieren, und dem Spiralprinzip mit dem Ziel, Fertigkeiten, Kenntnisse, Fähigkeiten und Einstellungen zu erwerben. Wie in Tabelle 5 zu erkennen ist, unterscheidet er vier Übungstypen, die sich auf das Automatisieren von Algorithmen, den Auf- und Ausbau von Wissensnetzen, der Stabilisierung komplexer Schemata oder auf das Vorleben von Haltungen beziehen können.

Tabelle 5: Übungstypen nach Winter (1987, S. 29)

Zielbereich	äußerstes Ziel	Hauptübungstyp
Fertigkeiten	geläufig und sicher beherrschen	Algorithmen automatisieren
Wissen	gut organisiert und leicht abrufbar zur Verfügung haben	Wissensnetze auf- und ausbauen
Fähigkeiten	flexibel anwenden können	komplexe Schemata stabilisieren, Heurismen bewußt machen
Positive Einstellungen/Haltungen	Problemsensitivität, Beharrungsvermögen, Sachlichkeit verinnerlicht haben	Haltungen vorleben, positive Erlebnisse bestärken

Auch Wittmann (1992, S. 178ff) beschäftigte sich intensiv mit Übungstypen, nach denen er Aufgaben einteilt. Unter Üben versteht er das wiederholte Anwenden eines Satzes von Wissenselementen oder einer Fertigkeit bei einer Serie von gleichartigen Aufgaben. Bezüglich des Grades an Strukturierung unterscheidet er unstrukturiertes, schwach- beziehungsweise teilstrukturiertes und strukturiertes Üben. Bezogen auf die Darstellungsform kann das Üben entweder gestützt auf Anschauungsmaterial und Handlungen an diesem Material oder formal (symbolische Ebene) erfolgen. Die strukturierten Übungen unterteilt er weiterhin nach Art der Strukturierung (problemstrukturiert, operativ strukturiert oder sachstrukturiert) sowie nach Zugang zur Struktur (reflektiv oder immanent). Aufbauend auf Winter zeigt er in seinem didaktischen Rechteck die Zusammenhänge von Übungsanteilen mit dem Unterrichtsgeschehen bei der Erarbeitung eines Themas beziehungsweise eines Themenbereichs auf. Zusammenhangslose Übungsaufgaben, mit denen eine Fertigkeit isoliert und ohne auf tieferes Verständnis zu bauen eingeschliffen wird, bezeichnet er als graue Päckchen im Gegensatz zu bunten Hunden.

Lenné (1969, S. 119ff) unterscheidet drei Aufgabentypen. Diese sind Routineaufgaben, bei denen das Lösungsschema bekannt ist und beispielsweise nur andere Zahlen eingesetzt werden, Denkaufgaben, bei denen das Lösungsschema teilweise oder ganz selbstständig gefunden werden muss, und schließlich Entschlüsselungsaufgaben, bei denen das Gesamtlösungsschema nicht bekannt ist, aber aus einzelnen bekannten Teilschemata zusammengesetzt werden kann, und zwar so, dass das Resultat des ersten Teilschemas die Auswahl des nächsten Teilschemas beeinflusst.

Da die jeweils vorherrschenden theoretischen Annahmen und darauf basierenden didaktischen Konzeptionen nicht nur den Unterricht selbst auf verschiedenste Weise prägten (vgl. Kap. 2.1.1), sondern damit einhergehend auch die gestellten Aufgaben, ist eine Klassifikation von Aufgaben hinsichtlich der lerntheoretischen Orientierung möglich, wobei die zahlreichen theoretischen Ansätze zu der behavioristischen, der kognitivistischen und der konstruktivistischen Lerntheorie subsummiert werden können und das Spektrum vom Einüben kleinschrittig ausgerichteter Aufgabentypen in den 20er und 30er Jahren über das Stellen von Aufgaben unter Beachtung der Stufenfolge und des entwicklungspsychologischen Strukturgedankens der 60er Jahre bis hin zu den individuell und differenziert gestalteten Aufgabenstellungen im kindorientierten Unterricht der 80er Jahre reicht.

In der behavioristischen Lerntheorie, in der Lernen als beobachtbare Reaktion des Individuums (R = response, Reaktion) auf Umweltreize (S = stimulous, Reiz) beschrieben wird, sind der Einsatz von attraktiven Materialien, einem schrittweisen Vorgehen und die Isolierung von Schwierigkeiten bedeutsam (Thorndike, 1970, S. 2ff; Zech, 1977, S. 141ff). Gagnés Hierarchisierung von

Lernsequenzen und Aufgabentypen, Wittmanns Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte, und Aufgaben, die nur Assoziationslernen zulassen (Steiner, 1996, S. 276), sind dieser Lerntheorie zuzuordnen. Ziel ist das Einüben und die Automatisierung von Lernprozessen durch Wiederholung. Ein solches mechanisches Lernen kann beispielsweise erwünscht sein, wenn gewisse Automatisierungsvorgänge beim Rechnen und Zeichen angestrebt werden. Nach Resnick (1983, p .6) bestehen behavioristische Ansätze vor allem im computergestützten Unterricht fort.

In der kognitivistischen Lerntheorie, in der der Prozess des Wissenserwerbs als ein streng regelhaft ablaufender, eindeutig zu beschreibender und zu steuernder Prozess der Informationsverarbeitung interpretiert wird, ist es die Aufgabe der Lehrkraft, die Unterrichtsinhalte möglichst systematisch, sorgfältig aufeinander abgestimmt und schrittweise organisiert darzubieten, zu erklären sowie zu überprüfen. Dabei wird das bereits vorhandene Wissen mit neuem Wissen verknüpft und in Beziehung gesetzt (Zech, 1977, S. 141ff). Steiner (1996) stellte am Beispiel der Einmaleins-Reihen den kognitiven Aufbau kohärenter numerischer Netzwerke dar, dem dann erst der automatisierte Abruf richtiger Multiplikationsergebnisse folgen sollte. Nach Steiner (1996, S. 296f) „werden auch in den geometrisch-räumlichen Operationen Elemente durch spezifische (räumliche) Relationen miteinander zu einem System verknüpft“ (Steiner, 1996, S. 296f).

Beim Konstruktivismus wird das Lernen als aktiv-konstruktiver, situativer, kontextbezogener Prozess verstanden, wobei die Lernenden den aufgenommenen Informationen individuell Bedeutung zuweisen und sie in vorhandene subjektive Denkstrukturen integrieren beziehungsweise diese verändern, erweitern, ausdifferenzieren, verfeinern oder umstrukturieren (Schütte, 2008, S. 47). Die Lehrkraft soll Lernmöglichkeiten identifizieren und authentische, auf die Erfahrungen der Kinder bezogene Lernumgebungen gestalten, durch die sich die Schülerinnen und Schüler dann ihr Wissen mit Hilfe von Problemsituationen und entsprechenden, zur Verfügung gestellten Werkzeugen, selbst oder im sozialen Diskurs konstruieren können. Unterrichten erfolgt im Sinne von Unterstützen, Anregen oder Beraten. Die Vertreter des Genetischen Lernens sind ebenfalls der Ansicht, dass das Lernen umso wirkungsvoller ist, je mehr der Lernende die Möglichkeit erhält, initiativ und aktiv den Unterrichtsgang bestimmen zu können und auf dem Entwicklungsstand abgeholt wird, auf dem er sich befindet. Theoretische Vorläufer der konstruktivistischen Didaktik sind die Ansätze von Dewey, Piaget und Wygotski (Reich, 2008, S. 74).

3.2 Kognitionstheoretische Grundlagen

3.2.1 Erkenntnisse zur kognitiven Entwicklung

> „Die prinzipielle Bedeutung der Arbeiten von Jean Piaget für die Entwicklungspsychologie ist [...] hoch einzuschätzen und Gleiches gilt für die Mathematikdidaktik. Insbesondere die Einteilung in Stadien und ihre Beschreibung hat zu verschiedenen didaktischen Theorien geführt, die durchaus überzeugend sind und empirisch fundiert werden konnten.“ (Reiss & Hammer, 2013, S. 31)

Die Erkenntnisse des Genfer Psychologen Jean Piaget (1896-1980) prägen seit der Veröffentlichung seiner zahlreichen Werke zur kognitiven Entwicklung des Kindes im 20. Jahrhundert bis heute die Entwicklungspsychologie und Fachdidaktik und werden deshalb an dieser Stelle kurz erläutert. Zitate, die dem o.g. ähneln, sind häufig in der Literatur zu finden (vgl. Franke, 2009, S. 91; Oeveste, 1987, S. 19; Sodian, 2008, S. 436; Woolfolk, 2008, S. 60; Zech, 1977, S. 89). Viele Untersuchungen überprüften, ergänzten oder korrigierten seine Ausführungen zum strukturgenetischen Lernen. Piaget ging davon aus, dass das Individuum in Abhängigkeit von dessen Vorwissen und Motivation durch aktive konstruktive Auseinandersetzung mit seiner Umwelt den Informationen Bedeutung verleiht, sodass die entwickelten Schemata bei der Bewältigung von Umwelt-, Problem- oder Handlungssituationen helfen und das Individuum mit der Welt in einem Gleichgewicht ist. Den anzustrebenden Gleichgewichtszustand nennt er Äquilibration, der durch Assimilation oder Akkomodation erreicht werden kann (Reich, 2008, S. 72). Neben diesem Streben nach Gleichgewicht bezeichnet er aktive Erfahrungen, soziale Interaktion und biologische Reifung als Faktoren, durch die Denkprozesse verändert und die kognitive Entwicklung beeinflusst werden. Kognitive Entwicklung geht demnach über das Hinzufügen von Informationen im Langzeitspeicher hinaus (Sodian, 2008, S. 437; Reiss & Hammer, 2013, S. 28ff; Zech, 1977, S. 89ff). Piaget formulierte das sensumotorische, das präoperatorische, das konkret-operatorische und das formal-operatorische Stadium als hierarchisch angeordnete Phasen der Intelligenzentwicklung (Sodian, 2008, S. 437; Bezeichnungen variieren je nach Quelle) und wies diesen spezifische Merkmale, kognitive Prozesse sowie Altersangaben zu. Bedeutsam sind die beiden zentralen Übergänge vom subjektiven zum objektiven Denken und von konkreten zu abstrakten Operationen, also von niedrigeren zu höheren Stufen intellektuellen Funktionierens (Ausubel 1974, S. 214).

Piagets methodisches Vorgehen wird oft als unsystematisch und fehlerhaft bezeichnet (vgl. Ausubel, 1974; Maier, 1999, S. 94f). Zudem werden seine Annahmen bezüglich der hierarchisch angeordneten, altersspezifischen, universellen und kulturübergreifenden Stufen des Wissenserwerbs und der Entwicklung des Denkens kritisiert (Zech, 1977, S. 93), da diese die zahlreichen die kognitive Entwicklung determinierenden Unterschiede im Denken eines Menschen im Verlauf seines Lebens, in der intellektuellen Begabung, Erziehung und Persönlichkeit sowie in der Kultur, der Gestaltung der Lernumgebung und der Aufbereitung der Aufgaben nicht berücksichtigten. In diesem Zusammenhang zitiert Ausubel (1974, S. 210ff) einige Wissenschaftler, die herausfanden, dass manche logischen Operationen auf allen Altersstufen benutzt werden und sich je nach Altersstadium lediglich in Ausmaß oder Komplexität unterscheiden sowie abhängen von der Schwierigkeit des Problems selbst, vom jeweiligen Stoffgebiet, vom vorherigen Erfahrungshintergrund des Individuums und von der logischen Zugänglichkeit des Problems. Er sieht das Vorhandensein der gleichen sequentiellen Position der Stufen bei allen Individuen und Kulturen als entscheidend an.

Im Rahmen der von 1978 bis 1982 durchgeführten sogenannten Hamburger Untersuchung wurde Piagets Hypothese der inhaltlichen Generalisierbarkeit überprüft sowie der Frage nach der Entwicklungsparallelität der kognitiven Einzelkonzepte nachgegangen. Seine hierarchischen Ebenen der kognitiven Entwicklung wurden wie in Tabelle 6 aufgezeigt konkretisiert.

Tabelle 6: Erkenntnisse der Hamburger Untersuchung zur kognitiven Entwicklung (Oeveste, 1987, S. 136)

Entwicklungsstufe	**Kognitive Organisation**
I Kindergartenalter (bis 5 Jahre)	Einfache Klassifizierung Verständnis der zeitlichen Sukzession und Dauer
II Vorschulalter (5-6 Jahre)	Einfache Seriation Kardinale Korrespondenz Einfache euklidische Beziehungen
III Frühes Grundschulalter (6-7 Jahre)	Invarianz der Substanz Multiple Seriation Einfache projektive Beziehungen
IV Mittleres Grundschulalter (8-9 Jahre)	Invarianz des Gewichts und des Volumens Multiple Klassifizierung Ordinale Korrespondenz Komplexe euklidische Beziehungen
V Spätes Grundschulalter (ab 10 Jahre)	Verständnis der Klasseninklusion Multiple projektive Beziehungen

Das folgende Zitat leitet zu der Darstellung weiterer Theorien der Denkentwicklung über:

> „Interessant ist, dass sich neuere didaktische Ansätze, wie der operative, der strukturorientierte und auch der aktuelle konstruktivistische Ansatz, auf Piaget beziehen, wobei jeder Ansatz andere Aspekte von Piagets umfangreichem theoretischen Werk hervorhebt und unterschiedliche didaktische Schlüsse daraus zieht.“ (Schütte, 2008, S. 25)

Im Gegensatz zu Piaget und seiner Annahme altersspezifischer Stufen der kognitiven Entwicklung kennzeichnet der amerikanische Psychologe Jerome S. Bruner (*1915) die Denkentwicklung anhand der enaktiven, der ikonischen und der symbolischen Darstellungsebene (Reiss & Hammer, 2013, S. 31ff; Zech, 1977, S. 104ff). Nach seiner Theorie gibt es je nach Altersstufe unterschiedliche Prioritäten für bestimmte Repräsentationen, wobei sich das Kind zur Erschließung der Umwelt zunächst hauptsächlich der enaktiven Darstellung bedient. Damit ist das Erfassen von Umwelterfahrungen durch eigene Handlungen oder anhand konkreten Materials gemeint. Mit der sich daran anschließenden und vom Handeln relativ unabhängigen Darstellung in Bildern oder Graphiken kennzeichnet Bruner die Verwendung des ikonischen Repräsentationsmodus. Das Nutzen der symbolischen Darstellungsmethode bedeutet schließlich, Handlungen oder Bilder in die Sprache oder in das mathematische Zeichensystem übersetzen zu können. Angestrebt wird die Fähigkeit zum intermodalen Transfer, womit der den jeweiligen Erfordernissen entsprechende flexible und bewusste Wechsel zwischen den drei nebeneinander bestehenden Darstellungsebenen sowie deren adäquate Übersetzung in einen der beiden anderen Repräsentationsmodi gemeint ist.

> „Jede dieser drei Darstellungsmethoden, die handlungsmäßige, die bildhafte und die symbolische, hat ihre eigene Art, Vorgänge zu repräsentieren. Jede prägt das geistige Leben des Menschen in verschiedenen Altersstufen, und die Wechselwirkung ihrer Anwendungen bleibt ein Hauptmerkmal des intellektuellen Lebens des Erwachsenen." (Bruner, 1966, S. 21)

Nach Bruner sollten Unterrichtsinhalte in allen drei Repräsentationsmodi für die Schülerinnen und Schüler aufbereitet und variiert werden. Die Bezüge zwischen diesen unterschiedlichen Zugangsweisen sollten im Rahmen eines Spiralcurriculums stets hergestellt und Faktoren wie persönlicher kognitiver Stil oder Vertrautheit mit dem spezifischen Inhalt sollten beachtet werden. Er trat zudem für das entdeckende Lernen als Weg zum Wissenserwerb ein (Bruner, 1973, S. 15ff).

Der schweizerische Psychologe Hans Aebli (1923-1990) integriert in seinen Arbeiten zum Lehren und Lernen sowohl die Annahme der drei Repräsentationsmodi von Bruner als auch Erkenntnisse aus Piagets strukturgenetischer Theorie. Seine zwölf Grundformen des Lehrens baut Aebli (1983) aus drei Lehr-Lern-Dimensionen auf, wie sie in Abbildung 20 zu sehen sind. Er unterscheidet fünf Medien des Lehrens, das Erzählen und Referieren (M1), das Vorzeigen (M2), das Anschauen und Beobachten (M3), das Lesen (M4) und das Schreiben beziehungsweise das Verfassen von Texten (M5).

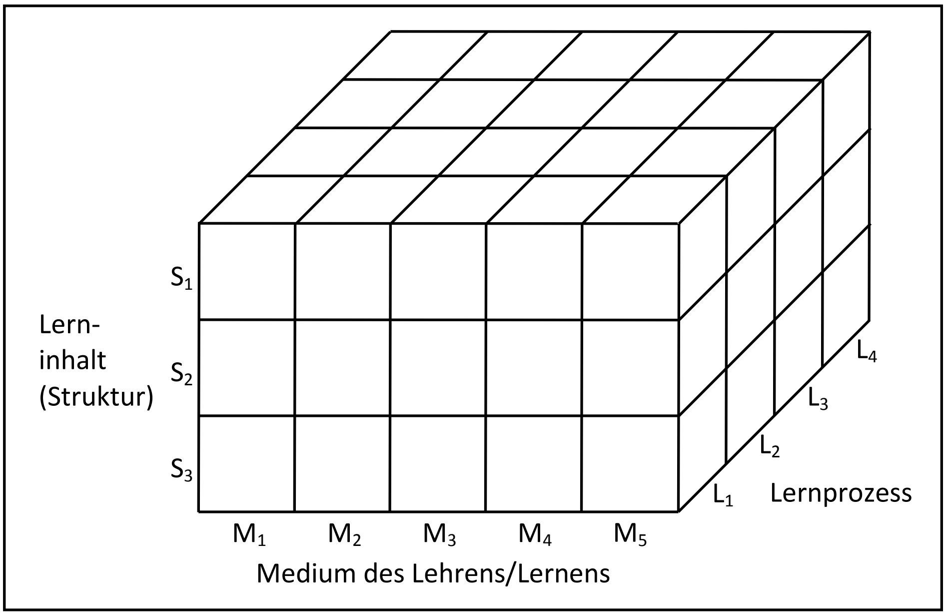


Abbildung 20: Das drei-dimensionale System der zwölf Grundformen (Aebli, 1983, S. 25).

Lerninhalte oder Strukturen stellen die Erarbeitung von Handlungsabläufen (S1), der Aufbau von Operationen (S2) und das Bilden von Begriffen (S3) dar. Als Problemlösendes Aufbauen (L1), Durcharbeiten (L2), Üben und Wiederholen (L3) sowie Anwenden (L4) benennt er die vier Funktionen im Lernzyklus (Aebli, 1983, S. 24ff). Für den Aufbau der Denkoperationen (S2) nimmt er fünf zu durchlaufende Phasen der Verinnerlichung an, wobei die drei bei Bruner zu findenden Darstellungsmittel hierarchisch durchlaufen werden. Für Aebli sind die zu einem Lerninhalt vorliegenden, aus der natürlichen und sozialen Umwelt gewonnenen Erfahrungen zentral, von denen die Anschaulichkeit der Präsentation neuer Inhalte abhängt. Die Schülerhandlungen, ob konkret oder als Denkhandlung, bilden die Grundlage jeglichen Lernens (Aebli, 1983, S. 239ff). An diese Phasen der Verinnerlichung, in der mathematische Begriffe und Operationen aufgebaut wurden, schließt sich das operative Durcharbeiten in Form eines variablen, sinnbezogenen Übens an, das der Vertiefung des Verständnisses und der Festigung der jeweiligen Denkoperation dient. Es geht um das Schaffen beweglicher Operationen, die flexibel gedanklich zusammengesetzt und kombiniert werden können. Im Gegensatz zur Aneignung von Automatismen soll die Fähigkeit zur Komposition, zur Assoziativität und zur Reversibilität gefördert werden. Aebli fordert zudem das gemeinsame Unterrichtsgespräch für die Ausarbeitung der geistigen Operationen sowie die Zusammenarbeit der Schülerinnen und Schüler in Form von Gruppenarbeit für deren Anwendung (Pippig, 1971, S. 25). Neben der Anschaulichkeit des Gegenstandes nennt er dessen Komplexität, den Lernprozess selbst und die Motivation als weitere Bedingungsvariablen. Aufgabe der Lehrkraft ist es, die Unterrichtsstoffe zu operationalisieren und durch das Schaffen von adäquaten Situationen die Entwicklung und den

Aufbau geistiger Operationen entsprechend dem geistigen Entwicklungsstand der Schülerinnen und Schüler zu planen (Reiss & Hammer, 2013, S. 34f; Zech, 1977, S. 93ff).

P.J. Galperin und J. Lompscher betonen mit ihrer Theorie der etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen noch stärker als Aebli oder Bruner die gesteuerte Einwirkung in Form genauer Planung und Lenkung auf die Ausbildung geistiger Handlungen. Die jeweiligen Erscheinungsformen des Denkens hängen von der Art der Auseinandersetzung des Kindes mit den entsprechenden stofflichen Anforderungen und somit auch vom Unterricht ab (Pippig, 1971, S. 24). Zentrales Anliegen der Lehrkraft soll also das Schaffen optimaler Bedingungen für den Lernprozess sein. Sie betrachten das durch Piaget an Entwicklungsstufen gemessene geistige Niveau des Kindes nicht als Altersbesonderheit, sondern sprechen von einer Koexistenz bestimmter Entwicklungsstufen. Lompscher geht wie Bruner davon aus, dass geistige Operationen auf verschiedenen miteinander verknüpften Ebenen stattfinden. Er unterscheidet die Ebene der praktisch-gegenständlichen Handlung, der unmittelbaren Anschauung, der mittelbaren Anschauung und der sprachlich-begrifflichen Erkenntnis. Hervorzuheben ist hierbei die Differenzierung zwischen sichtbaren Veranschaulichungsmitteln und anschaulichen Vorstellungen ohne Anwesenheit des Veranschaulichungsmittels, die eine Verfeinerung der ikonischen Ebene Bruners darstellt, sowie die unterschiedliche Rolle der Sprache. Galperin formte zusätzlich das Konzept des Denkens als inneres Sprechen aus (Zech, 1977, S. 110ff).

Nach dem amerikanischen Pädagogen und Lerntheoretiker D.P. Ausubel (1918-2008) ist das adäquate Anknüpfen an die existierende kognitive Struktur des Lernenden mittels sinnvoller und bedeutungshaltiger Aufgaben zentral (Ausubel, 1974, S. 39). Die Ermittlung des bereits vorhandenen Wissens, der Vorerfahrungen sowie des Sprachrepertoires der Schülerinnen und Schüler sind Grundvoraussetzungen jeden Unterrichts. Unter kognitiver Struktur versteht er Inhalt und Anordnung der mentalen kognitiven Repräsentationen und Wissenselementen einer Person, die von objektiven logischen Strukturen des Gegenstandsbereichs abweichen können. Diese kognitive Struktur ist hierarchisch aufgebaut und mathematische Begriffe und Operationen sollen alltagssprachlich darin verankert werden. Das Fundament bilden dabei, wie in Abbildung 21 aufgezeigt, konkrete Informationen und Fakten, denen spezifischere und differenziertere Bedeutungen übergeordnet sind. Die höchste Stufe bilden allgemeine, umfassende Bedeutungen. Diese inhaltlich und organisatorisch individuelle Wissensstruktur soll durch Assimilations- und Verankerungsprozesse vergrößert werden. Dabei beeinflussen Klarheit, Deutlichkeit, Stabilität, Generalisierbarkeit, Inklusivität, Kohäsion und Diskriminierbarkeit der relevanten Konzepte, Prinzipien und Informationen innerhalb der kognitiven Struktur die Genauigkeit und langfristige Wiederherstellungsfähigkeit beziehungsweise Verfügbarkeit der Bedeutungen (Ausubel, 1974, S. 137; Zech, 1977, S. 139). Mechanische Lernaufgaben resultieren hingegen nicht im Erwerb und Behalten der Bedeutungen (Ausubel, 1974, S. 42).

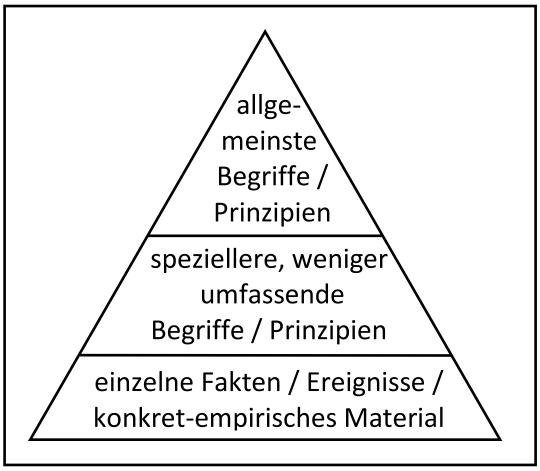


Abbildung 21: Aufbau einer kognitiven Struktur nach Ausubel (Zech, 1977, S. 129).

3.2.2 Kognitive Prozesse

Die bisherigen Ausführungen zur kognitiven Entwicklung zeigen, dass Psychologen seit jeher ein breites Spektrum an Lernsituationen und individuellen Entwicklungsdifferenzen in kognitiven Prozessen untersuchen, wobei unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt wurden. Einigkeit besteht unter anderem in der Annahme, dass der Mensch aktiv Informationen verarbeitet und das so erworbene Wissen im Gedächtnis speichert. Kognitive Prozesse umfassen den Erwerb, die Organisation, die Speicherung und die Anwendung von Wissen. Das Ziel solcher Informationsverarbeitungsprozesse ist die Speicherung von Wissen im Langzeitgedächtnis, das auf verschiedene Weise kategorisiert werden kann. Generell wird zwischen bereichsspezifischem und allgemeinem beziehungsweise anwendbarem Wissen unterschieden. Zahlreiche Autoren (vgl. Gerstenmaier & Mandl, 2000, S. 291ff) kategorisieren das im Langzeitgedächtnis gespeicherte Wissen darüber hinaus nach deklarativem, prozeduralem und konditionalem Wissen. Diese Unterscheidung differenziert keine Wissensinhalte, sondern die Funktion der betreffenden Datenstrukturen innerhalb des kognitiven Systems. Während der Bearbeitung von Aufgaben ist von einer gleichzeitigen Beteiligung auszugehen.

Nach Woolfolk (2008, S. 310ff) repräsentiert das deklarative Wissen (knowing that) Fakten, allgemeine Zusammenhänge und Prozesse. Es umfasst spezifische Einzelheiten, das Beherrschen von Regeln und Allgemeinwissen. Das Erinnern von deklarativem Wissen ist Voraussetzung für die Bearbeitung komplexer Aufgaben. Das prozedurale Wissen (knowing how) ist Wissen über die Ausführungsweise von Handlungen und muss vor- beziehungsweise durchgeführt werden. Deklaratives Wissen besitzt ein Lernender, wenn er beispielsweise eine geometrische Figur richtig kategorisieren kann. Für das richtige Ausführen benötigt er zusätzlich prozedurales Wissen. Pragmatisches (konditionales) Wissen ist das Wissen, wann und warum für das deklarative und prozedurale Wissen zur Aufgabenlösung angewendet werden muss. Viele Schülerinnen und Schüler kennen zwar Fakten und Prozeduren, wissen aber oft nicht, wann sie einzusetzen sind (Woolfolk, 2008, S. 319). Metakognition meint schließlich die strategische Anwendung der drei genannten Wissensformen zur Zielerreichung beziehungsweise Problemlösung (Schrunk, 2004, zitiert nacht Woolfolk, 2008, S. 330), also das Wissen über kognitive Sachverhalte und Vorgänge, das absichtlich eingesetzt wird, um Kognitionen zu überwachen und zu steuern. Menschen unterscheiden sich in ihren metakognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, woraus interindividuelle Differenzen bezüglich des Lernens resultieren. Die genannten Wissensarten machen deutlich, dass Wissen auf höheren

Niveaustufen in Können übergeht und nicht nur auf Kenntnisse reduziert sein sollte, die nicht angewendet werden können.

Eine weitere, häufig von kognitiven Psychologen vorgenommene Unterscheidungsmöglichkeit stellt das explizite und das implizite Langzeitgedächtnis dar (Woolfolk, 2008, S. 318ff). Das explizite Gedächtnis beinhaltet Wissen aus dem Langzeitgedächtnis, das erinnert und bewusst bearbeitet werden kann. Das implizite Gedächtnis verfügt über Wissen in Form von Erinnerungen, Handlungsvollzügen, Prozeduren und Gewohnheiten, das unbewusst das Verhalten, Emotionen oder die Gedanken beeinflusst. Je geübter eine Prozedur ist, umso automatischer ist die Tätigkeit und umso impliziter ist das Gedächtnis dafür.

Die Repräsentation von Wissen im Bewusstsein und im Gedächtnis, der Abruf von Wissen, das Erinnern und das Vergessen waren die Hauptthemen in den 70er und 80er Jahren. Daraus gingen verschiedene Modelle zur Informationsverarbeitung hervor (vgl. Klauer & Leutner, 2007, S. 64ff). Das folgende Schema (Abb. 22) zeigt einen auf den Vorstellungen verschiedener Theoretiker aufbauenden Informationsverarbeitungsprozess, der bei Woolfolk (2008, S. 309ff) ausführlich dargestellt ist.

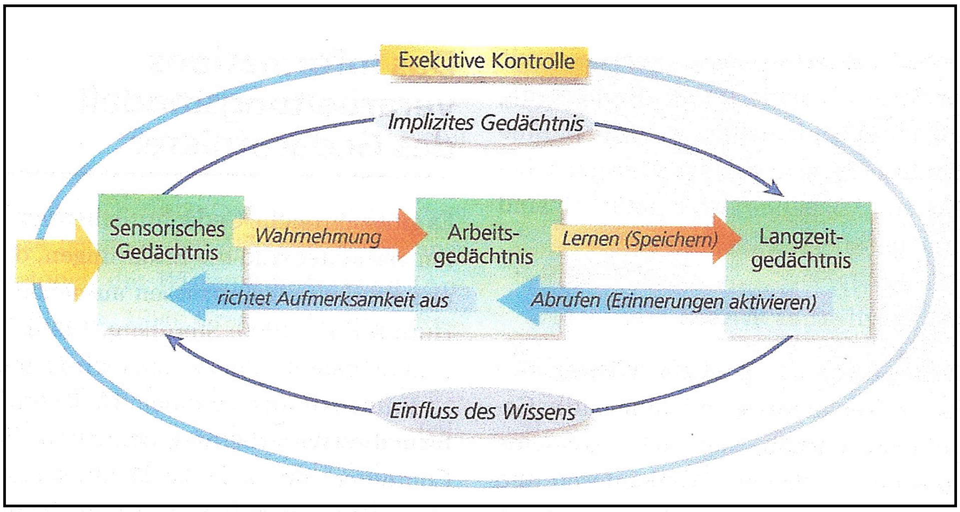


Abbildung 22: Prozessmodell zur Informationsverarbeitung (Woolfolk, 2008, S. 310).

Informationen gelangen dabei über die Sinnesorgane zunächst ins sensorische Gedächtnis, wo die Wahrnehmung und die Aufmerksamkeit auf der Grundlage der physikalischen Repräsentationen der Außenwelt und auf dem bereits vorhandenen Wissen bestimmen, welche Reize ins Arbeitsgedächtnis überführt werden und durch Gestaltprinzipien oder Merkmalsanalyse (top-down- oder bottom-up-Verarbeitung) Bedeutung erhalten (Woolfolk, 2008, S. 311f). Worauf die Aufmerksamkeit gerichtet wird, hängt ebenfalls von vielfältigen Faktoren ab, wie beispielsweise vom individuellen Vorwissen beziehungsweise Interesse, der Komplexität der jeweiligen Aufgabe, der Fähigkeit, die eigene Aufmerksamkeit zu kontrollieren oder der individuell fortgeschrittenen Automatisierung bestimmter Tätigkeiten, sodass diese dann keine Aufmerksamkeit und Konzentration mehr benötigen. Automatisierung stellt sich allmählich ein, aber nicht alle Aktivitäten automatisieren sich mit gesteigerter Übung, da die Situation entscheidend ist (Woolfolk, 2008, S. 312).

Nachdem die Informationen aus der Umwelt also selektiv ausgewählt und wahrgenommen wurden, werden sie in das Arbeitsgedächtnis geleitet, das eine sehr begrenzte Kapazität hat. Fünf bis neun Einheiten, also Wörter, Vorstellungsbilder, Ideen oder Sätze können zugleich aufgenommen und für maximal 20 Sekunden aufbewahrt werden. Durch Strategien wie das Bilden größerer Einheiten (chunking) oder das Gruppieren von Einheiten kann die Kapazität erweitert werden. Die Informationen im Arbeitsgedächtnis müssen entweder so lange wie nötig mental wiederholt werden und somit temporär aktiviert bleiben, oder ins Langzeitgedächtnis überführt werden. Die Überführung von Informationen ins Langzeitgedächtnis verringert die Belastung des Arbeitsgedächtnisses und stellt das Ziel allen Unterrichtens dar. Anschlussfähig wird das Wissen durch Wissensabruf in Übungsphasen, wobei Verstehen und Durcharbeiten kombiniert werden. Das Gegenteil dazu wird als träges Wissen bezeichnet, wobei die Schülerinnen und Schüler keine Verbindungen zwischen gelernten Fakten herstellen und somit häufig keine Transferleistungen erbringen können. Ist bereits eine Wissensgrundlage im Langzeitgedächtnis vorhanden, können elaborierendes Wiederholen, die Organisation des Materials oder der Kontext dabei helfen, neue Informationen mit den im Langzeitgedächtnis vorhandenen so zu integrieren, dass Verstehen konstruiert wird. Die Überführung von Informationen ins Langzeitgedächtnis geschieht zwar relativ langsam, dafür sind Kapazität und Haltezeit des Langzeitgedächtnisses praktisch unbegrenzt. Sorgfältig verarbeitete und vernetzte Informationen, wie Propositionen, Schemata, Produktionen, Episoden oder Vorstellungsbilder, werden aufgehoben und sind immer vorhanden, auch wenn sich nicht aktiviert oder Gegenstand von Denkprozessen sind. Sie können jederzeit aktiviert und ins Arbeitsgedächtnis zurückgerufen werden. Wird beim Abrufen eine Information nicht gefunden, kann durch Problemlöseprozesse und das Heranziehen von Logik, Hinweisreizen oder anderem Wissen eine plausible Antwort durch Auffüllen von Lücken rekonstruiert werden. Verloren gehen können Informationen im Langzeitgedächtnis durch Spurenverfall mit der Zeit und durch Interferenz mit anderen Informationen (Woolfolk, 2008, S. 326ff).

Da visuelles und verbales Material in unterschiedlichen Systemen verarbeitet wird, sollte neues Wissen in Wort und Bild vermittelt werden. Schülerinnen und Schüler lernen meist nur, indem sie wiederholen und auswendig lernen. Effektiver ist die kognitive Beschäftigung mit dem Lernstoff, das heißt dass die Lernenden Verbindungen herstellen, Ideen und Vorstellungsbilder elaborieren, Hypothesen aufstellen, die eigene Aufmerksamkeit zentrieren, Gliederungen, Notizen und Zusammenfassungen anfertigen, Schemata und Netzwerke aufbauen, visuelle Organisationshilfen wie Mind Maps, Concept Maps oder Grafiken verwenden, Lesestrategien einsetzen und vieles mehr (Woolfolk, 2008, S. 379). Behaltensleistungen können durch das Nutzen von Lernstrategien wie beispielsweise Mnemotechniken oder fragmentiertes Lernen verbessert und begünstigt werden. Deklaratives Wissen muss durch Übung in Routinen eingebettet und automatisiert, sprich prozeduralisiert werden. Automatisierte Grundfertigkeiten entwickeln sich in drei Stufen. Auf der kognitiven Stufe verlässt man sich auf deklaratives Wissen und allgemeine Problemlösestrategien, und muss über jeden Schritt nachdenken. Auf der sich daran anschließenden assoziativen Stufe werden bereits einzelne Schritte einer Vorgehensweise kombiniert oder in größere Einheiten (chunks) gebündelt. Auf der dritten Stufe, auch autonome Stufe genannt, können Abläufe schließlich ohne großen Aufmerksamkeitsaufwand erledigt werden.

Wygotski betont, dass Wirklichkeiten sozial konstruiert beziehungsweise in Interaktionen aufgebaut werden und kooperative menschliche Tätigkeiten einen lernsteigernden Effekt auslösen. Er bezeichnet den Bereich zwischen dem, was der Lernende schon weiß (gegenwärtiger Entwicklungsstand, Fähigkeit zum selbstständigen Problemlösen) und dem, was der Lernende durch Unterstützung von Erwachsenen oder Gleichaltrigen lernen könnte (erreichbarer Entwicklungsstand), als Zone der proximalen Entwicklung. Zu jedem Zeitpunkt der Entwicklung gibt es Probleme, die das Kind zu lösen versucht. Es benötigt dazu strukturierende Vorgaben, Hinweise, Erinnerungen, Erinnerungshilfen für bestimmte Einzelheiten oder zu unternehmende Schritte, Ermutigungen, bei den Versuchen nicht nachzulassen und vieles mehr. Manche Probleme übersteigen jedoch noch die Fähigkeiten des Kindes, auch wenn es zahlreiche gute Erklärungen erhält. Nach Wygotski führt angemessen strukturiertes Lernen in sozialen Situationen zu einer geistigen Entwicklung auf höhere Ebenen, wobei den Interaktionspartnern des Lernenden eine große Bedeutung zugewiesen wird (Franke, 2009, S. 19; Reich, 2008, S.71f; Woolfolk, 2008, S. 59).

3.2.3 Taxonomien für den kognitiven Bereich

> „Das Ergebnis der Bemühungen um eine präzise Beschreibung von Lernzielen und ihrer hierarchischen Ordnung bestand in der Entwicklung von Taxonomien." (Helmke, 2009, S. 36)

Benjamin Bloom entwickelte in Zusammenarbeit mit Engelhart, Furst, Hill und Krathwohl (1972) eine Taxonomie, um Lernziele für den Unterricht zu formulieren und zu überprüfen beziehungsweise um Aufgaben mit gleichen Anforderungen im Zuge der Leistungsmessung austauschen zu können. Sie ordneten die Lernziele dabei zunächst dem kognitiven, affektiven oder psychomotorischen Lernzielbereich zu. Diese drei Lernzielbereiche sind im Schulalltag meist miteinander verknüpft. Die Taxonomie für den kognitiven Bereich enthielt die sechs hierarchisch angeordneten Hauptklassen Wissen (1), Verstehen (2), Anwendung (3), Analyse (4), Synthese (5) und Bewertung (6). Zu jeder Klasse wurden weitere Unterklassen definiert (Bloom et al., 1972, S. 217ff), die in Abbildung 23 aufgelistet sind.

- *1.0 Knowledge*
  - *1.10 Knowledge of specifics*
    - *1.11 Knowledge of terminology*
    - *1.12 Knowledge of specific facts*
  - *1.20 Knowledge of ways and means of dealing with specifics*
    - *1.21 Knowledge of conventions*
    - *1.22 Knowledge of trends and sequences*
    - *1.23 Knowledge of classifications and categories*
    - *1.24 Knowledge of criteria*
    - *1.25 Knowledge of methodology*
  - *1.30 Knowledge of universals and abstractions in a field*
    - *1.31 Knowledge of principles and generalizations*
    - *1.32 Knowledge of theories and structures*
- *2.0 Comprehension*
  - *2.1 Translation*
  - *2.2 Interpretation*
  - *2.3 Extrapolation*
- *3.0 Application*
- *4.0 Analysis*
  - *4.1 Analysis of elements*
  - *4.2 Analysis of relationships*
  - *4.3 Analysis of organizational principles*
- *5.0 Synthesis*
  - *5.1 Production of a unique communication*
  - *5.2 Production of a plan, or proposed set of operations*
  - *5.3 Derivation of a set of abstract relations*
- *6.0 Evaluation*
  - *6.1 Evaluation in terms of internal evidence*
  - *6.2 Judgments in terms of external criteria*

Abbildung 23: Taxonomie nach Bloom et al. (Krathwohl, 2002, S. 213)

Die Klasse des Wissens (1) schließt demnach das Wissen von konkreten Einzelheiten, das Wissen der Wege und Mittel, mit konkreten Einzelheiten zu arbeiten und das Wissen von Verallgemeinerungen und Abstraktionen eines Fachgebietes ein. Die Schülerinnen und Schüler können dabei Begriffe, Fakten, Ideen, Material, Erscheinungen und vieles mehr erinnern, in Situationen wiedererkennen oder aus dem Gedächtnis abrufen beziehungsweise reproduzieren, ohne etwas notwendigerweise verstanden zu haben beziehungsweise anwenden oder verändern zu müssen. Bloom et al. definierten Wissen als das Erinnern von Ideen oder Erscheinungen in einer Form, die möglichst nahe an die ursprünglich aufgenommene Idee oder Erscheinung herankommt (Bloom et al., 1972, S. 41). Auf der nächsten Stufe erst wird das Material verstanden (2), indem es beispielsweise übersetzt, interpretiert oder extrapoliert wird. Verstehen geht über Auswendiglernen und etwas mit eigenen Worten wiedergeben hinaus. Es meint Fähigkeit, kommunikativ Vermitteltes aufzunehmen und zu verarbeiten, ohne es notwendigerweise auf andere Bereiche zu übertragen beziehungsweise Implikationen zu erkennen oder Verknüpfungen zu anderen Informationen herzustellen (Woolfolk, 2008, S. 350). Es folgt die Anwendung (3) allgemeiner Konzepte, sodass bestimmte Probleme gelöst werden können. Analyse (4) meint das Zerlegen von Elementen, Beziehungen oder ordnenden Prinzipien. Das Herstellen einer einzigartigen Nachricht, das Entwerfen eines Plans für bestimmte Handlungen, das Ableiten einer Folge abstrakter Beziehungen oder das Erschaffen von Neuem durch Zusammenstellen neuer Ideen stellt die nächsthöhere Stufe der Synthese dar (5). Das höchste Ziel ist die Bewertung (6) von Materialien oder Methoden. Das Urteil wird aufgrund innerer Evidenz und äußerer Kriterien dahingehend gefällt, ob Materialien oder Methoden in einer bestimmten Situation angewendet werden können (Bloom et al., 1972).

Die Kategorien wurden angeordnet von einfachen zu komplexen beziehungsweise von konkreten zu abstrakten Lernzielen. Durch die zunehmend größer werdende Komplexität der genannten kognitiven Prozesse sollte der kumulative Charakter von Lernprozessen zum Ausdruck kommen. Bloom et al. gingen davon aus, dass die Ziele in einer Klasse auf den Zielen der vorhergehenden Klasse aufbauen und dass einfachere Verhaltensweisen Voraussetzung für komplexere waren (Bloom et al., 1972, S. 31; Krathwohl, 2002, p. 212f). Aus den durchgeführten Studien und der Annahme, dass einfache Verhaltensweisen miteinander zu komplexen integriert werden können, leiteten Bloom et al. (1972, S. 32) einen Zusammenhang zwischen der hierarchischen Ordnung der kognitiven Prozesse und der Schwierigkeit ab. Dieser stellte sich so dar, dass Aufgaben, die einfache Verhaltensweisen erfordern, häufiger richtig gelöst wurden als Aufgaben, die komplexere Verhaltensweisen erfordern. Demnach sollte der Unterricht zu einem neuen Inhaltsbereich mit Wissensaufgaben begonnen werden. Erst wenn die dazugehörigen Lernaufgaben von den Lernenden erfolgreich beantwortet werden konnten, sollten Aufgaben zum Verstehen eingesetzt werden. Die Taxonomie wurde genutzt, um Lernziele und Testaufgaben zu klassifizieren. Aus verschiedenen Analysen wurde die Erkenntnis gewonnen, dass diese dabei hauptsächlich der Wissenskategorie zuzuordnen waren und dass die komplexeren Kategorien stärker berücksichtigt werden sollten (Krathwohl, 2002, p. 213). Das pädagogische Ziel der Taxonomie bestand somit darin, Lehrkräfte zu kognitiv anspruchsvolleren, das heißt über bloßes Faktenwissen hinausgehende Fragen, Anforderungen und Aufgaben anzuregen (Helmke, 2009, S. 37).

Die Taxonomie wurde häufig rezipiert. Ein aktuelles Beispiel dafür ist bei Sadker, Sadker und Zittleman (2011, S. 118ff) zu finden, die sich mit den zum Formulieren gelungener Unterrichtsfragen notwendigen Fähigkeiten beschäftigten. Dabei verwendeten sie Blooms sechs kognitive Kategorien, zu denen sie Fragen formulierten, um die Schülerinnen und Schüler zur Nutzung der verschiedenen

Denkweisen aufzufordern. Abbildung 24 zeigt mögliche Fragewörter und Aufforderungsausdrücke zu den einzelnen Ebenen der Bloom`schen Taxonomie auf.

LEVELS OF THE *TAXONOMY:* WORD PROMPTS

Knowledge	Comprehension	Application	Analysis	Synthesis or Creation	Evaluation
define	describe	apply	support	predict	judge
recall	compare	classify	analyze	produce	argue
recognize	contrast	use	why	write	decide
remember	rephrase	choose	summarize	design	evaluate
who	put in your	employ	compare/	develop	assess
what	own words	write an	contrast	synthesize	give your
where	explain the	example	order/	construct	opinion
when	main idea	solve	sequence	improve	which is
list		how many	deduce	what if	better
reproduce		which	investigate	devise	do you agree
recite		what is	categorize	solve	would it be
name		show	classify	create	better
describe		translate	draw	imagine	verify
identify		make	conclusions	hypothesize	rate
review		illustrate	identify motives	combine	select
		teach	or causes	estimate	recommend
		record/chart	determine	invent	conclude
		diagram/map	evidence		
		demonstrate	justify		

Abbildung 24: Fragen an die Klasse gemäß der Bloom`schen Taxonomie
(Sadker, Sadker & Zittleman, 2011, S. 131).

Metzger et al. (1993, S. 3ff) reduzierten die sechs Bloom`schen Kategorien innerhalb ihrer Taxonomie zum kognitiven Beitrag wie in Abbildung 25 dargestellt auf Informationserinnerung, Informationsverarbeitung und Informationserzeugung.

BLOOM´sche Kategorien	Wieder-erkennen	Wieder-geben	Sinn-erfassen	Anwenden	Analyse	Synthese	Beurteilen
Kategorien nach METZGER	Informations-erinnerung		Informations-verarbeitung		Informations-erzeugung		
Kriterium	geringer eigenständiger kognitiver Beitrag, d. h.:		mittlerer eigenständiger kognitiver Beitrag, d. h.:		hoher eigenständiger kognitiver Beitrag, d. h.:		
Merkmal	gelernte Informationen in einem unveränderten Umfeld wiedererkennen bzw. unverändert reproduzieren		gelernte Informationen sinngemäß abbilden, bzw. gelernte Struktur auf einen sprachlich neuartigen, aber strukturell gleichen Inhalt übertragen		einen Sachverhalt umfassend und systematisch untersuchen, wobei die nötige Kriteriumsstruktur neu zu schaffen ist bzw. einzelne Informationen zu einem neuartigen Ganzen verknüpfen.		

Abbildung 25: Taxonomie zum kognitiven Beitrag (Metzger et al., 1993, S. 3ff).

Klauer (2001, S. 103ff) stellte den Nutzen einer Taxonomie bei der Konstruktion von Schulleistungstests dar, indem er für seine Lehrziele die ersten drei Kategorien der Bloom`schen Taxonomie zugrunde legte. Die Kategorie Wissen wurde dabei durch Multiple Choice-Aufgaben erfasst, die Kategorie Verstehen durch frei zu beantwortende Aufgaben und die Kategorie Anwenden durch Problemaufgaben.

Ähnlich der in Kapitel 3.2.1 geschilderten Theorien zur kognitiven Entwicklung wurde auch die Bloom`sche Taxonomie kritisiert und vor allem hinsichtlich der Annahme einer hierarchischen Ordnung empirisch überprüft. Anderson und Krathwohl (2001, S. 287ff) stellen einige Untersuchungen dar. Helmke (2009, S. 38) fasst folgende Kritikpunkte zusammen:

> „Was die *hierarchische Organisation* der Lernziele anbelangt, so ist sie vor allem bei den beiden höchsten Kategorien (also Synthese und Evaluation) in Zweifel gezogen worden. Ferner wurde argumentiert, dass das kritische Unterscheidungsmerkmal den hierarchisch angeordneten Stufen - die Schwierigkeit - nicht angemessen sei."

Auch Woolfolk (2008, S. 588) räumt ein:

> „Es ist in der Pädagogik üblich, diese Objekte als eine Hierarchie zu betrachten, bei der jede Fertigkeit auf der anderen aufbaut, aber dies trifft nicht ganz zu. Einige Fächer, wie etwa die Mathematik, entsprechen nicht ganz dieser Struktur (Kreitzer & Madaus, 1994). Trotzdem wird immer wieder auf Ziele niederer oder oberer Ordnung verwiesen, wobei Wissen, Verstehen und Anwendung Ziele niederer Ordnung sind und Analyse, Synthese und Evaluation Ziele höherer Ordnung."

Blooms Taxonomie wurde jedoch nicht nur empirisch überprüft und kritisiert, sondern auch überarbeitet und erweitert. Durch deren Anwendung auf das Fach Mathematik entstanden erste Klassifikationsschemata für Mathematikaufgaben.

Im Rahmen von Vorläuferstudien des IEA in den USA, das später die international vergleichenden Schulleistungsstudien FIMS (First International Mathematics Study, 1964), SIMS (Second International Mathematics Study 1980-1982) und schließlich TIMSS (Third International Mathematics and Science Study 1995, 1999, 2003, 2011) entwickelte, wurde erstmals versucht, den bei Bloom beschriebenen Verhaltensweisen (cognitive behavior) mathematische Inhalte (content) zuzuweisen, woraus sich zunächst die in Abbildung 26 aufgezeigte Klassifikation hierarchisch angeordneter Fähigkeiten nach Wilson (1971) ergab.

Ability to remember or recall definitions, notations,
Ability to remember operations and concepts,
Ability to interpret symbolic data,
Ability to put data into symbols,
Ability to follow proofs,
Ability to construct proofs,
Ability to apply concepts to mathematical problems,
Ability to apply concepts to non-mathematical problems,
Ability to analyze problems and determine the operations which may be applied,
Ability to invent mathematical generalizations.

Abbildung 26: Klassifikationsschemata der amerikanischen Vorläuferstudien (Wilson, 1971, p. 651).

Wilson (1971) modifizierte Blooms Taxonomie, indem er die mathematischen Inhalte der Klassen 7 bis 12 in der amerikanischen High School mit den Lernzielen im kognitiven und affektiven Bereich in Form einer Matrix anordnete. Er stellte jedoch ebenfalls die hierarchische Ordnung in Frage (Wilson, 1971, p. 650). Auch bei FIMS wurden die Items in Anlehnung an Bloom et al. nach vier Levels eingeordnet und in einer zweidimensionalen Matrix zusammen mit Inhalten dargestellt. Es wurden dabei Wissen und Information (Abruf von Definitionen, Notationen, Konzepten; recall), Technik und Fähigkeiten (Rechnen, Manipulation von Symbolen; skill), die Übertragung von Daten in Symbole oder Schemata (translation) und das Verstehen (comprehension), also die Fähigkeit, Probleme analytisch anzugehen, unterschieden. Bei der Testentwicklung für SIMS wurden die Items in einer

Matrix eingeordnet, bei der die Zeilen durch die zentralen mathematischen Stoffgebiete und die Spalten durch hierarchisch angeordnete Stufen kognitiver Operationen bestimmt wurden. Diese Matrix wurde für TIMSS, in dessen Rahmen „verlässliche Daten zu den Leistungen von mehr als einer halben Million Schülerinnen und Schüler aus rund 15.000 Schulen in 46 Ländern ermittelt" (Köller, Baumert & Bos, 2001, S. 270f) wurden, um eine Dimension erweitert, sodass sich die in Abbildung 27 dargestellten Kategorien für das mathematische Sachgebiet ergaben.

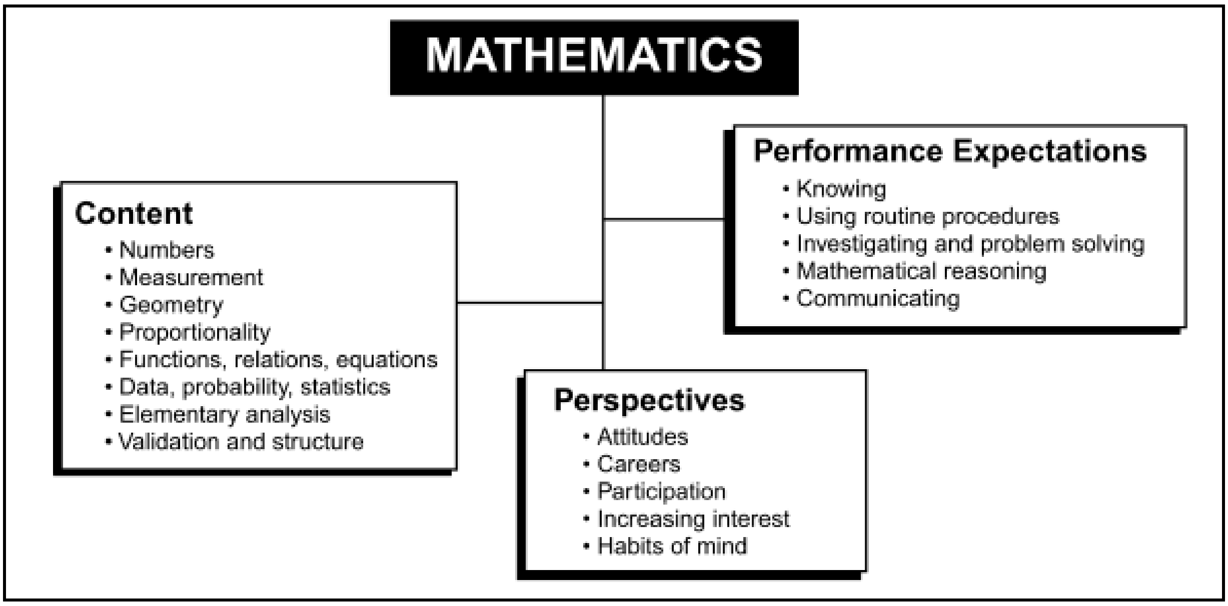


Abbildung 27: Kategorien bei TIMSS 1995 (Martin & Kelly, 1996, p.7).

Neben der Inhaltsdimension (mathematischer Schulstoff; content) und den Anforderungsarten (kognitive Operationen; performance expectations) waren nun also die allgemeinen Bildungsziele der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer (perspectives) in der Struktur der Rahmenkonzeption enthalten. Die aufgezeigten und sehr detaillierten Performance-Expectations-Kategorien wurde für den TIMSS-Report allerdings zu vier Kategorien (knowing, performing routine procedures, using complex procedures, solving problems) zusammengefasst (Mullis et al., 1997, p. 14). Bei Neubrand (2002, S. 77) ist diese Veränderung graphisch dargestellt. Bei der Entwicklung von Aufgaben für die TIMS-Studie 2003 wurden folgende Anforderungsbereiche (Cognitive Domains) unterschieden: Knowing Facts and Procedures, Using Concepts, Solving Routine Procedures und Reasoning (Mullis et al., 2004, p. 339). Bei der Kategorisierung der Items kam es zu Überschneidungen, weshalb die Anforderungsbereiche erneut überarbeitet und letztlich drei Bereiche (Knowing Facts, Procedures, and Concepts; Applying Knowledge and Conceptual Understanding; Reasoning) unterschieden wurden (Mullis, Martin & Foy, 2005, p. 6f) und werden (Knowing, Applying, Reasoning; Reproduzieren, Anwenden, Problemlösen) (Mullis et al., 2009, p. 40ff; Wendt et al., 2012, S. 14).

Die bekannteste Revision der Bloom`schen Taxonomie veröffentlichten Anderson & Krathwohl (2001) 45 Jahre später. Die Autoren verfolgten damit das Ziel, die Aufmerksamkeit der Lehrkräfte erneut auf den Wert der Original-Taxonomie auszurichten und neues Wissen beziehungsweise neue Gedanken zu integrieren (Anderson & Krathwohl, 2001, S.XXIf). So ersetzten sie beispielsweise den Begriff der Verhaltensweisen durch den der kognitiven Prozesse, um Verwirrung zu beseitigen (Anderson & Krathwohl, 2001, S. 14). Sie ordneten die sechs kognitiven Prozesskategorien (cognitive process dimension) zusammen mit vier Wissensarten (knowledge dimension) in einer zweidimensionalen Matrix an (Tab. 7).

Tabelle 7: The revised Taxonomy Table (Anderson & Krathwohl, 2001, S. 28)

THE COGNITIVE PROCESS DIMENSION						
THE KNOWLEDGE DIMENSION	1. REMEMBER	2. UNDERSTAND	3. APPLY	4. ANALYZE	5. EVALUATE	6. CREATE
A. FACTUAL KNOWLEDGE						
B. CONCEPTUAL KNOWLEDGE						
C. PROCEDURAL KNOWLEDGE						
D. METACOGNITIVE KNOWLEDGE						

Wie in Tabelle 7 zu erkennen ist, wurde dabei sowohl die Reihenfolge als auch einige Bezeichnungen der sechs Ebenen nach Bloom (Wissen, Verstehen, Anwendung, Analyse, Synthese, Bewertung) leicht verändert, sodass diese stärker auf die beteiligten kognitiven Prozesse hinweisen: erinnern, verstehen, anwenden, analysieren, bewerten/beurteilen und herstellen/erschaffen (Anderson & Krathwohl, 2001, S. 66ff). Die Komplexität der in Verbform beschriebenen Prozesskategorien nimmt mit jeder höheren Kategorie zu, wobei Kategorien der jeweils nachfolgenden Stufe Kategorien der jeweils vorhergehenden Stufe umfassen. Dies bedeutet jedoch nicht, dass damit ein Abhängigkeitsverhältnis definiert ist oder dass Aussagen über Lern- und Entwicklungsprozesse getroffen werden können. So ist es beispielsweise nicht möglich, Verfahren zu beurteilen, wenn man sie nicht verstanden hat, wohl aber ist das Ausführen eines Verfahrens auch ohne Verständnis möglich. Die sechs Kategorien werden in weitere Unterkategorien aufgeteilt (Anderson & Krathwohl, 2001, S. 31). Der Dimension der kognitiven Prozesse (cognitive process dimension) wurde eine zweite Dimension (knowledge dimension) hinzugefügt. Diese Wissensdimension enthält als Wissensarten das Tatsachen-/Faktenwissen, das Begriffswissen, das prozedurale und das metakognitive Wissen. Auch diese Kategorien sind bezüglich der Abstraktionsebene ansteigend angeordnet und werden weiter ausdifferenziert (Anderson & Krathwohl, 2001, S. 45ff). Die Autoren zeigen auf, wie ein Lernziel klassifiziert werden kann (Anderson & Krathwohl, 2001, S. 32) und wie die Taxonomie zu nutzen ist (Anderson & Krathwohl, 2001, S. 95ff).

> „The Taxonomy of Educational Objectives is a scheme for classifying educational goals, objectives, and, most recently, standards." (Krathwohl, 2002, p. 218)

Wie die ursprüngliche wird auch die überarbeitete Taxonomie vielfach rezipiert. Ein Beispiel dafür ist die bei der Entwicklung eines Kompetenzstufenmodells für die berufliche Bildung im Rahmen des Projekts ULME (Untersuchungen der Leistungen, Motivation und Einstellungen in der beruflichen Bildung) erstellte Klassifikationsmatrix zur Überprüfung des Anspruchsniveaus von Testaufgaben, die eine Inhalts- und eine Verhaltensdimension enthält (Abb. 28). Von den vier bei Anderson und Krathwohl (2001) zu findenden Wissensarten wurden die ersten drei übernommen. Die sechs Bloom`schen Kategorien wurden an Metzger et al. (1993) orientiert mit den in Abbildung 28 aufgezeigten alternativen Bezeichnungen ebenfalls zusammengefasst (Hofmeister, 2005, S. 2ff).

Leistung / Wissensarten		Reproduzieren	Anwenden/ Verstehen	Kritisieren/ Reflektieren
Fakten	A B			
Konzepte	A B			
Prozeduren	A B			

Abbildung 28: Klassifikationsmatrix für ULME (Hofmeister, 2005, S. 5).

3.3 Kognitive Anforderungen

Der Begriff der kognitiven Anforderungen wurde im Rahmen der Darstellung der kognitionstheoretischen Grundlagen bereits mehrfach verwendet. Kognitive Anforderungen werden vor allem im Zusammenhang mit der Konzeption der Schulleistungsstudien und folglich mit der Entwicklung der Bildungsstandards unterschieden. So werden die TIMSS-Aufgaben neben inhaltlichen Gesichtspunkten bezüglich ihrer kognitiven Anforderungen (Cognitive Domains) beschrieben. Walther et al. (2008, S. 49ff) stellen die Bezüge dieser Cognitive Domains (Knowing, Applying, Reasoning) zu den in den Bildungsstandards formulierten kognitiven Anforderungsbereiche heraus und ordnen zudem den Kompetenzstufen charakteristische Anforderungen zu.

Wie bei TIMSS wird auch bei PISA neben der inhaltsbezogenen Dimension und der Einbettung der Aufgaben in verschiedene Anwendungskontexte die anforderungsbezogene Dimension der Kompetenzcluster mitberücksichtigt. Diese besteht aus den drei kognitiven Anspruchsniveaus Reproduktion, Verbindungen und Reflexion. Beim Kompetenzcluster Reproduktion werden die erforderlichen Kompetenzen nur auf niedrigem Niveau benötigt, wie beispielweise bei der Ausführung einfacher Standardtätigkeiten. Dem mittleren Niveau (Verbindungen) werden überschaubare Tätigkeiten, die mehrere Schritte oder die Verknüpfung mehrerer Aufgabenelemente erfordern, zugeordnet. Die Kompetenzen, die auf hohem Niveau benötigt werden, wie Verallgemeinerungen oder Reflexion, entsprechen dem dritten Anspruchsniveau (Frey et al., 2010, S. 155).

Im Rahmen der bei IGLU-E 2001 erhobenen mathematischen Leistungen deutscher Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe wurden die Aufgaben ebenfalls drei verschiedenen Tätigkeiten zugeordnet. Dabei wurden zum einen Faktenwissen, einfache mathematische Begriffe, Fertigkeiten oder Standardverfahren eingesetzt. Zum anderen mussten mehrere bekannte rechnerische oder begriffliche Lösungsschritte und Lösungselemente zu einer Gesamtlösung zusammengefügt werden. Die dritte Tätigkeit betraf das Überwinden von Barrieren bei problemhaften Aufgaben durch schöpferisches Denken. Des Weiteren wurden drei schwierigkeitsgenerierende Anforderungsmerkmale für Aufgaben genannt. Dies sei die Verfügbarkeit mathematischer Inhalte, Begriffe und Prozesse, die zur Bewältigung der Anforderungen eingesetzt werden können oder die Fähigkeit zum Arbeiten mit mathematischen Modellen genannt. Die Anforderungen unterscheiden sich zudem, wenn die zur Aufgabenlösung notwendigen Werkzeuge lediglich aktiviert werden müssen, oder wenn zusätzlich eine Barriere zu überwinden ist (Walther et al., 2003, S. 194ff).

Das in den USA durch das NAEP (National Assessment of Educational Progress) für die Überprüfung der in Kapitel 2.1.4 dargestellten NCTM-Standards entwickelte Modell zur Einordnung der Items besitzt ebenfalls eine dreidimensionale Struktur (U.S. Department of Education, 2012). Die Aufgaben werden hinsichtlich von fünf Stoffbereichen (content strands), drei prozessbezogenen (mathematical power) und drei mathematischen Fähigkeiten (mathematical abilities) klassifiziert. Zusätzlich dazu werden die Items hinsichtlich ihrer Komplexität klassifiziert (low complexity, moderate complexity, high complexity), um die kognitiven Anforderungen der Items zu fokussieren: „Items at the low level of complexity, for example, may ask a student to recall a property. At the moderate level, an item may ask the student to make a connection between two properties; at the high level, an item may ask a student to analyze the assumptions made in a mathematical model" (U.S. Department of Education, 2013).

Büchter und Leuders (2005, S. 106) zeigen ein Stufenschema auf, um das Anforderungsniveau von Teilaufgaben grob einschätzen zu können. Dabei werden Anforderungen an Lernende dargestellt, die tendenziell nach dem steigenden Niveau angeordnet wurden (Abb. 29). Das Anforderungsniveau von Aufgaben lässt sich variieren durch die Aufgabenschwierigkeit, durch den Bearbeitungsaufwand, durch unterschiedliche Zugänge, durch die Reichhaltig- oder Vielgestaltigkeit der zu bearbeitenden Beispiele, durch die Verwendung konkreter Objekte oder symbolischer Repräsentationen, durch den Transfer auf komplexere Fälle und durch die Variation der Anforderung.

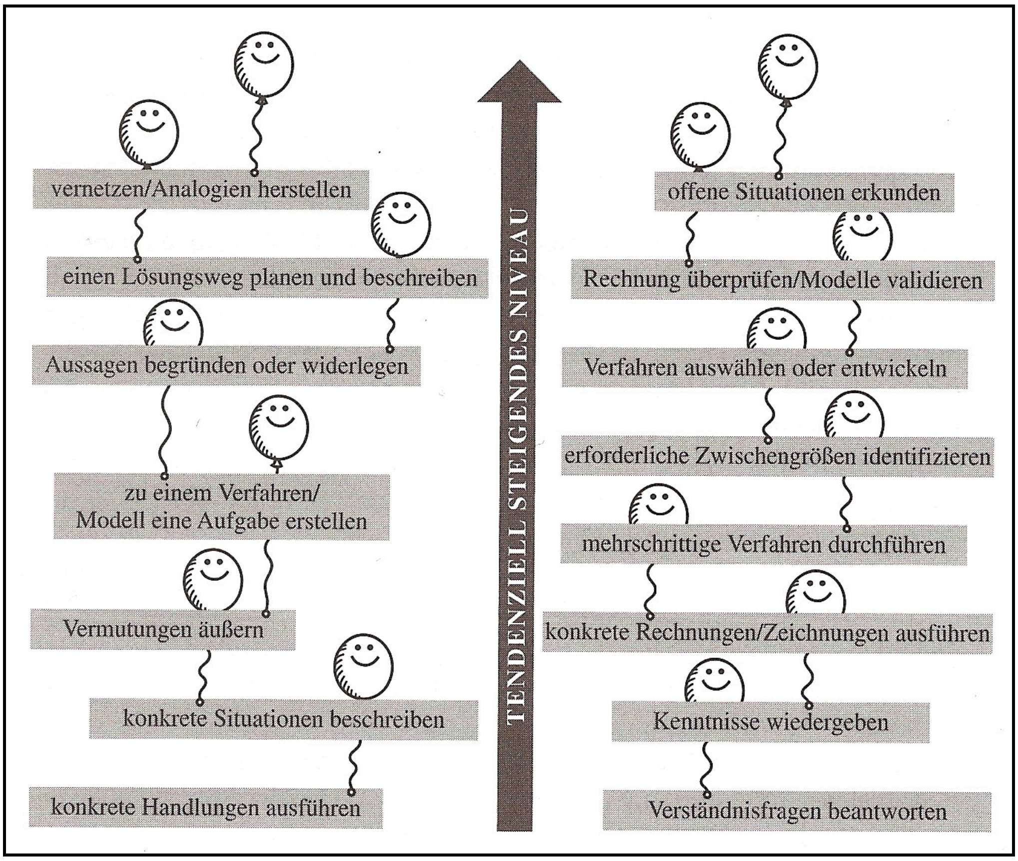


Abbildung 29: Stufenschema zur Einschätzung des Anforderungsniveaus (Büchter & Leuders, 2005, S. 106).

Neubrand (2002, S. 54ff) stellt Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen der Verständnis- und Fertigkeitsorientierung von Aufgaben dar. Es geht dabei darum, ob das Beherrschen von Verfahren die Voraussetzung für verständnisvolles und bedeutungshaltiges Lernen ist, oder ob das Beherrschen von Verfahren bereits Verstehen voraussetzt. Demnach zeigt sich in unterschiedlichen Altersstufen und mathematischen Anforderungen, dass der expliziten Verfügbarkeit mathematischer Konzepte die implizite Nutzung dieser Konzepte beim Lösen von Aufgaben vorangeht. Das Vorhandensein von Prozeduren setzt deren Einsatz voraus, wohingegen für den Aufbau und die sinnvolle Nutzung der Prozeduren wiederum Verständnis notwendig ist, sodass sich beides gegenseitig bedingt. Im Rahmen von Untersuchungen zum japanischen Mathematikunterricht wurde festgestellt, dass die Arbeit mit verständnisorientierten Aufgaben (thinking methods) nicht zu Nachteilen beim Erlernen von Fertigkeiten führt. Amerikanische Projekte zeigen ähnliche Ergebnisse. Nach Hiebert (1999, p. 11f) ist die Betonung von Prozeduren charakteristisch für den Mathematikunterricht. Das Entwickeln beziehungsweise Verknüpfen von Konzepten wird vernachlässigt, was mit den im Rahmen der Schulleistungstests gewonnenen Erkenntnisse einhergeht (vgl. Kap. 2.1.2). Er führt eine Reihe von Studien an, die belegen, dass die Schülerinnen und Schüler nur das lernen, wozu sie die Gelegenheit bekommen.

Renkl (1991) unterschied bei seiner Untersuchung zu Unterrichtsinhalten im dritten Schuljahr zwischen performanz- und strukturorientierten Aufgaben. Performanzorientierte Aufgaben betreffen die Automatisierung von Prozeduren, den Abruf einzelner Fakten (deklarativ: 4+5=9) oder bereits erlernter Strukturen (prozedural: schriftliche Subtraktionsaufgaben) und mechanisches Wissen. Geht es um den Erwerb konzeptuellen Wissens, um das Nennen mathematischer Prinzipien oder um das Anwenden von Beispielen und bedeutungshaltiges Wissen beziehungsweise Transfer, so sind dies nach Renkl strukturorientierte Aufgaben. Jene Anforderungen, die bei Bloom et al. (1972) als Faktenfragen eingestuft werden, aber mathematische Prinzipien betreffen, wurden bei Renkl als strukturorientierte Aufgaben klassifiziert. Die Prozessfrage, wie das Ergebnis einer Subtraktionsaufgabe ermittelt werden kann, wurde bei Renkl als die Anwendung bereits erlernter Algorithmen angesehen und damit als performanzorientierte Aufgabe klassifiziert. Er fand in seiner Untersuchung heraus, dass durchschnittlich zweimal so viele performanzorientierte Aufgaben im Mathematikunterricht an deutschen Grundschulen gestellt werden als strukturorientierte Aufgaben.

Wohingegen Renkl nicht zwischen Stellung und Bearbeitung der Aufgabe unterschied, untersuchten Stein, Grover und Henningsen (1996, p. 458ff) in ihrer Studie, wie sich die Struktur der Aufgaben während ihrer Bearbeitung eventuell verändert. Sie beurteilten die Aufgaben dabei bezüglich der Merkmale der Aufgaben (Task Features) und der kognitiven Anforderungen (Cognitive Demands) und stellten dies in einem Modell dar (Abb. 30).

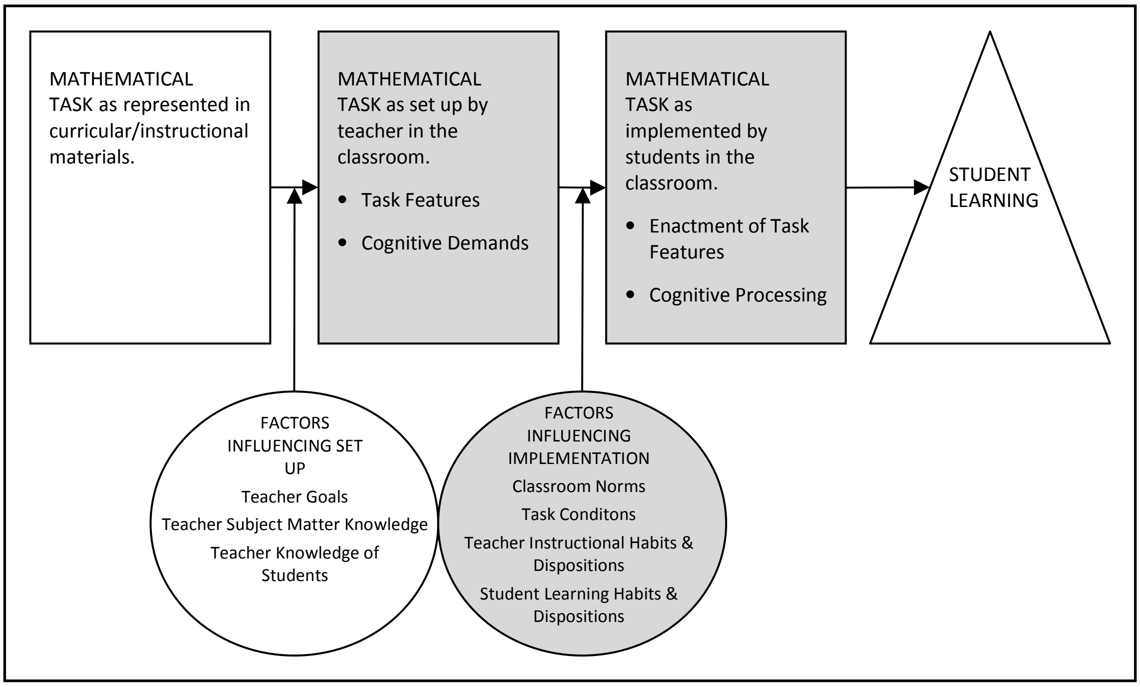


Abbildung 30: Relationship among various task-related variables and student learning (Stein, Grover & Henningsen, 1996, S. 459).

Die grau schraffierten Bereiche wurden beobachtet. In der Phase der Aufgabenstellung (task set up) wurden die Aufgaben hinsichtlich ihrer Merkmale bewertet, das heißt ob mehrere Lösungsmöglichkeiten und Repräsentationsformen vorhanden waren, und ob die Aufgaben Erklärungen verlangten. Auch die kognitiven Anforderungen, das heißt die Art der Denkprozesse, die zur Aufgabenlösung notwendig waren, wurden erfasst. Dabei wurden vier Anforderungen unterschieden (Memorization, Procedures without Connections, Procedures with Connections, Doing Mathematics). In der Phase der Aufgabenbearbeitung (task implementation) wurde überprüft, inwieweit die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben den Anforderungen entsprechend bearbeiteten, also ob sie beispielsweise mehrere Lösungsmöglichkeiten fanden. Auch die kognitiven Prozesse, in die Schülerinnen und Schüler währenddessen involviert waren, wurden analysiert. Von besonderem Interesse war die Entwicklung der an die Schülerinnen und Schüler gestellten, anspruchsvollen Aufgabenstellungen (high-level tasks) im Verlauf der Aufgabenbearbeitung. Je höher die kognitive Anforderung zum Zeitpunkt der Aufgabenstellung war, desto geringer war die Übereinstimmung mit den Anforderungen in den durch die Schülerinnen und Schüler ausgeführten Aufgabenbearbeitungen. Die Autoren folgerten daraus unter anderem die Notwendigkeit unterstützender Zuwendung durch die Lehrkräfte zum Aufrechterhalten des mathematischen Denkprozesses (Stein, Grover & Henningsen, 1996, p. 458ff).

Aufgaben erfordern immer unterschiedliche kognitive Prozesse, wobei die Unterscheidung zwischen den intendierten und den tatsächlich ablaufenden Prozessen bedacht werden sollte. Viele weitere Autoren verwenden zudem die Begriffe Anforderungs- oder Anspruchsniveau. Nach Zech (1977, S. 328ff) werden die für die Schwierigkeit einer Aufgabe maßgeblichen Gesichtspunkte unter dem Terminus „Anforderungsniveau" zusammengefasst. Als häufig diskutierte Parameter nennt er Anschaulichkeits-, Abstraktions-, Formalisierungs- beziehungsweise Mathematisierungs-, Bekanntheits- und Komplexitätsgrad. Nach Bruder (1995, S. 129) kann das Anforderungsniveau von Aufgaben anhand des Formalisierungsgrades, des Komplexitätsgrades, des Bekanntheitsgrades und der Ausführungsanforderungen eingeschätzt werden. Bei Criblez et al. (2009) ist die Frage nach dem Anforderungsniveau „die Frage danach, welche Aufgaben schwierig und welche leicht sind" (Criblez et al., 2009, S. 41). Nach Neubrand (2002, S. 67) wird das Anspruchsniveau mathematischer Aufgaben bestimmt durch die verlangten Modellierungsfähigkeiten, durch den Problemcharakter, durch den Bekanntheitsgrad und durch den Komplexitätsgrad. Nach Bauer (1978), in dessen Aufgabenbestimmung Unterrichtsprozesse keine direkte Rolle spielen, werden die Anforderungen durch die inhaltlich in den Aufgaben abgerufenen oder angeregten Denkprozesse beziehungsweise Fähigkeiten bestimmt. Demnach machen die in Tabelle 8 dargestellten beiden Dimensionen mathematische Denkleistung aus.

Tabelle 8: Zwei Dimensionen mathematischer Denkleistung

Nichtfachbezogene mathematische Denkfähigkeiten	**Fachbezogene mathematische Denkfähigkeiten**
Gedächtnisleistung, Erkennen von Information, Verarbeitung zu neuer Information, Beschreiten wechselnder Wege	Analysieren, Synthetisieren, Abstrahieren, Klassifizieren (in Hinblick auf die mathematische Begriffsbildung), Systematisieren und Beweisen (bezüglich der Produktion innermathematischen Wissens), Experimentieren, Umstrukturieren, Mathematisieren (beim Anwenden von Mathematik)

3.4 Weitere Aufgabenmerkmale

Neben den bereits in Kapitel 3.1 thematisierten Möglichkeiten der Klassifikation von Aufgaben und der Unterscheidung von kognitiven Anforderungen (vgl. Kap. 3.3) gibt es viele weitere Merkmale und Eigenschaften von Aufgaben.

In der Unterrichtspraxis werden sowohl die Lern- als auch die Leistungsaufgaben für die Schülerinnen und Schüler mehr und mehr in drei Niveaustufen beziehungsweise Schwierigkeitsgraden differenziert angeboten. Dass die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler korrekt eingeschätzt werden, sodass Über- und Unterforderung vermieden und für jeden eine adäquate herausfordernde Lernsituation geschaffen werden kann, ist nach Franke (2009, S. 121) eine entscheidende Voraussetzung für erfolgreiches Unterrichten. Durch die Schulbuchverlage werden den Lehrkräften diesbezüglich zahlreiche Hilfen zur Verfügung gestellt. Exemplarisch sei auf Hornschuh (2012) und Rinkens und Hönisch (2008) verwiesen. Hornschuh (2012) unterscheidet in seinem Übungsheft zur Vorbereitung auf die Vergleichsarbeiten in Mathematik für die Grundschulen zwischen grundlegenden, erweiterten und fortgeschrittenen Fähigkeiten. Rinkens und Hönisch (2008) stellten zur Erleichterung der Vorbereitung von Klassenarbeiten sechs Arbeiten und zu jeder Arbeit zusätzlich Bausteine zur Veränderung oder Erweiterung der Arbeiten auf drei Niveaustufen (Anforderungsbereiche I, II, III) zusammen.

Da sich die mathematische Kompetenz von Grundschulkindern unter anderem in der Bearbeitung geeigneter Aufgabenstellungen zeigt (Reiss, Heinze & Pekrun, 2008, S. 109) und sich aus der Bearbeitung von Aufgaben mit einem hohen Grad von Zuverlässigkeit auf das Vorhandensein oder Fehlen entsprechender Kompetenzen beim Aufgabenlöser schließen lässt (Blum, 2006, S. 15f), werden Aufgaben konzipiert und zu Tests zusammengestellt, um die kognitiven Prozesse nach außen transportieren zu können. Zur Feststellung der geometrischen Kompetenz der Schülerinnen und Schüler sollte das räumliche Wahrnehmungsvermögen (fundamentale Operation, auf der alle übrigen Fähigkeiten aufbauen), das räumliche Vorstellungsvermögen (Erkennen von Objekten, gedankliche Transformationen und Relationen von Objekten, Orientierung im gedachten Raum) und das geometrische Begriffswissen (in verbaler Form oder als „Bildwissen") getestet werden (Franke, 2009, S. 121). Im durch die Testzentrale herausgegebenen Testkatalog (vgl. Testzentrale) werden keine normierten Tests zur isolierten Erfassung der Geometrieleistung aufgelistet, wohl aber solche, die innerhalb des mathematischen Bereichs zwischen dem Triumvirat Arithmetik, Geometrie und Sachrechnen unterscheiden (DEMAT, MTAS) oder einzelne geometrische Bereiche abfragen (BASIC MLT, M-PA).

Während die Gütekriterien der klassischen Testtheorie Auskunft über die Qualität der Testaufgaben geben, können bei Lernaufgaben viele weitere Merkmale etwas über deren Qualität aussagen und diese beeinflussen, wie beispielsweise die bei Büchter und Leuders (2005, S. 73ff) genannten qualitätsbestimmenden Merkmale der Authentizität, der Offenheit und des Differenzierungsvermögens. Solche qualitätsbestimmenden Aufgabenmerkmale werden häufig im Zusammenhang mit schwierigkeitsbestimmenden Aufgabenmerkmalen genannt. Auf dem Bildungsserver Rheinland-Pfalz werden die Komplexität der Aufgabenstellung, die Anforderungen an das Lernprodukt und die Anforderungen an das Vorwissen als schwierigkeitsbestimmende Merkmale unterschieden. Die Komplexität der Aufgabenstellung wird dabei durch die Menge und Dichte der Denkoperationen bestimmt, die zur Lösung der Aufgabe absolviert werden müssen (Bildungsserver Rheinland-Pfalz). In der klassischen Testtheorie wird die Schwierigkeit empirisch durch den prozentualen Anteil der richtigen Aufgabenbearbeitungen an der Gesamtstichprobe bestimmt und hängt somit von der Personenstichprobe ab. Dieser Schwierigkeitsindex ist bei schwierigen Aufgaben niedrig und bei leichten Aufgaben hoch (Lienert & Raatz, 1998, S. 32). Auch Seeger (1990, S. 48) versteht unter Aufgabenschwierigkeit den Prozentsatz der richtigen Lösungen, wobei der Prozentsatz der richtigen Lösungen bei steigender Aufgabenschwierigkeit sinkt und umgekehrt.

In den PISA-Studien wird die Lösung mathematischer Aufgaben als Modellierungsprozess dargestellt, wobei hinsichtlich der Komplexität systematisch zwischen den Anforderungsmerkmalen Reproduktion, Verknüpfung und Verallgemeinerung unterschieden wird (vgl. Kap. 3.3). Weitere Aspekte des Modellierungsprozesses sind das Vorhandensein vielfältiger Lösungsmöglichkeiten, die Anzahl der zu verarbeitenden Größen, die Notwendigkeit des Argumentierens und die curriculare Wissensstufe. Jede PISA-Aufgabe wurde bezüglich dieser Merkmale eingeschätzt. Dabei stellten sich alle Merkmale als schwierigkeitsrelevant heraus, die Komplexität des Modellierungsprozesses und die curriculare Wissensstufe waren am einflussreichsten (Klieme, Neubrand & Lüdtke, 2001). Der Zusammenhang zwischen dem Schwierigkeitsgrad der Testaufgaben und der Leistung der Testteilnehmer kann auf einer einzigen kontinuierlichen Skala aufgezeigt werden (vgl. Kap. 2.3.3). Der relative Schwierigkeitsgrad einer Testaufgabe kann am Prozentsatz der Testteilnehmer gemessen werden, die die einzelnen Aufgaben richtig beantworten. Die relative Leistungsfähigkeit der Testteilnehmer kann wiederum daran gemessen werden, welchen Anteil der Aufgaben sie richtig beantworten. Durch die Konstruktion einer Skala, die den Schwierigkeitsgrad jeder Aufgabe anzeigt, ist es möglich, die Mathematikkompetenzstufe zu ermitteln, die einer bestimmten Aufgabe entspricht. Durch die Übertragung der Leistung der Testteilnehmer auf diese Skala ist es dann möglich, den Grad der Mathematikkompetenz zu beschreiben, über den sie verfügen (OECD, 2013, S. 49).

Pollitt et al. (1985) identifizierten drei Kategorien der Schwierigkeit. Die Konzeptschwierigkeit bezieht sich auf die dem Konzept intrinsische Schwierigkeit. Die Prozessschwierigkeit meint die Schwierigkeit der kognitiven Operationen und der Anforderungen, die an die kognitiven Ressourcen des Aufgabenbearbeiters gestellt werden. Die Schwierigkeit der Fragestellung betrifft die sprachliche Formulierung und die Darstellung der Fragen.

Darauf bezugnehmend machten Fisher-Hoch und Hughes (1996, p. 2ff) im Rahmen ihrer empirischen Untersuchung von Mathematikprüfungen vor allem die Formulierung der Fragestellung und die Anzahl an Arbeitsschritten als Schwierigkeitsquellen (Sources of Difficulties, SODs) von mathematischen Aufgaben aus. Sie stellten fest, dass Aufgaben, die mehr Arbeitsschritte benötigen und somit mehr Denkarbeit erforderten, auch schwieriger waren.

Bereits Aebli (1983, S.355ff) beschäftigte sich mit dem Faktor der Schwierigkeit und entwickelte kein generelles Schwierigkeitsmaß für Aufgaben, sondern betrachtete vor allem drei Aspekte von Aufgaben. Dies war zum einen die Struktur der herzustellenden Relation (Operation und Handlungsschema), die niemals eindimensional ist, sondern geprägt wird durch die Komplexität der Elemente und der durchzuführenden Operation, durch die Relationen zwischen den Elementen und durch die Verfügbarkeit der Elemente, das heißt ob diese erst noch aufgebaut oder manipuliert werden müssen. Auch die Modalität der gegebenen und der zu erzeugenden Elemente, also ob diese bereits visualisiert sind oder aus dem Gedächtnis reproduziert werden müssen, sowie die Art der Medien, in denen der Strukturaufbau stattfindet, bestimmen demnach die Schwierigkeit einer Aufgabe.

Nach Aebli (1983) war es entscheidend, dass die Schwierigkeit einer Aufgabe nicht nur aus ihren objektiven Zügen bestimmt wurde, sondern relativ zum Repertoire des Menschen, der sie bearbeiten will. Der Mensch könne eine Aufgabe sofort als bekannte Aufgabe erkennen und bräuchte die in seinem Repertoire befindliche Struktur nur abzurufen (Aebli, 1983, S.356). Auch nach Neubrand (2002, S. 63) ist die Kombination von subjektivem Bekanntheitsgrad und den objektiven Anforderungen der Aufgabe entscheidend für die Beurteilung der Aufgabenschwierigkeit. Diese Abhängigkeit der Anforderungen vom Bekanntheitsgrad der Aufgaben macht es bei internationalen Untersuchungen schwierig, Aufgaben aufgrund der an die Schülerinnen und Schüler gestellten Anforderungen zu klassifizieren. Der Bekanntheitsgrad wird durch das jeweilige nationale Curriculum beeinflusst und bedingt somit eine implizite Kulturabhängigkeit der Kategorisierung bei der Betrachtung aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler (Neubrand, 2002, S. 75f). Im Rahmen der Überprüfung der modellbasierten Zuweisung der Items zu den Kompetenzniveaus nach Reiss anhand der Itemschwierigkeiten (vgl. Kap. 2.1.4) fanden Reiss, Heinze und Pekrun (2008, S.118) bei der Analyse erklärungsbedürftiger Items bezüglich des Verdoppelns heraus, dass es offensichtlich eine Rolle spielt, ob nicht allgemeine Techniken, sondern spezielle Aufgabentypen geübt wurden. Auch Stern (1999) ermittelte im Zusammenhang mit Textaufgaben eine Abhängigkeit der Mathematikleistungen von der Quantität und Qualität schulischer Lerngelegenheiten (Stern, 1999, zitiert nach Neubrand 2002, S. 55). Nach Bromme, Seeger und Steinbring (1990) ist die Aufgabenbearbeitung und die damit verbundene Zielerreichung nicht alleine durch die Aufgabenstellung determiniert, sondern ebenfalls von subjektiven Faktoren wie der Wahrnehmung und dem Bekanntheitsgrad abhängig. Die Autoren unterscheiden zwischen einer rationalen Aufgabenanalyse, bei der vom Lösungsverhalten eines mittleren Aufgabenlösers ausgegangen wird, und einer empirischen Aufgabenanalyse, bei der untersucht wird, wie die Aufgaben tatsächlich gelöst werden. Sie vertreten die Ansicht, dass sich die Anforderungen in der Aufgabenstellung (rationale Analyse) nicht analysieren lassen, ohne dabei die Schülertätigkeit in Betracht zu ziehen (empirische Analyse), und umgekehrt muss man die Anforderungen analysiert haben, um die Tätigkeit zu verstehen. Da die Angemessenheit von Anforderungen in Aufgaben also auch von den individuellen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler und dem Bekanntheitsgrad der Aufgabe abhängen, sollte die Lehrkraft über den Bekanntheitsgrad von Aufgabentypen informiert sein, um die weiteren Aufgaben didaktisch angemessen auswählen zu können (Bromme, Seeger & Steinbring, S. 4ff).

Zahlreich sind die Forderungen nach sogenannten „guten“ Aufgaben. Nach Käpnick (2003, S. 169f) zeichnen diese sich durch die adressatenbezogene Bestimmung des konkreten Inhalts beziehungsweise der inhaltlichen Schwerpunktsetzung und die Berücksichtigung des Schwierigkeitsgrades, der Präsentationsweise und der einzuplanenden Bearbeitungszeit beim Stellen von Aufgaben aus. König-Wienand, Langer und Lewe (2003, S. 43f) weisen darauf hin, dass es gute Aufgaben an sich nicht gibt, sondern dass jederzeit der Aspekt der Mathematik, der jeweilige Lernende und der Unterricht berücksichtigt werden müssen. Gute Aufgaben sollten hinreichend komplex sein und je nach Zweck geeignet sein. Sie sollten ein breites Spektrum an inhaltlichen und allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts abdecken und Geduld, Ausdauer, Konzentration und Anstrengungsbereitschaft erfordern. Gute Aufgaben sollten im Hinblick auf ihre Funktion beurteilt werden. Wichtig ist, dass die Lehrkräfte Aufgaben reflektiert auswählen und selbst entwickeln, sodass sie zum Nachdenken anregen, Wissen aktualisieren und subjektiv bedeutsam werden (König-Wienand, Langer & Lewe, 2003, S. 45). Auch Bauersfeld (2003, S. 15f) ist der Ansicht, dass es gute Aufgaben nicht universal gibt, sondern von der jeweiligen Situation und Person abhängen. Er kritisiert den Blick der Aufgabendidaktik auf die mathematische Aufgabenstruktur, auf die Definition von Schwierigkeitsgraden und deren Stufung, auf die Lebensnähe und auf die Einbettung in die

Unterrichtszusammenhänge. Es sollten stets vor allem die lösungsrelevanten, persönlichkeitsbildenden Effekte wie Anstrengung, Fleiß, Ausdauer, Flexibilität (Aufsuchen alternativer Lösungsansätze), Selbstreflexion, Hinterfragen, Ernsthaftigkeit, Einstellungen und Vergnügen als Lernziele beim Bearbeiten von Problemsituationen mit bedacht werden. Nach Wollring (2003, S. 131ff) erfordern gute Aufgaben nicht nur das Wissen von Tatsachen und das direkte Anwenden von Fertigkeiten oder Routinen, sondern auch die aktive, kommunikative, kritische und individuelle Auseinandersetzung mit mathematischen Strategien und Strukturen. Büchter und Leuders (2005, S. 13ff) merken an, dass das Potenzial, das in einer Aufgabe steckt, durch einen falschen Einsatz zunichte gemacht werden kann, dass Aufgaben die Qualität des Unterrichts beeinflussen und dass Aufgaben dazu in der Lage sind, einen Beitrag zur erwünschten Entwicklung des Mathematikunterrichts zu leisten.

Das folgende Zitat leitet über zur Betrachtung der in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereiche:

> „Gute Aufgaben sind solche, welche bei Schülern in Verbindung mit inhaltlichen Kompetenzen, bezogen auf grundlegende mathematische Begriffe und Verfahren, die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen unterstützen. So gesehen sind gute Aufgaben das zentrale Instrument für die Implementation der Bildungsstandards Mathematik im Primarbereich." (Granzer & Walther, 2008, S. 9)

4 Anforderungsbereiche in den Bildungsstandards

In den Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung der Bildungsstandards heißt es, dass die Umsetzung der Bildungsstandards die Chance der Entwicklung einer anforderungsbezogenen Aufgabenkultur bietet (KMK, 2005b, S. 11). Die Unterscheidung kognitiver Anforderungen hat ihren Ursprung bei Bloom et al. (vgl. Kap. 3.2.3), woran in zahlreichen Kontexten, unter anderem im Rahmen der Aufgabenbeschreibungen bei TIMSS und PISA (vgl. Kap. 3.3), angeknüpft wurde. Das Konzept der kognitiven Anforderungen wurde schließlich in alle bisher erlassenen, national verbindlichen Bildungsstandards durch die Formulierung von drei Anforderungsbereichen integriert. Zunächst werden die für den Primarbereich formulierten Anforderungsbereiche dargestellt und mit geometrischen Beispielaufgaben konkretisiert (Kap. 4.1). Durch die von der Kultusministerkonferenz nach eigener Aussage bisweilen sehr knapp gehaltenen Erläuterungen werden zum Vergleich zusätzlich die Anforderungsbereiche in den Bildungsstandards für andere Fächer und Schulabschlüsse betrachtet. Danach wird der mögliche Nutzen der Anforderungsbereiche aufgezeigt (Kap. 4.2). Abschließend werden Anmerkungen verschiedener Autoren zu den Anforderungsbereichen und dem häufig genannten Zusammenhang zur Schwierigkeit von Aufgaben dargestellt (Kap. 4.3).

4.1 Anforderungsbereiche zur Leitidee Raum und Form in den Bildungsstandards

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich nennen allgemeine sowie inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen für das Ende der Grundschulzeit (vgl. Kap. 2.3). Die ebenfalls darin formulierten Anforderungsbereiche beschreiben, welche Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler gestellt und welche Fähigkeiten zum Lösen der Aufgabe erforderlich sind. Es werden die drei Anforderungsbereiche Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II) und Verallgemeinern und Reflektieren (AB III) unterschieden (KMK, 2005a, S. 13ff). Dabei fokussieren die Formulierungen den Lösungsweg von Aufgaben. Zur Konkretisierung der Standards werden insgesamt 60 Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen (AB I, AB II, AB III) zu 14 verschiedenen mathematischen Schwerpunkten dargestellt (KMK, 2005a, S. 12ff), die sich wie in Tabelle 9 dargestellt auf die fünf Leitideen und die drei Anforderungsbereiche verteilen.

Tabelle 9: Verteilung der Beispielaufgaben auf Leitideen und Anforderungsbereiche
(eigene Darstellung in Anlehnung an KMK, 2005a, S. 12ff)

	Aufgaben insgesamt	**AB I**	**AB II**	**AB III**
Zahlen und Operationen	16	6	7	3
Raum und Form	12	3	7	2
Muster und Strukturen	10	3	4	3
Größen und Messen	11	5	5	1
Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	11	5	4	2
gesamt	60	22	27	11
Prozentual	100%	37%	45%	18%

Zum Kompetenzbereich Raum und Form werden insgesamt 12 Aufgabenbeispiele mit den Themenschwerpunkten Würfel, Würfelbauten und Dreiecke vorgestellt, die in den folgenden Ausführungen bei der Vorstellung des jeweiligen Anforderungsbereichs beschrieben beziehungsweise aufgezeigt werden.

Das Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK, 2005a, S. 13) definiert den ersten Anforderungsbereich wie in Abbildung 31 dargestellt.

Anforderungsbereich „Reproduzieren“ *(AB I)*
Das Lösen der Aufgabe erfordert Grundwissen und das Ausführen von Routinetätigkeiten.

Abbildung 31: Anforderungsbereich I (KMK, 2005a, S. 13).

An gleicher Stelle wird ergänzt, dass sich manche Aufgaben beziehungsweise Teilaufgaben durch Reproduzieren im Rahmen gelernter und geübter Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet lösen lassen (KMK, 2005a, S. 13). Diese Aufgabentypen sind den Schülerinnen und Schülern also bereits bekannt.

In den aufgezeigten Aufgaben wird beispielsweise einfaches begriffliches Wissen verlangt, indem Eigenschaften zu Grundbegriffen der ebenen und der im Alltag verankerten räumlichen Geometrie genannt werden sollen. So sollen die Schülerinnen und Schüler die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten eines Würfels nennen (KMK, 2005a, S. 19). Auch Aufgaben, in denen Fertigkeiten wie das Zeichnen einfacher Formen der ebenen Geometrie mit Hilfsmitteln sowie das Einsetzen grundlegender geometrischer Arbeitsmittel gefordert werden, sind Anforderungsbereich I zuzuordnen. Exemplarisch sind Aufgaben abgebildet, bei denen die Schülerinnen und Schüler mit dem Geodreieck ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen (KMK, 2005a, S. 22) oder die Länge der Seiten eines Dreiecks bestimmen sollen (KMK, 2005a, S. 22). Leitideenübergreifend werden zu Anforderungsbereich I insgesamt 22 Aufgaben aufgezeigt.

Während Anforderungsbereich I lediglich mit drei Beispielaufgaben für die Leitidee Raum und Form konkretisiert wird, werden zu Anforderungsbereich II sieben Beispiele vorgestellt. Dieser Anforderungsbereich wird wie in Abbildung 32 ersichtlich definiert.

Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ *(AB II)*
Das Lösen der Aufgabe erfordert das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen.

Abbildung 32: Anforderungsbereich II (KMK, 2005a, S. 13).

Konkretisiert wird Anforderungsbereich II durch Aufgaben zum Umgang mit Körpernetzen und zum Vollziehen mentaler Operationen im Raum, indem die Schülerinnen und Schüler Würfelnetze identifizieren oder gegenüberliegende Flächen in Netzen einfärben sollen (KMK, 2005a, S.19). Auch Aufgaben zur zwei- und dreidimensionalen Darstellung von Würfelbauten werden dem zweiten Anforderungsbereich zugeordnet. Exemplarisch werden Aufgaben aufgezeigt, in denen die Schülerinnen und Schüler die Anzahl der Würfel von Bauwerken bestimmen (Abb. 33), passende Baupläne identifizieren (Abb. 34) und Bauwerke ergänzen sollen (Abb. 35).

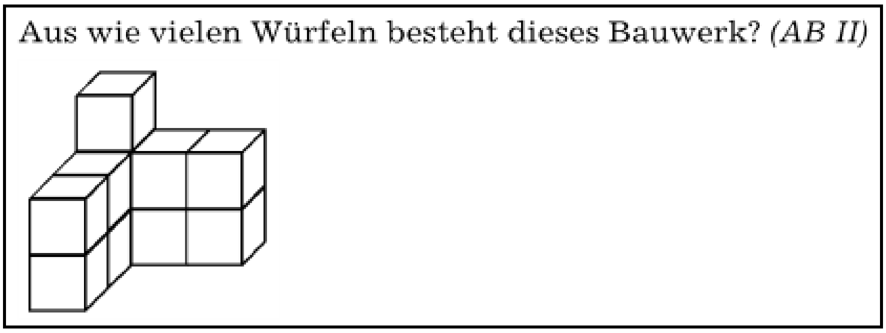


Abbildung 33: Aufgabe 1 zu Anforderungsbereich II (KMK, 2005a, S. 20).

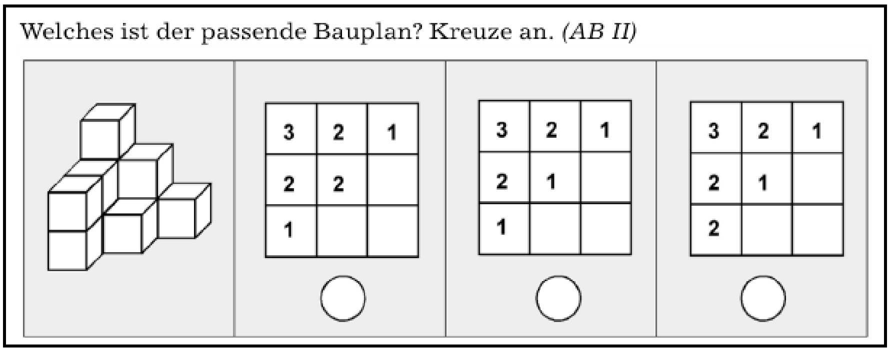


Abbildung 34: Aufgabe 2 zu Anforderungsbereich II (KMK, 2005a, S. 21).

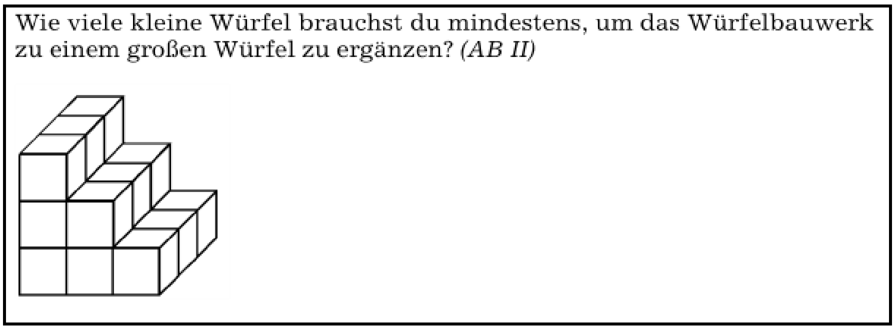


Abbildung 35: Aufgabe 3 zu Anforderungsbereich II (KMK, 2005a, S. 21).

Aufgaben zum Verständnis der Beziehungen der Formen im Bereich der ebenen Geometrie, wenn Schülerinnen und Schüler beispielsweise ein Quadrat auf zwei unterschiedliche Arten in vier gleiche Dreiecke oder ein Rechteck in vier gleiche Dreiecke zerlegen sollen (KMK, 2005a, S. 22), sind ebenfalls Anforderungsbereich II zuzuordnen. Insgesamt konkretisieren 27 der 60 Aufgabenbeispiele, die in den Bildungsstandards für den Primarbereich im Fach Mathematik zu finden sind, Anforderungsbereich II.

Die Festlegung des Anforderungsbereichs III ist in Abbildung 36 aufgezeigt. Zu diesem Anforderungsbereich werden über alle Leitideen hinweg insgesamt nur elf Aufgabenbeispiele aufgezeigt, davon zwei zum Bereich Raum und Form.

Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ *(AB III)*
Das Lösen der Aufgabe erfordert komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern.

Abbildung 36: Anforderungsbereich III (KMK, 2005a, S. 13).

Folgende beiden Aufgaben sind in den Bildungsstandards enthalten (Abb. 37 und 38).

Hier ist ein Würfel aus Strohhalmen gebaut. Käfer Anton sitzt auf der Ecke A. Käfer Gustav sitzt auf der Ecke G. Anton will Gustav auf kürzestem Wege besuchen. Er kann nur über die Strohhalme gehen.

Ein möglicher Weg des Käfers ist: A → B → F → G

Schreibe alle weiteren Möglichkeiten auf. *(AB III)*

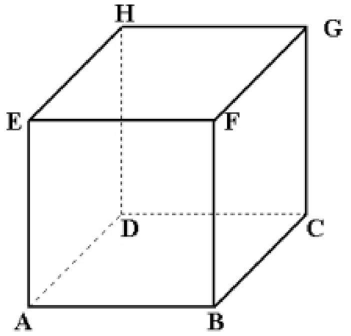
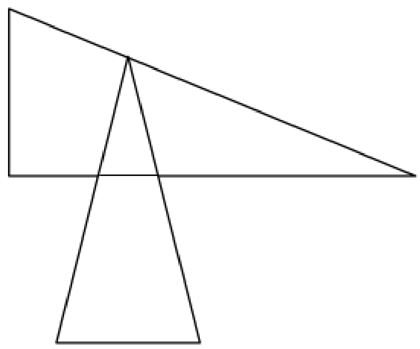


Abbildung 37: Aufgabe 1 zu Anforderungsbereich III (KMK, 2005a, S. 20).

In der Figur liegen zwei Dreiecke so, dass sie genau drei Punkte gemeinsam haben.



Zeichne zwei Dreiecke so, dass sie genau

a) 1 Punkt
b) 2 Punkte
c) 4 Punkte

gemeinsam haben (Skizze). *(AB III)*

Abbildung 38: Aufgabe 2 zu Anforderungsbereich III (KMK, 2005a, S. 23).

Wie bereits einleitend erwähnt, werden auch in den Bildungsstandards für die weiteren Fächer und Schulabschlüsse drei Anforderungsbereiche unterschieden, die ähnlich formuliert und beschrieben werden. Abweichend ist die den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich eigene Konzentration auf den Lösungsweg. In den Bildungsstandards im Fach Deutsch für den Primarbereich (KMK, 2004a, S. 17) geht es bei Aufgaben zu Anforderungsbereich I um das Wiedergeben bekannter Informationen und das Anwenden grundlegender Verfahren und Routinen. Anforderungsbereich II, der im Fach Mathematik mit dem Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen umschrieben wird, wird für das Fach Deutsch etwas konkreter formuliert. Dort heißt es, dass die Schülerinnen und Schüler vertraute Sachverhalte bearbeiten, indem sie erworbenes Wissen und bekannte Methoden anwenden und miteinander verknüpfen (KMK, 2004a, S. 17). Während im Fach Mathematik die Tätigkeiten aus Anforderungsbereich III als komplex bezeichnet werden (Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern), heißt es im Fach Deutsch, dass die Schülerinnen und Schüler in diesem Anforderungsbereich für sie neue Problemstellungen, die eigenständige Beurteilungen und eigene Lösungsansätze erfordern, bearbeiten (KMK, 2004a, S. 17).

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss umfasst Anforderungsbereich I (Reproduzieren) die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang (KMK, 2004b, S. 13). Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen) beinhaltet das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden (KMK, 2004b, S. 13). Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) schließlich umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten unter anderem mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen (KMK, 2004b, S. 13).

Auch der Aufbau des den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife zugrunde liegenden Kompetenzmodells ist ähnlich (KMK, 2012, S. 11). Jedoch werden durch die Anforderungsbereiche die unterschiedlichen kognitiven Ansprüche zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen formuliert. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sollen an den mathematischen Leitideen in allen drei Anforderungsbereichen eingesetzt werden können. Die schriftliche und mündliche Prüfungsaufgabe soll Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen erfordern. Der erste Anforderungsbereich bezieht sich auf bereits bekannte Inhalte, Kenntnisse und Verfahren und umfasst demnach das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang, die Verständnissicherung sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren (KMK, 2012, S. 27). Das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten, Erklären und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte entsprechen Anforderungsbereich II (KMK, 2012, S. 27). Für Anforderungsbereich III wird das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen, formuliert. Die selbstständige Auswahl geeigneter Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung der Aufgabe, die Anwendung auf eine neue Problemstellung und die Reflexion des eigenen Vorgehens werden ebenfalls als Anforderungen genannt (KMK, 2012, S. 27). Zudem wird unterschieden zwischen einem grundlegenden und einem erhöhten Anforderungsniveau (KMK, 2012, S. 24). Die Zielformulierungen für das erhöhte Anforderungsniveau umfassen bezüglich der Leitideen neben einem größeren inhaltlichen Umfang ebenso einen erhöhten Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- und Formalisierungsgrad.

In den Formulierungen ist über alle Bildungsstandards für andere Fächer und Schulabschlüsse hinweg zu erkennen, dass die Komplexität von Anforderungsbereich I zu Anforderungsbereich III zunimmt.

4.2 Nutzen der Anforderungsbereiche

Den Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung der Bildungsstandards zufolge beschreiben die Anforderungsbereiche die kognitiven Anforderungen an Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben, resultieren aber „nicht aus empirisch validierten Testverfahren, sondern aus der beruflichen Erfahrung von Lehrkräften und einschlägigen Aufgabenformaten aus bereits vorhandenen Testmaterialien" (KMK, 2005b, S. 17). Die Festlegung der Anforderungsbereiche ist also erfahrungsbasiert. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich heißt es, dass es sich bei der Definition und Kennzeichnung der Beispielaufgaben als Repräsentanten der jeweiligen Anforderungsbereiche um eine vorläufige, empirisch nicht validierte Zuordnung handelt, die nicht immer eindeutig zu treffen ist (KMK, 2005a, S. 13).

Aufgrund dieser Einteilung der Beispielaufgaben in Anforderungsbereiche ohne empirische Prüfung bezeichnet Schipper (2005), ein Mitarbeiter der Steuerungsgruppe Bildungsstandards, die Klassifikation der Aufgaben nach Anforderungsbereichen als die zentrale Schwachstelle der „Bildungsstandards für das Fach Mathematik - Jahrgangsstufe 4" (Schipper, 2005, S. 356). Reiss und Winkelmann (2009, S. 120) kritisieren ebenfalls die Festlegung der drei Anforderungsbereiche und bezeichnen sie als rudimentäre Basis zur Graduierung der Kompetenzen innerhalb der Inhaltsbereiche. Nach Ufer (2009, S. 96) sind die groben, empirisch nicht gesicherten Beschreibungen der Bildungsstandards nur eingeschränkt geeignet, um in der Praxis die Anforderungen von Aufgaben und entsprechend auch die Leistungen von Schülerinnen und Schülern verlässlich einschätzen beziehungsweise einordnen zu können. Er verweist zudem auf deutlich detailliertere Modelle zur Einschätzung des Anforderungsniveaus von Aufgaben und für die Diagnose individueller Kompetenzen (vgl. Ufer, Reiss & Heinze, 2009).

Grassmann et al. (2014, S. 18ff) weisen auf die Schwierigkeit hin, dass eine Aufgabe prinzipiell nicht a priori einem bestimmten Anforderungsbereich zugeordnet werden kann, da gleiche Aufgaben für verschiedene Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Anforderungen darstellen können. Gleiches gilt für die Lösung einer Aufgabe durch ein Kind zu unterschiedlichen Entwicklungszeitpunkten und je nach Erfahrung beim Bearbeiten entsprechender Aufgabentypen. Auch Walther, Selter und Neubrand (2008, S. 21) verweisen auf die Abhängigkeit von der spezifischen Situation der Klasse bei der Zuordnung von Aufgaben zu Anforderungsbereichen. Roppelt & Reiss (2012, S. 41) merken ebenfalls an, dass die Anforderungsbereiche nicht unabhängig vom Aufgabenbearbeiter beurteilt werden können. Sie empfehlen jedoch, sich bei der Zuordnung von Aufgaben zu Anforderungsbereichen ein typisches oder durchschnittliches Kind vorzustellen, und formulieren folgendes Plädoyer für die Anforderungsbereiche:

> „Trotz solcher Unschärfen sind die Anforderungsbereiche ein Werkzeug, das hilfreich sein kann, um die Variabilität von Mathematikaufgaben hinsichtlich ihres kognitiven Anspruchs zu beschreiben. Auch wenn sie eine nur große Orientierung geben, kann man sie nutzen, um einer „Verflachung" von Unterricht und Tests aller Art entgegenzutreten und eine hinreichende Bandbreite von Anforderungen der eingesetzten Aufgaben sicherzustellen." (Roppelt & Reiss, 2012, S. 41)

An weiteren Stellen wird der Nutzen der Anforderungsbereiche herausgestellt. In den Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung der Bildungsstandards heißt es, dass die Anforderungsbereiche ein theoretisches Modell für die Arbeit mit Aufgaben bilden und für Aussagen über die Angemessenheit, Qualität und Komplexität der Anforderungen, die mit den Aufgabenbeispielen verbunden sind, eine Orientierung darstellen, in der sich die Leistungen von Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß bewegen (KMK, 2005b, S. 17). Den Bildungsstandards im Fach Deutsch für den Primarbereich zufolge machen die nach der möglichen kognitiven Komplexität von Aufgaben strukturierten Anforderungsbereiche deutlich, welche kognitiven Operationen von Schülerinnen und Schülern jeweils gefordert werden (KMK, 2004a, S. 17). Sie beschreiben zu erbringende kognitive Leistungen und dienen somit der Klassifikation der zur Aufgabenbeantwortung notwendigen kognitiven

Prozesse. In den Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung der Bildungsstandards heißt es weiter, dass die Umsetzung der Bildungsstandards die Chance der Entwicklung einer anforderungsbezogenen Aufgabenkultur bietet (KMK, 2005b, S. 11).

Den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich zufolge liegt der Nutzen von Anforderungsbereichen für die Schulpraxis darin, der Leistungsheterogenität von Grundschulkindern Rechnung tragen zu können. Es heißt dort weiter, dass die Aufgabenbeispiele als Muster für einen differenzierenden Unterricht fungieren können, in dem alle Kinder am gleichen Inhalt arbeiten, aber nicht unbedingt dieselben Aufgaben lösen (KMK, 2005a, S. 13). In den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife wird von der Orientierung auf eine in den Ansprüchen ausgewogenen Aufgabenstellung mit Hilfe der Stufung der Anforderungsbereiche gesprochen (KMK, 2012, S. 27). Auf den Seiten des nordrhein-westfälischen Landesinstituts für Schule findet sich die Forderung, dass alle Anforderungsbereiche durch eine entsprechende Auswahl beziehungsweise Variation der Aufgaben im Unterricht angemessen berücksichtigt werden sollen, um somit den Unterricht ausgewogen zu gestalten (Qualitäts- und UnterstützungsAgentur. Landesinstitut für Schule. NRW).

Die Anforderungsbereiche sollen auf theoretischer Ebene beschreiben, welche Qualität und Komplexität kognitive Leistungen aufweisen, die beim Lösen einer Aufgaben erbracht werden müssen (Roppelt & Reiss, 2012, S. 41). Sie sollen den kognitiven Anspruch, den kompetenzbezogene Tätigkeiten erfordern, auf theoretischer Ebene erfassen. Sie geben Orientierungen, dürfen jedoch nicht zu wörtlich genommen werden (Blum, 2006, S. 14). Mit Hilfe der Anforderungsbereiche können verschiedene Qualitäten des verständigen Handelns beim Kind unterschieden werden (Schütte, 2008, S. 83f). Das Wissen um die Existenz der verschiedenen Anforderungsbereiche kann einem vorwiegend auf Routinen und Verfahren und somit auf Reproduktion ausgerichteten Unterricht vorbeugen (Walther & Granzer, 2009, S. 117). Käpnick (2014, S.24f) bezeichnet die drei Anforderungsbereiche als plausibel und als wesentliche Säule der Bildungsstandards, da diese grobe Leistungsdifferenzierung leicht überschaubar und praktikabel ist und den Lehrkräften in der Schulpraxis eine wirkungsvolle Orientierung gibt. Er sieht die Unterscheidung der drei Anforderungsbereiche zudem als einfach zu realisierende Hilfe für differenzierendes Lernen, warnt allerdings davor, dass leistungsschwache Schülerinnen und Schüler nur noch Aufgaben des Anforderungsbereichs I lösen, durchschnittliche Kinder Aufgaben des Bereichs II und leistungsstarke Kinder Aufgaben des Anforderungsbereichs III, da alle Schülerinnen und Schüler in allen drei Anforderungsbereichen gefördert werden sollten (Käpnick, 2014, S.26f). Nach Walther und Granzer (2009, S. 111) wird durch Aufgabenbeispiele und deren Zuordnung zu Kompetenzen und Anforderungsbereichen ein Instrument für Lehrkräfte erkennbar, das andeutet, wie man Aufgaben als flexible Werkzeuge für eine an individuelle Schülerinnen und Schüler angepasste Unterrichtsgestaltung einsetzen kann.

Die Kultusministerkonferenz (KMK, 2005b, S. 17) betont, dass Anforderungsbereiche nicht zu verwechseln sind mit Kompetenzstufen (vgl. Kap. 2.3.3).

4.3 Anforderungsbereiche und Schwierigkeit

Immer wieder taucht der Begriff Anforderungsbereich im Zusammenhang mit der Schwierigkeit von Aufgaben auf. So wurde in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich formuliert:

> „Es werden hier so genannte „große Aufgaben“ vorgestellt, die der Leistungsheterogenität von Grundschülern dadurch Rechnung tragen, dass sie im gleichen inhaltlichen Kontext ein breites Spektrum an unterschiedlichen Anforderungen und Schwierigkeiten abdecken." (KMK, 2005a, S. 13)

In den Erläuterungen zur Konzeption der Bildungsstandards heißt es:

> „Um die Komplexität und den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben bestimmen zu können, sind die Standards zunächst in Anforderungsbereiche gegliedert." (KMK, 2005b, S. 17)

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss steht:

> „Im Allgemeinen nehmen Anspruch und kognitive Komplexität von Anforderungsbereich zu." (KMK, 2004b, S. 13)

Doch nicht nur in den Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz tauchen die beiden Begriffe gemeinsam auf, sondern auch in fachdidaktischen Publikationen. Nach Köller und Baumert (2008) beschreiben die drei Anforderungsbereiche „die Komplexität/Verknüpfung der beim Lösen von mathematischen Aufgaben notwendigen Kompetenzen, es handelt sich hierbei also weniger um eine eigenständige Dimension mit mehreren Facetten. Vielmehr ist der Anforderungsbereich einer Aufgabe eng mit ihrer Schwierigkeit assoziiert" (Köller & Baumert, 2008, S. 738). Steinweg (2007) merkt an, dass die Prozessziele der Bildungsstandards theoretisch klar definiert und „hierarchisch" (Steinweg, 2007, S. 5) in Anforderungsbereiche gegliedert sind. Nach Reiss und Hammer (2013) wird in den deutschen Bildungsstandards „in Bezug auf die Schwierigkeit ein pragmatischer Standpunkt eingenommen. Unterschieden werden hier drei Anforderungsbereiche" (Reiss & Hammer, 2013, S. 90). Dass dabei davon ausgegangen wird, dass Anspruch und kognitive Komplexität im Allgemeinen von Bereich zu Bereich zunehmen (KMK, 2004b, S. 13), bezeichnen sie als „plausibel, doch empirische Evidenz gibt es dafür (noch) nicht" (Reiss & Hammer, 2013, S. 90). Dürr und Rechtsteiner-Merz (2007) resümieren, dass im Zusammenhang mit den Anforderungsbereichen beschrieben wird, „wie alle Kinder ihren Fähigkeiten entsprechend am selben Thema auf unterschiedlichem Niveau arbeiten können. Zusätzlich kann es auf jedem Niveau verschiedene Schwierigkeitsgrade geben" (Dürr & Rechtsteiner-Merz, 2007, S. 37).

Einige Autoren fokussieren die bewusste Unterscheidung der beiden Begriffe beziehungsweise grenzen sie voneinander ab. Nach Walpuski et al. (2010) bieten die Bildungsstandards „mit den Anforderungsbereichen eine zweite Achse an, die jedoch aufgrund ihrer Nominalskalierung für eine Beschreibung der Aufgabenschwierigkeit nicht geeignet ist. Das heißt: Die Anforderungsbereiche beschreiben Kategorien von Aufgaben, die explizit nicht als hierarchische Anordnung zu verstehen sind" (Walpuski et al., 2010, S. 175f). Die Autoren leiten jedoch die zwei schwierigkeitsbestimmenden Faktoren Komplexität und kognitive Prozesse aus der Beschreibung der Anforderungsbereiche zwei schwierigkeitsbestimmende Faktoren ab, die in Testaufgaben variiert werden können und in das Kompetenzstrukturmodell übernommen werden. Durch die Komplexität wird der Umfang die zu bearbeitenden Inhaltsstrukturen beschrieben. Durch die kognitiven Prozesse werden der Anspruch, der an die Bearbeitung der Aufgabe gestellt wird, und die Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler, die zur Bearbeitung der Aufgabe ausgeführt werden müssen, definiert (Walpuski et.al., 2010, S. 175f). Reiss und Hammer (2013, S. 92f) weisen darauf hin, dass man bei der Verknüpfung zwischen Anforderungsbereichen und Schwierigkeitsgrad vorsichtig vorgehen sollte. Sie verdeutlichen ihre Aussage anhand einer anspruchsvollen, technischen Aufgabe zu Ableitungsregeln, die zwar schwer ist, aber aufgrund der Tatsache, dass im Grunde lediglich Differenziationsregeln angewendet werden müssen, nicht in Anforderungsbereich III eingeordnet werden kann, da es nicht um Verallgemeinern und Reflektieren geht. Auf der Homepage des nordrhein-westfälischen Landesinstituts für Schule findet sich der Hinweis, dass einige Aufgaben aus dem Anforderungsbereich 1 empirisch schwieriger sein können, also seltener gelöst werden, als einige Aufgaben aus dem Anforderungsbereich 3 (Qualitäts - und UnterstützungsAgentur. Landesinstitut für Schule. NRW).

Nach Blum (2006, S. 14) können Aufgabenstellungen je nach vorangegangenem Unterricht mehr oder weniger vertraut, und damit auch tendenziell mehr oder weniger schwierig für die Schülerinnen und Schüler sein, was jedoch mit dem Konzept der Anforderungsbereiche nicht erfasst wird. Beim Konzept der Anforderungsbereiche handelt es sich in Abgrenzung zur Aufgabenschwierigkeit nur um die einer Aufgabe inhärente kognitive Komplexität, die aber natürlich auch mit der Aufgabenschwierigkeit zusammenhänge, in dem „tendenziell [...] Aufgaben aus Bereich III schwieriger für Schüler [sind] als Aufgaben aus Bereich I" (Blum, 2006, S. 14f).

Teil 2: Empirische Untersuchung

5 Fragestellungen und Hypothesen

Im folgenden Kapitel werden die auf dem vorgestellten theoretischen Hintergrund basierenden Forschungsfragen zusammen mit den entsprechenden Hypothesen dargestellt.

5.1 Geometrische Inhalte in Schulbüchern und im Unterricht

Zahlreiche Autoren heben die Bedeutsamkeit des geometrischen Lernens hervor (vgl. Kap. 1.2), die unter anderem mit der aufgezeigten Relevanz des räumlichen Vorstellungsvermögens einhergeht (vgl. Kap. 1.1.2). Ebenfalls wird der Stellenwert der geometrischen Inhalte in der Unterrichtspraxis thematisiert. Aus Untersuchungen gewonnene Erkenntnisse waren, dass die Unterrichtswerke von den Lehrkräften als wenig hilfreich eingeschätzt werden und dass die geometrischen Inhalte darin zusammenhangslos angeordnet seien. Der Geometrieunterricht erfolge nur sporadisch und in zu geringem Umfang, wobei der ermittelte Anteil am Mathematikunterricht zwischen 7,5% und 20% variierte. Die vorliegende Untersuchung möchte stichprobenartig klären, wie hoch der quantitative Geometrieanteil in den Schulbüchern und im Unterricht der vierten Jahrgangsstufe ist und somit den Forschungsstand (Maier, 1999; Backe-Neuwald, 2000; Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004) aktualisieren beziehungsweise ergänzen. Es wird die folgende Forschungsfrage mit zwei dazugehörigen Hypothesen formuliert:

Wie hoch ist der quantitative Anteil geometrischer Inhalte in Schulbüchern und im Unterricht des vierten Schuljahres? (Fragestellung 1)

Unabhängig von den genannten Erkenntnissen wird versucht, die Hypothesen nicht ausschließlich auf die aufgeführten Befunde aus der Praxis zu stützen. In den Bildungsstandards werden zur Leitidee Zahlen und Operationen 15 inhaltsbezogene Kompetenzen genannt, zur Leitidee Raum und Form 13, zu Muster und Strukturen 6, zu Größen und Messen 9 sowie zu Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit 4. Ungeachtet dessen, dass die Anzahl der zu fördernden inhaltsbezogenen Kompetenzen nichts über deren Qualität aussagt, wird aus diesen unterschiedlich hohen Anzahlen ersichtlich, dass ein gleicher quantitativer Anteil aller fünf Leitideen am gesamten Mathematikbuch beziehungsweise Mathematikunterricht nicht erwartet werden kann. Demnach wäre es aus quantitativer Sicht denkbar, dass man die 9 Kompetenzen zur Leitidee Größen und Messen zusammennimmt mit den 4 Kompetenzen zur Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. So würden diese beiden Bereiche zusammen ein Drittel an der Gesamtanzahl mathematischer Kompetenzen ausmachen, ein weiteres Drittel würden die 13 Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form bilden und ein letztes Drittel die 15 Kompetenzen zur Leitidee Zahlen und Operationen. Die Kompetenzen zur Leitidee Muster und Strukturen würden sich gleichermaßen auf die anderen Leitideen verteilen, wie es auch im rheinland-pfälzischen Teilrahmenplan Mathematik gehandhabt wird. Zusammengenommen mit den Befunden aus der Praxis wird somit ein prozentualer Anteil an Seiten mit geometrischen Inhalten erwartet, der zwischen 20% und 30% liegt (Hypothese 1a).

Bezugnehmend auf den Hinweis auf die in der Praxis des Geometrieunterrichts vorherrschenden großen Unterschiede wird vermutet, dass es in der vorliegenden Stichprobe sowohl jene Lehrkräfte gibt, die kontinuierlich und regelmäßig Geometrie unterrichten als auch solche, für die dies nicht zur Selbstverständlichkeit gehört. Laut Stundentafel des Landes Rheinland-Pfalz sind für den

Mathematikunterricht in Klassenstufe 4 pro Woche 225 Minuten vorgesehen (Bildungsserver Rheinland-Pfalz). Ausgehend von durchschnittlich 40 Wochen in einem Schuljahr ergibt das 9000 Minuten Mathematikunterricht für jede vierte Klasse in Rheinland-Pfalz (40 x 225 Minuten). Kombiniert man diese Angaben mit dem für die Schulbücher erwarteten prozentualen Geometrieanteil von 20% bis 30%, so werden zwischen 1800 und 2700 Minuten (36 bis 54 Unterrichtsstunden à 50 Minuten) Geometrieunterricht im vierten Schuljahr erwartet (Hypothese 1b). Die Kapitel 7.1 und 7.2 widmen sich dem Erkenntnisgewinn bezüglich dieser Fragestellung.

5.2 Zuordnung geometrischer Aufgaben zu den Anforderungsbereichen

In den national verbindlichen Bildungsstandards wurden neben den Kompetenzen in den verschiedenen mathematischen Teilgebieten drei Anforderungsbereiche formuliert, die die kognitiven Anforderungen an Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben und zu erbringende kognitive Leistungen beschreiben (vgl. Kap. 4). Diese bilden ein theoretisches Modell für die Arbeit mit Aufgaben und sollen unter anderem Lehrkräften eine Orientierung für die Analyse, Planung und Überprüfung ihrer Unterrichtsarbeit in Kernbereichen eines Faches sowie die Chance der Entwicklung einer anforderungsbezogenen Aufgabenkultur bieten. Weitere Ziele und Hoffnungen, wie beispielsweise die damit verbundene Vermeidung eines einseitig ausgerichteten Unterrichts oder die bessere Berücksichtigung der Leistungsheterogenität, wurden angeführt. Kritik an den Anforderungsbereichen wurde vor allem bezüglich der nach eigener Aussage fehlenden empirischen Validierung geübt, sodass im Hinblick auf die Überprüfung des Nutzens, der Anwendbarkeit und der Transparenz dieser drei Anforderungsbereiche exemplarisch für den geometrischen Bereich folgende Frage formuliert wird:

Können geometrische Aufgaben eindeutig den in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen zugeordnet werden? (Fragestellung 2)

Die Unterscheidung der drei Anforderungsbereiche in den Bildungsstandards steht in der Tradition der großen Schulleistungsstudien (TIMSS, PISA; vgl. Kap. 3.3). Zudem erfolgt die Gliederung nach drei Anforderungen in weiteren Kontexten. Exemplarisch sei auf die Anwendungen der Bloom`schen Taxonomie (vgl. Kap. 3.2.3) und die Differenzierung durch die Lehrkräfte im Unterrichtsalltag verwiesen (vgl. Kap. 3.4). Trotz der im Rahmen der empirischen Überprüfung der fünfstufigen Kompetenzmodelle festgestellten Problematik bei der Einordnung von Items aus dem Bereich der Geometrie (vgl. Kap. 2.3.3) und der Kritik an den empirisch nicht validierten Anforderungsbereichen (vgl. Kap. 4) wird deshalb vermutet, dass die geometrischen Aufgaben den drei in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen eindeutig zugeordnet werden können (Hypothese 2). Die Darstellung der gewonnenen Erkenntnisse zu dieser Hypothese erfolgt in Kapitel 8.1.

5.3 Kognitive Anforderungen in geometrischen Aufgaben

Dem deutschen Mathematikunterricht wird eine Kalkül- beziehungsweise Fertigkeitsorientierung nachgesagt, die sich in den Leistungen der deutschen Schülerinnen und Schüler bei internationalen Studien widerspiegelt. Demnach weisen diese Stärken im Bereich von Routineaufgaben und Schwächen im Bereich von Aufgaben mit höheren kognitiven Anforderungen auf. Im Primarbereich erreichten zu viele Viertklässlerinnen und Viertklässler nur die erste und zweite Kompetenzstufe und zu wenige die höchste (vgl. Kap. 2.1.2). Obwohl die Wichtigkeit des Verknüpfens neuer

Informationen mit der vorhandenen kognitiven Struktur kognitionstheoretisch begründet ist (vgl. Kap. 3.2), ermittelten zahlreiche Autoren eine Vernachlässigung des Verknüpfens von Konzepten im Unterricht aufgrund der Fokussierung von Prozeduren (vgl. Kap. 3.3). Für den geometrischen Bereich bemängelten die von Backe-Neuwald (1998) befragten Lehrkräfte die zu trivialen Aufgaben, die das Interesse der Kinder nicht wecken können und in ihrem Gehalt häufig nicht dem Leistungsvermögen der Kinder entsprechen. Darüber hinaus wurde die Vermutung formuliert, dass ein Grund für die seltene Erarbeitung der Themenbereiche Körper und Rauminhalte in deren fachlich höheren Komplexität liegen könnte (vgl. Kap. 1.2).

In den Bildungsstandards wird gefordert, das Mathematiklernen im Primarbereich nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten zu reduzieren, sondern Verständnis für mathematische Inhalte zu entwickeln (vgl. Kap. 2.1.4). Einem vorwiegend auf Routinen und Verfahren ausgerichteten Unterricht soll unter anderem durch die Formulierung der drei Anforderungsbereiche vorgebeugt werden (vgl. Kap. 4). Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wird hinsichtlich der in der Unterrichtspraxis realisierten Integration von Aufgaben aus allen drei Anforderungsbereichen in geometrischen Aufgaben der folgenden Frage nachgegangen:

Welche kognitiven Anforderungen enthalten die geometrischen Aufgaben in den Schulbüchern und im Unterricht des vierten Schuljahres? (Fragestellung 3)

Für die Geometrie ist das Arbeiten mit Figuren zentral und grundlegend, wobei es häufig um die Reproduktion von Faktenwissen und Prozeduren geht. Hinzu kommen die aus den Schulleistungsstudien gewonnenen Erkenntnisse. Demnach ist zu erwarten, dass die den Anforderungsbereichen I und II entsprechenden kognitiven Anforderungen häufiger berücksichtigt werden als die höheren kognitiven Anforderungen des AB III.

Wenn auch mit Hilfe der unterschiedlichen kognitiven Anforderungen kein Abhängigkeitsverhältnis im Sinne einer Hierarchie abgeleitet und keine Aussagen über Entwicklungsprozesse getroffen werden können, so kann als Konsens aus den Darstellungen der Taxonomien (vgl. Kap. 3.2.3) und der kognitiven Anforderungen (vgl. Kap. 3.3) festgehalten werden, dass deren Komplexität von Bereich I zu Bereich III zunimmt. Da die Untersuchung in der vierten Klassenstufe durchgeführt wird, kann vermutet werden, dass der Schwerpunkt in der vierten Jahrgangsstufe nicht (mehr) auf den Anforderungsbereich I gesetzt wird, sondern dass Aufgaben zu Anforderungsbereich II dominieren (Hypothese 3).

Innerhalb der Grundschulzeit bietet sich gerade das vierte Schuljahr an, um die Schülerinnen und Schüler mit kognitiv höheren Anforderungen zu konfrontieren. Zusammengenommen mit den durch internationale Vergleichsstudien festgestellten Schwächen deutscher Schülerinnen und Schüler im Umgang mit anspruchsvollen Aufgaben und den zahlreichen begründeten Forderungen nach einer intensiveren Berücksichtigung von Aufgaben mit höheren kognitiven Anforderungen wird im Zuge der aufgetragenen Implementation der Bildungsstandards davon ausgegangen, dass auch geometrische Aufgaben, die Anforderungsbereich III zuzuordnen sind, ausreichend in den Schulbüchern vertreten sind und im Unterricht eingesetzt werden. Die Erkenntnisse zu dieser Fragestellung sind den Kapiteln 8.2 und 8.3 zu entnehmen.

5.4 Anforderungsbereiche und Aufgabenschwierigkeit

Die Anforderungsbereiche resultieren nicht aus empirisch validierten Testverfahren und werden in den Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz bislang nicht klar zur Schwierigkeit von Aufgaben abgegrenzt (vgl. Kap. 4.3). In den Bildungsstandards selbst heißt es, dass die Aufgaben der Leistungsheterogenität von Grundschulkindern dadurch Rechnung tragen sollen, dass sie im gleichen inhaltlichen Kontext ein breites Spektrum an unterschiedlichen Anforderungen und Schwierigkeiten abdecken. Einige Autoren trennen die Begriffe Anforderung und Schwierigkeit bewusst oder bestreiten die Eignung der Anforderungsbereiche für die Beschreibung der Aufgabenschwierigkeit explizit. Auf diesen unklaren und sich widersprechenden Aussagen basiert die folgende Forschungsfrage:

Inwiefern können die Anforderungsbereiche zur Bestimmung der Aufgabenschwierigkeit herangezogen werden? (Fragestellung 4)

Neben der Komplexität der Aufgabenstellung, der Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten, der Anzahl der zu verarbeitenden Größen beziehungsweise Arbeitsschritte, der curricularen Wissensstufe, den Anforderungen an das Lernprodukt und das Vorwissen und vielen weiteren Aufgabenmerkmalen (vgl. Kap. 3.4) wurde die Komplexität des Modellierungsprozesses als schwierigkeitsrelevant genannt und bei PISA anhand der Anforderungsmerkmale Reproduktion, Verknüpfung und Verallgemeinerung unterschieden. Zudem wurde aufgezeigt, dass die Komplexität der Anforderungen von Anforderungsbereich I zu Anforderungsbereich III zunimmt und somit beim Verallgemeinern und Reflektieren größer ist als beim Reproduzieren und beim Herstellen von Zusammenhängen (vgl. Kap. 3.2.3 und 3.3). Deshalb wird sich bei der Formulierung der Hypothese Blums Aussage (Blum, 2006, S. 14f) angeschlossen, wonach es sich bei dem Konzept der Anforderungsbereiche in Abgrenzung zur Aufgabenschwierigkeit um die einer Aufgabe inhärente kognitive Komplexität handelt, die insofern mit der Aufgabenschwierigkeit zusammenhänge, als dass tendenziell Aufgaben aus Bereich III schwieriger für die Schülerinnen und Schüler seien als Aufgaben aus Bereich I (Hypothese 4). In Kapitel 9.1 wird die empirisch ermittelte Schwierigkeit von Aufgabenbearbeitungen unterschiedlicher kognitiver Anforderungen dargestellt.

5.5 Lösungshäufigkeiten, Leistungsfähigkeit und Geschlecht

In der Anordnung der Aufgaben in Kompetenzstufenmodellen ist berücksichtigt, wie häufig diese gelöst wurden (vgl. Kap. 2.3.3). Die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler, die sich auf niedrigeren Stufen befinden, können die Aufgaben auf höheren Stufen nicht bewältigen. Aufgrund der größeren Lösungshäufigkeiten zu den Aufgaben auf niedrigeren Stufen bedeutet dies im Umkehrschluss, dass die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler, die sich auf höheren Kompetenzstufen befinden, ebenfalls die Aufgaben niedrigerer Stufen lösen können. Überträgt man diese Folgerung auf die in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereiche, die nach der möglichen kognitiven Komplexität von Aufgaben strukturiert sind, so ist zu prüfen, ob die anhand der erbrachten Geometrieleistungen als leistungsstark eingestuften Schülerinnen und Schüler die geometrischen Aufgaben über alle drei Anforderungsbereiche hinweg tatsächlich häufiger lösen als die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler. Dies ist gleichfalls interessant vor dem Hintergrund der Erkenntnis, dass die Förderung der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler erfolgreicher zu sein scheint als die der leistungsstarken (vgl. Kap. 2.1).

In Kapitel 2.1.3 wurden geschlechtsspezifische Unterschiede in den mathematischen Kompetenzen thematisiert. Dabei zeigte sich für den deutschen Primarbereich, dass die Mädchen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich auf den unteren Kompetenzstufen überrepräsentiert und auf den oberen Kompetenzstufen unterrepräsentiert waren (IGLU-E 2001), dass die Jungen signifikant höhere Leistungsmittelwerte erzielten (TIMSS 2007 und 2011) und dass sie signifikant höhere Kompetenzstände in der globalen mathematischen Kompetenz aufwiesen (Ländervergleich). Innerhalb des Ländervergleichs wurde im Bereich Raum und Form jedoch der geringste Effekt gefunden.

Es wird folgende Frage formuliert:

Inwiefern bewältigen Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit von Leistungsfähigkeit und Geschlecht die geometrischen Aufgaben aus den drei verschiedenen Anforderungsbereichen? (Fragestellung 5)

Entsprechend der dargelegten kognitionstheoretischen Grundlagen (vgl. Kap. 3.2) und der Aussagen zur Entwicklung des geometrischen Denkens (vgl. Kap. 1.1) sowie zu Kompetenzstufen (vgl. Kap. 2) befinden sich leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler auf einem höheren kognitiven Niveau als leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler. Zusammengenommen mit der zunehmenden Komplexität der kognitiven Anforderungen wird vermutet, dass leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler die geometrischen Aufgaben aller Anforderungsbereiche mit einer größeren Häufigkeit lösen als leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler (Hypothese 5).

Da der bisherige Forschungsstand zwar geschlechtsspezifische Unterschiede im mathematischen Bereich zugunsten der Jungen aufzeigt, diese jedoch im Bereich Raum und Form den geringsten Effekt aufwiesen (vgl. Kap. 2.1.3), soll zu dieser Frage an dieser Stelle keine Hypothese formuliert werden. Die Kapitel 9.2 und 9.3 widmen sich dieser Fragestellung.

5.6 Geometrieleistung und Anforderungen in den Unterrichtsaufgaben

Dass die Quantität und Qualität schulischer Lerngelegenheiten die Leistungen der Schülerinnen und Schüler beeinflusst, ist das Ziel allen Unterrichtens. Die Bedeutung des Vorwissens und des Bekanntheitsgrades von Aufgaben (vgl. Kap. 3.4) für das Lernen, das sich wiederum im erfolgreichen Bearbeiten von Aufgaben zeigt, ist unumstritten. Hiebert (1999) fasst kurz und knapp zusammen: „Students learn what they have an opportunity to learn" (Hiebert, 1999, p. 12). Deshalb soll das Schaffen optimaler Bedingungen für den Lernprozess das zentrale Anliegen der Lehrkraft sein. Basierend auf der Berücksichtigung der verschiedenen Anforderungen in den im Laufe des vierten Schuljahres gestellten geometrischen Aufgaben sollen Zusammenhänge zu den Geometrieleistungen der Schülerinnen und Schüler betrachtet und Tendenzen aufgezeigt werden. Als Forschungsfrage wird formuliert:

Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Geometrieleistungen und den Anforderungen in den Aufgaben im Geometrieunterricht? (Fragestellung 6)

Ausgehend vom Einfluss des Bekanntheitsgrades von Aufgaben und des Übungsaufwands auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler wird ungeachtet der zahlreichen weiteren Einflussfaktoren vermutet, dass Klassen, in denen im Geometrieunterricht häufiger Aufgaben mit Anforderungsbereich III gestellt wurden, höhere Lösungshäufigkeiten beim Bearbeiten von Aufgaben mit der Anforderung des Verallgemeinerns und Reflektierens erbringen (Hypothese 6). In diesem Zusammenhang soll überprüft werden, inwiefern sich klassenspezifische Schwerpunktsetzungen im Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler widerspiegeln. Des Weiteren soll die

Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Laufe des vierten Schuljahres im Zusammenhang mit den im Unterricht gestellten Aufgaben betrachtet werden. Die Erkenntnisse zu dieser Fragestellung werden in Kapitel 9.4 dargestellt.

5.7 Weitere Fragestellungen

An einigen Stellen eröffnen sich weitere Fragestellungen, denen im Zusammenhang mit den bisher angeführten nachgegangen werden kann.

Im Rahmen der Ermittlung des quantitativen Geometrieanteils in Schulbüchern und im Unterricht der vierten Jahrgangsstufe (Fragestellung 1, vgl. Kap. 5.1) stellte sich die Frage, wie sich die geometrischen Inhalte innerhalb der Leitidee Raum und Form auf die in Kapitel 2.3.2 vorgestellten inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche (IKB) verteilen. Da das Arbeiten mit Figuren für die Geometrie zentral und grundlegend ist, ist zu erwarten, dass in den Schulbüchern mehr Aufgaben zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 2 (geometrische Figuren) enthalten sind als zu den anderen drei Bereichen (sich im Raum orientieren, geometrische Abbildungen, Flächen- und Rauminhalte) (Hypothese 1c).

Erfahrungsgemäß orientiert sich der Unterricht und somit auch die im Unterricht gestellten Aufgaben weitgehend am jeweiligen Lehrwerk. Der Grund dafür ist oft, dass dieses entweder im Klassensatz von der Schule zur Verfügung gestellt oder von den Eltern auf Vorgabe angeschafft wird und die Lehrkräfte sich dadurch zur möglichst intensiven Einbindung in den Unterricht angehalten und verpflichtet fühlen. Jedoch werden diese Schulbuchaufgaben im Unterrichtsalltag durch die Lehrkräfte ständig durch weitere Aufgabenstellungen oder Materialien ergänzt, um so unter anderem der in jeder Klasse vorhandenen Leistungsheterogenität gerecht zu werden. Nimmt man diese Tatsache zusammen mit der Charakteristik des Geometrieunterrichts und der dadurch vorhandenen Betonung des dreidimensionalen Raums im Sinne aktiver Erschließung, so wird nicht von einer starken Orientierung am Lehrwerk ausgegangen. Bei der Erhebung durch Backe-Neuwald gaben die befragten Lehrkräfte an, vor allem Inhalte und Aktivitäten aus den Bereichen Figuren und Lagebeziehungen thematisiert und Themen des 3. und 4. Schuljahres, wie die Bereiche Körper oder Rauminhalte, vernachlässigt zu haben. Insgesamt wird auch für den Unterricht ein hoher prozentualer Anteil an Aufgaben zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 2 (geometrische Figuren) erwartet (Hypothese 1d). Die Erkenntnisse zu diesen Hypothesen werden gemeinsam mit den gewonnenen Daten zu Fragestellung 1 in Kapitel 7.1 und 7.2 dargestellt.

In Zusammenhang mit dem ermittelten quantitativen Geometrieanteil schließen sich in Kapitel 7.3 die folgenden beiden Betrachtungsweisen an, für die jedoch keine Hypothesen formuliert werden.

Aufgrund des eingesetzten Testinstrumentariums und dessen Unterteilung in Subtests zu den mathematischen Teilbereichen Geometrie, Arithmetik und Sachrechnen (vgl. Kap. 6.3) konnten Zusammenhänge zwischen den Subtests betrachtet werden.

Die Frage, ob sich bereits anhand des ermittelten quantitativen Geometrieanteils im Unterricht ein Zusammenhang zu den Geometrieleistungen der Schülerinnen und Schüler ergibt, geht Fragestellung 6 (vgl. Kap. 5.6) voraus. Obwohl aufgrund des vorliegenden, nicht experimentellen Untersuchungsdesigns und der vielfältigen weiteren Einflussfaktoren nicht nachgewiesen beziehungsweise gefolgert werden kann, dass Schülerinnen und Schüler bessere Geometrieleistungen aufgrund eines regelmäßigeren und kontinuierlicheren Geometrieunterrichts erbringen, soll die vorliegende Stichprobe hinsichtlich möglicher Tendenzen betrachtet werden.

6 Untersuchungsdesign

In vorliegenden Kapitel wird das zur Beantwortung der Fragestellungen beziehungsweise zur Überprüfung der Hypothesen erarbeitete Untersuchungsdesign zunächst im Überblick vorgestellt (Kap. 6.1). Im Anschluss daran werden einzelne Untersuchungsinstrumente erläutert (Kap. 6.2, 6.3, 6.4) und die vorliegende Stichprobe beschrieben (Kap. 6.5).

Da in den Bildungsstandards bis zum Ende der Grundschulzeit zu erreichende Kompetenzen formuliert sind, betreffen alle Untersuchungsaspekte die 4. Jahrgangsstufe. Die Untersuchung enthält sowohl quantitative als auch qualitative Aspekte und berücksichtigt das nach Köller, Baumert und Bos (2001, S. 272) in Zusammenhang mit der Aufgabenentwicklung in TIMSS als vierstufig bezeichnete Curriculum, indem es die Aussagen in den Bildungsstandards (intendiertes Curriculum), die Schulbücher (potentielles Curriculum), den tatsächlich behandelten Stoff (implementiertes Curriculum) und die Schülerleistungen (erreichtes Curriculum) im Rahmen einer Stichprobe aufgreift. Alle Berechnungen wurden ausgeführt mit Excel, R Core Team (2014) und der auf Fleiss, Levin und Paik (2003) basierenden und online von GraphPad zur Verfügung gestellten Software. Die Durchführung der vorliegenden Untersuchung wurde durch die Aufsichts- und Dienstleistungsdirektion des Landes Rheinland-Pfalz (AZ. 51 111-32/41-11) und durch den Landesbeauftragten für den Datenschutz (LfD) Rheinland-Pfalz (Gesch.Z. 6.08.22.001:0255) genehmigt (Anhang A und B).

6.1 Design im Überblick

Zur Beantwortung der Fragestellungen wurde ein Untersuchungsdesign (Abb. 39) entwickelt, das drei Teilstudien beinhaltet, sich über ein Schuljahr erstreckt und eine Erhebung der Schülerleistungen zu Beginn und zum Ende des Schuljahres mittels des normierten Schulleistungstests DEMAT einschließt.

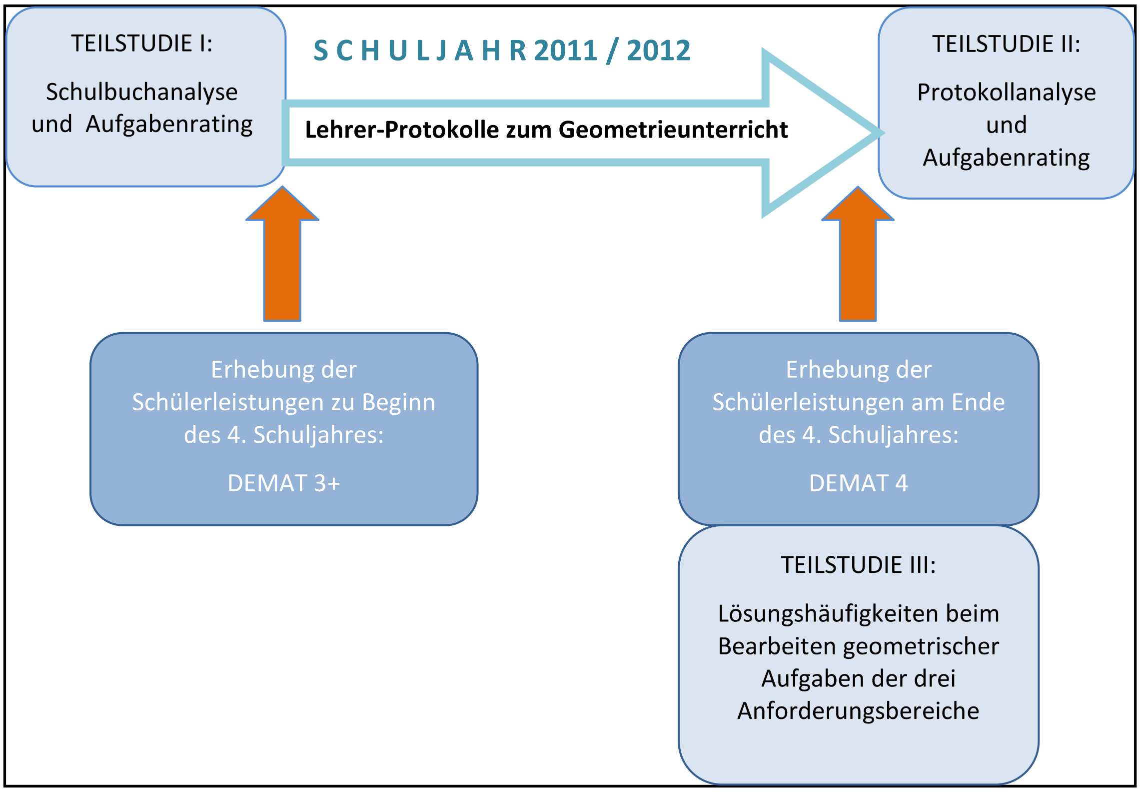


Abbildung 39: Untersuchungsdesign im Überblick.

Da sowohl die Erhebung der Schülerleistungen zu Beginn und zum Ende des vierten Schuljahres (DEMAT) als auch die Ermittlung der Lösungshäufigkeiten im Rahmen von Teilstudie III durch paper-pencil-Aufgaben erfolgte, wurde festgelegt, dass ausschließlich schriftlich fixierte und individuell durch die Schülerinnen und Schüler zu bearbeitende geometrische Aufgaben Bestandteil der vorliegenden Untersuchung sein sollten. Kollektiv beziehungsweise mündlich zu bearbeitende Aufgaben, wie sie beispielsweise in Unterrichtsgesprächen oder Gruppenarbeiten gestellt und häufig nur von einem beziehungsweise wenigen Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden, wurden ebenso ausgeschlossen wie nicht auf fachliche Inhalte bezogene, arbeitsorganisierende Aufgabenstellungen. Dadurch sollte die Wahrscheinlichkeit erhöht werden, dass die vorliegende Erhebung jene geometrischen Aufgaben enthält, mit denen sich die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler intensiv und individuell auseinander setzt. Aufgaben, die beispielsweise zum Herstellen von geometrischen Objekten auffordern, waren Bestandteil der vorliegenden Erhebung und konnten lediglich im Rahmen von Teilstudie III nicht berücksichtigt werden.

Um die Frage zu beantworten, wie hoch der quantitative Anteil geometrischer Inhalte in Schulbüchern und im Unterricht des vierten Schuljahres ist (Fragestellung 1), fand vor dem Beginn des Schuljahres 2011/2012 eine Schulbuchanalyse statt (Teilstudie I). Dabei wurden aus den im Schulbuchkatalog für die vierte Jahrgangsstufe enthaltenen Schulbüchern zehn zufällig ausgewählt und zunächst alle Seiten mit geometrischen Inhalten im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Seiten deskriptiv betrachtet. Danach wurden den Schulbuchseiten die geometrischen Aufgaben, die für eine individuelle Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler vorgesehen waren, entnommen und den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen zur Leitidee Raum und Form zugeordnet (Kap. 7.1). Einige Aufgaben auf Werkstatt-, Projekt- oder Entdeckerseiten wurden ausgegrenzt, wenn diese entsprechend der Hinweise in den Lehrerhandreichungen für Unterrichtsgespräche oder Gruppen- oder Partnerarbeiten vorgesehen waren oder lediglich als Gesprächsanlass dienen sollten.

Aufgaben mit gleichen Anforderungen, die meist mit a), b), c) usw. gekennzeichnet sind (Abb. 40), wurden im Rahmen der vorliegenden Untersuchung als Unteraufgaben definiert und innerhalb eines Schulbuches zu einer Hauptaufgabe zusammengefasst.

Zeichne Kreise mit dem Radius:		
a) 5 cm	b) 2 cm	c) 3 cm
6 cm	4 cm	7 cm

Abbildung 40: Unteraufgaben (Eidt et al., 2009, S. 94).

Hilfs- und Zwischenaufgaben komplexer Aufgabenstellungen wurden nicht separat betrachtet, sofern sie lediglich der endgültigen Aufgabenlösung dienlich waren. Dies betrifft sogenannte komplexe Aufgaben, die Operationen aus verschiedenen Anforderungsbereichen in Form von Teilaufgaben enthalten (vgl. Abb. : Aufgaben AB1a-1).

Um die geometrischen Inhalte und kognitiven Anforderungen im Unterricht des vierten Schuljahres realistisch abbilden zu können, wurde auf die Konzeption eines experimentellen Settings verzichtet. Stattdessen protokollierten 16 zufällig ausgewählte rheinland-pfälzische und freiwillig teilnehmende Lehrkräfte (Kap. 6.5) ihren Geometrieunterricht im vierten Schuljahr und erhielten keine Vorgaben bezüglich der Inhalte oder des Zeitrahmens. Mit Hilfe des entwickelten Protokollbogens (Kap. 6.2) wurden sowohl Daten zum zeitlichen Anteil des Teilbereichs Geometrie am Mathematikunterricht erhoben als auch Erkenntnisse zu tatsächlich einbezogenen beziehungsweise vernachlässigten Inhalten und Anforderungen ermittelt (Kap. 7.2). Aus den Protokollbögen konnten weitere 653 geometrische Aufgaben extrahiert werden (Teilstudie II).

Die im Rahmen der Teilstudien I und II gewonnenen geometrischen Aufgaben wurden zur Beantwortung der Frage verwendet, ob die eindeutige Zuordnung geometrischer Aufgaben zu den in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen möglich ist (Fragestellung 2). Dazu wurden die Aufgaben durch zwei unabhängig voneinander beurteilende, sich nicht wechselseitig beeinflussende Rater (Wirtz & Caspar, 2002, S. 45ff) den drei in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen zugeordnet. Die beiden Rater waren Mathematiklehrerinnen im Alter von 32 und 43 Jahren, die aufgrund ihrer Berufserfahrung mit den an die Schülerinnen und Schüler gestellten kognitiven Anforderungen und deren Verteilung innerhalb der Grundschulzeit vertraut waren. Sie erhielten eine Zusammenfassung der den Bildungsstandards entnommenen Angaben zu den drei Anforderungsbereichen mit den genannten Beispielaufgaben. Des Weiteren wurden sie darauf hingewiesen, dass die Zuordnung der Aufgaben nicht von dem normalerweise bei der Aufgabenauswahl bedeutsamen individuellen Bekanntheitsgrad ausgehend, sondern in Bezug auf die für das Ende der vierten Klassenstufe beschriebenen Kompetenzen der Bildungsstandards und im Hinblick auf durchschnittliche Aufgabenbearbeiter sowie erfahrungsgemäß erarbeitete Lerninhalte erfolgen soll. Des Weiteren sollte sich die Zuordnung auf die intendierten Anforderungen der Aufgaben beziehen. Denkbare Veränderungen der Anforderungen während der Bearbeitung oder abweichende Aufgabenbearbeitungen, wie beispielsweise die theoretisch mögliche Lösung von Aufgaben des Anforderungsbereichs II (Zusammenhänge herstellen) durch das Erinnern von Fakten, sollten während des Ratings unberücksichtigt bleiben. Bei Aufgaben, die nicht eindeutig nur einem der drei Anforderungsbereiche zugeordnet werden können, wie beispielsweise bei mehrschrittigen komplexeren Aufgaben, sollte die Entscheidung anhand der wesentlichen übergeordneten Aspekte beziehungsweise Schwerpunkte der Aufgaben getroffen werden.

Die Beurteilerübereinstimmung wurde im Anschluss mittels der prozentualen Übereinstimmung und dem zufallsbereinigten Cohens Kappa überprüft (Kap. 8.1). Die prozentuale Übereinstimmung stellt dabei das einfachste Maß dar, indem sie den prozentualen Anteil der Fälle angibt, in denen zwei oder mehrere Rater das gleiche Urteil abgeben (Wirtz & Caspar, 2002). Das Erzielen einer ausreichenden Beurteilerübereinstimmung bildete die Voraussetzung, um die vorliegenden Daten zur Beantwortung weiterer Fragestellungen verwenden zu können.

Aus den übereinstimmend gerateten Aufgaben wurde die Verteilung auf die drei Anforderungsbereiche sowohl allgemein als auch inhaltsspezifisch ermittelt (Kap. 8.2 und 8.3), um Aussagen zu den in geometrischen Aufgaben enthaltenen kognitiven Anforderungen treffen zu können (Fragestellung 3). Grundlage dafür bildeten die ermittelten Anzahlen und Prozentangaben sowie die Berechnung des Chi-Quadrats mit R Core Team (2014) zum Vergleich der Verteilung in Schulbüchern und im Unterricht.

Zur Beantwortung der Frage, inwiefern die Anforderungsbereiche zur Bestimmung der Aufgabenschwierigkeit herangezogen werden können (Fragestellung 4), wurde der vorliegenden Erhebung das Konzept der empirischen Schwierigkeit zugrunde gelegt. Die Schwierigkeit der Aufgaben wurde somit durch den prozentualen Anteil der richtigen Aufgabenbearbeitungen an der Gesamtstichprobe empirisch bestimmt. Insgesamt bearbeiteten 270 Schülerinnen und Schüler (Kap. 6.5) am Ende des vierten Schuljahres 24 geometrische Aufgaben, die aus den im Rahmen der Teilstudie I gewonnenen und übereinstimmend gerateten Aufgaben der drei Anforderungsbereiche ausgewählt wurden (Kap. 6.4). Aufgrund der vorherigen Ordnung der Aufgaben nach deren kognitiver Anforderung wurde von einer Bestimmung des Schwierigkeitsgrades anhand der in Kapitel 3.4 aufgezeigten weiteren Merkmale abgesehen. Anhand der empirisch gewonnenen

Lösungshäufigkeiten wurden durch verschiedene Interpretationsmöglichkeiten Aussagen zum Schwierigkeitsgrad abgeleitet und einzelne Aufgaben analysiert (Kap. 9.1).

Um untersuchen zu können, inwiefern die Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit von Leistungsfähigkeit und Geschlecht die geometrischen Aufgaben aus den drei verschiedenen Anforderungsbereichen bewältigten (Fragestellung 5), wurde die Gesamtstichprobe (N = 270) zunächst in drei Leistungsgruppen (LG 1, LG 2, LG 3) und nach Geschlecht unterteilt. Dies geschah auf der Grundlage der im Subtest Geometrie des DEMAT 4 (Kap. 6.4) am Ende des vierten Schuljahres erzielten Leistungen der Schülerinnen und Schüler, die in Form von geschlechtsspezifischen T-Werten dargestellt wurden (9.2). Nach der Bildung dieser Leistungsgruppen wurde das Lösungsverhalten der unterschiedlich leistungsfähigen Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten der geometrischen Aufgaben der drei Anforderungsbereiche (Teilstudie III) betrachtet. Des Weiteren wurde das Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit vom Geschlecht zunächst allgemein beschrieben. Daran anschließend wurde das Lösungsverhalten der Jungen und Mädchen getrennt analysiert und die Geschlechter zusätzlich nach Leistungsfähigkeit gruppiert (Kap. 9.3).

Um Zusammenhänge zwischen den Geometrieleistungen der Schülerinnen und Schüler und der Qualität des jeweiligen Geometrieunterrichts aufdecken zu können (Fragestellung 6), erfolgte die Betrachtung und der Vergleich der Daten zunächst für die gesamte Stichprobe und abschließend auf Klassenebene (Kap. 9.4). Dabei bildeten die durch den DEMAT zu Beginn und zum Ende des Schuljahres und die durch die Bearbeitung der geometrischen Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen gewonnenen Erkenntnisse zur Leistungsfähigkeit der Klassen, die protokollierte Unterrichtszeit sowie die eingesetzten geometrischen Aufgaben im Schuljahr die Vergleichsgrundlage.

6.2 Protokollbogen

Protokolle haben sich als kostengünstige, reliable und valide Möglichkeit zur Erhebung von Unterricht und zur Untersuchung des Einflusses von Unterricht auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler beziehungsweise zur Klärung methodischer und inhaltlicher Fragen zum Unterricht herausgestellt (Rowan, Camburn & Correnti, 2004, p. 245; Rowan, Harrison & Hayes, 2004, p. 7). Im Vergleich zu den kostspieligen und deshalb in geringerem Umfang stattfindenden Beobachtungen im Klassenzimmer durch geschulte Personen oder Videoaufnahmen und zu den häufig nur einmalig am Ende eines Schuljahres rückblickend eingesetzten Umfragen stellen Protokolle eine praktikable Methode zur Datenerhebung in großem Umfang dar (Rowan, Camburn & Correnti, 2004, p. 264f). Um den sowohl für die Beantwortung der Fragestellung 1 bedeutsamen quantitativen Anteil geometrischer Inhalte im Unterricht des vierten Schuljahres erfassen als auch die für die Fragestellungen 3 und 6 notwendigen Erkenntnisse zu den im Geometrieunterricht enthaltenen kognitiven Anforderungen in Aufgaben gewinnen zu können (Teilstudie II), fiel die Entscheidung auf die Entwicklung von Protokollbögen, die durch die teilnehmenden Lehrkräfte am Ende jeder Geometriestunde ausgefüllt werden sollten.

Als Nachteile dieses Erhebungsinstruments werden Messfehler genannt, die auf sozialer Erwünschtheit oder verwendeter Rückmeldekategorien basieren. Des Weiteren bedeutet die Arbeit mit Lehrer-Protokollen eine höhere Belastung für die Lehrkräfte, was wiederum dazu führen kann, dass die Fragebögen nicht mehr (Antwortausfall) oder zwecks Zeitersparnis nur noch durch Antworttendenzen ausgefüllt werden (Rowan, Camburn & Correnti, 2004, p. 247). Aus diesen Gründen war bei der Entwicklung der Protokollbögen zu bedenken, dass die Rückmeldung zum

Unterricht durch die freiwillig und ohne Bezahlung teilnehmenden Lehrkräfte eine möglichst geringe Belastung bedeuten und zügig zu vollziehen sein sollte, um so die Genauigkeit der Berichterstattung und den Rücklauf zu erhöhen.

Die von Rowan, Camburn und Correnti (2004, p. 245ff) vorgestellten und im Rahmen der durch das Institut für Sozialforschung der Universität Michigan durchgeführten Studie SII (Study of Instructional Improvement) verwendeten Lehrer-Protokolle (teacher logs) bestanden aus einer sogenannten opening-section (gateway), in dem die Unterrichtszeit und das Thema schwerpunktmäßig notiert wurden, und einem back-end, in das die genauen Inhalte und Methoden sowie eingesetzte Aufgabenstellungen und Material, hauptsächlich in Form von Checklisten mit über 100 Kriterien, einzutragen war. Als Bearbeitungszeit wurden 5 Minuten am Ende des Schultags veranschlagt. In Anlehnung an diese opening-section enthielt der entwickelte zweiseitige Protokollbogen auf der ersten Seite den in Tabelle 10 dargestellten Kopf.

Tabelle 10: Protokollbogen - Kopf

Datum	
Thema	
Zeit in Minuten	

Auch die Nutzung von Checklisten wurde ansatzweise aufgegriffen. Die Lehrkräfte sollten nach dem Ausfüllen des Kopfes festhalten, welche Ziele sie mit dem Geometrieunterricht verfolgten und welche inhaltsbezogenen Kompetenzen mittels der verwendeten Aufgaben gefördert werden sollten. Um die Verfügbarkeit der Kompetenzen für die Lehrkräfte und deren zügige Protokollierung zu gewährleisten, wurden die in den Bildungsstandards zur Leitidee Raum und Form formulierten Kompetenzen (KMK, 2004) ebenfalls auf der ersten Seite des Protokollbogens zum Ankreuzen wie in Tabelle 11 gezeigt abgebildet.

Tabelle 11: Protokollbogen - Ausschnitt Kompetenzen

Kompetenzen:	*Bitte ankreuzen!*	
sich im Raum orientieren		über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen
		räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten)
		zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen)

Auf der zweiten Seite des Protokollbogens wurden die Lehrkräfte dazu angehalten, ihre im Unterricht eingesetzten Aufgaben einzutragen. Als Strukturierungshilfe wurden die drei Phasen Einstieg, Arbeitsphase und Abschluss des Unterrichts unterschieden. Freiwillig konnte der Ablauf genauer beschrieben werden (Tab. 12).

Tabelle 12: Protokollbogen - Aufgaben

Notieren Sie die eingesetzten Aufgaben (und beschreiben Sie ggf. knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts): (ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)		
	Ablauf (FREIWILLIG!)	**Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?**
Einstieg		
Arbeitsphase		
Abschluss		

Der Protokollbogen war in dieser Form selbsterklärend, weshalb keine Trainingseinheit für die Lehrkräfte erfolgen musste. Bei Fragen oder Problemen konnte aber jederzeit Kontakt aufgenommen werden, was nur wenige Lehrkräfte taten. Der gesamte Protokollbogen ist in Anhang H zu finden.

6.3 Der normierte Schulleistungstest DEMAT

Auf der Suche nach einem Testinstrumentarium, mit dem die zur Beantwortung der Fragestellungen 5 und 6 bedeutsame Leistungsfähigkeit im mathematischen Teilbereich der Geometrie isoliert erfasst werden konnte, fiel die Entscheidung letztlich auf den „Deutschen Mathematiktest" (DEMAT), einem bundesweit normierten Schulleistungstest zur Feststellung der Mathematikleistungen für die Klassenstufen 1 bis 9 aus der von Hasselhorn, Marx & Schneider herausgegebenen Reihe Deutsche Schultests, der ökonomisch objektive, reliable und valide Diagnosen curricular-valider Mathematikleistungen leistet (Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004, S. 9) und aus drei Subtests zu den Bereichen Arithmetik, Sachrechnen und Größen sowie Geometrie besteht. Zu allen drei Bereichen und dem Testgesamtwert liegen Prozentrangnormen und T-Wert-Normen, getrennt nach Geschlecht und für die mittlere Leistung und Streuung ganzer Schulklassen, vor. Mit Hilfe der Klassenprofilnormen kann der Leistungsstand ganzer Schulklassen und Schulen im Vergleich zur bundesweiten Normstichprobe eingeschätzt werden. Zusätzlich werden Vertrauensintervalle zur Interpretation individueller Leistungen aufgeführt. Mit seinem mittleren Schwierigkeitsgrad von ungefähr .60 ist der DEMAT einsetzbar für unterrichtsbezogene Evaluations- und Qualitätsentwicklungsmaßnahmen im Rahmen von Vorher-Nachher-Untersuchungen und zur Testung großer Stichproben im Bereich der Forschung. Er bietet beispielsweise eine solide abhängige Variable für die Überprüfung von entwicklungspsychologischen oder neuropsychologischen mathematischen Kompetenzmodellen und ein hervorragendes Instrument zur Feststellung der erreichten Bildungsstandards im Fach Mathematik (Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004, S. 11). Exemplarisch sei an dieser Stelle auf Winkelmann & Robitzsch (2009, S. 179ff) verwiesen, die die interne Struktur der inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards anhand der Aufgaben analysierten, die ebenfalls zur empirischen Überprüfung des Kompetenzstufenmodells von Reiss und Winkelmann (2009, S. 125ff) verwendet wurden (vgl. Kap. 2.3.3). Zur Überprüfung der konvergenten Validität wurden messfehlerbereinigte Korrelationen zwischen den im Rahmen der Normierungsstudie eingesetzten Items und den Items aus dem DEMAT 3 und 4 ermittelt. Dabei korrelierten die unterschiedlichen Itemmengen beispielsweise innerhalb der Dimension Raum und Form mit dem DEMAT 3 zu $r = .97$ und mit dem DEMAT 4 zu $r = .70$, woraus gefolgert wurde, dass ein konstruktvalides Instrument zur Messung der gewünschten Kompetenzen erstellt wurde.

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung erfolgte die Erhebung der Schülerleistungen wie vorgegeben innerhalb der ersten sechs Wochen des Schuljahres 2011/2012 mittels des DEMAT 3+ und innerhalb der letzten sechs Wochen des gleichen Schuljahres durch den DEMAT 4. Die Durchführung des DEMAT beansprucht inklusive Einführung und Instruktion ca. eine Schulstunde von 45 Minuten. Die reine Aufgabenbearbeitungszeit beträgt 28 Minuten. Um ein Abschreiben der Kinder zu verhindern, wurden die zwei echten Parallelformen A und B eingesetzt. Testleiterin war die jeweilige Lehrkraft, die genaue Anweisungen und Erläuterungen zur Durchführung in schriftlicher Form erhielt. Die Qualitätsmerkmale, das zugrunde liegende Mess- beziehungsweise Testmodell, Itemkennwerte, Reliabilitätskoeffizienten und vieles mehr sind den jeweiligen Handreichungen zu entnehmen (Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004, S. 31ff; Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2006, S. 30ff).

Der DEMAT 3+ (Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004, S. 9ff) umfasst insgesamt 31 Aufgaben in neun Aufgabentypen und drei Subtests. Die Aufgaben zum Subtest Geometrie behandeln Spiegelzeichnungen, Formen legen und Längen schätzen. Der DEMAT 3+ weist eine Paralleltest-Reliabilität von r = .76, eine Konsistenzschätzung von α = .81 und eine mittlere Testhalbierungsreliabilität von r = .83 auf. Die Korrelation zu den Schulnoten im Fach Mathematik beträgt bezüglich der kriterienbezogenen konkurrenten Validität r = -.61 und bezüglich der kriterienbezogenen prognostischen Validität r = -.68. Die Korrelation zum DEMAT 4 beträgt r = .68.

Der DEMAT 4 (Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2006, S. 7ff) besteht insgesamt aus 40 Aufgaben, wobei die Aufgaben zum Subtest Geometrie Lagebeziehungen und Spiegelzeichnungen betreffen. Der DEMAT 4 weist eine Paralleltest-Reliabilität von r = .82 und eine Konsistenzschätzung von α = .85 auf. Die Korrelation zu den Schulnoten im Fach Mathematik beträgt bezüglich der kriterienbezogenen konkurrenten Validität r = -.70.

Die von den insgesamt 270 Schülerinnen und Schülern (133 Jungen, 137 Mädchen) zu Beginn und zum Ende des Schuljahres 2011/2012 erbrachten Leistungen (Rohwerte) wurden kodiert und mit Hilfe der im Testmanual angehängten Normentabellen in T-Werte umgewandelt, um die Unterschiede im gesamten Leistungsspektrum statistisch korrekt abzubilden. Diese T-Werte zu den drei mathematischen Teilbereichen Arithmetik, Sachrechnen und Größen, Geometrie sowie zum Testgesamtwert werden in Kapitel 7.3 dargestellt. Darüber hinaus wurden die Korrelationen der einzelnen mathematischen Bereiche ermittelt und die geometrische Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler der einzelnen Klassen im vierten Schuljahr auf Signifikanz getestet.

Anhand der im Subtest Geometrie des DEMAT 4 erzielten T-Werte wurden die Schülerinnen und Schüler der Stichprobe in Leistungsgruppen eingeteilt, um Zusammenhänge mit den Lösungshäufigkeiten bei der Bearbeitung von Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen herzustellen (Kap. 9.2). Des Weiteren wurden die im Subtest Geometrie erbrachten Leistungen der einzelnen Klassen hinsichtlich der quantitativen und qualitativen Aspekte des Geometrieunterrichts miteinander verglichen (Kap. 7.3 und 9.4).

Die jeweiligen Schülerleistungen wurden in Form eines Klassenbogens (Anhang M) an die Lehrkräfte übermittelt, worauf die bei den einzelnen Aufgaben, den Subtests und dem Testgesamtwert erzielten Rohwerte für die einzelnen Schülerinnen und Schüler sowie für die gesamte Klasse ersichtlich waren. Zusätzlich zu den Klassenmittelwerten wurde der sich daraus ergebende Prozentrang eingetragen, den die Lehrkräfte anhand der Hinweise für Klassenleistungen interpretieren konnten. Neben diesem Klassenbogen und den Interpretationshinweisen erhielten die Lehrkräfte eine Abkürzungsübersicht und die Normentabellen für Mädchen und Jungen für die Subtests und den Testgesamtwert (Anhang M). So konnte anhand der für die Subtests und den Testgesamtwert ermittelten Rohwerte für die einzelnen Schülerinnen und Schüler der jeweilige Prozentrang abgelesen und mit Hilfe der Hinweise zur inhaltlichen Leistungsbeurteilung der Normwerte interpretiert werden.

6.4 Geometrische Aufgaben der drei Anforderungsbereiche

Um die Frage, inwiefern die Anforderungsbereiche zur Bestimmung der Aufgabenschwierigkeit herangezogen werden können (Fragestellung 4), beantworten zu können, mussten Lösungshäufigkeiten beim Bearbeiten geometrischer Aufgaben der drei Anforderungsbereiche ermittelt werden (Teilstudie III). Diese empirischen Lösungshäufigkeiten wurden zudem zur Beantwortung der Fragestellungen 5 und 6 verwendet. Zu jedem der vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche (-1, -2, -3, -4) und zu den drei verschiedenen Anforderungsbereichen (AB I, AB II, AB III) wurden jeweils zwei geometrische Aufgaben (a und b) ausgewählt. So lagen zu jedem der drei Anforderungsbereiche acht und zu jedem der vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche sechs geometrische Aufgaben vor (Tab. 13).

Tabelle 13: Teilstudie III - Übersicht

	AB I	**AB II**	**AB III**
a-1	AB1a-1	AB2a-1	AB3a-1
b-1	AB1b-1	AB2b-1	AB3b-1
a-2	AB1a-2	AB2a-2	AB3a-2
b-2	AB1b-2	AB2b-2	AB3b-2
a-3	AB1a-3	AB2a-3	AB3a-3
b-3	AB1b-3	AB2b-3	AB3b-3
a-4	AB1a-4	AB2a-4	AB3a-4
b-4	AB1b-4	AB2b-4	AB3b-4

Legende:

AB I	= Anforderungsbereich I: Reproduzieren
AB II	= Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen
AB III	= Anforderungsbereich III: Verallgemeinern/Reflektieren
a	= 1. Aufgabe
b	= 2. Aufgabe
-1	= IKB 1: sich im Raum orientieren
-2	= IKB 2: geometrische Figuren
-3	= IKB 3: geometrische Abbildungen
-4	= IKB 4: Flächen- und Rauminhalte

Die Begrenzung der Anzahl auf 24 war notwendig, da die Aufgaben durch die Schülerinnen und Schüler der an der vorliegenden Untersuchung teilnehmenden Lehrkräfte (N = 270) am Ende des vierten Schuljahres innerhalb einer Schulstunde bearbeitet werden sollten. Auch Schulleistungsstudien wie PISA oder die Erhebungen im Rahmen des Ländervergleichs sehen sich mit dieser Spannung zwischen breiter Repräsentation von Sachgebieten und limitierter Testzeit konfrontiert und lösen dieses Problem durch ein Multi-Matrix Sampling, was aufgrund der zu geringen Stichprobengröße der vorliegenden Erhebung nicht möglich war.

Die 24 Aufgaben wurden aus den 206 den Schulbüchern entnommenen und den Anforderungsbereichen übereinstimmend zugeordneten geometrischen Aufgaben ausgewählt. Die Aufgaben mussten aufgrund organisatorischer Gesichtspunkte schriftlich zu bearbeiten sein. Offene Aufgabenformate oder Aufgaben mit gestuften Antwortformaten wurden ausgeschlossen, um die Objektivität bei der Auswertung zu gewährleisten. Trotz der Begrenzung auf 24 Aufgaben wurde versucht, die Bandbreite aller innerhalb der vier Bereiche (IKB 1-4) formulierten inhaltsbezogenen Kompetenzen unter inhaltlichen Gesichtspunkten möglichst ausgewogen abzudecken. Dabei konnten jedoch nicht alle in Kapitel 2.3.2 vorgestellten und zu fördernden inhaltsbezogenen Kompetenzen zur Leitidee repräsentiert werden. Die Auswahl der Aufgaben in den markierten Zellen (Tab. 13) erfolgte nach der Berücksichtigung der bisher genannten Kriterien mangels alternativer Auswahlmöglichkeiten.

Vier der 24 geometrischen Aufgaben wurden bereits in Kapitel 2.3.2 aufgezeigt. Zum besseren Verständnis der sich anschließenden Ausführungen sollen an dieser Stelle exemplarisch drei weitere

Aufgaben aufgezeigt werden, die übereinstimmend zugeordnet wurden und die verschiedenen Anforderungen zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 2 (geometrische Figuren) repräsentieren.

Bei Aufgabe AB1b-2 zum Anforderungsbereich I (Reproduzieren) muss Faktenwissen zur Winkeleigenschaft eines Rechtecks reproduziert und dieses nach Vorgabe gezeichnet werden (Abb. 41).

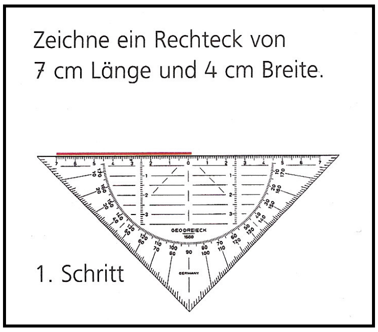


Abbildung 41: Aufgabe AB1b-2 (Eidt et al., 2009, S. 62).

Die folgende Aufgabe AB2a-2 ist Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen) zuzuordnen (Abb. 42). Um die beiden Körper zeichnen zu können, muss der Zusammenhang zwischen Ebene und Raum auf ikonischer Ebene hergestellt werden. Zeichenfähigkeiten und der Umgang mit geometrischen Arbeitsmaterialien müssen abgerufen werden.

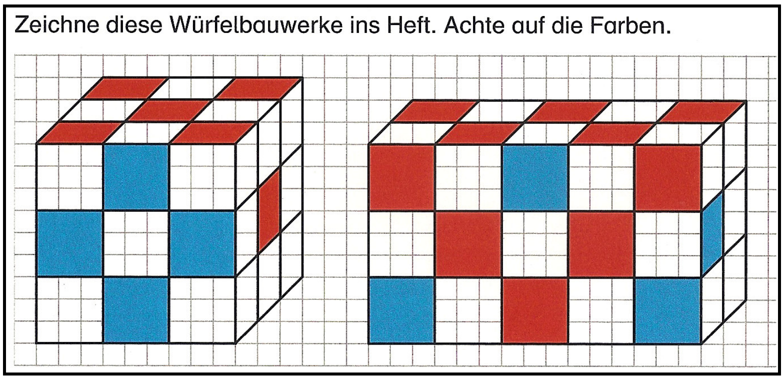


Abbildung 42: Aufgabe AB2a-2 (Lorenz, 2005, S. 64).

Um Stellung zu den Thesen der folgenden Aufgabe AB3a-2 nehmen zu können (Abb. 43), müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst Faktenwissen zu geometrischen Figuren und Fachbegriffen reproduzieren. Da nicht nur die beiden geometrischen Figuren der jeweiligen Thesen in Zusammenhang gebracht werden, sondern zusätzlich Begründungen gefunden werden müssen, wurde diese Aufgabe Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) zugeordnet.

Stimmt das? Begründe mit den Eigenschaften der Figuren oder zeige ein Gegenbeispiel.
a) Jedes Viereck ist ein Parallelogramm.
b) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.
c) Jedes Parallelogramm ist ein Rechteck.
d) Alle Figuren mit zwei parallelen Seiten sind Parallelogramme.
e) Jede Figur mit zwei Paar parallelen Seiten ist ein Parallelogramm.

Abbildung 43: Aufgabe AB3a-2 (Lorenz, 2005, S. 25).

Da alle 24 geometrischen Aufgaben schriftlich und ohne zusätzliche Hilfen bearbeitet werden sollten, wurden sie teilweise geringfügig verändert, indem beispielsweise die Aufgabenstellung konkretisiert oder der Umfang der Aufgabe verringert wurde. Exemplarisch dafür steht die Aufgabe AB1a-2 (Abb. 44), bei der zur Verkleinerung des Aufgabenumfangs die Zeilen Quader, Kugel und Pyramide entnommen wurden.

Übertrage die Tabelle ins Heft und fülle sie aus.

Körper	Form der Flächen	Gesamtzahl der Flächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Beispiele
Quader					Schachtel
Würfel					
Kugel	–				
Kegel					
Zylinder					
Pyramide					

Abbildung 44: Aufgabe AB1a-2 (Fuchs & Käpnick, 2008, S. 64).

Da in keinem der zehn Schulbücher eine Aufgabe zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 1 (sich im Raum orientieren) gefunden wurde, die Anforderungsbereich I (Reproduzieren) zugeordnet werden konnte, mussten zwei Aufgaben (AB1a-1 und AB1b-1) abgewandelt werden. Danach wurden sie erneut geratet und aufgrund der Übereinstimmung in die Auswahl aufgenommen.

Bei der ersten Aufgabe (AB1a-1) ging es darum, die Anzahl der zum Quader noch fehlenden Würfel zu ermitteln (Abb. 45). Diese Aufgabe wurde Anforderungsbereich II zugeordnet, da hierbei der Zusammenhang zwischen der Summe der bereits existierenden Würfel und der Summe der Würfel des Quaders hergestellt werden musste. Des Weiteren musste diese durch das gedankliche Ergänzen des gegebenen Würfelbaus zum Quader erst noch ermittelt werden.

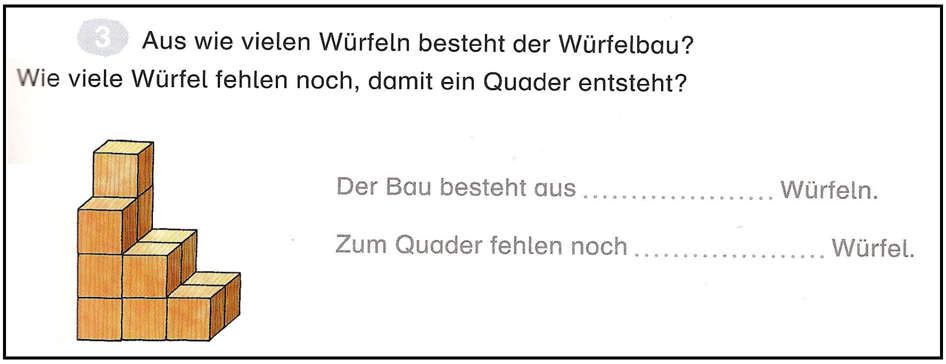


Abbildung 45: Aufgabe AB1a-1 (Müller-Wolfangel, Schreiber & Heilig, 2007, S. 51).

Isolierte man den bei dieser Aufgabe angegebenen Zwischenschritt, so erhielt man die Aufgabe AB1a-1: „Der Bau besteht aus ___ Würfeln.". In den Bildungsstandards wurde zwar eben diese Ermittlung von Würfeln eines Würfelbaus exemplarisch für Anforderungsbereich II aufgezeigt (vgl. KMK, 2005, S. 20 oder Abb. 33), jedoch ordneten beide Rater im Hinblick auf Schülerinnen und Schüler im vierten Schuljahr und im Hinblick auf die Beschaffenheit des abgebildeten Würfelbaus diese Aufgabe dem Reproduzieren (Anforderungsbereich I) zu.

Die folgende ebenfalls IKB 1 (sich im Raum orientieren) zuzuordnende Aufgabe (AB1b-1) fördert die Kompetenz, ein Objekt identifizieren zu können, das aus verschiedenen Blickwinkeln gezeigt wird (Abb. 46).

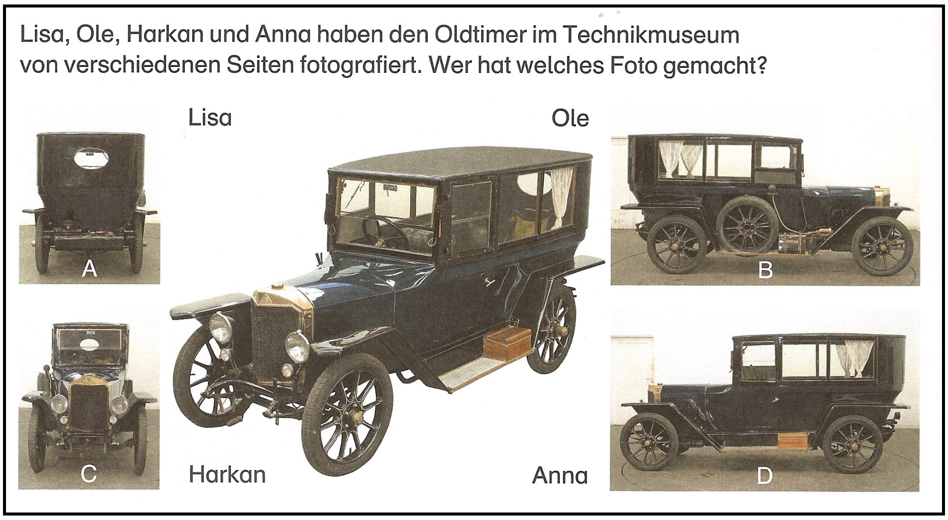


Abbildung 46: Aufgabe AB1b-1 (Fuchs & Käpnick, 2008, S. 66).

Um die Anforderung der Aufgabe zu verringern, wurden zwei Perspektiven (Lisa und Anna) entfernt, sodass die Schülerinnen und Schüler nur noch entscheiden mussten, ob das Foto von vorne oder hinten gemacht wurde. Zusätzlich wurde die Aufgabenstellung konkretisiert: „Harkan und Ole haben den Oldtimer im Technikmuseum von verschiedenen Seiten fotografiert. Schau dir an, wo Harkan und Ole stehen. Wer hat welches Foto gemacht?".

Alle 24 geometrischen Aufgaben sind in der endgültigen Form, in der sie den 270 Schülerinnen und Schüler zur Bearbeitung vorgelegt wurden, in Anhang R abgebildet. Bei der Auswertung der Aufgabenbearbeitungen mit dichotomen Antwortformaten wurde der Wert „Null“ für eine falsche Antwort beziehungsweise Nichtbearbeitung und der Wert „Eins“ für eine richtige beziehungsweise ausreichende Antwort vergeben. Durch den Summenscore wurden die Lösungshäufigkeiten der einzelnen Aufgaben berechnet und prozentual dargestellt. Anhand der jeweiligen Lösungshäufigkeit in Prozent wurden mit Hilfe verschiedener Interpretationsmöglichkeiten Aussagen zur empirischen Schwierigkeit der Aufgaben getroffen und einzelne Aufgaben analysiert (Kap. 9.1).

Darüber hinaus wurden die erbrachten Lösungshäufigkeiten der in drei Leistungsgruppen und nach Geschlecht unterteilten Schülerinnen und Schüler ausgewertet, um zu erheben, inwiefern die Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit von Leistungsfähigkeit und Geschlecht die geometrischen Aufgaben aus den drei verschiedenen Anforderungsbereichen bewältigen (Kap. 9.2 und 9.3).

Für die Aufgabensammlung wurde Cronbachs α = 0,8 ermittelt, was einer guten Reliabilität entspricht. Gruppierte man die Aufgaben nach den einzelnen Anforderungsbereichen, wurden Reliabilitäten von α = 0,61 (AB I), α = 0,61 (AB II) und α= 0,51 (AB III) berechnet und mit Hilfe der Spearman-Brown-Formel mit k = 24 auf jeweils 0,96 korrigiert, was einer exzellenten Reliabilität entspricht.

Die Berechnung der korrigierten Trennschärfen (r.drop) für alle Aufgaben ergab die Identifizierung von fünf grenzwertigen Items (<.2 für AB1a-1, AB3a-4, AB3a-2, AB3b-1 und AB3a-1). Da durch die Unterteilung in drei Anforderungsbereiche jeweils unterschiedliche Aspekte angesprochen wurden, wurden erneut die getrennten Reliabilitätsanalysen zur Beurteilung der Trennschärfen betrachtet. AB3b-1 war dann nicht mehr grenzwertig. AB1a-1 hatte noch eine Trennschärfe unter 0,2. Ließ man das Item aus der Skala heraus, erhöhte sich das standardisierte Cronbachs α von 0,61 auf 0,62. Aufgrund dieses geringen Effekts wurde das Item nicht ausgeschlossen. Das Ausschließen von AB3a-2 hatte keine Auswirkungen. Entfernte man AB3a-1, so verringerte sich das standardisierte Cronbachs

α sogar. Entnahm man das Item AB3a.4, erhöhte sich das standardisierte Cronbachs α von 0,51 auf 0,53. Da die Aufgaben ausschließlich für die Ermittlung von Lösungshäufigkeiten innerhalb der vorliegenden Untersuchung zusammengestellt und nicht als Test konzipiert wurden, verblieben auch diese Items in der Skala.

6.5 Stichprobe

Die Lehrerstichprobe bestand zu Beginn der Untersuchung aus 20 Grundschullehrkräften. Von den 20 Lehrkräften gaben vier Teilnehmer keine Protokolle ab und/oder schickten keine Schülertestbögen zurück, weshalb diese (und auch die Testwerte der dazugehörigen Schülerinnen und Schüler) aus der Untersuchung entnommen werden mussten. Da die Lehrkräfte mit den Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Untersuchung kodiert wurden, fehlen in den folgenden Kapiteln die Lehrkräfte mit den Nummern 2, 10, 17 und 20. Eine Neukodierung wurde aus organisatorischen Gründen nicht vorgenommen. Insgesamt ergab sich eine Beteiligung von 80%. Von den verbleibenden 16 Lehrkräften waren elf weiblich und fünf männlich. Das durchschnitte Alter betrug 40 Jahre und die durchschnittliche Dienstzeit 16 Jahre. Alle im Folgenden genannten Informationen an die Teilnehmer der Untersuchung sind in Anhang C aufgelistet.

Zahlreiche Schulen wurden nach einer Zufallsstichproben-Ziehung aus allen rheinland-pfälzischen Grundschulen per E-Mail mit Hilfe eines Informationsbriefes oder telefonisch kontaktiert. Sie erhielten Angaben zum Thema und zum Ziel der Untersuchung sowie zum Ablauf und zu den Anforderungen für das Schuljahr 2011/2012 (Protokollieren des Geometrieunterrichts, Durchführen des DEMAT und der geometrischen Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen in bestimmten Zeiträumen). Zudem wurde angekündigt, dass die Lehrkräfte eine Rückmeldung über die Leistungen ihrer Klasse erhalten würden. Da die Teilnahme der Schulen beziehungsweise der Lehrkräfte der vierten Jahrgangsstufe ohne Bezahlung und freiwillig war, musste zum einen eine hohe Anzahl an Schulen kontaktiert werden. Zum anderen fand durch dieses Vorgehen bereits eine Selektion statt, die bei der Beschreibung der vorliegenden Stichprobe bedeutsam ist. Da viele Schulen beziehungsweise Lehrkräfte aufgrund des Arbeitsaufwandes oder Zeit-/Termindruck, Überlastung und vielem mehr absagten, konnte davon ausgegangen werden, dass die Lehrkräfte, die sich zur Teilnahme bereit erklärten, relativ motiviert und interessiert an geometrischen Inhalten zu sein schienen.

Die Lehrkräfte wurden dazu angehalten, ihren Geometrieunterricht über das Schuljahr 2011/2012 hinweg knapp zu protokollieren und diese Protokollbögen jeweils zu den Ferien (Herbst-, Weihnachts-, Oster- und Sommerferien) in bereits vorfrankierten und beschrifteten Umschlägen zurück zu senden. Allen teilnehmenden Lehrkräften wurde eine ausreichende Anzahl an bereits ausgedruckten Protokollbögen zur Verfügung gestellt, Kontakt wurde hauptsächlich per E-Mail oder auf dem Postweg gehalten. Es wurden keine Vorgaben in Bezug auf bestimmte geometrische Unterrichtsinhalte oder hinsichtlich zeitlicher Erwartungen gemacht. Vielmehr wurden die Lehrkräfte dazu angehalten, den Unterricht möglichst so zu planen und zu halten, wie sie es üblicherweise tun, da das Ziel der Untersuchung das Gewinnen eines realistischen Einblicks in den Geometrieunterricht und die in diesem Rahmen gestellten Aufgaben war.

Die geometrischen Aufgaben mit den verschiedenen Anforderungen wurden durch die Schülerinnen und Schüler der an der vorliegenden Untersuchung teilnehmenden Lehrkräfte der vierten Klassen bearbeitet. Voraussetzung für die Teilnahme der Schülerinnen und Schüler war das schriftliche Einverständnis der Eltern. Ursprünglich ergab sich somit N = 360 (184 Jungen, 175 Mädchen). Durch

Klassenwechsel, Umzüge oder Ähnliches verringerte sich jedoch die Anzahl der Schülerinnen und Schüler. Außerdem wurden, wie soeben erwähnt, nur die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler in die Untersuchung aufgenommen, deren Lehrkräfte Protokollbögen einreichten und die sowohl den DEMAT 3+ (Messzeitpunkt: Anfang des vierten Schuljahres) als auch den DEMAT 4 und die geometrischen Aufgaben der Teilstudie III (Messzeitpunkt: Ende des vierten Schuljahres) bearbeiteten, um Zusammenhänge zwischen den Schülerleistungen bei der Bearbeitung aller Aufgaben beziehungsweise der Leistungsentwicklung aufdecken sowie Tendenzen auf Klassenebene aufzeigen zu können. Letztlich lagen anonymisierte Daten zu 270 rheinland-pfälzischen Schülerinnen und Schülern des vierten Schuljahres vor, die jeweils von den 16 teilnehmenden Lehrkräften im Schuljahr 2011/2012 unterrichtet wurden. Davon waren 133 Jungen und 137 Mädchen, die genaue Verteilung auf die jeweiligen Lehrkräfte ist Anhang D zu entnehmen.

Teil 3: Ergebnisse und Diskussion

7 Quantitativer Anteil geometrischer Inhalte im vierten Schuljahr

Im folgenden Kapitel wird der ermittelte quantitative Anteil geometrischer Inhalte in den Schulbüchern und im Mathematikunterricht dargestellt (Fragestellung 1). Dazu wurden zehn Schulbüchern im Rahmen der Teilstudie I alle geometrischen Aufgaben entnommen (Kap. 7.1). Der Anteil geometrischer Inhalte am Mathematikunterricht wurde mit Hilfe der in Kapitel 6.2 vorgestellten Protokollbögen über ein Schuljahr hinweg ermittelt. Diesen Protokollen wurden im Zuge der Teilstudie II ebenfalls die geometrischen Aufgaben entnommen (Kap. 7.2). Im Anschluss daran werden diese Erkenntnisse im Zusammenhang mit den durch den DEMAT erfassten Geometrieleistungen der vorliegenden Stichprobe betrachtet (Kap. 7.3).

7.1 Geometrische Inhalte in Schulbüchern

Für die Untersuchung der geometrischen Aufgaben in Schulbüchern des vierten Schuljahres (Teilstudie I) wurden vor Beginn des Schuljahres 2011/2012 aus den im Schulbuchkatalog enthaltenen Schulbüchern die folgenden zehn zufällig ausgewählt: Denken und Rechnen (1), Duden (2), Zahlenzauber (3), Mathehaus (4), Mathematikus (5), Matheprofis (6), Nussknacker (7), Primo (8), Welt der Zahl (9) und Zahlenbuch (10).

Bei einigen Lehrwerken wurden explizit die Bezeichnungen der Bildungsstandards für die Gestaltung des Inhaltsverzeichnisses verwendet, was eine Orientierung der Schulbücher an den Vorgaben der Bildungsstandards vermuten lässt (Abb. 47).

Leitideen	Inhalte	Kompetenzen
Raum und Form *ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren, Umfang und Flächeninhalt untersuchen, Zeichnungen mit Hilfsmitteln anfertigen*	**Flächen** **48–51** Flächen am Geobrett spannen Flächenformen erkennen Kreise zeichnen Flächengrößen (m^2)/Umfang bestimmen und vergleichen	*Problemlösen (Lösungsstrategien entwickeln), Kommunizieren, Darstellen, Kreativität*

Abbildung 47: Inhaltsverzeichnis des Lehrwerks Primo Mathematik 4 (Grassmann et al., 2010, S. 2).

In den zehn Lehrwerken waren insgesamt 165 Seiten mit geometrischen Inhalten zu finden. Abbildung 48 veranschaulicht den prozentualen Anteil an Seiten mit geometrischen Inhalten im Verhältnis zur Seitenanzahl des gesamten Lehrwerks für jedes der zehn Schulbücher.

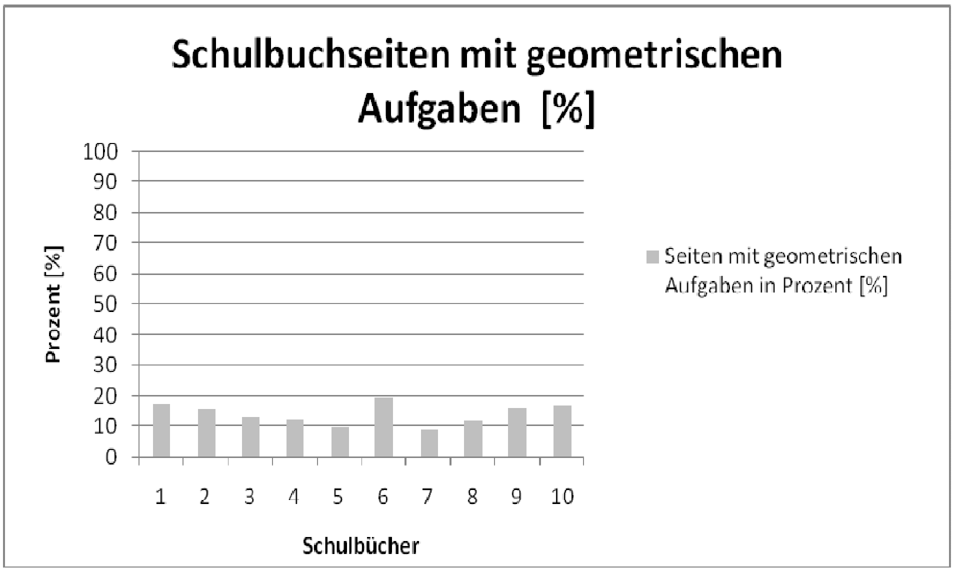


Abbildung 48: Schulbuchseiten mit geometrischen Aufgaben [%].

Die dargestellten Schwankungen bezüglich des prozentualen Anteils der Seiten mit geometrischen Inhalten an der Seitenanzahl des gesamten Lehrwerks reichen von Min. 9% (7) bis Max. 20% (6). Die genauen prozentualen Anteile sind Anhang E zu entnehmen. Es sei angemerkt, dass aus der quantitativen Betrachtung der Seitenanzahlen keine Aussagen zur Qualität der dargestellten geometrischen Inhalte abgeleitet werden können beziehungsweise sollen.

Insgesamt konnten den zehn Schulbüchern 229 geometrische Aufgaben, die für eine individuelle Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler vorgesehen waren, entnommen werden (Teilstudie I). Diese verteilten sich wie in Abbildung 49 ersichtlich auf die in den Bildungsstandards zur Leitidee Raum und Form formulierten inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche.

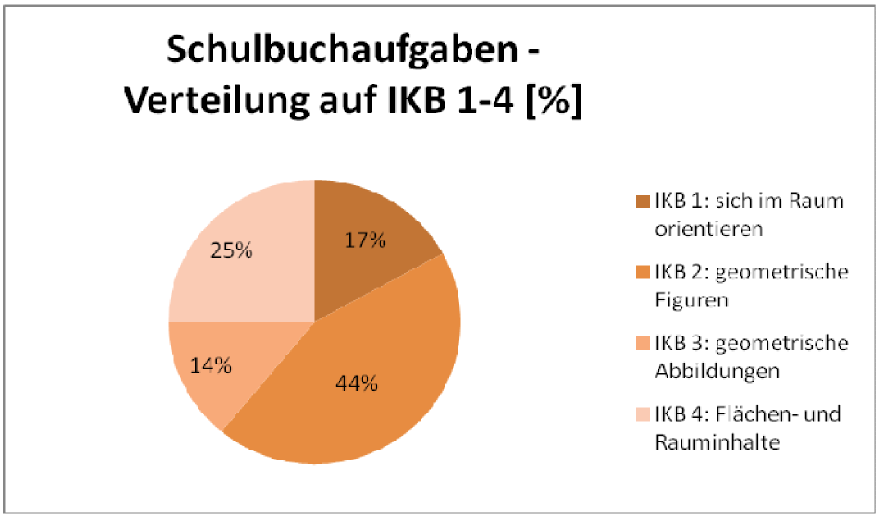


Abbildung 49: Schulbuchaufgaben - Verteilung auf IKB 1-4 [%].

Die Aufgaben zu IKB 2 (Geometrische Figuren) stellten mit 44% den höchsten Anteil dar. Aufgaben zu Flächen- und Rauminhalten (IKB 4) machten ca. ein Viertel (25%) aller in den Schulbüchern der Klassenstufe 4 zu findenden geometrischen Aufgaben aus.

Tabelle 14 zeigt zusätzlich zu den prozentualen Anteilen die Aufgabenanzahlen zu den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen der Leitidee Raum und Form.

Tabelle 14: Schulbuchaufgaben - Verteilung auf IKB 1-4

	sich im Raum orientieren (IKB 1)	Geometrische Figuren (IKB 2)	Geometrische Abbildungen (IKB 3)	Flächen- und Rauminhalte (IKB 4)
Aufgabenanzahl	39	101	31	58
Prozent	17%	44%	14%	25%

7.2 Geometrische Inhalte im Unterricht

Der Anteil geometrischer Inhalte am Mathematikunterricht wurde mit Hilfe der in Kapitel 6.2 vorgestellten Protokollbögen ermittelt. Da alle Lehrkräfte die Bögen sowohl digital per Email als auch in hoher Anzahl ausgedruckt per Post erhielten, waren die Vorgehensweisen bei der Handhabung sehr unterschiedlich. Manche Lehrkräfte verwendeten lediglich Seite 1 und ergänzten eine eigene zweite Seite, auf der die Aufgaben und Stundenverläufe aufgeführt wurden. Andere hängten alle eingesetzten Arbeitsmaterialien kopiert an, wieder andere füllten beide Seiten wie zu Beginn vorgesehen per Hand aus. Einige Lehrkräfte nutzten auch die digitale Version. Die Abbildungen 50 und 51 zeigen zwei Auszüge aus den Protokollbögen auf.

Arbeitsphase	Klassenunterricht/ Einzelarbeit: Besprechen der Buchseite Bereitlegen von: Geometrie-Dreieck, gespitzten Bleistiften, Blancopapier	Super M 4 Schülerbuch Seite 68 Nr. 3, 4 Prüfen mit dem Geometrie-Dreieck, welche Geraden senkrecht zueinander stehen; Zeichnen von Rechtecken auf Papier ohne Kästchen nach Vorgaben

Abbildung 50: Protokollbogenauszug (Lehrkräfte 18 und 19) vom 26.10.11. Thema: Rechte Winkel.

Arbeitsphase	- Schüler stellen mit Hilfe von Arbeitsblättern geometrische Körper her und zeigen in Partnerarbeit deren geometrische Eigenschaften auf.	Arbeitsblätter zu geometrischen Körpern (Körpernetze)

*Abbildung 51:*Protokollbogenauszug (Lehrkraft 11) vom 03.11.11. Thema: Geometrische Körper untersuchen.

Wie zu erkennen ist, verwiesen viele der teilnehmenden Lehrkräfte in der Aufgabenspalte auf die jeweils angehängten Aufgaben (meist Kopien von Buchseiten oder Arbeitsblätter). Deshalb wurde nach dem ersten Rücklauf der Protokolle zu den Herbstferien für die zweite Seite des Protokolls eine Alternative entwickelt (Tab. 15).

Tabelle 15: Protokollbogen - Alternative

Datum	Zeit (Min)	Thema und Aufgaben	Kompetenzen

Bei dieser Protokoll-Variante hatten die Lehrkräfte die Möglichkeit, jeweils nur auf die angehängten Aufgabenblätter hinzuweisen oder die Aufgaben einzufügen. Zusätzlich wurden die Kompetenzen einmalig nummeriert, um dann in die entsprechende Spalte eingetragen werden zu können. Diese Vorgehensweise war bereits zu Beginn der Untersuchung angedacht, wurde aber verworfen, da die Lehrkräfte so das Übersichtsblatt immer wieder hätten hervorholen müssen, was aber möglicherweise für einige Lehrkräfte aufwändiger oder gar unübersichtlicher gewesen wäre. Tatsächlich entschieden sich nur drei der 16 teilnehmenden Lehrkräfte für diese Möglichkeit (Tab. 16).

Tabelle 16: Protokollbogen - Ausschnitt (Lehrkräfte 18 und 19)

Datum	Zeit (Min)	Thema und Aufgaben	Kompetenzen
02.05.2012	50	**Drehsymmetrie; drehsymmetrische Figuren erzeugen** **Bei vorgegebenen Figuren den Drehpunkt bezeichnen, Symmetrieachsen einzeichnen** T A S V X Q N C M	1a, 2d, 3b, 3c

Anhang I enthält von jeder der 16 Lehrkräften exemplarisch einen bearbeiteten Protokollbogen (Seite 2), um einen Einblick in die vielfältigen Möglichkeiten der Handhabung und Unterrichtsgestaltung zu gewährleisten. Häufig folgte nach einem kurzen Einstieg die Bearbeitung von schriftlich fixierten Aufgaben in Einzelarbeit, wobei schriftlich zu bearbeitende Aufgaben dominierten. Selten wurden Aufgaben gestellt, die zum Herstellen geometrischer Objekte (Legen, Falten, Basteln) aufforderten. Eine starke Orientierung an einem alleinigen Lehrwerk konnte bei keiner Lehrkraft festgestellt werden. Die den Protokollen entnommenen geometrischen Aufgaben stammten bei jeder Lehrkraft aus verschiedenen Schulbüchern, Werkstätten oder wurden selbst konzipiert.

Insgesamt reichten die 16 teilnehmenden Lehrkräfte über das Schuljahr hinweg 148 Protokollbögen zum Geometrieunterricht in Klassenstufe 4 ein, woraus sich ein Durchschnitt von 9,25 Protokollen pro Lehrkraft errechnete. An dieser Stelle ist zu betonen, dass im Rahmen des vorliegenden Untersuchungsdesigns nicht überprüft werden kann, ob diese Stunden tatsächlich wie protokolliert gehalten wurden und ob alle gehaltenen Stunden durch die Lehrkräfte protokollarisch festgehalten wurden.

Da die Dauer der Schulstunden von Schule zu Schule variierte und die Angaben in den Unterrichtsprotokollen zwischen Min. 30 Minuten und Max. 70 Minuten lagen, wird in den weiteren Ausführungen nicht die Anzahl an gehaltenen Stunden Geometrieunterricht, sondern die Minutenzahl Vergleichsgrundlage sein.

Die Unterrichtszeit aller eingereichten Protokollbögen der 16 teilnehmenden Lehrkräfte summiert ergab 11.670 Minuten Geometrieunterricht. Dabei bestanden jedoch große individuelle Unterschiede, die in Abbildung 52 deutlich zu erkennen sind.

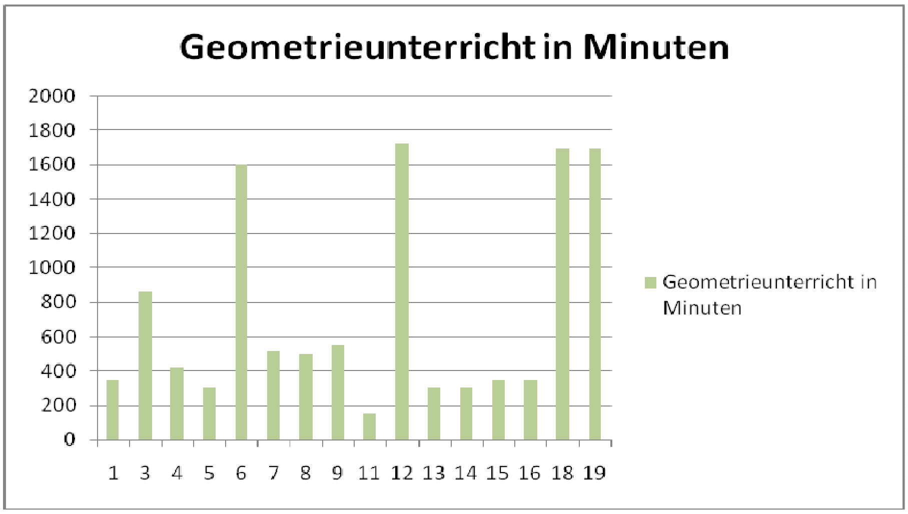


Abbildung 52: Geometrieunterricht [Min.].

Die Nummerierung der Lehrkräfte resultiert aus der zu Beginn der Untersuchung vorgenommenen Kodierung. Da jedoch, wie in Kapitel 6.6 beschrieben, vier Lehrkräfte ausschieden, blieben am Ende die Nummern 2, 10, 17 und 20 unbesetzt. Aus der zwischen den Angaben vorliegenden Streuung ergaben sich die in Tabelle 17 abgebildeten statistischen Kennwerte.

Tabelle 17: Statistische Kennwerte zum Geometrieunterricht [Min.]

gesamt	***Min.***	***Max.***	***M***	***Median***	***Q1***	***Q3***	***SD***
11670	150	1720	729	460	337,5	1045	588

Im Boxplot (Abb. 53) sind diese Lage- und Streuungsmaße übersichtlich dargestellt. Die Lehrkraft mit der höchsten Minutenzahl protokollierte 1.720 Minuten Geometrieunterricht, die Lehrkraft mit der niedrigsten Minutenzahl protokollierte 150 Minuten. Die Hälfte der teilnehmenden Lehrkräfte unterrichtete in einem ganzen Schuljahr weniger als 460 Minuten Geometrie (Median). 75% aller Lehrkräfte erteilten weniger als 1045 Minuten Geometrieunterricht (Q3 = 0,75-Quantil = oberes Quartil) und 25% sogar weniger als 337,5 Minuten (Q1 = 0,25-Quantil = unteres Quartil).

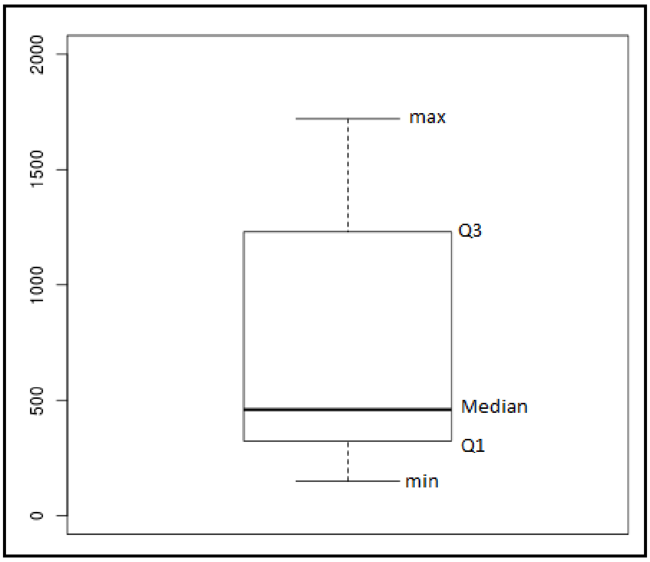


Abbildung 53: Geometrieunterricht [Min.] - Boxplot.

In Kapitel 5.1 wurde die Stundentafel des Landes Rheinland-Pfalz einbezogen, wonach ca. 9.000 Minuten Mathematikunterricht für ein viertes Schuljahr vorgegeben werden. Für alle teilnehmenden

Lehrkräfte würde sich mit der Gesamtanzahl von 11.670 Minuten protokollierten Geometrieunterrichts ein prozentualer Anteil von 8% am gesamten Mathematikunterricht der 16 Lehrkräfte ergeben, vorausgesetzt, dass diese vorgegebene Gesamtzeit des Mathematikunterrichts über die Stichprobe hinweg eingehalten wurde. Tabelle 18 zeigt die den Protokollen entnommenen Minutenzahlen der einzelnen Lehrkräfte und den daraus errechneten jeweiligen prozentualen Anteil des Geometrieunterrichts am gesamten Mathematikunterricht (100% = 9.000 Minuten), wie er durch die Stundentafel vorgegeben ist (hervorgehoben sind das Minimum und das Maximum).

Tabelle 18: Anteil des Geometrieunterrichts am Mathematikunterricht [%]

Lehrer	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**18**	**19**
Min.	350	860	420	300	1600	520	500	550	150	1720	300	300	350	350	1700	1700
%	4	10	5	3	18	6	6	6	2	19	3	3	4	4	19	19

Die großen Unterschiede zwischen den Lehrkräften wurden beim Auszählen der Aufgaben ebenfalls deutlich. Insgesamt konnten den eingereichten Protokollbögen der 16 teilnehmenden Lehrkräfte für das vierte Schuljahr 653 geometrische Aufgaben entnommen werden. Abbildung 54 zeigt deren Verteilung auf die einzelnen Lehrkräfte.

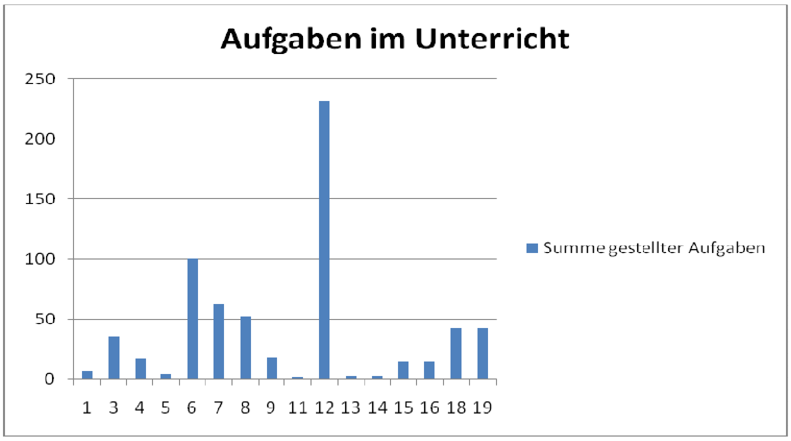


Abbildung 54: Protokollaufgaben - Verteilung Lehrkräfte.

Aus den in Abbildung 54 zu erkennenden Unterschieden ergaben sich die in Tabelle 19 dargestellten statistischen Kennwerte.

Tabelle 19: Statistische Kennwerte zu den Protokollaufgaben

gesamt	***Min.***	***Max.***	***M***	***Median***	***Q1***	***Q3***	***SD***
653	2	232	40,81	17,5	6,25	45,25	57,8

Wie auch bei der Unterrichtszeit lag bezüglich der im Unterricht gestellten Aufgaben eine beträchtliche Streuung zwischen den Lehrkräften vor. Die Hälfte der teilnehmenden Lehrkräfte stellte in einem ganzen Schuljahr weniger als 17,5 Aufgaben im Geometrieunterricht (Median). 25% aller Lehrkräfte stellten weniger als 6,25 Aufgaben im Geometrieunterricht (Q1 = 0,25-Quantil = unteres Quartil), 75% weniger als 45 Aufgaben (Q3 = 0,75-Quantil = oberes Quartil). Es ergab sich ein Mittelwert von 40,81 Aufgaben pro Teilnehmer im Schuljahr. Diese Lage- und Streuungsmaße sind im Boxplot dargestellt (Abb. 55). Es handelt sich dabei ausschließlich um eine quantitative Betrachtung, woraus keine Aussagen zur Qualität der geometrischen Aufgaben abgeleitet werden.

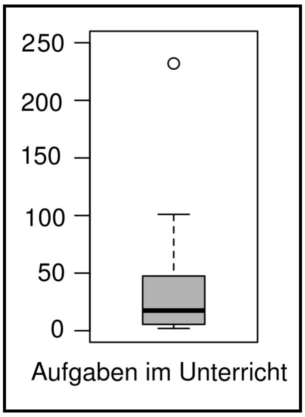


Abbildung 55: Protokollaufgaben - Boxplot.

Die wenigsten Aufgaben stellten die Lehrkräfte 13 und 14, die auf Nachfrage am Ende des Jahres 2012 die in Abbildung 56 aufgezeigte Antwort verfassten.

Hallo, liebe Frau Maurer!

Auch Ihnen wünschen wir ein frohes und gesegnetes Jahr 2013 und viel Erfolg mit ihrer Arbeit!
Leider müssen wir Ihnen mitteilen, dass in der Folgezeit aufgrund von Projektwoche, Klassenfahrt etc. kein weiterer Geometrieunterricht im vierten Schuljahr stattgefunden hat. Somit war es uns auch nicht möglich, weitere Tagebuch-Protokolle auszufüllen.

Alles Gute!

Abbildung 56: E-Mail der Lehrkräfte 13 und 14.

Auch Lehrkraft 1 thematisiert die Vernachlässigung der geometrischen Inhalte im eigenen Unterricht (Abb. 57).

Du wirst merken, es bleibt bei der „Stiefkind-rolle“ ...

Abbildung 57: Nachricht der Lehrkraft 1.

Die 653 den vorliegenden Protokollen entnommenen Aufgaben wurden anschließend den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen zur Leitidee Raum und Form zugeordnet, wobei sich eine ähnliche Verteilung wie bereits bei den geometrischen Aufgaben aus den Schulbüchern (vgl. Kap. 7.1) ergab (Abb. 58).

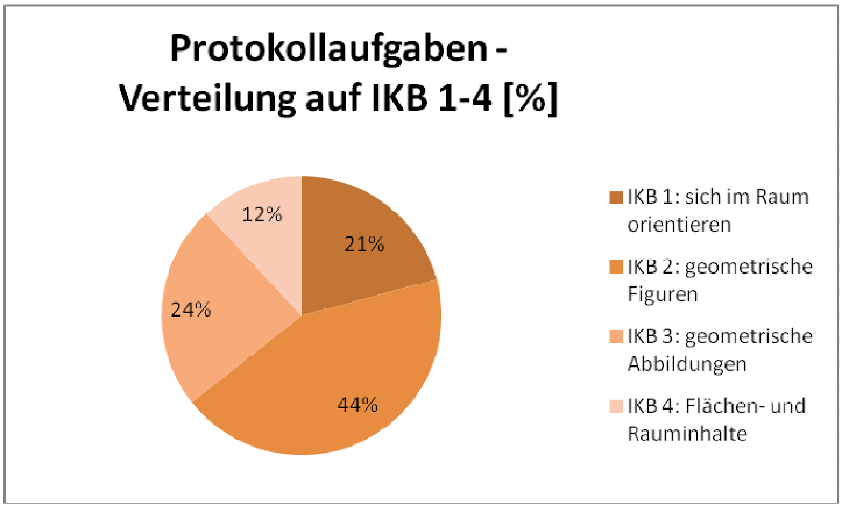


Abbildung 58: Protokollaufgaben - Verteilung auf IKB 1-4 [%].

Die Aufgaben zu IKB 2 (geometrische Figuren) stellten mit 44% den höchsten Anteil dar. Unterschiedlich beziehungsweise sozusagen vertauscht im Vergleich zur Schulbuchanalyse war der Anteil der Aufgaben zu geometrischen Abbildungen (IKB 3) von 24% und der Anteil an Aufgaben zu Flächen- und Rauminhalten (IKB 4), der lediglich bei 12% lag. 21% der Aufgaben wurden zu IKB 1 (sich im Raum orientierten) gestellt.

Die aus den Protokollen gewonnenen Erkenntnisse zum quantitativen Anteil geometrischer Inhalte im Unterricht des vierten Schuljahres wurden anschließend in Zusammenhang mit den durch den DEMAT erfassten Geometrieleistungen der vorliegenden Stichprobe gebracht, was im folgenden Kapitel dargestellt wird.

7.3 Geometrieleistungen und Quantität des Geometrieunterrichts

Zu Beginn und zum Ende des Schuljahres 2011/2012 wurde der in Kapitel 6.3 erläuterte DEMAT durch die an der Erhebung teilnehmenden Schülerinnen und Schüler bearbeitet. Aufgrund der Konzeption des DEMAT lagen somit insgesamt 270 Ergebnisse zu den folgenden Testbereichen in Form von T-Werten vor: Subtest Arithmetik, Subtest Sachrechnen, Subtest Geometrie, Testgesamtwert; alle vier Testwerte jeweils zu Beginn und zum Ende des vierten Schuljahres. Diese werden nun für die Stichprobe insgesamt, klassenweise und schließlich in Zusammenhang mit den Erkenntnissen zum quantitativen Geometrieanteil aus den Protokollbögen betrachtet.

Die Ergebnisse der 270 Schülerinnen und Schüler zu den acht Testbereichen in Form von T-Werten sind dem folgenden Boxplot-Diagramm zu entnehmen (Abb. 59). Die Subtests und der Testgesamtwert von Anfang (DEMAT 3+) und Ende (DEMAT 4) des Schuljahres wurden zur besseren Vergleichbarkeit jeweils nebeneinander angeordnet, um zunächst deskriptive Aussagen zur Entwicklung der Geometrieleistung der gesamten Stichprobe im Laufe des Schuljahres treffen zu können. Dabei ist vorwegzunehmen, dass gleichbleibende T-Werte bereits für eine Verbesserung der Leistungen sprechen würden, da sich die T-Werte auf die der jeweiligen Klassenstufe entsprechenden Leistungen der Normstichprobe beziehen und bessere Leistungen der Normstichprobe am Ende der vierten Jahrgangsstufe, im Vergleich zu Beginn der vierten Jahrgangsstufe, vorausgesetzt werden können.

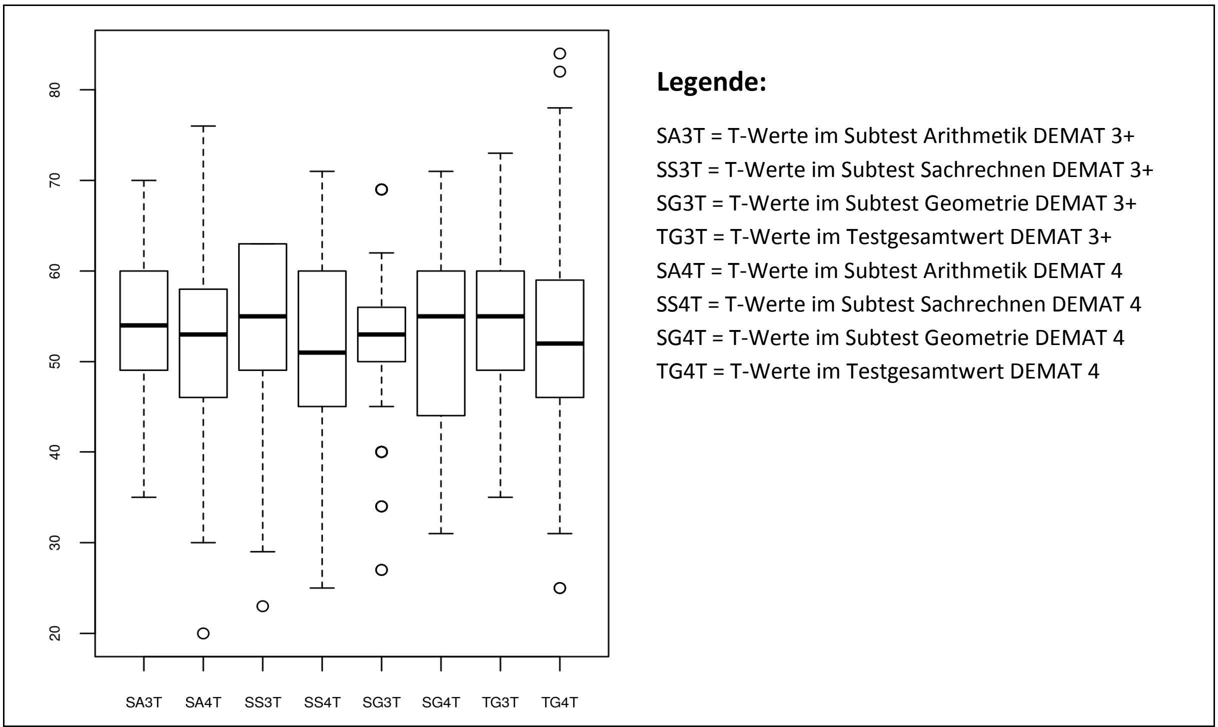


Abbildung 59: T-Werte DEMAT - Boxplot.

Es ist zu erkennen, dass sich der Median der Schülerleistungen in den Subtests Arithmetik und Sachrechnen sowie im Testgesamtwert vom Anfang (DEMAT 3+) bis zum Ende (DEMAT 4) des vierten Schuljahres nach unten verschoben hat. Lediglich für die Subtests zur Geometrie war ein Aufwärtstrend erkennbar. Zu Beginn des Schuljahres (SG3T) lag der Median bei 53, Q1 bei 50, Q3 bei 56 und die Standardabweichung bei 52.77. Aufgrund der dem Boxplot zu entnehmenden Ausreißer sind die prozentual erzielten T-Werte in Tabelle 20 abgebildet.

Tabelle 20: T-Werte zum Subtest Geometrie DEMAT 3+

T-Werte	**27**	**34**	**40**	**45**	**50**	**56**	**62**	**69**
%	1	1	8	14	26	26	20	3

Für den Subtest Geometrie des DEMAT 4 (SG4T) ergaben sich als statistische Kenndaten ein Median von 55, ein Q1 von 44 und ein Q3 von 60 bei einer Standardabweichung von 52.48. Die prozentuale Verteilung der T-Werte ist in Tabelle 21 abgebildet.

Tabelle 21: T-Werte zum Subtest Geometrie DEMAT 4

T-Werte	**31**	**38**	**44**	**50**	**55**	**60**	**65**	**71**
%	2	10	18	19	20	18	9	5

Der Interquartilsabstand und somit die Streuung im mittleren Bereich der Verteilung war bei SG3T geringer als bei SG4T. Um die Mittelwerte der beiden Subtests zur Geometrie miteinander vergleichen und die Unterschiede auf Signifikanz testen zu können, wurde der *t*-Test für abhängige Stichproben durchgeführt. Dieser zeigte, dass die Differenzen der gepaarten Messwerte nicht signifikant von 0 verschieden waren und sich die Mittelwerte somit nicht signifikant unterschieden (t (269) = 0.4984, p = 0.6186). Die Unterschiede der Mittelwerte der Subtests Arithmetik (SA3T und SA4T) waren signifikant (p < .05), aber die Differenzen gering (3.07037) und somit nicht aussagekräftig (t (269) = 5.9178, p = 9.903e-09). Gleiches galt für die Mittelwertsunterschiede der beiden Testgesamtwerte (TG3T und TG4T; t (269) = 5.3933, p = 1.516e-07, mean of the differences =

2.440741). Es konnte somit keine Aussage zur Leistungsentwicklung der gesamten Stichprobe innerhalb des Schuljahres getroffen werden.

Für die Ermittlung der Zusammenhänge zwischen diesen acht Testbereichen wurde unter Verwendung der gleichen Abkürzungen (vgl. Legende in Abb. 59) die folgende Korrelationsmatrix mit R produziert (Abb. 60). Dabei weisen die dunkelblauen Felder auf stärkere Korrelationen hin.

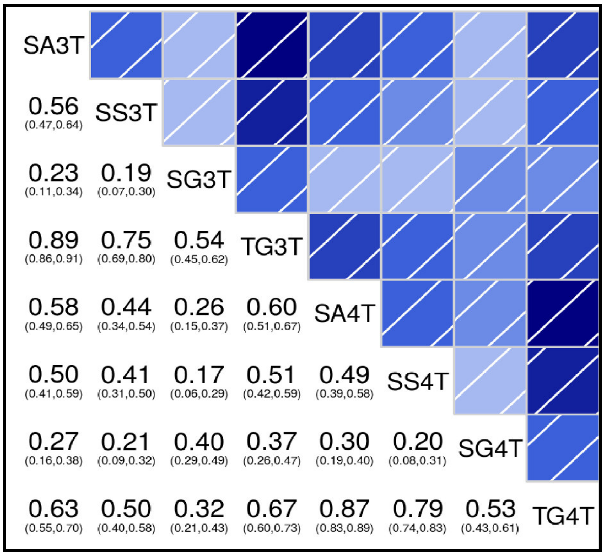


Abbildung 60: T-Werte DEMAT - Korrelationsmatrix.

Wie zu erkennen, korrelierte der Testgesamtwert (TG3T) am Anfang des vierten Schuljahres zu .89 mit dem Subtest Arithmetik (SA3T), zu .75 mit dem Subtest Sachrechnen (SS3T) und zu .54 mit dem Subtest Geometrie (SG3T). Am Ende des Schuljahres zeigte sich ein ähnliches Bild: Der Testgesamtwert (TG4T) korrelierte zu .87 mit dem Subtest Arithmetik (SA4T), zu .79 mit dem Subtest Sachrechnen (SS4T) und zu .53 mit dem Subtest Geometrie (SG4T).

Die Testgesamtwerte zu Beginn (TG3T) und zum Ende des vierten Schuljahres (TG4T) korrelierten ebenfalls hoch miteinander (.67). Beide Subtests zur Arithmetik (SA3T und SA4T) korrelierten hoch miteinander und hoch mit den Subtests zum Sachrechnen. Die beiden Subtests zur Geometrie (SG3T und SG4T) korrelierten zu .4 miteinander. Abgesehen vom Testgesamtwert wiesen sie nur geringe beziehungsweise mittlere Korrelationen zu anderen Testbereichen auf.

Nachdem die im DEMAT erzielten T-Werte für die gesamte Stichprobe beschrieben wurden, erfolgt nun die Betrachtung der einzelnen Klassen. Tabelle 22 stellt zunächst die in den Subtests und im Testgesamtwert pro Klasse durchschnittlich erzielten T-Werte am Ende des vierten Schuljahres dar. Hellgrau hervorgehoben sind die jeweils besten Werte, dunkelgrau markiert sind die schlechtesten Werte.

Tabelle 22: T-Werte der Klassen (Ende viertes Schuljahr)

Klasse	1	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	18	19
SA4T	52	41	60	48	53	56	54	49	51	51	50	48	57	57	51	54
SS4T	53	45	58	51	52	56	53	51	55	53	49	49	55	52	51	53
SG4T	54	53	56	50	51	52	56	51	51	58	50	55	49	56	50	53
TG4T	53	43	60	50	52	57	56	50	53	54	49	50	56	57	51	54

Bezüglich des Ergebnisses des Subtests Geometrie (Zeile SG4T) erzielte Klasse 12 mit 58 den höchsten durchschnittlichen T-Wert, dicht gefolgt von den Klassen 4, 8 und 16 mit 56 (hellgrau hervorgehoben). Klasse 4 erzielte in den Subtests Arithmetik (SA4T) und Sachrechnen (SS4T) sowie im Testgesamtwert (TG4T) den höchsten durchschnittlichen T-Wert. Klasse 3 schnitt in den Subtests Arithmetik (SA4T) und Sachrechnen (SS4T) sowie im Testgesamtwert (TG4T) am schlechtesten ab, Klasse 15 im Subtest Geometrie (SG4T). Es ist festzuhalten, dass Klasse 4 durchschnittlich die höchsten T-Werte erzielte und Klasse 3 die niedrigsten.

Betrachtet man sich die jeweiligen T-Werte im Vergleich zu den zu Beginn des vierten Schuljahres erzielten Werten (Tab. 23), so fällt auf, dass Klasse 3 zu beiden Interventionszeitpunkten die durchschnittlich niedrigsten T-Werte erbrachte. Bezüglich des Subtests Geometrie verweisen die durchschnittlichen T-Werte auf einen Aufwärtstrend der geometrischen Leistungsfähigkeit in den Klassen mit den Nummern 4, 7, 8, 12 und 16, und auf einen Abwärtstrend in den Klassen mit den Nummern 1, 3, 5, 6, 9, 11, 13, 15, 18 und 19.

Tabelle 23: T-Werte der Klassen (Anfang und Ende viertes Schuljahr)

Kl.	SA3T	SS3T	SG3T	TG3T	SA4T	SS4T	SG4T	TG4T
1	60	55	58	61	52	53	54	53
3	48	47	54	49	41	45	53	43
4	51	50	53	52	60	58	56	60
5	55	50	52	54	48	51	50	50
6	54	53	54	55	53	52	51	52
7	61	57	49	59	56	56	52	57
8	58	54	53	57	54	53	56	56
9	54	54	53	54	49	51	51	50
11	58	55	52	58	51	55	51	53
12	53	55	52	54	51	53	58	54
13	55	50	51	53	50	49	50	49
14	57	53	55	57	48	49	55	50
15	57	58	54	59	57	55	49	56
16	57	54	50	56	57	52	56	57
18	51	47	52	50	51	51	50	51
19	55	58	54	57	54	53	53	54

Um die Mittelwerte der Subtests und des Testgesamtwertes von Anfang und Ende des vierten Schuljahres miteinander zu vergleichen und die Unterschiede auf Signifikanz zu testen, wurde erneut der *t*-Test für abhängige Stichproben durchgeführt. Dieser zeigte, dass für den geometrischen Bereich die Differenzen der gepaarten Mittelwerte der Klassen 12 und 15 signifikant ($p < .05$) waren. Klasse 12 zeigte eine deutliche Verbesserung der geometrischen Leistungen (t (12) = -3.3418, p = 0.005868, mean of the differences = -6.230769) und Klasse 15 einen deutlichen Abfall der Leistungen (t (16) = 2.2999, p = 0.03525, mean of the differences = 4.882353) innerhalb des Schuljahres.

Für den Testgesamtwert zeigten Klasse 1, Klasse 3, Klasse 5, Klasse 6, Klasse 9, Klasse 11, Klasse 13, Klasse 14 und Klasse 19 eine signifikante negative Leistungsentwicklung (Anhang P).

Eine signifikante positive Entwicklung bezüglich des Testgesamtwertes wies die Klasse 4 auf (t (16) = -5.3097, p = 7.047e-05, mean of the differences = -8.470588). Auch bezüglich der Subtests zum Sachrechnen (t (16) = -2.7216, p = 0.01509, mean of the differences = -8.117647) und zur Arithmetik (t (16) = -5.3917, p = 5.993e-05, mean of the differences = -8.588235) verbesserten sich die Leistungen der Klasse 4 signifikant.

Für den Subtest Arithmetik verschlechterten sich die Leistungen innerhalb Klasse 1, Klasse 3, Klasse 5, Klasse 7, Klasse 8, Klasse 11, Klasse 13 und Klasse 14 signifikant (Anhang P).

Bezüglich der weiteren Testbereiche und Klassen waren die Differenzen der gepaarten Messwerte nicht signifikant.

In Tabelle 24 sind die aus den Protokollen gewonnenen und in Kapitel 7.2 dargestellten quantitativen Aspekte nochmals aufgeführt. Die Klassen mit den Nummern 12, 18, 19 und 6 protokollierten eine hohe Minutenanzahl Geometrieunterricht (in Tab. 24 hervorgehoben). Den Protokollen dieser Klassen wurde ebenfalls eine hohe Anzahl an Aufgaben entnommen. Auch in den Protokollen der Klassen 7 und 8 waren verhältnismäßig viele Aufgaben enthalten (in Tab. 24 ebenfalls hervorgehoben). Vor allem die Klasse 12 hob sich unter Berücksichtigung der quantitativen Aspekte von der Gesamtstichprobe ab. Sehr wenig Geometrieunterricht wurde in Klasse 11 protokolliert.

Tabelle 24: Lehrkräfte Quantität

Klasse	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**18**	**19**
Minuten	350	860	420	300	1600	520	500	550	150	1720	300	300	350	350	1700	1700
Aufgaben	7	35	17	4	101	63	52	18	2	232	3	3	15	15	43	43

Betrachtet man sich diese Erkenntnisse im Zusammenhang mit den T-Werten (Tab. 23), so fällt auf, dass die Klassen 6 und 11 den gleichen durchschnittlichen T-Wert erzielten (51). Der durchschnittliche T-Wert von Klasse 18 lag sogar noch darunter (50).

Im Rahmen der klassenweisen Analyse wurde für den geometrischen Bereich bei Klasse 12 eine signifikante Verbesserung der Leistungen und bei Klasse 15 ein deutlicher Abfall der Leistungen ermittelt. Klasse 12 erzielte für den Subtest Geometrie am Ende des vierten Schuljahres den höchsten durchschnittlichen T-Wert, Klasse 15 den niedrigsten. Lehrkraft 12 protokollierte 1720 Minuten Geometrieunterricht und 232 geometrische Aufgaben, Lehrkraft 15 protokollierte 350 Minuten Geometrieunterricht und 15 Aufgaben.

8 Kognitive Anforderungen in geometrischen Aufgaben

Kapitel 8 widmet sich der Beantwortung der Fragestellungen 2 und 3. Mit den im Rahmen der Teilstudien I und II gewonnenen geometrischen Aufgaben (vgl. Kap. 7.1 und 7.2) wurde ein Rating durchgeführt, um die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung geometrischer Aufgaben zu den in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen zu überprüfen (Fragestellung 2, vgl. Kap. 5.2). Die Ergebnisse der Aufgabenratings werden in Kapitel 8.1 nacheinander dargestellt. Im Anschluss daran wurden die kognitiven Anforderungen ausgezählt (Kap. 8.2 und 8.3), um die Frage nach den in den Schulbüchern und im Unterricht des vierten Schuljahres enthaltenen Anforderungen der geometrischen Aufgaben zu beantworten (Fragestellung 3, vgl. Kap. 5.3).

8.1 Zuordnung geometrischer Aufgaben zu den Anforderungsbereiche

8.1.1 Schulbuchaufgaben

Wie bereits in Kapitel 7.1 erwähnt, wurden vor Beginn des Schuljahres 2011/2012 den zehn Schulbüchern 229 geometrische Aufgaben entnommen und den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen zugeordnet (Teilstudie I). Diese 229 Aufgaben wurden tabellarisch für das Rating angeordnet. Abbildung 61 zeigt dies exemplarisch für den inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 4. Anhang F enthält Auszüge aus den anderen drei IKB.

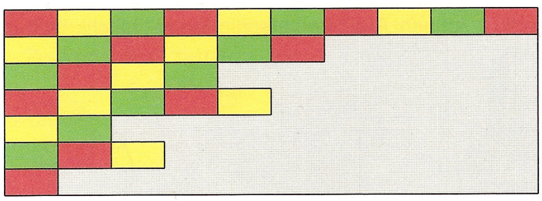
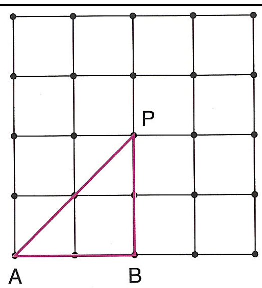
Raum und Form: Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen (IKB 4)	
Aufgabenstellung	**Zuordnung zu Anforderungsbereich**
Wie viele rote, gelbe und grüne Platten fehlen noch, um das große Rechteck auszulegen? Wie viele Platten sind es insgesamt?  (Leininger et al., 2005, S. 96)	1
Der Klassenraum der Klasse 4a ist 10 m lang und 6 m breit. Er ist mit quadratischen Bodenplatten ausgelegt. Diese sind 1 m lang und 1 m breit. a) Wie viele Platten liegen dort? Wie viele Meterquadrate sind es? (Gierlinger, 2009, S. 92)	2
Zeichne verschiedene Dreiecke mit der Seite AB. Verändere dazu die Lage des Punktes P. Wie verändert sich der Flächeninhalt der Dreiecke, wenn P nach links (nach rechts, nach oben, nach unten) bewegt wird?  (Lorenz, 2005, S.55)	3

Abbildung 61: Schulbuchaufgaben - Auszug aus dem Rating der Aufgaben des IKB 4

Das Rating ergab die übereinstimmende Zuordnung zu den drei Anforderungsbereichen von 206 der insgesamt 229 geometrischen Aufgaben durch zwei Rater. Daraus errechnete sich eine prozentuale Übereinstimmung von 90%. Die prozentuale Übereinstimmung ist als Übereinstimmungsmaß jedoch nur beschränkt aussagekräftig, da sie nicht angibt, inwiefern die berechnete Übereinstimmung größer als eine im Falle des Zufalls erwartete Übereinstimmung ist. Deshalb wurde zusätzlich Cohens Kappa als zufallsbereinigter Koeffizient berechnet, der angibt, in welchem Ausmaß die tatsächlich beobachtete Übereinstimmung positiv von der Zufallserwartung differiert (Wirtz & Caspar, 2002). Nach Wirtz und Caspar (2002, S. 59) zeigt ein Kappa > .75 eine sehr gute und ein Kappa zwischen .60 und .75 eine gute Übereinstimmung an.

Die 229 Schulbuchaufgaben verteilten sich wie in Tabelle 25 ersichtlich auf die Übereinstimmungsmatrix. Wie zu erkennen ist, betrafen die 23 Aufgaben, die unterschiedlich zugeordnet wurden, die Anforderungsbereiche I und II (12 Aufgaben) gleichermaßen wie die Anforderungsbereiche II und III (11 Aufgaben).

Tabelle 25: Übereinstimmungsmatrix Schulbuchaufgaben

		Rater 1			
		AB I	AB II	AB III	**Total**
Rater 2	AB I	48	9	0	**57**
	AB II	3	138	3	**144**
	AB III	0	8	20	**28**
					229

GraphPad stellt online eine auf Fleiss, Levin und Paik (2003) basierende Software zur Berechnung von Cohens Kappa zur Verfügung. Aus den Daten der Tabelle errechnete sich ein Kappa von .802, womit die Stärke der Übereinstimmung als sehr gut galt. Es wurde dabei das Konfidenzniveau von 95% verwendet, bei dem ein Konfidenzintervall von .725 bis .879 berechnet werden konnte.

Bei der separaten Betrachtung der Übereinstimmungsmatrizen (Anhang G) für die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche (IKB) zeigte sich bei den Bereichen 2, 3 und 4 eine sehr gute beziehungsweise gute Übereinstimmungsstärke, nicht aber beim Bereich 1 (Tab. 26).

Tabelle 26: Übereinstimmungsstärken Schulbuchaufgaben - IKB 1-4 separat

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche	**Cohens Kappa**	**Stärke der Übereinstimmung**	**Konfidenzintervall (Niveau: 95%)**
IKB 1	.53	mäßig (moderate)	.064 - .996
IKB 2	.705	gut (good)	.571 - .840
IKB 3	.946	sehr gut (very good)	.843 - 1.000
IKB 4	.873	sehr gut (very good)	.753 - .993

Tabelle 27 zeigt die Übereinstimmungsmatrix zu IKB 1 (sich im Raum orientieren).

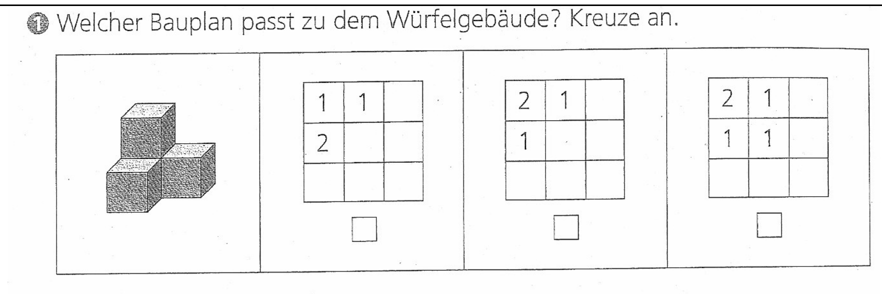
Tabelle 27: Übereinstimmungsmatrix Schulbuchaufgaben - IKB 1

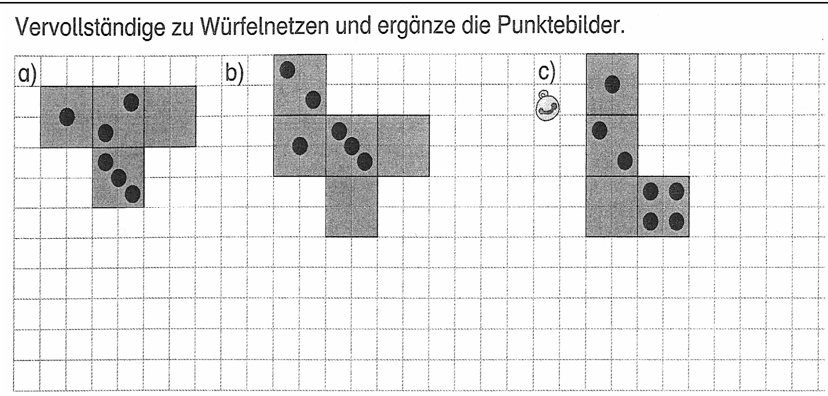
		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	0	0	0
	AB II	0	34	2
	AB III	0	1	2

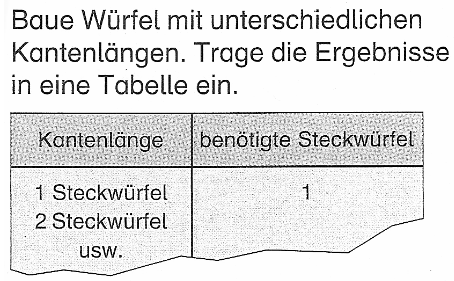
Wie zu erkennen ist, wurde von den insgesamt 39 Aufgaben von beiden Ratern keine einzige Aufgabe dem Anforderungsbereich I zugeordnet, womit die nur mäßige Übereinstimmung erklärt werden könnte: Durch diese bei Null liegende Randsumme erhöhte sich die zufällige Übereinstimmungswahrscheinlichkeit und Kappa wurde geringer. Angenommen, dass wenigstens eine Aufgabe zu Anforderungsbereich I gefunden beziehungsweise übereinstimmend zugeordnet worden wäre, sodass die Null in dieser Zelle durch eine Eins ausgetauscht werden würde bei Konstanz der Werte in den übrigen Zellen, so würde sich ein Kappa von .633 errechnen und die Übereinstimmung somit als gut (good) gelten (vgl. dazu auch Wiese, 2016).

8.1.2 Unterrichtsaufgaben

Auch die 653 am Ende des Schuljahres 2011/2012 den Unterrichtsprotokollen entnommenen geometrischen Aufgaben (vgl. Kap. 7.2) wurden den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen zugeordnet (Teilstudie II) und tabellarisch für das Rating angeordnet. Abbildung 62 zeigt dies exemplarisch für den inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 1. Anhang K enthält Auszüge aus den anderen drei IKB.

<table>
<tr><th colspan="2">Raum und Form: sich im Raum orientieren (IKB 1)</th></tr>
<tr><th>Aufgabenstellung</th><th>Zuordnung zu Anforderungsbereich</th></tr>
<tr><td>

(Lehrkraft 7)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>

(Lehrkraft 12)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>

(Lehrkraft 7)</td><td>3</td></tr>
</table>

Abbildung 62: Protokollaufgaben - Auszug aus dem Rating der Aufgaben des IKB 1

Bei der Zuordnung der 653 den Unterrichtsprotokollen entnommenen geometrischen Aufgaben (Teilstudie II) nach Eingang aller Protokolle ergab sich eine prozentuale Übereinstimmung von 92% und insgesamt die in Tabelle 28 aufgezeigte Verteilung auf die Übereinstimmungsmatrix.

Tabelle 28: Übereinstimmungsmatrix Protokollaufgaben

		Rater 1			
		AB I	AB II	AB III	**Total**
Rater 2	AB I	325	29	0	**354**
	AB II	22	253	1	**276**
	AB III	0	2	21	**23**
					653

Mit Hilfe dieser Daten und der durch GraphPad zur Verfügung gestellten Software zur Berechnung von Cohens Kappa errechnete sich ein Kappa von .843, womit die Stärke der Übereinstimmung ebenfalls als sehr gut galt. Es wurde dabei das Konfidenzniveau von 95% verwendet, bei dem ein Konfidenzintervall von .803 bis .883 berechnet werden konnte.

Bei der separaten Betrachtung der Übereinstimmungsmatrizen (Anhang L) für die vier inhaltlichen Kompetenzbereiche zeigte sich bei den Bereichen 1 und 4 eine sehr gute Übereinstimmungsstärke und bei den Bereichen 2 und 3 eine gute (Tab. 29) (vgl. dazu auch Wiese, 2016).

Tabelle 29: Übereinstimmungsstärken Protokollaufgaben - IKB 1-4 separat

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche	**Cohens Kappa**	**Stärke der Übereinstimmung**	**Konfidenzintervall (Niveau: 95%)**
IKB 1	.926	sehr gut (very good)	.862 - .990
IKB 2	.721	gut (good)	.623 - .819
IKB 3	.800	gut (good)	.707 - .892
IKB 4	.838	sehr gut (very good)	.713 - .963

Nachdem die geometrischen Aufgaben übereinstimmend den drei Anforderungsbereichen zugeordnet werden konnten, wurde deren Verteilung auf die drei Anforderungsbereiche sowohl allgemein als auch inhaltsspezifisch analysiert. Im weiteren Verlauf des 8. Kapitels wird der Anteil der kognitiven Anforderungen in den geometrischen Aufgaben der Schulbücher und des Unterrichts im vierten Schuljahr dargestellt (Fragestellung 3).

8.2 Kognitive Anforderungen in den Schulbuchaufgaben

Bezüglich der Verteilung der geometrischen Aufgaben auf die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche (7.1) wurde festgestellt, dass die Aufgaben zu IKB 2 (geometrische Figuren) mit 44% den größten Anteil ausmachten. Um die Annahme, dass in Jahrgangsstufe vier dem Anforderungsbereich II zuzuordnende Aufgaben dominieren müssten (Fragestellung 3, vgl. Kap. 5.3), überprüfen zu können, wurde die Verteilung auf die drei Anforderungsbereiche ermittelt, die sich aus dem Rating der 229 Aufgaben aus den zehn Lehrwerken und der abschließenden Diskussion zwischen den beiden Ratern (Teilstudie I) ergab und sich insgesamt wie in Abbildung 63 ersichtlich darstellte.

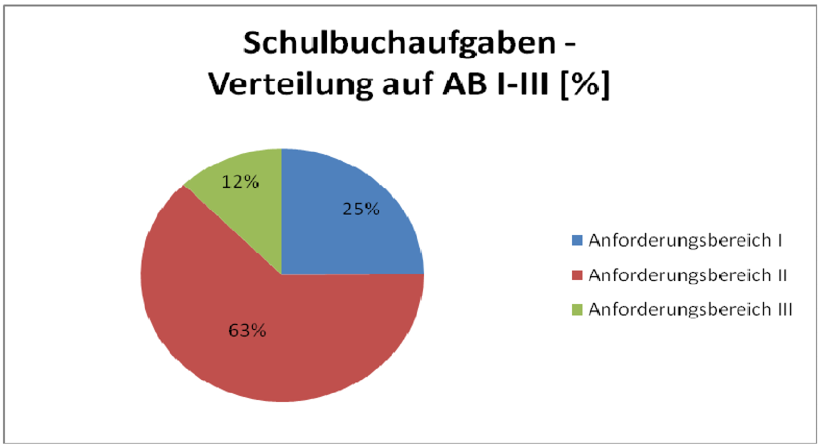


Abbildung 63: Schulbuchaufgaben - Verteilung auf AB I-III [%].

In den Schulbüchern waren über alle vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche hinweg zu 63% Aufgaben des Anforderungsbereichs II (Zusammenhänge herstellen) zu finden. Aufgaben, die sich auf das Reproduzieren von Fakten beziehen (Anforderungsbereich I), machten etwa 25% der entnommenen geometrischen Aufgaben aus. Somit ergab sich ein Anteil von 12% an Aufgaben, die Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) zugeordnet werden konnten (vgl. dazu auch Wiese, 2016).

Aufgeschlüsselt auf die einzelnen inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche (IKB 1 - IKB 4) ergab sich folgende Verteilung der geometrischen Aufgaben auf die Anforderungsbereiche. Tabelle 30 zeigt die Aufgabenanzahlen auf.

Tabelle 30: Schulbuchaufgaben - Verteilung AB I-III inhaltsspezifisch

	AB I	**AB II**	**AB III**	**total**
IKB 1	0	36	3	**39**
IKB 2	39	57	5	**101**
IKB 3	9	17	5	**31**
IKB 4	9	34	15	**58**
total	**57**	**144**	**28**	**229**

Auffällig war, dass zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 1 (sich im Raum orientieren) keine Aufgabe gefunden wurde, die Anforderungsbereich I zugeordnet werden konnte und zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 4 (Flächen- und Rauminhalte) alleine 15 der insgesamt 28 Aufgaben des Anforderungsbereichs III (in Tab. 30 hervorgehoben).

Zusätzlich zu diesen sich aus der Betrachtung der absoluten Aufgabenanzahlen ergebenden offensichtlichen Erkenntnisse wurde mit Hilfe des Chi-Quadrat-Tests analysiert, inwieweit sich die beobachteten Häufigkeiten innerhalb der Zellen signifikant von denen unterscheiden, die man unter Annahme der Gültigkeit der Nullhypothese erwarten würde (Tab. 31), um einen Vergleich mit der Verteilung der Protokollaufgaben vorzunehmen. Mit dem Statistikprogramm R wurde χ^2 (6, N = 229) = 40.37, p = 3.855e-07 berechnet. Eine Inspektion der Residuen wies auf einen vergleichsweise hohen Beitrag der grau hinterlegten Bereiche zum Chi-Quadrat hin. Für die anderen Bereiche war der Beitrag zu vernachlässigen.

Tabelle 31: Schulbuchaufgaben - Inspektion der Residuen

	AB I	AB II	AB III
IKB 1	9,71	5,37	0,66
IKB 2	7,64	0,67	4,37
IKB 3	0,21	0,32	0,39
IKB 4	2,05	0,17	8,82

Die Interpretation dieser Erkenntnisse erfolgt in Kapitel 10.1 unter Verwendung der sich aus den Aufgabenanzahlen errechnenden prozentualen Verhältnisse innerhalb der einzelnen inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche.

8.3 Kognitive Anforderungen in den Unterrichtsaufgaben

Die 653 geometrischen Aufgaben aus den Unterrichtsprotokollen (Teilstudie II) wurden ebenfalls durch zwei unabhängig voneinander beurteilende Rater den Anforderungsbereichen übereinstimmend zugeordnet, woraus sich die in Abbildung 64 dargestellte Verteilung auf die Anforderungsbereiche ergab.

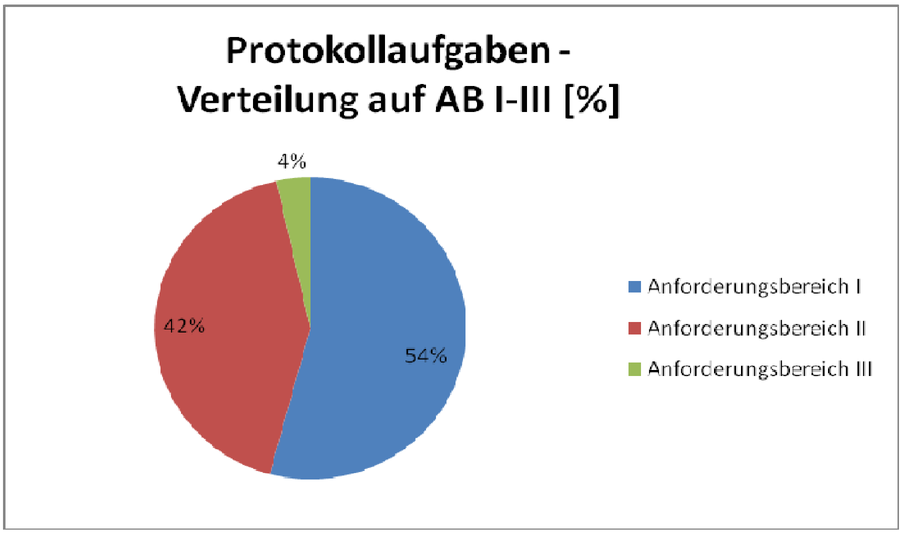


Abbildung 64: Protokollaufgaben - Verteilung auf AB I-III [%].

Deskriptiv betrachtet wurden von den an der Untersuchung teilnehmenden Lehrkräften insgesamt zu 54% Aufgaben zu Anforderungsbereich I (Reproduzieren) und zu 42% Aufgaben zu Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen) gestellt. Damit lag der Anteil an Aufgaben mit Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) bei 4% (vgl. dazu auch Wiese, 2016). Für die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche ergaben sich die in Tabelle 32 aufgezeigten Aufgabenanzahlen.

Tabelle 32: Protokollaufgaben - Verteilung AB I-III inhaltsspezifisch

	AB I	AB II	AB III	Aufgaben insg.
IKB 1	28	94	15	137
IKB 2	224	57	3	284
IKB 3	75	77	3	155
IKB 4	27	48	2	77
	354	276	23	653

Auffällig war, dass von den insgesamt 23 Aufgaben des Anforderungsbereichs III allein 15 im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 1 (sich im Raum orientieren) zu finden waren und von den insgesamt 354 Aufgaben mit Anforderungsbereich I alleine 224 im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 2 (geometrische Figuren) gestellt wurden (in Tab. 32 hervorgehoben).

Um auch an dieser Stelle den Unterschied zwischen der erwarteten Verteilung der Aufgaben auf die drei Anforderungsbereiche zur empirischen Verteilung ermitteln zu können, wurde erneut der Chi-Quadrat-Test durchgeführt. Aufgeschlüsselt auf die einzelnen inhaltlichen Bereiche eins bis vier ergab sich die in Tabelle 33 aufgezeigte Verteilung der Anforderungsbereiche. Basierend auf den Berechnungen des Statistikprogramms R wurde ein hoch signifikantes χ^2 (6, N = 653) = 159.47, $p <$ 2.2e-16 berechnet. Eine Inspektion der Residuen wies vor allem auf einen deutlichen Beitrag der Bereiche 1 und 2 (in Tab. 33 hervorgehoben) zum Chi-Quadrat hin.

Tabelle 33: Protokollaufgaben - Inspektion der Residuen

	AB I	**AB II**	**AB III**
IKB 1	28.83	22.50	21.45
IKB 2	31.86	33.10	4.90
IKB 3	0.97	2.01	1.11
IKB 4	5.21	7.34	0.19

Auch diese Erkenntnisse werden in Kapitel 10.1 unter Verwendung der sich aus den Aufgabenanzahlen errechnenden prozentualen Verhältnisse innerhalb der inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche 1 und 2 interpretiert.

9 Kognitive Anforderungen und Lösungshäufigkeiten

Um zu untersuchen, inwiefern die Anforderungsbereiche für eine Beschreibung der Aufgabenschwierigkeit geeignet sind (Fragestellung 4, vgl. Kap. 5.4), bearbeiteten 270 rheinland-pfälzische Schülerinnen und Schüler am Ende des vierten Schuljahres 24 geometrische Aufgaben zu den drei Anforderungsbereichen (Teilstudie III, vgl. Kap. 6.4 und Anhang R). Wie bereits in Kapitel 6.1 erwähnt, wurde die Schwierigkeit der Aufgaben dabei durch den prozentualen Anteil der richtigen Aufgabenbearbeitungen an der Gesamtstichprobe empirisch bestimmt. In Kapitel 9.1 werden die Lösungshäufigkeiten zusammen mit verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten und Bearbeitungen einzelner Aufgaben dargestellt. Anhand der Lösungshäufigkeiten wurde ebenfalls untersucht, inwiefern die Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit von Leistungsfähigkeit und Geschlecht die Aufgaben mit den verschiedenen kognitiven Anforderungen bearbeiteten (Fragestellung 5, vgl. Kap. 5.5). Dazu wurden die durch den DEMAT gewonnenen Aussagen zu den Geometrieleistungen der Schülerinnen und Schüler (vgl. Kap. 7.3) einbezogen. Die Erkenntnisse werden in den Kapiteln 9.2 und 9.3 geschildert. Abschließend werden Zusammenhänge zwischen den Geometrieleistungen (Subtest Geometrie DEMAT 4), den Aufgabenbearbeitungen (Teilstudie III) und der Qualität des Geometrieunterrichts (Fragestellung 6, vgl. Kap. 5.6) betrachtet (Kap. 9.4).

9.1 Zusammenhänge mit der Aufgabenschwierigkeit

9.1.1 Interpretationsmöglichkeiten

270 rheinland-pfälzische Schülerinnen und Schülern bearbeiteten am Ende des vierten Schuljahres die insgesamt 24 den Schulbüchern entnommenen geometrischen Aufgaben mit dichotomen Antwortformaten (Teilstudie III, vgl. Kap. 6.4 und Anhang R). In Anhang T sind exemplarisch einige Aufgabenbearbeitungen zu sechs der 24 geometrischen Aufgaben abgebildet. Die Aufgaben wiesen eine gute beziehungsweise exzellente Reliabilität auf und korrelierten hoch miteinander (Abb. 65).

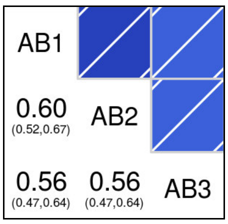


Abbildung 65: Korrelationsmatrix AB I-III.

Die Lösungshäufigkeiten können mittels verschiedener Ansätze interpretiert werden. Betrachtet man zunächst alle Aufgaben zu dem jeweiligen Anforderungsbereich insgesamt (Tab. 34), so zeigt sich, dass von den 270 Schülerinnen und Schülern die geometrischen Aufgaben des AB III (Verallgemeinern und Reflektieren) durchschnittlich nur zu 25% erfolgreich bearbeitet werden konnten, die geometrischen Aufgaben des AB I (Reproduzieren) und II (Zusammenhänge herstellen) allerdings zu 54% (AB I) beziehungsweise 51% (AB II). Demnach kann festgehalten werden, dass Aufgaben, die Anforderungsbereich III zugeordnet wurden, tendenziell seltener gelöst wurden als Aufgaben, die den Anforderungsbereichen I und II zugeordnet wurden. Zwischen den Anforderungsbereichen I und II konnte eine solche Feststellung nicht getroffen werden.

Fasst man die Lösungshäufigkeiten der 24 geometrischen Aufgaben nach den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen zusammen, so ergaben sich die in Tabelle 34 dargestellten zwölf Lösungshäufigkeiten.

Tabelle 34: Lösungshäufigkeiten [%] - IKB 1-4

	AB I	AB II	AB III	total
IKB 1	60	56	1	39
IKB 2	57	38	21	38
IKB 3	62	67	38	56
IKB 4	37	44	42	41
total	54	51	25	

Vor allem die Lösungshäufigkeit in IKB 1 zum Anforderungsbereich III (in Tab. 34 hervorgehoben) wich dabei von den anderen Lösungshäufigkeiten ab. Die Berechnung der Lösungshäufigkeiten für die inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche 2, 3 und 4 unter Ausschluss von IKB 1 ergab geringfügige Veränderungen: Die Aufgaben zu Anforderungsbereich I der IKB 2, 3 und 4 wurden zu 52% und die zu Anforderungsbereich II zu 50% gelöst. Die Lösungshäufigkeit der Aufgaben zu Anforderungsbereich III stieg auf 33%. Dennoch blieb die soeben formulierte Feststellung, dass Aufgaben zu Anforderungsbereich III tendenziell seltener gelöst wurden, zutreffend.

Eine Möglichkeit zur Interpretation der Lösungshäufigkeiten bot sich in Adaption an das Vorgehen mit den durch das IQB entwickelten VERA-Testmaterialien, die eine Zusammenstellung von Aufgaben enthielten, in der alle Aufgaben eines Tests eine durchschnittliche Lösungshäufigkeit von 50% bis 60% ergaben. Dabei wurden Aufgaben mit einer niedrigen Lösungshäufigkeit den oberen Kompetenzstufen und Aufgaben mit einer hohen Lösungshäufigkeit den unteren Kompetenzstufen zugeordnet (IQB).

Tabelle 35 zeigt die Lösungshäufigkeiten der einzelnen geometrischen Aufgaben auf. Für alle Aufgaben insgesamt ergab sich eine durchschnittliche Lösungshäufigkeit von 43%. Demnach wären alle Aufgaben, die von mehr als 43% gelöst wurden, leichtere Aufgaben (in Tab. 35 hervorgehoben). Von den Anforderungsbereich I zugeordneten acht Aufgaben wären dies somit fünf Aufgaben, in Anforderungsbereich II wären es vier Aufgaben, in Anforderungsbereich III lediglich eine. Anhand dieser Betrachtungsweise kann die Feststellung, dass Aufgaben zu Anforderungsbereich III tendenziell schwieriger zu sein scheinen, weiter untermauert werden. Bezüglich der Anforderungsbereiche I und II konnte wiederum keine Aussage getroffen werden.

Tabelle 35: Lösungshäufigkeiten [%] - Kriterium durchschnittliche Lösungshäufigkeit

	Code	AB I	AB II	AB III
IKB 1	a-1	90	40	1
	b-1	30	72	0
IKB 2	a-2	32	41	14
	b-2	81	35	27
IKB 3	a-3	63	56	43
	b-3	61	77	33
IKB 4	a-4	50	54	50
	b-4	23	34	33
total		54	51	25

Da die Leistungen der Schülerinnen und Schüler der vorliegenden Stichprobe im Subtest Geometrie am Ende des vierten Schuljahres, wie anhand des Histogramms (Abb. 66) und des Q-Q Plots (Anhang Q) ersichtlich, näherungsweise normal verteilt sind, konnten Aussagen zur empirischen Schwierigkeit der Aufgaben durch die Standardabweichung vom Mittelwert getroffen werden.

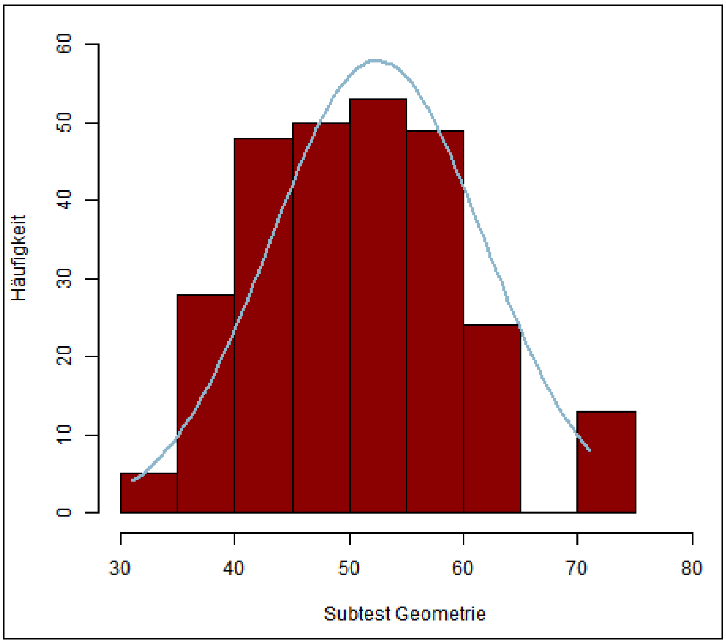


Abbildung 66: DEMAT 4 Subtest Geometrie - Histogramm.

Dabei wurden die Grenzen ober- und unterhalb einer Standardabweichung vom Mittelwert gesetzt, wonach Aufgaben, die von weniger als 15,86% der Schülerinnen und Schüler gelöst wurden, als „Aufgaben mit hohem empirischen Schwierigkeitsgrad" gelten sollen (Abb. 67). Im Umkehrschluss wären alle Aufgaben, die von mehr als 15,86% der Schülerinnen und Schüler gelöst wurden, „Aufgaben mit geringem empirischen Schwierigkeitsgrad".

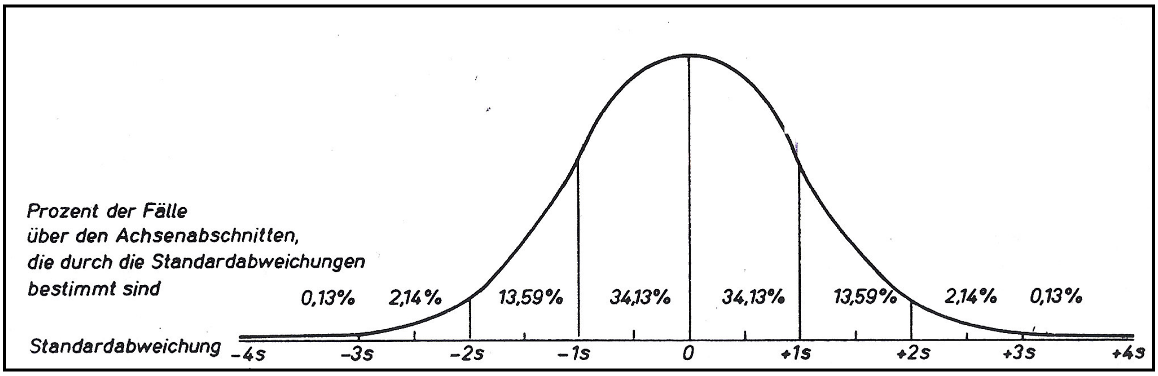


Abbildung 67: Standardabweichung (Ingenkamp, 2008, S. 48).

Nach diesem Kriterium wären drei der Aufgaben, die Anforderungsbereich III zugeordnet wurden, Aufgaben mit hohem empirischen Schwierigkeitsgrad (in Tab. 36 hervorgehoben). Die 21 übrigen Aufgaben wären Aufgaben mit einem geringen empirischen Schwierigkeitsgrad, wodurch die bereits festgestellte Tendenz wiederum erkennbar wäre.

Tabelle 36: Lösungshäufigkeiten [%] - Kriterium Standardabweichung

	Code	AB I	AB II	AB III
IKB 1	a-1	90	40	1
	b-1	30	72	0
IKB 2	a-2	32	41	14
	b-2	81	35	27
IKB 3	a-3	63	56	43
	b-3	61	77	33
IKB 4	a-4	50	54	50
	b-4	23	34	33

Aus den in Tabelle 35 und 36 dargestellten Lösungshäufigkeiten zu den jeweiligen Aufgaben wird jedoch gleichfalls ersichtlich, dass die Aufgaben innerhalb eines Anforderungsbereichs von unterschiedlich vielen Schülerinnen und Schülern gelöst wurden und somit innerhalb eines Anforderungsbereichs unterschiedlich schwer zu sein schienen. Aufgaben, die dem Anforderungsbereich I zugeordnet wurden, waren demzufolge nicht automatisch Aufgaben mit einem geringen empirischen Schwierigkeitsgrad (vgl. dazu auch Wiese, 2016).

9.1.2 Betrachtung einzelner Aufgaben

In Kapitel 3.4 wurden neben der Komplexität des Modellierungsprozesses die Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten, die Anzahl der Arbeitsschritte, die curriculare Wissensstufe, die Komplexität der Aufgabenstellung und viele weitere Merkmale als relevant für die Schwierigkeit von Aufgaben genannt. Vor dem Hintergrund dieser schwierigkeitsbestimmenden Aufgabenmerkmale erfolgt nun die Betrachtung einzelner Aufgaben und deren empirisch bestimmter Schwierigkeit. An dieser Stelle ist unbedingt vorweg zu nehmen, dass aufgrund des großen Interpretationsspielraums keine eindeutigen Schlussfolgerungen abgeleitet werden können (Kap. 10).

Nach dem auf der Standardabweichung basierenden Kriterium wurden drei der im Rahmen der Untersuchung gestellten und Anforderungsbereich III zugeordneten geometrischen Aufgaben aufgrund ihrer geringen Lösungshäufigkeiten als „Aufgaben mit hohem empirischen Schwierigkeitsgrad“ identifiziert (siehe Tab. 36: AB3a-1, AB3b-1, AB3a-2).

Bei Aufgabe AB3a-1 (Abb. 68) musste zunächst die Anzahl der Würfel in der abgebildeten Schachtel ermittelt werden (150 Würfel), was bereits 243 Schülerinnen und Schüler nicht gelang. Acht Schülerinnen und Schüler gaben diese 150 Würfel als Lösung an und bearbeiteten die Aufgaben nicht weiter. In einem weiteren Schritt mussten die Schülerinnen und Schüler berechnen, dass sich das Volumen der neuen Schachtel durch Verdopplung aller Kanten nicht nur verdoppelt oder vervierfacht, sondern verachtfacht (1200 Würfel). Elf Schülerinnen und Schüler vermerkten 300 Würfel als Lösung, fünf Schülerinnen und Schüler 600. Nur drei Schülerinnen und Schüler bearbeiteten die Aufgabe schließlich erfolgreich.

Tom baut eine Schachtel, bei der alle Kanten doppelt so lang sind wie bei Schachtel B.
Wie viele Würfel passen hinein?

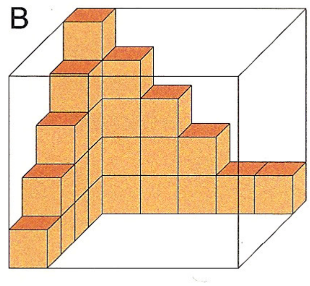
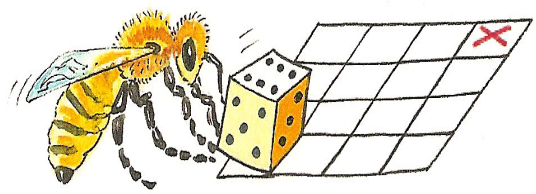


Abbildung 68: Aufgabe AB3a-1 (Lorenz, 2005, S. 60).

Die in Abbildung 69 aufgezeigte Aufgabe AB3b-1 wurde nur von einem Schüler gelöst.

Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann der Würfel zum angekreuzten Feld kommen, wenn er nur nach rechts und nach hinten gekippt wird?



Antwort:
Der Würfel kann auf ___ verschiedenen Wegen zum angekreuzten Feld kommen.

Abbildung 69: Aufgabe AB3b-1 (Lorenz, 2005, S. 71).

Von zwei Lehrkräften kam die Rückmeldung, dass die Schülerinnen und Schüler versuchten, diese Aufgabe aus der Sicht der Biene zu lösen. Da das nicht funktionierte, versuchten die Schülerinnen und Schüler, aus ihrer eigenen Sicht zu antworten. Gefordert wird die Fähigkeit, sich die vorgeschriebene Bewegung (Kippen nach rechts und nach hinten) des dargestellten starren Objekts (Würfel) nicht nur vorzustellen, sondern zusätzlich die Anzahl der Möglichkeiten zu erfassen. Viele Schülerinnen und Schüler zeichneten mögliche Wege mit Stiften nach, was sehr schnell unübersichtlich wurde. So kam eine Vielzahl an Lösungen zustande (Abb. 70).

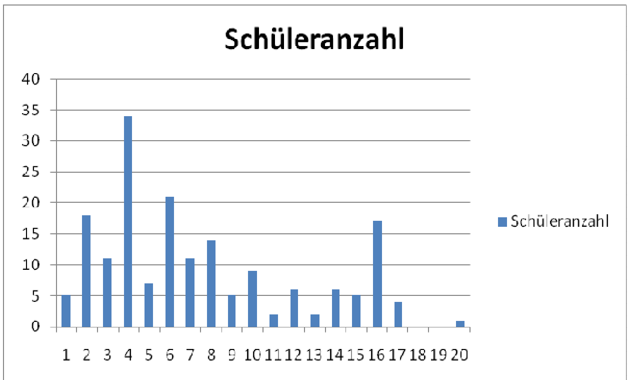


Abbildung 70: Schülerlösungen bei Aufgabe AB3b-1.

84 Schülerinnen und Schüler bearbeiteten die Aufgabe nicht, die Lösungen von 178 Schülerinnen und Schülern verteilten sich wie abgebildet auf die Zahlen 1 bis 20 (Abb. 70). Auffällig ist dabei die Anzahl an Schülerinnen und Schülern, die 4 als Lösung angaben. Weitere acht Schülerinnen und Schüler machten Angaben wie „6 und mehr", „unendlich", „mehr als 20" oder „mindestens 14". Ebenfalls als Lösung genannt wurde die 30, die 37 und zweimal die 40.

Bei der dritten Aufgabe (AB3a-2), die ausgehend von dem an der Standardabweichung festgelegten Kriterium mit einer Lösungshäufigkeit von 14% im Grenzbereich liegt, sollten die Schülerinnen und Schüler mit den Eigenschaften der Figuren begründen, ob jedes Viereck (a) und jedes Rechteck (b) ein Parallelogramm ist (Lorenz, 2005, S. 25). Das Zeigen eines Gegenbeispiels wurde als Möglichkeit zur Begründung vorgeschlagen. Die Schülerinnen und Schüler mussten zunächst die geometrischen Begriffe (Viereck, Rechteck, Parallelogramm) kennen, um dann die Aussagen verifizieren beziehungsweise falsifizieren zu können. Dann mussten sie ihre Aussage mit den Eigenschaften der Figuren begründen.

Nach der an VERA orientierten Interpretationsmöglichkeit wurde die Schwierigkeit der Aufgaben anhand der durchschnittlich im gesamten Test erzielten Lösungshäufigkeit von 43% bestimmt, wonach drei Anforderungsbereich I (Reproduzieren) zugeordnete Aufgaben (AB1b-1, AB1a-2, AB1b-4) schwieriger wären, da sie von weniger als 43% der Schülerinnen und Schüler gelöst wurden.

Aufgabe AB1b-1 (Abb. 71) wurde aufgrund der vorgenommenen Veränderungen bereits in Kapitel 6.4 vorgestellt. Dass sie nur von 30% der Schülerinnen und Schüler korrekt gelöst werden konnte, könnte mit der mangelhaften Qualität der Aufgabendarstellung, dem hohen Textanteil oder dem fehlenden Bezug zur Umwelt erklärt werden.

Harkan und Ole haben den Oldtimer im Technikmuseum von verschiedenen Seiten fotografiert. Schau dir an, wo Harkan und Ole stehen. Wer hat welches Foto gemacht?

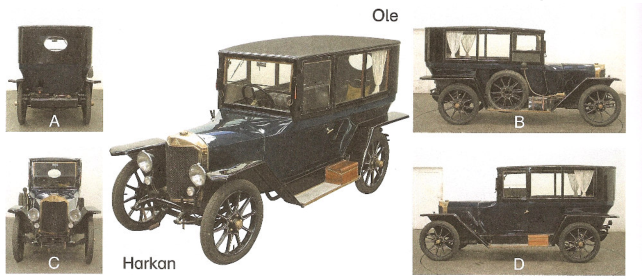


Abbildung 71: Aufgabe AB1b-1 (in Anlehnung an Fuchs & Käpnick, 2008, S. 66).

Die nachfolgende Aufgabe AB1a-2 (Abb. 72) wurde im Vergleich zu der original im Schulbuch zu findenden Aufgabe bereits hinsichtlich ihres Umfangs gekürzt (vgl. Kap. 6.4). Von den Schülerinnen und Schülern der vorliegenden Untersuchungsstichprobe wurde sie von 32% gelöst, wobei anzumerken ist, dass die Aufgabe bereits als „ausreichend beantwortet" eingestuft wurde, wenn mindestens die Spalten zu Gesamtzahl der Flächen sowie zur Anzahl der Ecken und Kanten zu den drei genannten Körpern richtig ausgefüllt wurden. Für den Kegel wurden als Anzahl der Ecken die Zahlen 1 und 0 akzeptiert, da die Unterscheidung zwischen Ecke als Berührungspunkt dreier verschiedener Flächen und Spitze oft erst in der weiterführenden Schule im Unterricht thematisiert wird.

Fülle die Tabelle aus:

	Form der Flächen	Gesamtzahl der Flächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Beispiel
Würfel					
Kegel					
Zylinder					

Abbildung 72: Aufgabe AB1a-2 (in Anlehnung an Fuchs & Käpnick, 2008, S. 64).

Obwohl es bei den Anforderungsbereich I zugeordneten Aufgaben um die Reproduktion von Grundwissen geht und der Umfang der Aufgabe bereits verringert wurde, wurden beim Ausfüllen der Tabelle sehr dichte Informationen abgefragt und es handelt sich bei den drei Körpern um relativ komplexe Objekte. Hinzu kommt, dass durch die Festlegung des Wertes „Null" für eine falsche Antwort beziehungsweise Nichtbearbeitung und des Wertes „Eins" für eine richtige beziehungsweise ausreichende Antwort auf den ersten Blick nicht ersichtlich ist, ob die Schülerinnen und Schüler, deren Antwort nicht ausreichend war, dennoch zumindest zu einem oder zwei der drei Körper die Spalten vollständig ausgefüllt hatten.

Die sich an diese Überlegungen anschließende differenzierte Betrachtung des Lösungsverhaltens zeigte, dass von den 184 Schülerinnen und Schülern, die bei dieser Aufgabe den Wert „Null" erhielten, 100 Schülerinnen und Schüler die Tabelle gar nicht, unvollständig oder fehlerhaft ausfüllten. Die 84 verbleibenden Schülerinnen und Schüler hatten jedoch mindestens zu einem der genannten Körper korrekte und vollständige Angaben gemacht. Die Gesamtzahl der Flächen sowie die Anzahl der Ecken und Kanten des Würfels bestimmten 43 Schülerinnen und Schüler, zum Kegel waren 49 richtige Lösungen zu finden und zum Zylinder 39. Daraus ergeben sich zusammen genommen mit den 32% der Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe vollständig und korrekt lösten, Lösungshäufigkeiten von 46% für den Zylinder, 48% für den Würfel und 50% für den Kegel. Somit kann festgehalten werden, dass geringfügig mehr Schülerinnen und Schüler die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten zum Kegel richtig angeben konnten als zum Würfel, und dass auch die Anzahl an richtigen Lösungen zum Zylinder kaum abweicht.

Die dritte Aufgabe, die von weniger als 43% der Schülerinnen und Schüler gelöst wurde, war die Aufgabe AB1b-4 zur Umfangsberechnung (Abb. 73). 63 Schülerinnen und Schüler (23%) lösten die Aufgabe korrekt, indem sie den Umfang entweder durch das Zählen der Kästchen oder durch das Messen mit Lineal bestimmten. Berücksichtigt man die 20 Schülerinnen und Schüler, deren Lösung um 0,5 cm beziehungsweise ein Kästchen von der korrekten Lösung abwich, so würde die Anzahl der richtigen Lösungen 31% betragen. Die Lösung weiterer 25 Schülerinnen und Schüler differierte um 1 cm beziehungsweise zwei Kästchen, wodurch sich die Lösungshäufigkeit auf 40% erhöhen würde.

Wie groß ist der Umfang dieser Fläche?

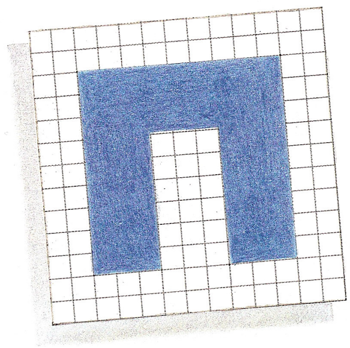
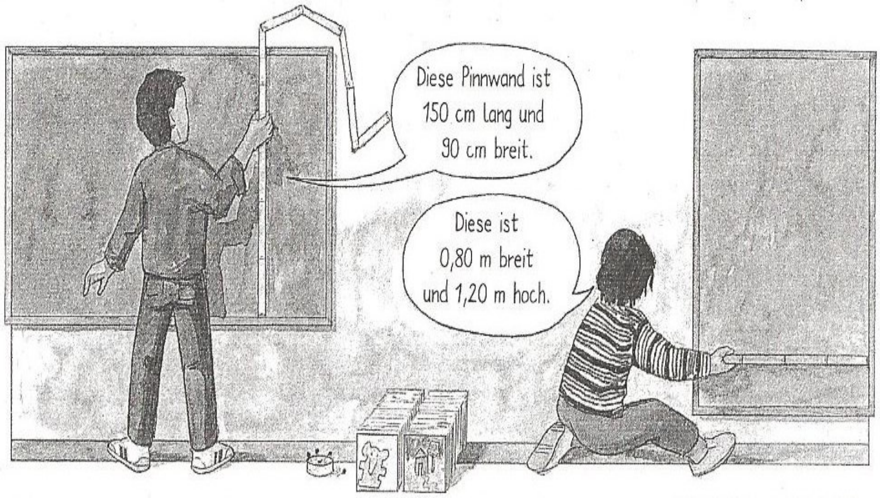


Abbildung 73: Aufgabe AB1b-4 (Schütte, 2006, S. 71).

Davon ausgehend, dass die Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) zugeordneten Aufgaben schwieriger seien, also nach der von VERA adaptieren Interpretationsmöglichkeit von weniger als 43% der Schülerinnen und Schüler gelöst werden müssten, wäre Aufgabe AB3a-4 (Abb. 74) zu leicht, da sie von 50% der Schülerinnen und Schüler erfolgreich bearbeitet wurde.

Tim und Lea wollen 28 quadratische Bilder aufhängen. Jedes Bild ist 20 cm lang. Welche Pinnwand reicht, um alle Bilder aufzuhängen?



Antwort:
________ Pinnwand reicht, um alle Bilder aufzuhängen.

Abbildung 74: Aufgabe AB3a-4 (Eidt et al., 2009, S. 83).

Bei dieser Aufgabe kann man vielen Schülerinnen und Schülern unterstellen, dass sie die Aufgabe rein intuitiv, und in diesem speziellen Fall dann auch zielführend, beantworteten: „Tims Pinnwand ist größer, also reicht seine Pinnwand auf jeden Fall." Schülerinnen und Schüler jedoch, die sich genauer mit dieser Aufgabe beschäftigten, lieferten sich verschiedenen Fehlerrisiken aus. Sahen sie sich beispielsweise die Zahlen an, entdeckten sie, dass Leas Pinnwandmaße (0,80 m und 1,20 m) ein Vielfaches der Bilderlänge von 20 cm darstellen und somit auf den ersten Blick perfekt passen. Berechneten sie die Flächeninhalte beider Pinnwände, bestand die Gefahr, einen Rechenfehler zu machen. Ein zusätzliches Fehlerrisiko lag in der Notwendigkeit begründet, dass die Größen umgewandelt werden müssen, um miteinander verglichen werden zu können. Überdies ist möglicherweise auch die Berücksichtigung der quadratischen Form der Bilder irreführend, da in diesem Fall ein größerer Flächeninhalt nicht zwingend mit der Aufgabenlösung verbunden ist. Eine weitere Möglichkeit, zur richtigen Lösung zu gelangen, stellte bei dieser speziellen Aufgaben schlicht das Raten dar.

Aufgrund dieser Vermutungen bezüglich der individuellen Herangehensweisen an diese Aufgabe wurden die Aufgabenbearbeitungen genauer analysiert und Schwierigkeitsindizes berechnet. Von den 135 Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe nicht lösten, haben 59 Schülerinnen und Schüler die Aufgabe gar nicht erst bearbeitet. Sieben Schülerinnen und Schüler kamen aufgrund des Rechnens und damit einhergehenden Rechenfehlern zu einem falschen Ergebnis. 69 Schülerinnen und Schüler gelangten ohne Notizen zu einem falschen Ergebnis, wobei die Antworten „beide" und „keine" ebenfalls häufig vertreten waren. Insgesamt bearbeiteten 211 der 270 Schülerinnen und Schüler die Aufgabe, wovon 135 die Aufgabe korrekt lösten. Daraus errechnete sich ein Schwierigkeitsindex mit Inangriffnahmekorrektur von 64%. Von den 135 Schülerinnen und Schülern, die die Aufgabe richtig lösten, notierten 125 Schülerinnen und Schüler keinen Rechenweg beziehungsweise vermerkten keinerlei Notizen, sodass von einer intuitiven Aufgabenbearbeitung ausgegangen werden kann. Zehn Schülerinnen und Schüler kamen mit einer notierten Rechnung zur Lösung. Die Berechnung des Schwierigkeitsindex mit Zufallskorrektur ergab noch eine Lösungshäufigkeit von 22%. Berücksichtigte man Zufall und Inangriffnahme gleichzeitig, ergab sich ein Schwierigkeitsindex von 28%. Im Rahmen der leistungsbezogenen Betrachtung der Ergebnisse im folgenden Kapitel (Kap. 9.2) soll zusätzlich überprüft werden, ob hinsichtlich der Leistungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und der Herangehensweise an die Aufgabenbearbeitung Zusammenhänge bestehen.

9.2 Zusammenhänge mit der Leistungsfähigkeit

Um der Fragestellung nachzugehen, inwiefern Schülerinnen und Schüler in Abhängigkeit von der jeweiligen Leistungsfähigkeit die geometrischen Aufgaben mit den verschiedenen kognitiven Anforderungen bewältigen (Fragestellung 5), wurden die 270 Schülerinnen und Schüler zunächst in drei Leistungsgruppen (LG 1-3) eingeteilt. Da der Subtest Geometrie des DEMAT 3+ nur zu .40 mit dem Subtest Geometrie des DEMAT 4 korrelierte und somit keine Aussagen zur Leistungsentwicklung der gesamten Stichprobe innerhalb des vierten Schuljahres getroffen werden konnten (vgl. Kap. 7.3), erfolgte die Bildung der Leistungsgruppen auf der Grundlage der durch die Schülerinnen und Schüler erzielten T-Werte im Subtest Geometrie des DEMAT 4 (SG4T), da dieser zum gleichen Zeitpunkt wie Teilstudie III durchgeführt wurde. Die Bildung der drei Leistungsgruppen erfolgte nicht anhand eines externen Kriteriums, sondern orientiert an der geeigneten Normstichprobe für den DEMAT. Das in Kapitel 9.1.1 abgebildete Histogramm (Abb. 66) zeigte, dass die Schülerinnen und Schüler der vorliegenden Stichprobe näherungsweise normal verteilt waren, weshalb die Schülerinnen und Schüler mit einem Wert von mindestens einer Standardabweichung unter dem Mittelwert (entsprechend 15,86% der Gesamtstichprobe) als leistungsschwach und die Schülerinnen und Schüler mit einem Wert von mindestens einer Standardabweichung über dem Mittelwert (entsprechend 15,86% der Gesamtstichprobe) als leistungsstark eingestuft wurden.

Ingenkamp (2008, S. 48) stellt den Bezug der T-Skala zur Normalverteilung dar. Der Subtest Geometrie besteht aus acht Rohwerten (0-7), denen T-Werte zugeordnet wurden (31,39,45,50,55,60,65,71). Da nicht alle Werte vergeben sind, ergab sich die Tabelle 37 zu entnehmende prozentuale Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die drei Leistungsgruppen, die näherungsweise zu den bei Ingenkamp (2008, S. 48) dargestellten Angaben passt.

Tabelle 37: Angaben zu den Leistungsgruppen (LG 1-3)

	Leistungsgruppe 1 (LG 1)	Leistungsgruppe 2 (LG 2)	Leistungsgruppe 3 (LG 3)
erzielte T-Werte	0-38	38-60	60-100
Schüleranzahl %	12,2 %	74 %	13,7 %
Schüleranzahl	33	200	37
Beschreibung	LG 1 enthält die leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler		LG 3 enthält die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler

Zur Veranschaulichung sind in Anhang O exemplarisch die Aufgabenbearbeitungen zu den geometrischen Aufgaben des Subtests Geometrie (SG4T) von jeweils einem Schüler beziehungsweise einer Schülerin der drei Leistungsgruppen abgebildet.

Nachdem diese Leistungsgruppen gebildet waren, wurden die Lösungshäufigkeiten dieser unterschiedlich leistungsfähigen Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten der geometrischen Aufgaben hinsichtlich der verschiedenen kognitiven Anforderungen analysiert und interpretiert.

Die aufgrund der im Subtest Geometrie des DEMAT 4 innerhalb der vorliegenden Stichprobe als leistungsschwach eingestuften Schülerinnen und Schüler (LG 1) lösten die acht Aufgaben zu Anforderungsbereich I zu 41%, zu Anforderungsbereich II zu 36% und zu Anforderungsbereich III zu 16% (Tab. 38).

Tabelle 38: Lösungshäufigkeiten [%] der drei Leistungsgruppen insg.

	LG 1	LG 2	LG 3
AB I	41	54	67
AB II	36 *	51	65 *
AB III	16	25	34

Die als leistungsstark eingestuften Schülerinnen und Schüler (LG 3)bearbeiteten die Aufgaben zu Anforderungsbereich I zu 67%, zu Anforderungsbereich II zu 65% und zu Anforderungsbereich III zu 34%. Damit lösten die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler die Aufgaben über alle drei Anforderungsbereiche deutlich häufiger als die leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler. Für alle erzielten Lösungshäufigkeiten wurde eine Varianzanalyse (*F*-Test mit Post-hoc-Test Tukey HSD) durchgeführt. Signifikante Ergebnisse sind durch ein * gekennzeichnet. Zwei * weisen auf signifikante Unterschiede mit den jeweils beiden anderen Leistungsgruppen hin. Für die soeben genannten Lösungshäufigkeiten unterschieden sich lediglich LG 1 und LG 3 hinsichtlich der Aufgabenstellungen zu Anforderungsbereich II signifikant (Tab. 38). Es folgt die Analyse der einzelnen Aufgaben zu den jeweiligen Anforderungsbereichen.

Tabelle 39 stellt die prozentualen Anteile der drei Leistungsgruppen bei der Bearbeitung der Aufgaben zu Anforderungsbereich I dar. Bei der Betrachtung der Lösungshäufigkeiten (%) zeigte sich, dass die als leistungsstärker eingestuften Schülerinnen und Schüler der LG 3 (hervorgehobene Zellen beinhalten die größten Lösungshäufigkeiten) bei allen Aufgaben zu Anforderungsbereich I größere Lösungshäufigkeiten aufwiesen. Auch die Lösungshäufigkeiten zwischen LG 1 und LG 2 unterschieden sich insofern, dass die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler (LG 2) häufiger zur richtigen Lösung gelangten als die weniger leistungsstarken Schülerinnen und Schüler (LG 1). Signifikant unterschieden sich bei den acht Aufgaben zu Anforderungsbereich I LG 1 und LG 3 sechsmal, LG 2 und LG 3 zweimal und LG 1 und LG 2 einmal.

Tabelle 39: Lösungshäufigkeiten [%] der Leistungsgruppen AB I

	LG 1	LG 2	LG 3
a-1	79 *	90	97 *
b-1	21 *	26 *	60 **
a-2	12 **	33 *	46 *
b-2	67 *	82	89 *
a-3	52	62	76
b-3	49 *	60 *	84 **
a-4	33 *	51	62 *
b-4	12	26	22

Ein ähnliches Ergebnis zeigte sich bei den erfolgreichen Bearbeitungen der Aufgaben zu Anforderungsbereich II (Tab. 40). Hervorgehoben sind erneut die Zellen mit den größten Lösungshäufigkeiten. Lediglich bei zwei Aufgaben (b-3 und a-4) bestand prozentual betrachtet zwischen LG 2 und LG 3 kein Unterschied. Signifikant unterschieden sich bei den acht Aufgaben zu Anforderungsbereich II LG 1 und LG 3 fünfmal und LG 2 und LG 3 zweimal. Zwischen LG 1 und LG 2 wurden keine signifikanten Unterschiede festgestellt.

Tabelle 40: Lösungshäufigkeiten [%] der Leistungsgruppen AB II

	LG 1	LG 2	LG 3
a-1	27 *	39	60 *
b-1	55 *	73	87 *
a-2	21 *	40 *	62 **
b-2	30	35	38
a-3	33 *	54 *	87 **
b-3	67	79	78
a-4	36	57	57
b-4	15 *	34	51 *

Wie auch bei den Aufgaben zu den Anforderungsbereichen I und II wurden die Aufgaben zum Anforderungsbereich III von den leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern prozentual betrachtet häufiger gelöst (Tab. 41). Signifikant unterschieden sich bei den acht Aufgaben zu Anforderungsbereich III LG 1 und LG 3 dreimal, LG 1 und LG 2 dreimal und LG 2 und LG 3 einmal.

Tabelle 41: Lösungshäufigkeiten [%] der Leistungsgruppen AB III

	LG 1	LG 2	LG 3
a-1	0	2	0
b-1	0	0	0
a-2	12	13	22
b-2	15	28	35
a-3	21 **	44 *	57 *
b-3	9 **	31 **	62 **
a-4	61	48	51
b-4	12 **	34 *	49 *

Lediglich Aufgabe AB3a-4 lösten die leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler (LG 1) mit insgesamt 61% häufiger als die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler der LG 2 (48%) und LG 3 (51%). Bei dieser Aufgabe handelte es sich um die in Kapitel 9.1.2 aufgrund der insgesamt hohen

Lösungsrate von 50% analysierte Aufgabe zu den quadratischen Bildern und den beiden Pinnwänden (Eidt et al., 2009, S. 83). Es wurde bereits festgestellt, dass in diesem Fall eine intuitive Herangehensweise zielführend war und andernfalls Fehlerrisiken bestanden. Trotz dass die Unterschiede der Lösungshäufigkeiten bei dieser Aufgabenbearbeitung nicht signifikant waren, wurde überprüft, ob hinsichtlich der Herangehensweise bei der Aufgabenlösung und der Leistungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler Tendenzen erkennbar waren. Wie Tabelle 42 zu entnehmen ist, lösten 58% der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler der Stichprobe die Aufgaben ohne Rechnung oder Notizen richtig, innerhalb der Gruppe der leistungsstarken waren es 43%.

Tabelle 42: Schülerlösungen bei Aufgabe AB3a-4

	richtig gelöst ohne Rechnung	**richtig gelöst mit Rechnung**	**falsch gelöst ohne Rechnung**	**falsch gelöst mit Rechnung**	**nicht bearbeitet**
LG 1	58 %	3 %	18 %	3 %	18 %
LG 3	43 %	8 %	22 %	3 %	24 %

9.3 Geschlechtsspezifische Zusammenhänge

Von den 270 an der Untersuchung teilnehmenden Schülerinnen und Schülern waren 133 Jungen und 137 Mädchen. Wie in Kapitel 2.1.3 erläutert fanden Reiss und Winkelmann (2009, S. 139) heraus, dass die Jungen einen Leistungsvorsprung haben und stärker in den beiden oberen Kompetenzstufen vier und fünf sowie schwächer in den unteren Kompetenzstufen eins und zwei vertreten waren.

In Kapitel 9.2 wurden die Schülerinnen und Schüler der Stichprobe in drei Leistungsgruppen unterteilt. Tabelle 43 zeigt die Verteilung der Mädchen und Jungen auf die jeweiligen Leistungsgruppen.

Tabelle 43: Verteilung der Geschlechter in den Leistungsgruppen (LG 1-3)

	Leistungsgruppe 1 (LG 1)	**Leistungsgruppe 2 (LG 2)**	**Leistungsgruppe 3 (LG 3)**
Mädchen	17	100	20
Jungen	16	100	17

Sowohl in der Gruppe der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler (LG 1) als auch in der Gruppe der leistungsstarken Schülerinnen und Schüler (LG 3) war eine geringfügig größere Anzahl an Mädchen vertreten. Tabelle 44 zeigt, dass die Mädchen der vorliegenden Stichprobe über alle Testbereiche des DEMAT hinweg deskriptiv betrachtet gleiche oder höhere durchschnittliche geschlechtsspezifische T-Werte erzielten.

Tabelle 44: Durchschnittlich erzielte T-Werte nach Geschlecht

G	**SA3T**	**SS3T**	**SG3T**	**TG3T**	**SA4T**	**SS4T**	**SG4T**	**TG4T**
w	56	54	53	56	53	52	53	53
m	54	52	52	54	51	52	52	52

Insgesamt lösten die Mädchen der vorliegenden Stichprobe die geometrischen Aufgaben zu 46%, die Jungen erzielten eine durchschnittliche Lösungshäufigkeit von 41%. 57% der Mädchen und 50% der Jungen bearbeiteten die Aufgaben zu Anforderungsbereich I erfolgreich. Die Aufgaben mit der kognitiven Anforderung des Herstellens von Zusammenhängen lösten 52% der Mädchen und 50% der Jungen. Die Aufgaben zu Anforderungsbereich III konnten von 28% der Mädchen und 22% der

Jungen gelöst werden. Die Lösungshäufigkeiten wurden mit Hilfe des *Z*-Tests auf Signifikanz getestet. Dabei zeigte sich, dass die soeben beschriebenen Unterschiede nicht signifikant waren.

Das Lösungsverhalten der vorliegenden Stichprobe ist geschlechtsspezifisch für die einzelnen Aufgaben in den Tabellen 45 und 46 dargestellt. Die Jungen (Tab. 45) wiesen bei sechs der 24 Aufgaben höhere Lösungshäufigkeiten auf (AB1a-1, AB2a-1, AB3a-1, AB3b-1, AB2b-2, AB2a-4), die Mädchen (Tab. 46) bei 15 der 24 Aufgaben. Bei drei Aufgaben (AB1b-1, AB2b-3, AB3a-2) waren identische Lösungshäufigkeiten vorzufinden. Für die Differenz der Lösungshäufigkeiten in den grau markierten Zellen ergaben sich nach Cohens *d* schwache Effekte.

Tabelle 45: Lösungshäufigkeiten [%] Mädchen

	AB I	AB II	AB III
a-1	88	38	0
b-1	30	73	0
a-2	38 (d = 0.24)	47 (d = 0.24)	14
b-2	83	31	29
a-3	71 (d = 0.34)	61	48
b-3	66	77	40 (d = 0.30)
a-4	56 (d = 0.24)	53	53
b-4	26	39	39

Tabelle 46: Lösungshäufigkeiten [%] Jungen

	AB I	AB II	AB III
a-1	92	42	2
b-1	30	71	1
a-2	26 (d = 0.24)	35 (d = 0.24)	14
b-2	79	38	25
a-3	54 (d = 0.34)	50	37
b-3	57	77	25 (d = 0.30)
a-4	44 (d = 0.24)	56	47
b-4	21	29	28

Innerhalb der Gruppe der leistungsstarken Schülerinnen und Schüler (LG 3) lösten 70% der leistungsstarken Mädchen die geometrischen Aufgaben, die sich auf das Reproduzieren bezogen (AB 1), 68% lösten die Aufgaben zu Anforderungsbereich II und 34% die Aufgaben zu Anforderungsbereich III. Die leistungsstarken Jungen lösten die Aufgaben zu den Anforderungsbereichen I und II jeweils zu 63%, womit also auch die leistungsstarken Jungen prozentual betrachtet geringere Lösungshäufigkeiten im Vergleich zu den leistungsstarken Mädchen erbrachten. Die Aufgaben zu Anforderungsbereich III lösten die Jungen mit 35% durchschnittlich ebenso häufig wie die Mädchen mit 34%. Die beschriebenen Differenzen waren nicht signifikant.

Bezüglich einer Aufgabe (AB1a-2) konnte nach Cohen ein mittlerer bis starker Effekt von $d = 0.62$ festgestellt werden. Dabei handelte es sich um die bereits in den Kapiteln 6.4 und 9.1.2 thematisierte Aufgabe, bei der die Schülerinnen und Schüler die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten zu drei genannten Körpern in eine Tabelle eintragen mussten. Dies gelang den Mädchen zu 60% und den Jungen zu 29%.

Innerhalb der Gruppe der leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler (LG 1) lösten 46% (AB I), 38% (AB II) und 22% (AB III) der leistungsschwachen Mädchen die Aufgaben anteilsmäßig, die leistungsschwachen Jungen lösten sie mit 35% (AB I), 34% (AB II) und 11% (AB III). Sowohl diese Unterschiede als auch die sich prozentual ebenfalls kaum unterscheidenden Lösungshäufigkeiten innerhalb von LG 2 waren nicht signifikant.

9.4 Zusammenhänge mit den Anforderungen der Unterrichtsaufgaben

„Students learn what they have an opportunity to learn." (Hiebert, 1999, p. 12)

Im folgenden Kapitel sollen die Geometrieleistungen in Zusammenhang mit den Anforderungen der im Unterricht eingesetzten Aufgaben zunächst für die Stichprobe insgesamt und anschließend klassenweise betrachtet werden (Fragestellung 6).

Tabelle 47 enthält die prozentuale Verteilung aller 653 den Protokollen entnommenen geometrischen Aufgaben auf die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche und die drei Anforderungsbereiche. Die Betrachtung der prozentualen Verteilung auf die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche erfolgte bereits in den Kapiteln 7.2 und 8.3.

Tabelle 47: Protokollaufgaben - Verteilung auf 12 Zellen [%]

	AB I	AB II	AB III	total
IKB 1	4	14	2	21
IKB 2	34	9	1	44
IKB 3	12	12	1	24
IKB 4	4	7	0	12
total	54	42	4	

In Tabelle 47 wurden die Zellen mit einem prozentualen Anteil < 5% hervorgehoben. Um die durch die gesamte Stichprobe gestellten Aufgaben (Tab. 47) mit den Lösungshäufigkeiten der gesamten Schülerstichprobe bei Teilstudie III vergleichen zu können, wurden die Lösungshäufigkeiten zu den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen zusammengefasst (Tab. 48). Die prozentualen Anteile in Tabelle 48 stellen somit die Mittelwerte der bei der Bearbeitung von zwei Aufgaben erzielten Lösungshäufigkeiten dar, weshalb aus den 24 Zellen 12 Zellen wurden.

Tabelle 48: Lösungshäufigkeiten - Verteilung auf 12 Zellen [%]

	AB I	AB II	AB III	total
IKB 1	60	56	1	39
IKB 2	57	38	21	38
IKB 3	62	67	38	56
IKB 4	37	44	42	41
total	54	51	25	

Während bei IKB 1, 2 und 3 die Lösungshäufigkeiten zu Anforderungsbereich III (in Tab. 48 hervorgehoben) deutlich geringer ausfielen als die zu den Anforderungsbereichen I und II, zeigte sich bei IKB 4 (Flächen- und Rauminhalte) eine näherungsweise gleich hohe Lösungshäufigkeit über alle drei Anforderungsbereiche hinweg. Generell entsprechen die Lösungshäufigkeiten kaum den in Tabelle 47 hervorgehobenen Zellen, zu denen prozentual betrachtet wenige Aufgaben durch die Lehrkräfte gestellt wurden. Lediglich die zu IKB 1 (sich im Raum orientieren) geringe Lösungshäufigkeit geht mit dem prozentual kleinen Anteil an gestellten geometrischen Aufgaben im Unterricht der vorliegenden Stichprobe einher.

Nachdem nun Zusammenhänge für die gesamte Stichprobe betrachtet wurden, fokussiert die folgende Darstellung insgesamt jene sechs der 16 Klassen (4,8,11,12,13,15), deren Ergebnisse sich am stärksten unterschieden hinsichtlich der bereits angeführten quantitativen Aspekte (vgl. Kap. 7.3), der Anteile der Schülerinnen und Schüler an den drei gebildeten Leistungsgruppen, den

Lösungshäufigkeiten bei Teilstudie III und den Anforderungen, die den geometrischen Aufgaben aus den Unterrichtsprotokollen entnommen wurden.

Basierend auf den Schülerleistungen im Subtest Geometrie am Ende des vierten Schuljahres erfolgte anhand der T-Werte die Einteilung der Schülerinnen und Schüler in drei Leistungsgruppen (vgl. Kap. 9.2). Tabelle 49 stellt die prozentuale Verteilung der Schülerinnen und Schüler innerhalb der Klassen auf die drei Leistungsgruppen dar.

Tabelle 49: Anteile der Klassen an den Leistungsgruppen [%]

Kl.	LG 1	LG 2	LG 3
1	11	78	11
3	10	76	14
4	0	82	18
5	14	76	10
6	17	79	4
7	15	70	15
8	11	63	26
9	14	79	7
11	17	72	11
12	8	61	31
13	23	62	15
14	0	85	15
15	18	76	6
16	0	79	21
18	17	72	11
19	16	74	10

Die Klassen 4, 8 und 12 enthielten einen großen Anteil an leistungsstarken Schülerinnen und Schülern (in Tab. 49 hellgrau hervorgehoben). Diese drei Klassen wiesen gleichzeitig kleine Anteile an leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern (LG 1) auf. Wie in Kapitel 7.3 dargestellt, erzielten alle drei Klassen demnach hohe durchschnittliche T-Werte im Subtest Geometrie am Ende des vierten Schuljahres (SG4T).

Die Klassen 11, 13 und 15 enthielten große Anteile in der Gruppe an leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler (LG 1), wobei Klasse 13 mit 23% den höchsten Anteil an Schülerinnen und Schülern, deren Leistungen als schwach eingestuft wurden, aufwies (in Tab. 49 dunkelgrau hervorgehoben). In Klasse 15 wurden 6% der Schülerinnen und Schüler der Leistungsgruppe 3 zugeordnet. Diese Klasse zeigte den durchschnittlich niedrigsten T-Wert im Subtest Geometrie (SG4T) auf und es wurde eine signifikante negative Leistungsentwicklung errechnet. Die Lehrkraft der Klasse 11 reichte die wenigsten Protokolle ein (vgl. Kap. 7.3).

Alle 270 Schülerinnen und Schüler bearbeiteten die geometrischen Aufgaben der Teilstudie III. Tabelle 50 bildet die prozentualen Anteile der Schülerinnen und Schüler beim Lösen der acht Aufgaben zu jedem der drei Anforderungsbereiche klassenbezogen ab.

Tabelle 50: Lösungshäufigkeiten [%] der Klassen

Kl.	AB I	AB II	AB III
1	56	54	39
3	40	36	17
4	66	59	32
5	50	56	21
6	47	53	20
7	65	53	33
8	48	44	22
9	42	44	18
11	56	44	22
12	78	68	38
13	37	37	12
14	41	47	19
15	65	62	32
16	43	40	18
18	58	51	25
19	66	68	39
D	54	51	25

Die Lösungshäufigkeiten von Klasse 12 lagen bei den Aufgaben aller drei Anforderungsbereiche weit über den durchschnittlich erbrachten Lösungshäufigkeiten (Zeile D). Gleiches galt für die Klassen 4 und 15. Während die Klassen 4 und 12 auch im Subtest Geometrie gute Leistungen erzielten, wies Klasse 15 den niedrigsten T-Wert innerhalb der vorliegenden Stichprobe auf (vgl. Kap. 7.3). Klasse 8 zeigte einen hohen durchschnittlichen T-Wert im Subtest Geometrie auf und erbrachte bei der Bearbeitung der geometrischen Aufgaben der Teilstudie III Leistungen, die unter dem Durchschnitt (D) der gesamten Stichprobe lagen (in Tab. 50 dunkelgrau hervorgehoben). Die Lösungshäufigkeiten der Klasse 11 lagen bei den Aufgaben zu Anforderungsbereich I etwas über dem Durchschnitt und bei den Aufgaben zu den Anforderungsbereichen II und III darunter. Vor allem Klasse 13 wies über alle drei Anforderungsbereiche hinweg geringe Lösungshäufigkeiten auf. Vergleicht man die innerhalb der Klassen 12 und 13 ermittelten prozentualen Anteile beim Lösen der geometrischen Aufgaben der Teilstudie III, lösten die Schülerinnen und Schüler von Klasse 12 die Aufgaben fast doppelt so häufig wie die Schülerinnen und Schüler von Klasse 13.

Zudem wurden die prozentualen Anteile der den Protokollen entnommenen und gerateten geometrischen Aufgaben an den drei Anforderungsbereichen ermittelt. Sie sind in Tabelle 51 gemeinsam mit der protokollierten Unterrichtszeit abgebildet.

Tabelle 51: Protokollaufgaben - Anteile an AB I-III [%]

Kl.	AB I	AB II	AB III	Min.
1	100	0	0	350
3	89	11	0	860
4	59	29	12	420
5	25	75	0	300
6	50	49	2	1600
7	29	65	6	520
8	31	60	9	500
9	61	39	0	550
11	100	0	0	150
12	49	47	4	1720
13	100	0	0	300
14	100	0	0	300
15	87	13	0	350
16	87	13	0	350
18	72	26	2	1700
19	72	26	2	1700

In der Mehrheit der Klassen waren in den Protokollen keine geometrischen Aufgaben mit kognitiv höheren Anforderungen (Anforderungsbereich III) zu finden. In den Klassen 11, 13 und 15 widmeten sich mehr als 80% der geometrischen Aufgaben dem Reproduzieren (in Tab. 51 dunkelgrau hervorgehoben). Die Klassen 4, 8 und 12 zählten zu denjenigen, in denen einige Aufgaben zu Anforderungsbereich III protokolliert wurden (in Tab. 51 hellgrau hervorgehoben). Diese drei Klassen wiesen zusätzlich eine höhere Minutenzahl an protokollierten Geometrieunterricht auf. Bei der Betrachtung der für die jeweiligen Klassen erzielten Lösungshäufigkeiten bei Aufgaben mit hohen kognitiven Anforderungen (AB III) lagen unter anderem die Klassen 4 und 12 prozentual vorne.

Im Hinblick auf mögliche Zusammenhänge zwischen der Leistungsentwicklung im geometrischen Bereich und den Anforderungen der im Schuljahr bearbeiteten Aufgaben konnten lediglich die Klassen 12 und 15 zur Analyse herangezogen werden, da für alle anderen Klassen im Bereich der Geometrie keine signifikanten Unterschiede zwischen den im Subtest Geometrie am Anfang und am Ende der vierten Jahrgangsstufe festgestellten Leistungen berechnet wurden (vgl. Kap. 7.3). In Klasse 12 verbesserte sich die geometrische Leistungsfähigkeit im Laufe des Schuljahres signifikant, in Klasse 15 verschlechterte sie sich. Die Abbildungen 75 und 76 veranschaulichen die prozentuale Verteilung der kognitiven Anforderungen in den Aufgaben, die den Unterrichtsprotokollen entnommen wurden. In Klasse 12 wurden zu 49% Aufgaben zu Anforderungsbereich I und zu 47% Aufgaben zu Anforderungsbereich II eingesetzt (Abb. 75).

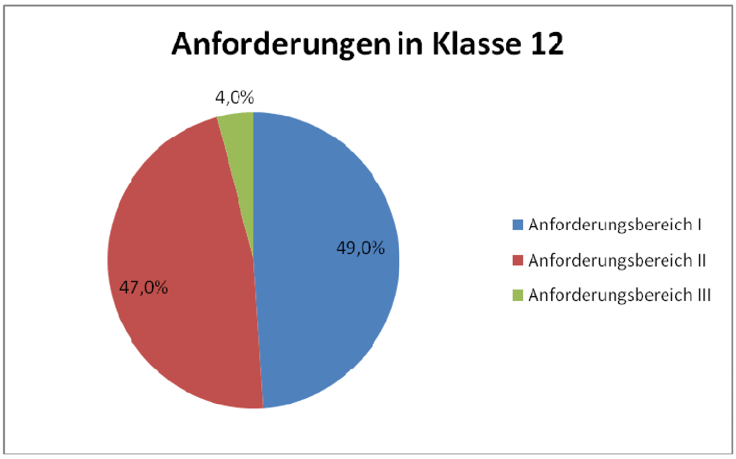


Abbildung 75: Anforderungen in Klasse 12.

In Klasse 15 wurden in 87% der eingesetzten Aufgaben reproduzierende Tätigkeiten von den Schülerinnen und Schülern verlangt (Abb. 76).

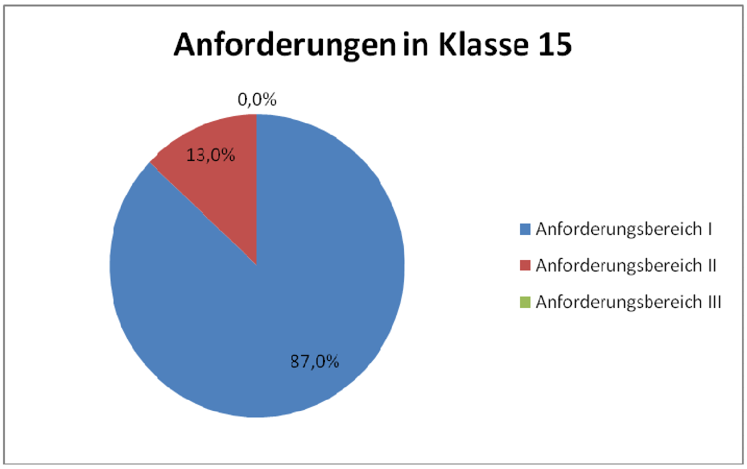


Abbildung 76: Anforderungen in Klasse 15.

Die Anzahl der den Unterrichtsprotokollen entnommenen Aufgaben lag bei Lehrkraft 12 bei 232 und bei Lehrkraft 15 bei 15 Aufgaben. Die Lösungshäufigkeiten der Schülerinnen und Schüler aus Klasse 12 waren beim Bearbeiten der Aufgaben in Teilstudie III höher als die der Klasse 15. Die Schülerinnen und Schüler aus beiden Klassen erzielten überdurchschnittliche Leistungen (Tab. 52).

Tabelle 52. Lösungshäufigkeiten [%] der Klassen 12 und 15

Kl.	AB I	AB II	AB III
12	78	68	38
15	65	62	32
D	54	51	25

Auffallend ausführlich erarbeitete die Lehrkraft der Klasse 7 das Errechnen fehlender Würfel bei Steckwürfelbauten. 44% aller Aufgaben, die im Geometrieunterricht dieser Klasse gestellt wurden, thematisierten Würfelbauten und Baupläne. Zusätzlich erhielten die Schülerinnen und Schüler verschiedene Merkblätter mit Hinweisen. Abbildung 77 zeigt exemplarisch zwei dieser Merkblätter zur Ermittlung noch fehlender Steckwürfel durch Addition und Multiplikation.

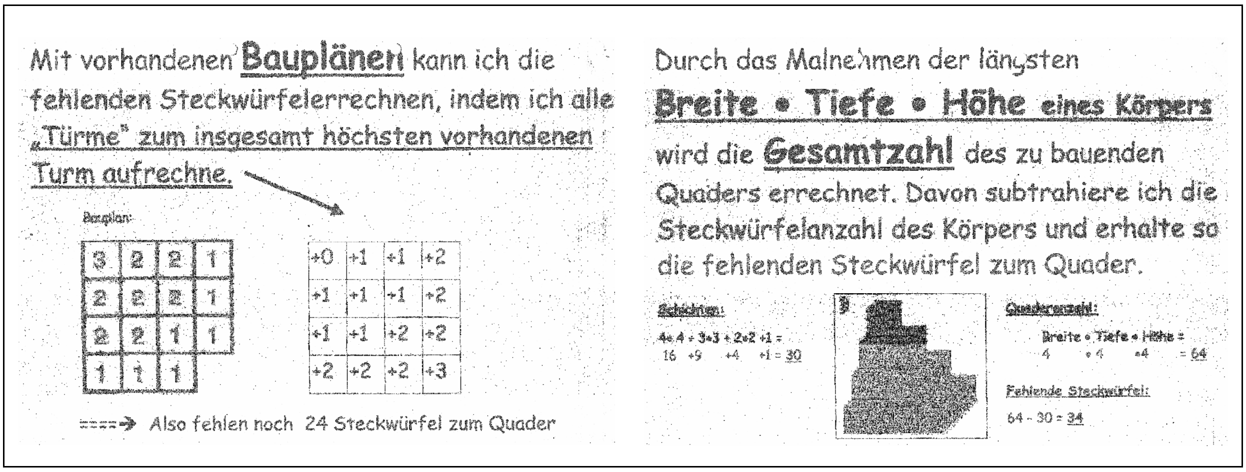


Abbildung 77: Lehrkaft 7 - Merkblatt

Unter den 24 Aufgaben der Teilstudie III (vgl. Kap. 6.4) waren zwei Aufgaben zu Würfelbauten enthalten. Bei der Aufgabe mit der Anforderung des Reproduzierens (Aufgabe AB1a-1) mussten die Schülerinnen und Schüler die Würfelanzahl des abgebildeten Würfelbaus ermitteln. Dies gelang allen Schülerinnen und Schülern der Klasse 7, die Aufgabe konnte insgesamt von 90% der gesamten Schülerstichprobe gelöst werden. Die zweite Aufgabe (Aufgabe AB3a-1) stellte höhere kognitive Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler. Sie wurde bereits in Kapitel 9.1 vorgestellt und aufgrund der geringen Lösungshäufigkeit von 1% genauer betrachtet. Dabei zeigte sich, dass es 90% der Schülerinnen und Schüler der gesamten Stichprobe nicht gelang, die als ersten Schritt notwendige Anzahl der Würfel in der abgebildeten Schachtel zu ermitteln. In Klasse 7 berechneten zwei Schüler nach dieser intensiven Beschäftigung im Geometrieunterricht die Anzahl. Danach musste zur Lösung der Aufgabe das Volumen verachtfacht werden, die beiden Schüler der Klasse 7 verdoppelten aber lediglich.

Die ermittelten Lösungshäufigkeiten der Klasse 1 bei den geometrischen Aufgaben der Teilstudie III (Tab. 53) fielen gemessen am Kriterium der durch die Gesamtstichprobe erbrachten Lösungshäufigkeiten (vgl. Tab. 50) vor allem bezüglich Anforderungsbereich III mit 39% hoch aus. Die Lehrkraft der Klasse 1 protokollierte relativ wenig Geometrieunterricht (vgl. Tab. 24). Diesen Protokollbögen konnten zudem ausschließlich auf das Reproduzieren bezogene Aufgaben entnommen werden (vgl. Tab. 51). 11% der Schülerinnen und Schüler dieser Klasse wurden der Leistungsgruppe 3 und ebenfalls 11% wurden Leistungsgruppe 1 zugeordnet (vgl. Tab. 49).

Tabelle 53: Lösungshäufigkeiten [%] Klasse 1

	Code	AB 1	AB 2	AB 3
IKB 1	a-1	100	44	22
	b-1	33	78	11
IKB 2	a-2	22	56	11
	b-2	89	67	44
IKB 3	a-3	56	56	56
	b-3	56	44	44
IKB 4	a-4	44	56	67
	b-4	44	33	56
total		56	54	39

10 Diskussion der Ergebnisse

10.1 Prüfung der Hypothesen

Nachdem alle im Rahmen der vorliegenden Erhebung gewonnenen Erkenntnisse zu den Forschungsfragen dargestellt wurden, sollen nun die in Kapitel 5 formulierten Hypothesen unter Angabe der jeweiligen Fragestellung geprüft und die Ergebnisse diskutiert werden. In diese Betrachtung wird gleichzeitig ein kritischer Blick auf das methodische Vorgehen integriert, wobei die Grenzen der vorliegenden Erhebung und Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen aufgezeigt werden.

1. Wie hoch ist der quantitative Anteil geometrischer Inhalte in Schulbüchern und im Unterricht des vierten Schuljahres?

Für die zehn analysierten Schulbücher wurde ein prozentualer Anteil der Seiten mit geometrischen Inhalten an der Seitenanzahl des gesamten Lehrwerks von Min. 9% und Max. 20% ermittelt. Über alle zehn Lehrwerke hinweg errechnete sich ein durchschnittlicher Seitenanteil von 15%. Bei der Formulierung der Hypothese (vgl. Kap. 5.1) wurde die Gewichtung der mathematischen Teilbereiche sowohl auf empirischen Befunden als auch auf theoretischer Basis gestützt und ein prozentualer Anteil von 20% bis 30% für die Leitidee Raum und Form als Erwartung festgelegt (Hypothese 1a). Somit wäre lediglich der Anteil an Seiten mit geometrischen Aufgaben von 20% im Schulbuch Matheprofis (6) erwartungsgemäß. Insgesamt kann festgehalten werden, dass sich in den zehn analysierten Schulbüchern anteilsmäßig weniger Seiten geometrischen Inhalten widmeten als erwartet. Es sei nochmals angemerkt, dass anhand quantitativer Analysen keine Aussagen zur Qualität der dargestellten geometrischen Inhalte gemacht werden können beziehungsweise sollen.

An diese Betrachtung anschließend wurden den zehn Schulbüchern 229 geometrische Aufgaben entnommen und den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen zugeordnet. In diesen geometrischen Aufgaben ging es zu 44% um geometrische Figuren (IKB 2), zu 25% um Flächen- und Rauminhalte (IKB 4), zu 17% um räumliche Orientierung (IKB 1) und zu 14% um geometrische Abbildungen (IKB 3). Die Erwartung bezüglich der Dominanz an Aufgaben zu geometrischen Figuren (Hypothese 1c) kann somit bestätigt werden. Der hohe Anteil an Aufgaben zu Flächen- und Rauminhalten (IKB 4) kann möglicherweise damit erklärt werden, dass dieses Thema in den Arbeitsplänen der Schulen erfahrungsgemäß vor allem für die vierte Jahrgangsstufe vorgesehen ist. Aufgaben zur räumlichen Orientierung und zu geometrischen Abbildungen stehen dahinter zurück.

In Kapitel 6.5 wurde die Lehrerstichprobe beschrieben, die nach zahlreichen Anfragen letztlich aus 16 Lehrkräften bestand. Aufgrund der freiwilligen Teilnahme konnte von einer relativ hohen Motivation und von einem relativ großen Interesse an geometrischen Inhalten ausgegangen werden. Diese 16 Lehrkräfte reichten über das Schuljahr 2011/2012 hinweg insgesamt 148 Protokollbögen zu 11.670 Minuten Geometrieunterricht in Klassenstufe 4 ein, wobei der protokollierte Unterricht zwischen 150 und 1.720 Minuten je nach Lehrkraft schwankte (M = 729, SD = 588). Die Hälfte (Median) der teilnehmenden Lehrkräfte unterrichtete in einem ganzen Schuljahr weniger als 460 Minuten (9 Unterrichtsstunden à 50 Minuten) Geometrie, 75% (Q3) erteilten weniger als 1045 Minuten (21 Unterrichtsstunden à 50 Minuten) Geometrieunterricht und 25% (Q1) sogar weniger als 337,5 Minuten (7 Unterrichtsstunden à 50 Minuten). Vorausgesetzt, dass die durch die Stundentafel des Landes Rheinland-Pfalz für ein viertes Schuljahr vorgegebene Gesamtzeit des Mathematikunterrichts von rund 9.000 Minuten über die Stichprobe hinweg eingehalten wurde, ergaben sich prozentuale

Anteile des Geometrieunterrichts am Mathematikunterricht zwischen 2% und 19%. Durchschnittlich für alle 16 Lehrkräfte errechnete sich daraus ein prozentualer Anteil von 8%, was den durch Backe-Neuwald (2000, S. 66) mittels Selbsteinschätzung durch die Lehrkräfte ermittelten Angaben entspricht. Bezieht man den anhand der Gewichtung der mathematischen Teilbereiche als Erwartung festgelegten prozentualen Anteil an geometrischen Inhalten von 20% bis 30% mit ein (Hypothese 1b), was 1.800 bis 2.700 Minuten (36 bis 54 Unterrichtsstunden à 50 Minuten) Geometrieunterricht für das vierte Schuljahr entspricht, so wären bezüglich der Unterrichtszeit die erreichten Anteile von vier Lehrkräften mit 18% und 19% annähernd erwartungsgemäß. Leider ist es aufgrund des vorliegenden Untersuchungsdesigns nicht möglich, die protokollarisch festgehaltenen Geometriestunden mit den tatsächlich gehaltenen Geometriestunden abzugleichen. Auf der vorliegenden Datenbasis kann für die vorliegende Stichprobe insgesamt festgehalten werden, dass unter quantitativen Gesichtspunkten anteilsmäßig zu wenig Geometrieunterricht erteilt beziehungsweise protokolliert wurde. Dies erscheint vor allem hinsichtlich der den freiwillig teilnehmenden Lehrkräften unterstellten Motivation und deren Interesse an geometrischen Inhalten bedenklich.

Den eingereichten Protokollbögen wurden 653 geometrische Aufgaben entnommen, woraus sich ein Mittelwert von 41 Aufgaben pro Lehrkraft errechnete. Wie auch bei der Unterrichtszeit lag jedoch eine beträchtliche Streuung zwischen den Lehrkräften vor. 75% (Q3) aller teilnehmenden Lehrkräfte stellten in einem ganzen Schuljahr weniger als 45 Aufgaben im Geometrieunterricht, die Hälfte (Median) stellte weniger als 18 Aufgaben und 25% (Q1) stellten sogar weniger als 6 Aufgaben. Obwohl nur die schriftlich fixierten Aufgaben Bestandteil der Untersuchung waren und auch an dieser Stelle keine Wertungen auf der Grundlage ausschließlich quantitativer Analysen vorgenommen werden sollen, kann dennoch objektiv festgestellt werden, dass einige Lehrkräfte der vorliegenden Untersuchung innerhalb eines Schuljahres zu wenige schriftlich fixierte Aufgaben zur Förderung der inhaltsbezogenen Kompetenzen zur Leitidee Raum und Form an ihre Schülerinnen und Schüler stellten.

Auch für die im Unterricht gestellten geometrischen Aufgaben erfolgte die Ermittlung der Anteile an den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen. In den 653 geometrischen Aufgaben ging es zu 44% um geometrische Figuren (IKB 2), zu 24% um geometrische Abbildungen (IKB 3), zu 21% um räumliche Orientierung (IKB 1) und zu 12% um Flächen- und Rauminhalte (IKB 4). Die in Kapitel 5.7 formulierte Hypothese (Hypothese 1d), dass ein Großteil des Geometrieunterrichts aus der Beschäftigung mit geometrischen Figuren (IKB 2) besteht, kann somit bestätigt werden (284 von insgesamt 653 Aufgaben).

Wie vermutet, wurde bei keiner Lehrkraft der vorliegenden Stichprobe eine starke Orientierung an einem alleinigen Lehrwerk festgestellt. Dies ist einerseits positiv zu bewerten, da der Geometrieunterricht aufgrund seiner spezifischen Merkmale ohnehin nicht als „Buchunterricht" ablaufen sollte (vgl. Kap. 1.2). Die Sichtung der Protokolle zeigte andererseits jedoch eine Dominanz von schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben, die aus verschiedenen Schulbüchern oder Werkstätten stammten beziehungsweise selbst konzipiert wurden. Aufgaben, die zum Herstellen von oder Handeln mit geometrischen Objekten aufforderten, waren leider selten.

Beim Vergleich der aufgezeigten prozentualen Anteile der Aufgaben an den vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen aus den Schulbüchern und den Unterrichtsprotokollen zeigte sich, dass die Aufgabenanteile von IKB 1 und IKB 2 näherungsweise identisch und die Anteile von IKB 3 und IKB 4 sozusagen vertauscht vorzufinden waren: Zu geometrischen Abbildungen (IKB 3) wurden in den Schulbüchern die wenigsten Aufgaben gestellt (14%) und zu 24% durch die Lehrkräfte. In den

Schulbüchern waren zu 25% Aufgaben zu Flächen- und Rauminhalten (IKB 4) zu finden, im Unterricht der vorliegenden Stichprobe lag der Anteil an Aufgaben zu diesen inhaltsbezogenen Kompetenzen bei 12%. Dies geht einher mit den von Backe-Neuwald (1998, S. 4f) aufgedeckten Inhalten, die am seltensten erarbeitet wurden.

Die Aufgaben zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 2 umfassen sowohl Aufgaben zu ebenen Figuren als auch zu Körpern. In Erweiterung zur vorliegenden Untersuchung könnte eine Analyse der Aufgaben dieses inhaltsbezogenen Kompetenzbereichs hinsichtlich der Unterscheidung von Raum und Ebene aufschlussreich sein.

2. Können geometrische Aufgaben eindeutig den in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen zugeordnet werden?

Um die eindeutige Zuordnung geometrischer Aufgaben zu den in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen zu überprüfen, wurden zwei Aufgabenratings durchgeführt (Teilstudie I und II). Dabei kann festgehalten werden, dass sowohl die prozentuale Übereinstimmung der Rater mit 90% und 92% als auch das errechnete Cohens Kappa von .802 und .843 ausreichend hoch waren, sodass Hypothese 2 bestätigt werden kann. Trotz des Zusammenspiels der in der Kritik stehenden, empirisch nicht validierten Anforderungsbereiche und der im Zusammenhang mit der empirischen Überprüfung der fünfstufigen Kompetenzmodelle festgestellten Problematik bezüglich der Einordnung geometrischer Items konnte bei der vorgenommenen Zuordnung der insgesamt 882 geometrischen Aufgaben zu den drei in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen durch zwei Rater eine hohe prozentuale Übereinstimmung und ein sehr gutes Cohens Kappa berechnet werden. Dies erscheint vor dem Hintergrund der Unterscheidung von drei verschiedenen Anforderungen in den genannten Kontexten (TIMSS, PISA, Anwendungen der Bloom`schen Taxonomie, Differenzierung im Unterrichtsalltag durch Lehrkräfte, vgl. Kap. 3.2.3 und 3.3) einleuchtend.

Einschränkend sei an dieser Stelle auf die innerhalb der vorliegenden Untersuchung vorgenommene Vorgabe für die Rater verwiesen, wonach beispielsweise der Bekanntheitsgrad der Aufgaben und die Anforderungen, mit denen die Schülerinnen und Schüler auf dem Weg zur Aufgabenlösung tatsächlich konfrontiert wurden, nicht berücksichtigt wurden (vgl. Kap. 6.1).

Insgesamt ist jedoch festzuhalten, dass die geometrischen Aufgaben hinsichtlich ihrer wesentlichen Aspekte den drei Anforderungsbereichen eindeutig zugeordnet werden konnten, womit erste Hinweise dafür geliefert wurden, dass die Einteilung in drei Anforderungsbereiche für Lehrkräfte nützlich, anwendbar und transparent zu sein scheint.

3. Welche kognitiven Anforderungen enthalten die geometrischen Aufgaben in den Schulbüchern und im Unterricht des vierten Schuljahres?

Über alle vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche zur Leitidee Raum und Form hinweg wurden 63% der den Schulbüchern entnommenen geometrischen Aufgaben Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen) zugeordnet, 25% Anforderungsbereich I (Reproduzieren) und 12% Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren). Damit kann zunächst die Hypothese, dass aufgrund der steigenden Komplexität der kognitiven Anforderungen der Schwerpunkt in der vierten Klassenstufe nicht (mehr) auf den Anforderungsbereich I gesetzt wird, sondern dass Aufgaben zu Anforderungsbereich II dominieren (Hypothese 3), bestätigt werden. In Kapitel 5.3 wurde weiterhin festgestellt, dass sich innerhalb der Grundschulzeit gerade das vierte Schuljahr anbieten würde, um die Schülerinnen und Schüler mit kognitiv höheren Anforderungen zu konfrontieren. Erinnert sei beispielsweise an das durch internationale Vergleichsstudien festgestellte Verbesserungspotenzial deutscher Grundschülerinnen und Grundschüler im Umgang mit anspruchsvollen Aufgaben (vgl. Kap. 2.1.2). Vor diesem Hintergrund kann der 12-prozentige Anteil an Aufgaben mit kognitiven Anforderungen des Bereichs III nicht als befriedigend bewertet werden.

Bei der Betrachtung der Verteilung der Schulbuchaufgaben auf die einzelnen inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche wurde χ^2 (6, N = 229) = 40.37 (p = 3.855e-07) berechnet. Die Residuen, die bei der Inspektion auf einen vergleichsweise hohen Beitrag zum Chi-Quadrat hinwiesen, waren in IKB 1, IKB 2 und IKB 4 zu finden. Unter Verwendung der in Kapitel 8.2 dargestellten Aufgabenanzahlen erfolgt an dieser Stelle ein Blick auf die einzelnen inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche und die errechneten prozentualen Verhältnisse innerhalb dieser, woraus mögliche Erklärungen abgeleitet werden.

Innerhalb des IKB 1 (sich im Raum orientieren) lieferten die Zellen zu Anforderungsbereich I und II, die prozentual eine sehr unausgewogene Verteilung aufweisen, einen hohen Beitrag zum Chi-Quadrat. Prozentual betrachtet wurden 92% der geometrischen Aufgaben zu IBK 1 aus den Schulbüchern Anforderungsbereich II zugeordnet und in keinem der zehn Schulbücher war eine geometrische Aufgabe zu finden, in der ausschließlich Fakten reproduziert werden sollten (Anforderungsbereich I). Um räumliche Beziehungen wie Anordnungen, Wege, Pläne und Ansichten nutzen und zwei- beziehungsweise dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken zueinander in Beziehung setzen zu können, steht nicht die Reproduktion beziehungsweise die Wiedergabe von Fakten und Wissen im Vordergrund.

Innerhalb von IKB 2 (geometrische Figuren) wiesen die Zellen zu den Anforderungsbereichen I und III auf einen hohen Beitrag zum Chi-Quadrat hin. Mit 39% ging es bei mehr als einem Drittel der Aufgaben um das Reproduzieren (Anforderungsbereich I), was damit erklärt werden könnte, dass das Identifizieren von Körpereigenschaften an sich eher reproduzierende Tätigkeiten verlangt. Aufgaben zu Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) waren in den zehn analysierten Lehrwerken lediglich zu 5% vorhanden. 56% der Aufgaben forderten das Herstellen von Zusammenhängen (Anforderungsbereich II).

Innerhalb des IKB 3 (geometrische Abbildungen) war die Verteilung auf die Anforderungsbereiche ausgeglichener als in den beiden zuvor dargestellten inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen (IKB 1 und IKB 2). 29% der Aufgaben wurden Anforderungsbereich I (Reproduzieren) zugeordnet, 55% Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen) und 16% Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren). Allerdings ist die absolute Anzahl der Aufgaben zu diesem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich zu berücksichtigen, die mit insgesamt 31 geometrischen Aufgaben aus zehn Schulbüchern des vierten Schuljahres im Vergleich zu den anderen IKB gering war.

Mit insgesamt 58 Aufgaben zielte ein Viertel aller den Schulbüchern entnommenen Aufgaben auf die Förderung der inhaltsbezogenen Kompetenzen des Bereichs 4. Betrachtet man die Verteilung der Aufgaben innerhalb des IKB 4, so ist die vergleichsweise hohe Anzahl an Aufgaben zu Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) von 26% auffällig, was durch den hohen Beitrag zum Chi-Quadrat bestätigt wurde. Zu Anforderungsbereich I wurden 16% und zu Anforderungsbereich II 59% der geometrischen Aufgaben zugeordnet. Die in den Arbeitsplänen der Schulen häufig schwerpunktmäßige Verortung des Themas Flächen- und Rauminhalte in Klassenstufe 4 ließe eher einen vergleichsweise hohen Anteil an Aufgaben mit Anforderungsbereich I erwarten. Möglicherweise liegt dies darin begründet, dass im Primarbereich Faktenwissen, wie beispielsweise

Formeln zur Flächenberechnung, Maßeinheiten, Umrechnungen oder Ähnliches, nur eine untergeordnete Rolle spielt und die Schülerinnen und Schüler vermehrt dazu aufgefordert werden, Beziehungen zwischen Seiten oder Flächen und zwischen Umfang und Flächen- beziehungsweise Rauminhalt zu beachten. Diese Aufgaben stellen höhere kognitive Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler und besitzen somit eine höhere Komplexität.

Die 653 geometrischen Aufgaben aus den Unterrichtsprotokollen der an der Untersuchung teilnehmenden Lehrkräfte wurden insgesamt zu 54% Anforderungsbereich I (Reproduzieren) und zu 42% Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen) zugeordnet. Damit lag der Anteil an Aufgaben mit Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) bei 4%. In absoluten Zahlen bedeutet dies, dass über ein Schuljahr hinweg durch alle 16 Lehrkräfte insgesamt 23 schriftlich fixierte geometrische Aufgaben gestellt wurden, die die Schülerinnen und Schüler zum Verallgemeinern und Reflektieren herausforderten. Somit kann festgehalten werden, dass im Geometrieunterricht der vorliegenden Stichprobe vergleichsweise wenig argumentiert, begründet, bewiesen, verallgemeinert oder reflektiert wurde. An dieser Stelle ist erneut zu betonen, dass die Anzahlen lediglich auf der Basis der eingereichten Protokolle ermittelt wurden. Ob die Aufgaben tatsächlich gestellt wurden beziehungsweise ob alle gestellten Aufgaben durch die Lehrkräfte protokollarisch festgehalten wurden, kann im Rahmen des vorliegenden Untersuchungsdesigns nicht überprüft werden. Der hohe Anteil an Aufgaben zu Anforderungsbereich I geht einher mit der festgestellten Dominanz der Aufgaben zu geometrischen Figuren und der Annahme, dass dabei meist Faktenwissen reproduziert wird.

Basierend auf den Berechnungen des Statistikprogramms R wurde ein hoch signifikantes $\chi^2(6, N = 653) = 159.47$ ($p < 2.2e\text{-}16$) ermittelt. Eine Inspektion der Residuen wies auf einen deutlichen Beitrag der inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche 1 und 2 zum Chi-Quadrat hin, für die Bereiche 3 und 4 war der Beitrag zu vernachlässigen. Auch an dieser Stelle erfolgt unter Verwendung der in Kapitel 8.3 dargestellten Aufgabenanzahlen ein Blick die inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche 1 und 2.

Innerhalb des IKB 1 (sich im Raum orientieren) waren mit 69% die Aufgaben zu Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen) dominierend. Gleichzeitig konnten 11% der Aufgaben Anforderungsbereich III (Verallgemeinern und Reflektieren) zugeordnet werden. Dies entspricht der im Rahmen der Schulbuchanalyse gewonnenen Erkenntnis, dass das Reproduzieren beziehungsweise die Wiedergabe von Fakten und Wissen (Anforderungsbereich I) bei Aufgaben zu IKB 1 kaum möglich zu sein scheint, sondern dass die diesen inhaltsbezogenen Kompetenzen zugeordneten Aufgaben eher Fähigkeiten wie beispielsweise logisches Denken und räumliches Vorstellungsvermögen erfordern. Wohingegen allerdings in keinem der zehn Schulbücher eine Aufgabe zu diesem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich gefunden wurde, die Anforderungsbereich I zugeordnet werden konnte, stellten die Lehrkräfte in ihrem Geometrieunterricht zu 20% solche geometrischen Aufgaben. Damit kann die Feststellung, dass sich die Lehrkräfte nicht allzu stark an den Schulbüchern zu orientieren scheinen, erneut bestätigt werden.

Innerhalb des IKB 2 (geometrische Figuren) ging es bei 79% aller in diesem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich gestellten Aufgaben im vierten Schuljahr um reproduzierende Tätigkeiten (Anforderungsbereich I), was ebenfalls den im Rahmen der Analyse der Schulbuchaufgaben gewonnenen Erkenntnissen entspricht. Diese Auffälligkeit geht mit dem hohen Beitrag dieser Zelle zum Chi-Quadrat einher. Auch die Zelle zu Anforderungsbereich II trug deutlich zum Chi-Quadrat bei, was darauf hinweisen könnte, dass ein prozentualer Anteil von mehr als 20% erwartet wurde.

Beim Vergleich der in den geometrischen Aufgaben enthaltenen kognitiven Anforderungen der Schulbücher und des Unterrichts ist auffällig, dass die Lehrkräfte die zu einem geringen Anteil in den analysierten Schulbüchern enthaltenen Aufgaben mit der Anforderung des Verallgemeinerns und Reflektierens (12%) tendenziell zu einem noch geringeren Anteil (4%) auswählten. Umgekehrt verhielt es sich bei der Betrachtung der prozentualen Anteile geometrischer Aufgaben zu Anforderungsbereich I. Die Lehrkräfte der vorliegenden Stichprobe wählten in größerer Zahl geometrische Aufgaben aus, die Anforderungsbereich I zugeordnet wurden und sich also auf reproduzierende Tätigkeiten beziehen (54%) als durchschnittlich durch die Schulbücher für die vierte Jahrgangsstufe angeboten wurden (25%). Aus dem im Rahmen der Schulbuchanalyse festgestellten kleineren Chi-Quadrat geht hervor, dass sich die Schulbuchaufgaben näher an einer Gleichverteilung befanden und somit ausgewogener verteilt waren als die geometrischen Aufgaben aus den Unterrichtsprotokollen. Abbildung 78 veranschaulicht diese Erkenntnisse.

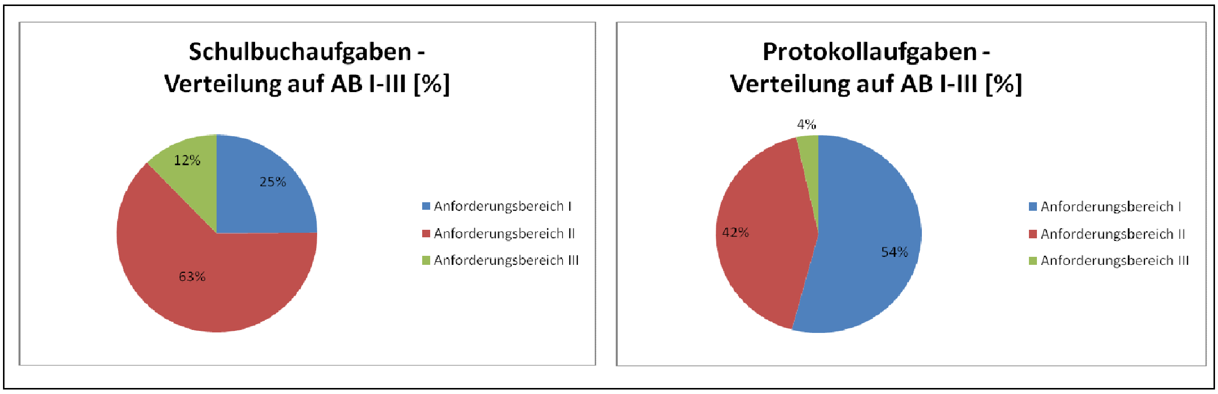


Abbildung 78: Schulbuch- und Protokollaufgaben - Verteilung AB I-III im Vergleich [%].

4. Inwiefern können die Anforderungsbereiche zur Bestimmung der Aufgabenschwierigkeit herangezogen werden?

Um die Eignung des Konzepts der Anforderungsbereiche für die Beschreibung der Aufgabenschwierigkeit zu überprüfen, bearbeiteten 270 rheinland-pfälzische Schülerinnen und Schüler die geometrischen Aufgaben der Teilstudie III, woraus die empirischen Schwierigkeiten ermittelt wurden. Dabei war die durchschnittliche Lösungshäufigkeit der Aufgaben zu Anforderungsbereich I (54%) ähnlich der zu Anforderungsbereich II (51%). Die Aufgaben des Anforderungsbereichs III wurden im Vergleich zu den beiden anderen Anforderungsbereichen tendenziell seltener gelöst (25%).

Bezüglich des anhand der Standardabweichung festgelegten Kriteriums wären die drei Aufgaben, die von weniger als 15,86% der Schülerinnen und Schüler gelöst und somit als „Aufgaben mit hohem empirischen Schwierigkeitsgrad" festgelegt wurden, ausschließlich in Anforderungsbereich III zu finden. Bei der Analyse dieser Aufgaben zeigte sich, dass sie eine hohe Komplexität aufwiesen. Dies geht mit dem Zusammenhang zwischen den hohen kognitiven Anforderungen des Anforderungsbereichs III und der Komplexität einer Aufgabe als schwierigkeitsbestimmender Faktor einher.

Im Hinblick auf die Interpretation der Lösungshäufigkeiten mittels der errechneten durchschnittlichen Lösungshäufigkeit von 43% konnte diese Feststellung insofern bestätigt werden, dass fünf der zu Anforderungsbereich I zugeordneten und vier der zu Anforderungsbereich II zugeordneten Aufgaben höhere Lösungshäufigkeiten aufwiesen und somit leichter wären. Bei den Aufgaben zu Anforderungsbereich III wäre es hingegen lediglich eine Aufgabe (AB3a-4), deren

Lösungshäufigkeit sich unter Berücksichtigung der Schwierigkeitsindizes (Zufalls- und Inangriffnahmekorrektur) zudem so verringern würde, dass sie unter der durchschnittlichen Lösungshäufigkeit liegen würde. Des Weiteren kann aufgrund der genaueren Betrachtung der drei Aufgaben zu Anforderungsbereich I, die von weniger als 43% der Schülerinnen und Schüler gelöst wurden, vermutet werden, dass die geringe Lösungshäufigkeit einer Aufgabe (AB1b-1) durch Faktoren wie mangelhafte Qualität der Aufgabenpräsentation, hoher Textanteil oder fehlendem Umweltbezug bedingt wurde. Bei einer weiteren Aufgabe des Anforderungsbereichs I (AB1a-2) erhöhte sich die Lösungshäufigkeit durch das Zerlegen der Aufgabe. Demzufolge wären sieben der acht geometrischen Aufgaben zu Anforderungsbereich I am Kriterium der durchschnittlichen Lösungshäufigkeit gemessen leichter und keine der Aufgaben zu Anforderungsbereich III.

Es scheint also einen Zusammenhang zwischen dem Konzept der Anforderungsbereiche und der empirischen Aufgabenschwierigkeit zu geben, der sich allerdings lediglich in geringeren durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten bei Aufgaben zu Anforderungsbereich III manifestiert. Aufgaben zu Anforderungsbereich I wiesen im Vergleich zu Anforderungsbereich II zugeordneten Aufgaben ähnliche durchschnittliche Lösungshäufigkeiten auf.

Bei der Betrachtung der einzelnen Aufgaben innerhalb eines Anforderungsbereichs zeigten sich große Unterschiede hinsichtlich der ermittelten empirischen Lösungshäufigkeiten. Demnach kann festgehalten werden, dass die im Rahmen der vorliegenden Erhebung gestellten geometrischen Aufgaben auch innerhalb eines Anforderungsbereichs unterschiedlich schwer zu sein scheinen. Aufgaben, die dem Anforderungsbereich I (Reproduzieren) zugeordnet wurden, waren demzufolge nicht automatisch Aufgaben mit einem geringen empirischen Schwierigkeitsgrad. Dies wiederum führt zu der Schlussfolgerung, dass der ermittelte Zusammenhang nicht deterministisch ist und die Anforderungsbereiche keine verlässliche Hilfe bei der Bestimmung der empirischen Aufgabenschwierigkeit zu bieten scheinen. Die Hypothese (4), dass Aufgaben des Anforderungsbereichs III tendenziell geringere Lösungshäufigkeiten aufweisen als Aufgaben der Anforderungsbereiche I und II, kann dennoch bestätigt werden. Somit konnte sowohl Blums Aussage (Blum 2006, S. 14f) als auch der Hinweis auf der Homepage des nordrhein-westfälischen Landesinstituts für Schule bezüglich der Lösungshäufigkeiten (vgl. Kap. 4.3) im Rahmen der vorliegenden Untersuchung empirisch untermauert werden.

Das Erstellen von Itemkurven/IC-Funktionen zu den erhobenen Daten im Sinne der Item-Response-Theorie war aufgrund der zu geringen Schülerzahl der vorliegenden Untersuchung (N = 270) nicht möglich (Eid & Schmidt, 2014, S. 213f), wäre aber sicherlich in diesem Zusammenhang interessant, um den Items über die empirisch gewonnenen Lösungshäufigkeiten Schwierigkeitsparameter zuzuweisen. Die Erhebung müsste dazu mit einer größeren Anzahl an Aufgaben und Aufgabenbearbeitern repliziert werden.

Darüber hinaus lag der vorliegenden Erhebung das Konzept der empirischen Schwierigkeit zugrunde. Eine Untersuchung im Zusammenhang mit den zahlreichen weiteren schwierigkeitsbestimmenden Aufgabenmerkmalen (vgl. Kap. 3.4) wäre als Ergänzung denkbar.

5. Inwiefern bewältigen Schülerinnen und Schüler, in Abhängigkeit von Leistungsfähigkeit und Geschlecht, die geometrischen Aufgaben aus den drei verschiedenen Anforderungsbereichen?

Um der 5. Fragestellung nachzugehen, wurden die 270 Schülerinnen und Schüler auf der Grundlage der durch den DEMAT 4 ermittelten Testwerte im Subtest Geometrie an der Normstichprobe des DEMAT orientiert in drei Leistungsgruppen (LG 1-3) eingeteilt. Zudem wurden die

Lösungshäufigkeiten beim Bearbeiten der geometrischen Aufgaben hinsichtlich der verschiedenen kognitiven Anforderungen einer Varianzanalyse unterzogen. In Kapitel 5.5 wurde die Hypothese aufgestellt, dass die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler der Stichprobe die geometrischen Aufgaben aller Anforderungsbereiche mit einer größeren Häufigkeit lösen als leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler (Hypothese 5). Bezüglich geschlechtsspezifischer Unterschiede bei den Lösungshäufigkeiten blieb die Frage offen.

Sowohl insgesamt als auch bezüglich der einzelnen Aufgaben kamen die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler (LG 3) der Stichprobe prozentual betrachtet über alle drei Anforderungsbereiche hinweg häufiger zur Lösung als die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler (LG 1). Signifikant unterschieden sich bei der gesamten Betrachtung lediglich LG 1 und LG 3 hinsichtlich der Aufgabenstellungen zu Anforderungsbereich II (Zusammenhänge herstellen). Bei der Analyse der einzelnen Aufgaben über die drei Anforderungsbereiche hinweg ergaben sich zwischen LG 1 und LG 3 bei 14 der 24 Aufgaben signifikante Unterschiede. Die Lösungshäufigkeiten zwischen LG 1 und LG 2 unterschieden sich viermal signifikant und fünfmal zwischen LG 2 und LG 3 über alle drei Anforderungsbereiche hinweg. Somit waren die Unterschiede zwischen LG 1 und LG 3 deutlich häufiger signifikant. Allerdings ist zu bedenken, dass den Leistungsgruppen 1 und 3 die 26% der Schülerinnen und Schüler zugeordnet wurden, die sich bezüglich der T-Werte im Subtest Geometrie des DEMAT am stärksten unterschieden. Daraus kann nun gefolgert werden, dass entweder der Subtest Geometrie nur bedingt geeignet ist zur Einschätzung der Leistungsfähigkeit im geometrischen Bereich oder dass die Varianz zwischen den Leistungsgruppen relativ gering war. Eine weitere Erklärungsmöglichkeit liegt in der Sonderrolle des Kompetenzbereichs Raum und Form. Neben der geschilderten Problematik bei der Einordnung geometrischer Items in die Kompetenzmodelle (vgl. Kap. 2.3.3) wurde bei der Betrachtung der Kompetenzmittelwerte der einzelnen inhaltlichen Bereiche im Zuge des Ländervergleichs 2011 (vgl. Kap. 2.1.2) festgestellt, dass insgesamt die Ergebnisse für den Kompetenzbereich Raum und Form am stärksten von denen für die Globalskala abwichen. Ungeachtet dessen muss für die vorliegende Untersuchung festgehalten werden, dass die in Kapitel 5.5 formulierte Hypothese nicht zufriedenstellend bestätigt werden kann, obgleich alle Unterschiede zwischen den drei Leistungsgruppen dahingehend signifikant waren, dass die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler die geometrischen Aufgaben häufiger lösten als die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler.

Dass im Rahmen der Analyse der einzelnen Aufgaben bei den Anforderungsbereichen I und II häufiger signifikante Unterschiede zwischen LG 1 und LG 3 festgestellt werden konnten als bei Anforderungsbereich III wirft Fragen auf. Manifestieren sich die Unterschiede zwischen unterschiedlich leistungsfähigen Schülerinnen und Schülern vor allem im Bereich des Reproduzierens und des Herstellens von Zusammenhängen? Sollten sich leistungsstärkere und -schwächere Schülerinnen und Schüler nicht gerade beim Bearbeiten von Aufgaben mit höheren kognitiven Anforderungen unterscheiden? Hinsichtlich der Feststellung muss jedoch unbedingt der vergleichsweise geringere prozentuale Anteil an richtig gelösten Aufgaben im Anforderungsbereich III berücksichtigt werden, denn die höheren Lösungshäufigkeiten zu den Anforderungsbereichen I und II machen signifikante Unterschiede wahrscheinlicher. Es stellt sich weiterhin die Frage, ob sowohl die geringen Lösungshäufigkeiten zu den Aufgaben der Anforderungsbereichs III als auch die selteneren signifikanten Unterschiede aus der unbefriedigenden Berücksichtigung von Aufgaben mit höheren kognitiven Anforderungen resultieren könnten, die für die Stichprobe insgesamt festgestellt wurde (Fragestellung 3). Generell ist unklar, welchen Einfluss die Fokussierung der vorliegenden Untersuchung auf paper-pencil-Aufgaben ausübt.

Den bisherigen Erkenntnissen aus Schulleistungsstudien zufolge erzielten die Jungen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich signifikant bessere Leistungen als die Mädchen. Da diesbezüglich innerhalb des Ländervergleichs zum Bereich Raum und Form jedoch der geringste Effekt gefunden wurde (vgl. Kap. 2.1.3), wurde für die vorliegende Untersuchung keine Hypothese formuliert. Bezüglich der Lösungshäufigkeiten zu Teilstudie III waren die festgestellten geschlechtsspezifischen Unterschiede zum größten Teil nicht signifikant beziehungsweise wiesen nach Cohen schwache Effekte zugunsten der Mädchen auf. Lediglich bei einer Aufgabe (AB1a-2) konnte nach Cohen ein mittlerer bis starker Effekt von $d = 0.62$ festgestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler mussten die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten zu drei genannten Körpern in eine Tabelle eintragen, was den Mädchen zu 60% und den Jungen zu 29% gelang. Dies könnte mit den in Kapitel 2.1.3 beschriebenen Erkenntnissen zu den Verhaltensweisen der Mädchen, die als angemessen und besser angepasst wahrgenommen werden, erklärt werden: Nahmen die Mädchen die Aufgabenstellung ernster und arbeiteten sorgfältiger und genauer? Besitzen die Mädchen ein besseres Begriffswissen und Sprachverständnis, weshalb sie die Anzahlen zu den geometrischen Begriffen leichter eintragen konnten? Dies würde mit den festgestellten Leistungsunterschieden im Fach Deutsch einhergehen.

6. Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Geometrieleistungen und den Anforderungen in den Aufgaben im Geometrieunterricht?

Es wurde vermutet, dass Klassen, in denen häufiger Aufgaben mit Anforderungsbereich III gestellt wurden, höhere Lösungshäufigkeiten beim Bearbeiten von Aufgaben mit der Anforderung des Verallgemeinerns und Reflektierens aufweisen. Des Weiteren wurde überprüft, inwiefern sich klassenspezifische Schwerpunktsetzungen im Lösungsverhalten widerspiegeln beziehungsweise inwiefern Zusammenhänge zwischen den im Unterricht gestellten Aufgaben und der Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler bestehen.

Um die Geometrieleistungen mit den Anforderungen der im Unterricht eingesetzten Aufgaben in Zusammenhang zu bringen, erfolgte zunächst die Datenbeschreibung für die Stichprobe insgesamt. Dabei fielen bei IKB 1, 2 und 3 die Lösungshäufigkeiten zu den geometrischen Aufgaben des Anforderungsbereichs III deutlich geringer aus als die zu den Anforderungsbereichen I und II. Bei IKB 4 (Flächen- und Rauminhalte), dem knapp 12% aller den Protokollen entnommenen Aufgaben zugeordnet wurden, zeigte sich eine näherungsweise gleich hohe Lösungshäufigkeit über alle drei Anforderungsbereiche hinweg. Generell entsprachen die Lösungshäufigkeiten kaum den prozentualen Anteilen der den Protokollen entnommenen geometrischen Aufgaben zu den drei Anforderungsbereichen. Die Schülerinnen und Schüler zeigten bei Aufgaben zu Bereichen, zu denen viele Aufgaben gestellt wurden, nicht automatisch höhere Lösungshäufigkeiten. Lediglich die zu IKB 1 (sich im Raum orientieren) geringe Lösungshäufigkeit zu den Aufgaben des Anforderungsbereichs III ging mit dem prozentual kleinen Anteil an gestellten geometrischen Aufgaben im Unterricht einher. Demnach scheint für die vorliegende Stichprobe insgesamt kein Zusammenhang zwischen den im Unterricht eingesetzten geometrischen Aufgaben und dem Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler gegeben zu sein.

Nach der Analyse für die Stichprobe insgesamt wurden Unterschiede zwischen einzelnen Klassen betrachtet. An dieser Stelle bietet es sich an, vorab knapp die Erkenntnisse hinsichtlich des Zusammenhangs der durch die Subtests erfassten mathematischen Teilbereiche Arithmetik, Sachrechnen und Geometrie zu resümieren und die wichtigsten Erkenntnisse zu den Geometrieleistungen zu schildern (vgl. Kap. 7.3).

Bei der Betrachtung der im DEMAT 3+ und im DEMAT 4 erzielten Schülerleistungen der gesamten Stichprobe konnte keine signifikante Leistungsentwicklung innerhalb des Schuljahres, weder für die Subtests noch für den Testgesamtwert, festgestellt werden. Anhand der ermittelten Korrelationen konnten geringe beziehungsweise mittlere Zusammenhänge zwischen der Leistungsfähigkeit der Schüler im geometrischen Bereich und in den Bereichen der Arithmetik (r = .23 beziehungsweise .30) beziehungsweise des Sachrechnens (r = .19 beziehungsweise .20) aufgedeckt werden. Ein mittlerer Zusammenhang von .40 bestand auch zwischen den Leistungen in den Subtests zur Geometrie am Anfang und am Ende des vierten Schuljahres. Der Testgesamtwert korrelierte hoch mit allen drei Bereichen, tendenziell scheint das Gesamttestergebnis allerdings weniger stark mit der Geometrieleistung zusammenzuhängen im Vergleich zu den Leistungen in der Arithmetik und beim Sachrechnen.

Im Rahmen der klassenweisen Analyse wurde für den geometrischen Bereich bei Klasse 12 eine signifikante Verbesserung der Leistungen und bei Klasse 15 ein deutlicher Abfall der Leistungen ermittelt. Für alle anderen Klassen wurde keine signifikante Leistungsveränderung festgestellt. Klasse 12 erzielte für den Subtest Geometrie am Ende des vierten Schuljahres den höchsten durchschnittlichen T-Wert, Klasse 15 den niedrigsten. Lehrkraft 12 protokollierte 1720 Minuten Geometrieunterricht und 232 geometrische Aufgaben, Lehrkraft 15 protokollierte 350 Minuten Geometrieunterricht und 15 Aufgaben. Obgleich sich eine Tendenz andeutet, kann auf der Basis des vorliegenden Untersuchungsdesigns keine Aussage dazu getroffen werden, in welchem Ausmaß die quantitativen Unterrichtsaspekte die Geometrieleistungen der Schülerinnen und Schüler beeinflussten.

Bezieht man in die Betrachtungen zusätzlich die Anforderungen der im Schuljahr bearbeiteten Aufgaben und die Lösungshäufigkeiten beim Bearbeiten der Aufgaben in Teilstudie III mit ein, so gab es einige Klassen, die hohe Lösungshäufigkeiten bei Aufgaben mit hohen kognitiven Anforderungen (AB III) erbrachten, obwohl deren Lehrkräfte ausschließlich auf das Reproduzieren bezogene Aufgaben protokollierten. Von Klassen, in denen vielfältige Aufgaben gestellt und die Quantität zufriedenstellend war, erbrachten einige unterdurchschnittliche Leistungen beim Bearbeiten der Aufgaben mit verschiedenen Anforderungen, andere überdurchschnittliche. Erinnert sei an dieser Stelle an die Klasse, in der Aufgaben zu Würfelbauten einen hohen Bekanntheitsgrad hätten haben sollen, die Schülerinnen und Schüler im Vergleich zur Gesamtstichprobe jedoch keine höheren Lösungshäufigkeiten erbrachten beziehungsweise geübte Aufgabenformate nicht bewältigen konnten. Ebenso gab es Klassen mit hohen T-Werten im Subtest Geometrie am Ende der vierten Klassenstufe, wobei einige Klassen beim Bearbeiten der Aufgaben in Teilstudie III gute durchschnittliche Lösungshäufigkeiten erzielten und andere Klassen Leistungen erbrachten, die unter dem Durchschnitt der gesamten Stichprobe lagen. Beim Vergleich der Klassen 12 und 15, deren signifikante Leistungsentwicklung soeben gemeinsam mit den aus den Protokollen gewonnenen Angaben zum Geometrieunterricht resümiert wurde, zeigte sich, dass in Klasse 12 deutlich mehr schriftlich fixierte Aufgaben zu den Anforderungsbereichen II und III gestellt wurden als in Klasse 15. Die Schülerinnen und Schüler der Klasse 12 erbrachten höhere durchschnittliche Leistungen beim Bearbeiten der Aufgaben aus Teilstudie III. Die durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten beider Klassen lagen jedoch über dem Durchschnitt der Gesamtstichprobe.

Wie bereits für die Stichprobe insgesamt festgehalten wurde, scheint ein Zusammenhang zwischen den im Geometrieunterricht eingesetzten Aufgaben und den Leistungen im geometrischen Bereich, die mittels des Subtests zur Geometrie des DEMAT und der Lösungshäufigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgaben aus Teilstudie III erfasst wurden, nicht gegeben zu sein. Dies resultiert unter anderem aus dem vorliegenden Untersuchungsdesign und den damit einhergehenden unkontrollierbaren Faktoren, die die Art und Weise der Bewältigung verschiedener kognitiver Anforderungen durch die Schülerinnen und Schüler beeinflussen. Die Hypothese, dass Klassen, in denen im Geometrieunterricht häufiger Aufgaben mit Anforderungsbereich III gestellt wurden, höhere Lösungsraten beim Bearbeiten von Aufgaben mit der Anforderung des Verallgemeinerns und Reflektierens aufweisen (Hypothese 6), kann auf der Grundlage der gewonnenen Daten nicht bestätigt werden. Es ist davon auszugehen, dass unter anderem der jeweilige Einsatz von Aufgaben mit den verschiedenen Anforderungen in anderen Fächern das Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten geometrischer Aufgaben beeinflusst, sodass zur Überprüfung ein experimentelles Design notwendig wäre. Zu betonen ist an dieser Stelle abschließend die Besonderheit geometrischer Inhalte, die darin besteht, dass diese in zahlreichen anderen Fächern zu finden sind (vgl. Kap. 1).

10.2 Praktische Implikationen und Ausblick

Aus der doppelten Schwerpunktsetzung der vorliegenden Erhebung heraus wurden zunächst theoretische Grundlagen zum Geometrielernen geschaffen, wobei vor allem die Bedeutsamkeit des geometrischen Lernens aufgezeigt wurde. Obgleich es nur wenige Untersuchungen zur Realisierung geometrischer Inhalte im Rahmen des Mathematikunterrichts gibt, sind die Hinweise auf deren Randdasein zahlreich in der Literatur zu finden. Durch das Zusammentragen der geometrischen Aufgaben aus Schulbüchern und Protokollen zum Geometrieunterricht des vierten Schuljahres wurde festgestellt, dass innerhalb der vorliegenden Stichprobe der Anteil geometrischer Inhalte sowohl in den Schulbüchern (15%) als auch im Mathematikunterricht (8%) quantitativ betrachtet gering war. Eine weitere Erkenntnis war die Dominanz an Aufgaben zu geometrischen Figuren mit einem prozentualen Anteil von mehr als 40%. Aufgrund der Feststellung, dass bei keiner der 16 Lehrkräften eine starke Orientierung am Schulbuch zu erkennen war, scheint es fraglich, ob mit der Erhöhung der geometrischen Inhalte in den Schulbüchern die Erhöhung des Geometrieanteils am Mathematikunterricht einhergehen kann beziehungsweise soll. Eine Erhebung zum Einfluss des Schulbuchs auf den Mathematik- und Geometrieunterricht könnte erste Erkenntnisse liefern. Generell bleibt die Frage offen, wie die Erhöhung des quantitativen Geometrieanteils und somit die regelmäßige Integration geometrischer Inhalte in den Mathematikunterricht besser gelingen könnte.

Der zweite Schwerpunkt der vorliegenden Erhebung lag auf den in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen, die die kognitiven Anforderungen an Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben beschreiben und nach der möglichen kognitiven Komplexität von Aufgaben strukturiert sind. Da sie bislang empirisch nicht validiert sind und in den Veröffentlichungen der Bildungsstandards nicht klar zur Schwierigkeit von Aufgaben abgegrenzt werden, wurden sie zum Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Durch die hohe Beurteilerübereinstimmung bei der Zuordnung der geometrischen Aufgaben aus den Schulbüchern und Protokollbögen konnten erste Hinweise dafür geliefert werden, dass die Einteilung in drei Anforderungsbereiche für Lehrkräfte nützlich, anwendbar und transparent zu sein scheint. Weiterführend könnte die Möglichkeit der übereinstimmenden Zuordnung von Aufgaben der anderen mathematischen Leitideen, beispielsweise arithmetische Aufgabenstellungen, überprüft werden.

Auf diesen Daten basierend wurden die kognitiven Anforderungen in den geometrischen Aufgaben der vorliegenden Stichprobe ermittelt, wobei durch die Schulbücher der Fokus auf Aufgaben mit

Anforderungsbereich II gelegt wurde und die Lehrkräfte im Geometrieunterricht verstärkt Aufgaben einsetzten, die reproduzierende Tätigkeiten von den Schülerinnen und Schülern verlangten (Anforderungsbereich I). Darüber hinaus wurde festgestellt, dass die Lehrkräfte die zu einem geringen Anteil in den analysierten Schulbüchern enthaltenen Aufgaben mit der Anforderung des Verallgemeinerns und Reflektierens (12%) tendenziell zu einem noch geringeren Anteil (4%) auswählten. Diese Erkenntnisse gehen nicht mit dem im Zuge der internationalen Schulleistungsstudien für die deutschen Schülerinnen und Schüler formulierten Ziel einher, das in der Verbesserung der Leistungen beim Bearbeiten kognitiv anspruchsvoller Aufgaben besteht. Hinzu kommt die Verortung der Untersuchung im vierten Schuljahr, das sich innerhalb der Grundschulzeit vor allem für die Integration von Aufgaben mit kognitiv höheren Anforderungen (AB III) eignen würde. Da die im Rahmen der vorliegenden Untersuchung gewonnenen Erkenntnisse lediglich die schriftlich fixierten Aufgaben betreffen, stellt sich die Frage, welche Anforderungen die mündlich gestellten geometrischen Aufgaben beinhalteten beziehungsweise ob diese gegebenenfalls höhere Anforderungen enthielten. Aufschlussreich wäre zudem eine Untersuchung zu den kognitiven Anforderungen in den Aufgaben der weiteren mathematischen Leitideen, in anderen Fächern und in anderen Schulstufen. Darüber hinaus könnte eine Folgeuntersuchung, in der die eingesetzten und den drei Anforderungsbereichen zugeordneten geometrischen Aufgaben dem Modell nach Maier zugewiesen werden, genauere Hinweise dazu liefern, welche Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens den verschiedenen kognitiven Anforderungen entsprechen, um so einen gezielteren Einsatz von geometrischen Aufgaben des Anforderungsbereichs III zu ermöglichen.

Die vorliegende Erhebung versuchte des Weiteren zu klären, ob ein Zusammenhang zwischen den Anforderungsbereichen und der empirischen Schwierigkeit von Aufgaben besteht (Hinweise zu möglichen Erweiterungen der Untersuchung erfolgten bereits in Kap. 10.1). Dabei wurde deutlich, dass Aufgaben des Anforderungsbereichs III zwar tendenziell empirisch schwieriger zu sein scheinen als Aufgaben der Anforderungsbereiche I und II, dass der Zusammenhang zwischen Anforderungsbereichen und empirischer Aufgabenschwierigkeit jedoch nicht linear zu sein scheint. Aufgrund dieser Hinweise sollten die beiden Begriffe zugunsten der Transparenz für die Lehrkräfte nicht gemeinsam verwendet werden. Der Nutzen der Anforderungsbereiche sollte deutlicher formuliert werden, vor allem da eine eindeutige Zuordnung von Aufgaben und somit die Entwicklung einer anforderungsbezogenen Aufgabenkultur möglich zu sein scheint und die Möglichkeit der Einflussnahme auf die Beachtung aller Anforderungsbereiche durch die Gestaltung der Schulbücher, vor allem für den Geometrieunterricht, in Frage zu stellen ist.

Bezüglich der Bearbeitung der geometrischen Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen durch unterschiedlich leistungsfähige Schülerinnen und Schüler wurden keine zufriedenstellenden Ergebnisse gewonnen. Dennoch war die Tendenz zu erkennen, dass die als leistungsstärker eingestuften Schülerinnen und Schüler der vorliegenden Stichprobe die geometrischen Aufgaben über alle drei Anforderungsbereiche hinweg häufiger lösten als die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler. Eventuell kann durch die transparentere Darstellung des Nutzens der Anforderungsbereiche zukünftig allen Schülerinnen und Schülern, auch den leistungsstärkeren, besser Rechnung getragen und den aus Schulleistungsstudien gewonnenen Erkenntnissen zielführender begegnet werden. Durch eine stärkere beziehungsweise ausgewogenere Berücksichtigung der drei Anforderungsbereiche könnte somit tatsächlich einem vorwiegend auf Routinen und Verfahren und somit auf Reproduktion ausgerichteten Unterricht vorgebeugt werden mit dem Ziel, allen Schülerinnen und Schülern durch die Variation der Anforderungen gerecht zu werden und deren Potenzial auszuschöpfen.

Für die im Geometrieunterricht eingesetzten Aufgaben und die Leistungen im geometrischen Bereich konnte kein Zusammenhang aufgedeckt werden. Da davon auszugehen ist, dass der jeweilige Einsatz von Aufgaben mit den verschiedenen Anforderungen in anderen Fächern das Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten geometrischer Aufgaben beeinflusst und geometrische Inhalte in zahlreichen anderen Fächern zu finden sind, müssten die schriftlich fixierten Aufgaben in allen Fächern einer Jahrgangsstufe analysiert werden, um Aussagen gewinnen zu können.

Vor dem Hintergrund der Erkenntnisse aus Schulleistungsstudien und der Vorgaben in den national verbindlichen Bildungsstandards bleibt zu hoffen, dass die vorliegende Arbeit hinsichtlich der Akzeptanz der sich als nützlich, anwendbar und transparent erwiesenen Einteilung in drei Anforderungsbereiche und der darauf basierenden Möglichkeit einer stärkeren Berücksichtigung kognitiv anspruchsvoller Aufgaben im Geometrieunterricht im vierten Schuljahr der Grundschule einen Beitrag leisten konnte. Des Weiteren wäre es wünschenswert, dass der Begriff der Aufgabenschwierigkeit im Zusammenhang mit den Anforderungsbereichen vorsichtiger beziehungsweise konkreter verwendet und der Anteil geometrischer Inhalte in Schulbüchern und im Unterricht gesteigert wird.

Abkürzungsverzeichnis

AB	Anforderungsbereiche
AB I	Anforderungsbereich I: Reproduzieren
AB II	Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen
AB III	Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren
DEMAT	Deutscher Mathematiktest
IEA	Association for the Evaluation of Educational Achievement
IGLU	Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung (= PIRLS)
IKB	Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche
IKB 1	„sich im Raum orientieren"
IKB 2	„geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen"
IKB 3	„einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen"
IKB 4	„Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen"
IPN	Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN)
IQB	Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen
KMK	Kultusministerkonferenz
LOGIK	Longitudinale Genese individueller Kompetenzen
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OECD	Organisation for Economic Co-operation and Development Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung
PIK AS	Prozessbezogene und Inhaltsbezogene Kompetenzen und Anregung von fachbezogener Schulentwicklung
PIRLS	Progress in International Reading Literacy Study (= IGLU)
PISA	Programme for International Student Assessment
SCHOLASTIK	Schulorganisierte Lernangebote und Sozialisation von Talenten, Interessen und Kompetenzen
SINUS	Projekt zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study
VERA	Vergleichsarbeiten

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1983). Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Medien und Inhalte didaktischer Kommunikation, der Lernzyklus. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1987). Grundlagen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Stuttgart: Klett-Cotta.

Anderson, L.W. & Krathwohl, D.R. (Eds.) (2001). A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing. A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. New York: Longman.

Artelt, C. & Riecke-Baulecke, T. (2004). Bildungsstandards. Schulmanagement-Handbuch 111. München: Oldenbourg.

Artelt, C., Stanat, P., Schneider, W. & Schiefele, U. (2001). Lesekompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 69-137). Opladen: Leske + Budrich.

Asbrand, B.; Heller, N. & Zeitler, S. (2012). Die Einführung von Bildungsstandards in das deutsche Bildungssystem. In S. Zeitler, N. Heller & B. Asbrand (Hrsg.), *Bildungsstandards in der Schule. Eine rekonstruktive Studie zur Implementation der Bildungsstandards* (S. 11-21). Münster: Waxmann.

Ausubel, D.P. (1974). Psychologie des Unterrichts Band 1. Weinheim und Basel: Beltz.

Backe-Neuwald, D. (1998). Über den Geometrieunterricht in der Grundschule. Ergebnisse einer schriftlichen Befragung von LehrerInnen und LehramtsanwärterInnen. In: *Mathematische Unterrichtspraxis I*, S. 1-12.

Backe-Neuwald, D. (2000). Bedeutsame Geometrie in der Grundschule - aus Sicht der Lehrerinnen und Lehrer, des Faches, des Bildungsauftrages und des Kindes. Dissertation. Paderborn.

Bauer, L. (1978). Mathematische Fähigkeiten. Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben. Paderborn: Schöningh.

Bauersfeld, H. (1993a). Die Tragödie der Grundschullehrerausbildung. In H. Bauersfeld & R. Bromme (Hrsg.), *Bildung und Aufklärung. Studien zur Rationalität des Lehrens und Lernens. Festschrift für H. Skowronek zum 60. Geburtstag* (S. 137-161). Münster: Waxmann.

Bauersfeld, H. (1993b). Grundschul-Stiefkind Geometrie. In: *Die Grundschulzeitschrift,* 62, S. 8-11.

Bauersfeld, H. (2003). „Gute" Aufgaben versus Problemsituationen. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 15-24). Offenburg: Mildenberger.

Baumert, J.; Artelt, C.; Klieme, E. & Stanat, P. (2001). PISA. Programme for International Student Assessment. Zielsetzung, theoretische Konzeption und Entwicklung von Messverfahren. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 285-310). Weinheim und Basel: Beltz.

Baumert, J.; Bos, W. & Lehmann, R. (2000). TIMSS/III. Dritte internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J. & Schümer, G. (2001). Familiäre Lebensverhältnisse, Bildungsbeteiligung und Kompetenzerwerb. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 323-407). Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J.; Stanat, P. & Demmrich, A. (2001). PISA 2000: Untersuchungsgegenstand, theoretische Grundlagen und Durchführung der Studie. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 15-68). Opladen: Leske + Budrich.

Besuden, H. (1984a). Die Förderung der Raumvorstellung im Geometrieunterricht. In H. Besuden (Hrsg.), *Knoten, Würfel, Ornamente, Aufsätze zur Geometrie in Grund- und Hauptschule, Herausgegeben von J. Hayen* (S. 70-73). Stuttgart: Klett.

Besuden, H. (1984b). Die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens in der Grundschule. In H. Besuden (Hrsg.), *Knoten, Würfel, Ornamente, Aufsätze zur Geometrie in Grund- und Hauptschule, Herausgegeben von J. Hayen* (S. 64-69). Stuttgart: Klett.

Besuden, H. (1984c). Geometrie in der Grundschule. In H. Besuden (Hrsg.), *Knoten, Würfel, Ornamente, Aufsätze zur Geometrie in Grund- und Hauptschule, Herausgegeben von J. Hayen* (S. 74-81). Stuttgart: Klett.

Bildungsserver Rheinland-Pfalz, unter: http://lernen-in-vielfalt.bildung- rp.de/materialien/ differenzieren/differenzierung-nach-aufgabenschwierigkeit-vertikale-differenzierung.html [13.06.2014].

Bloom, B.S.; Engelhart, M.D.; Furst, E.J.; Hill, W.H. & Krathwohl, D.R. (1972). Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich. Übersetzt von Eugen Füner und Ralf Horn mit einem Nachwort von Rudolf Messner. Weinheim und Basel: Beltz.

Blum, W. (2006). Einführung. In W. Blum, Ch. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32). Berlin: Cornelsen.

Blum, W.; Drüke-Noe, Ch., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.) (2006). Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen

Blum, W.; Neubrand, M.; Ehmke, T.; Senkbeil, M.; Jordan, A.; Ulfig, F. & Carstensen C.H. (2004). Mathematische Kompetenz. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 47-92). Münster: Waxmann.

Blum, W. & Wiegand, B. (2000). Offene Aufgaben - wie und wozu? In: *Mathematik lehren*, 100, S. 52-55.

Böhme, K. & Roppelt, A. (2012). Geschlechtsbezogene Disparitäten. In P. Stanat, H.A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 173-189). Münster: Waxmann.

Böhme, K.; Richter, D.; Stanat, P.; Pant, H.A. & Köller, O. (2012). Die länderübergreifenden Bildungsstandards in Deutschland. In P. Stanat, H.A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 11-18). Münster: Waxmann.

Brehl, Th.; Wendt, H. & Bos, W. (2012). Kapitel VI. Geschlechtsspezifische Unterschiede in mathematischen und naturwissenschaftlichen Kompetenzen. In W. Bos; H. Wendt; O. Köller & Chr. Selter (Hrsg.), *TIMSS 2011. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 203-230). Münster: Waxmann.

Bromme, R.; Seeger, F. & Steinbring, H. (1990). Aufgaben, Fehler und Aufgabensysteme. In R. Bromme, F. Seeger & H. Steinbring (Hrsg.), *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (S. 1-30). Köln: Aulius Verlag Deubner & Co KG.

Bruder, R. (1995). Erfahrungen zur Binnendifferenzierung in einer 7. Klasse. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht, 1995, S.* 126-129.

Bruner, J.S. (1966). Über kognitive Entwicklung. In J.S. Bruner, R.R. Olver & P.M. Greenfield (Hrsg.), *Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am "Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität* (S. 21-53). Stuttgart: Klett.

Bruner, J.S. (1973). Der Akt der Entdeckung. In H. Neber (Hrsg.), *Entdeckendes Lernen* (S. 15-27). Weinheim und Basel: Beltz.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen.

Burger, W.F. & Shaughnessy (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, pp. 31-48.

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A.G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Criblez, L.; Oelkers, J.; Reusser, K.; Berner, E.; Halbheer, U. & Huber, Ch. (2009). Bildungsstandards. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Crowley, M.L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In: *Learning and Teaching Geometry, K-12, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1-16), unter: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.456.5025&rep=rep1&type=pdf [04.01.2016].

de Moor, E. & van den Brink, J. (1997). Geometrie vom Kind und von der Umwelt aus. In: M*athematik lehren*, 83, S. 14-17.

Department for Education and Employment (1999). Mathematics. The National Curriculum for England. Key stages 1-4. London, unter: http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20101221004558/http:/curriculum.qcda.gov.uk/uploads/Mathematics%201999%20programme%20of %20study_tcm8-12059.pdf [1.1.2016].

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research* 53, pp. 159-199.

Dürr, R. & Rechtsteiner-Merz, Ch. (2007). Niveaukonkretisierungen. Eine Chance alle Kinder herauszufordern. In: *Die Grundschulzeitschrift,* Jg. 21, Heft 207, S. 36-42.

Ehmke, T. & Jude, N. (2010). Soziale Herkunft und Kompetenzerwerb. In E. Klieme; C. Artelt; J. Hartig; N. Jude; O. Köller; M. Prenzel; W. Schneider & P. Stanat (Hrsg.), *PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt* (S. 231-253). Münster: Waxmann.

Eid, M. & Schmidt, K. (2014). Testtheorie und Testkonstruktion. Göttingen: Hogrefe.

Eidt, H.; Lammel, R.; Voß, E. & Wichmann, M. (2009). Denken und Rechnen 4. Braunschweig: Westermann.

Euen, B.; Wendt, H. & Bos, W. (2012). Germany. In I.V.S. Mullis, M.O. Martin, Ch.A. Minnich, G.M. Stanco, A. Arora, V.A.S. Centurino & C.E. Castle, *TIMSS 2011 Encyclopedia. Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science, Volume 1: A-K* (S. 313-339). Boston: IEA.

Fennema, E. (1975). Spatial ability, mathematics and the sexes. In E. Fennema (Eds.), *Mathematics Learning. What research says about sex differences* (pp. 33-43). Ohio: ERIC.

Fisher-Hoch, H. & Hughes, S. (1996). What Makes Examination Questions Difficult? Paper presented at BERA conference, September 1996, unter: http://www.cambridgeassessment.org.uk/Images/109643-what-makes-mathematics-exam-questions-difficult-.pdf [30.12.2015].

Fleiss, J.L.; Levin, B. & Paik, M.Ch. (2003). Statistical Methods for Rates and Proportions. Third Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, unter: http://www.graphpad.com/quickcalcs/kappa1/?K=3 [28.07.2014].

Franke, M. (2009). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). Didaktik der Geometrie. In der Grundschule. Berlin: Springer.

Freißler, W. & Mayr, O. (2007). Bildungsstandards Mathematik. Testaufgaben für alle weiterführenden Schularten. Augsburg: Brigg.

Freudenthal, H. (1981). Geometrie in der Grundschule. In H.-G. Steiner & B. Winkelmann (Hrsg.), *Fragen des Geometrieunterrichts, Band 1* (S. 87-98). Köln: Aulis.

Frey, A.; Heinze, A.; Mildner, D.; Hochweber, J. & Asseburg, R. (2010). Mathematische Kompetenz von PISA 2003 bis PISA 2009. In E. Klieme; C. Artelt; J. Hartig; N. Jude; O. Köller; M. Prenzel; W. Schneider & P. Stanat (Hrsg.), *PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt* (S. 153-176). Münster: Waxmann.

Frostig, M.; Horne, D. & Miller, A.M. (1972). Wahrnehmungstraining. Anweisungsheft für deutsche Verhältnisse bearbeitet und herausgegeben von A. Reinartz und E. Reinartz. Aus dem Amerikanischen übersetzt von E. Sander. Dortmund: Crüwell.

Frühwacht, A. (2012). Bildungsstandards in der Grundschule. Bildungsstandards und Vergleichsarbeiten aus der Sicht von deutschen und finnischen Lehrkräften. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2008). Mathehaus 4.Berlin: Cornelsen.

Gagné, R.M. (1973). Arten des Lernens und der Begriff der Entdeckung. In H. Neber (Hrsg.), *Entdeckendes Lernen* (S. 127-142). Weinheim und Basel: Beltz.

Gardner, H. (1991). Abschied vom IQ. Die Rahmen-Theorie der vielfachen Intelligenzen. Aus dem Amerikanischen übersetzt von Malte Heim. Stuttgart: Klett-Cotta.

Gardner, H. (2002). Intelligenzen. Die Vielfalt des menschlichen Geistes. Aus dem Amerikanischen von Ute Spengler. Stuttgart: Klett-Cotta.

Gerstenmaier, J. & Mandl, H. (2000). Wissensanwendung im Handlungskontext: Die Bedeutung intentionaler und funktionaler Perspektiven für den Zusammenhang von Wissen und Handeln. In J. Gerstenmaier & H. Mandl (Hrsg.), *Die Kluft zwischenWissen und Handeln. Empirische und theoretische Lösungsansätze* (S. 289-321). Göttingen: Hogrefe.

Gierlinger, W. (2009). Zahlenzauber 4. Mathematikbuch für die Grundschule. München: Oldenbourg.

Granzer, D. (2008). Wie sich Qualität entwickeln soll. Strategische Setzungen der Bildungspolitik. In: *Grundschule,* 10, S. 16-18.

Granzer, D. & Hornberg, S. (2008). Grundschule auf dem Prüfstand. Bildungsstandards und Schulleistungsstudien in der Bundesrepublik. In: *Grundschule,* 10, S. 6-10.

Granzer, D. & Walther, G. (2008). Standards, keine Standardaufgaben! Gute Aufgaben für die länderübergreifenden Bildungsstandards in Mathematik. In: *Grundschule,* 4, S. 6-10.

Grassmann, M.; Eichler, K.-P.; Mirwald, E. & Nitsch, B. (2014). Mathematikunterricht Band 5. Herausgegeben von Astrid Kaiser und Susanne Miller, aus der Reihe Kompetent im Unterricht der Grundschule. Baltmannsweiler: Schneider.

Grassmann, M.; Kirchmann, S.; Klunter, M.; May-Hansen, B.; Ponge, S.; Porsch, U. et al. (2010). Primo Mathematik 4. Braunschweig: Schroedel.

Grüßing, M. (2012). Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung. Eine empirische Studie mit Kindern im 4. Schuljahr. Münster: Waxmann.

Guay, R.B. & McDaniel, E.D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. In: *Journal for Research in Mathmatics Education*, 8, pp. 211-215.

Haag, N. & Roppelt, A. (2012). Der Ländervergleich im Fach Mathematik. In P. Stanat, H.A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 117-127). Münster: Waxmann.

Halpern, D.F. (2012). Sex differences in cognitive abilities (4. Aufl.). New York: Psychology Press.

Hasemann, K. (2007). Anfangsunterricht Mathematik. Berlin Heidelberg: Springer.

Heller, N. & Asbrand, B. (2012). Der Einsatz von kompetenzorientierten Aufgaben im Unterricht. In S. Zeitler; N. Heller & B. Asbrand (Hrsg.), *Bildungsstandards in der Schule. Eine rekonstruktive Studie zur Implementation der Bildungsstandards* (S. 222-230). Münster: Waxmann.

Helmke, A. (2009). Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Hergert, W. (2006). Typen von Aufgaben. In W. Blum, Ch. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 178-193). Berlin: Cornelsen.

Heuvel-Panhuizen, M.v.d. (2003). Die Geschichte der „Realistic Mathematics Education" anhand von Aufgaben erläutert. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 25-39). Offenburg: Mildenberger.

Hiebert, J. (1999). Relationships Between Research and the NCTM Standards. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (1), pp. 3-19.

Hoffer, A.R. (1977). Mathematics Resource Project. Geometry and Visualization. USA: Creative Publications.

Hofmeister, W. (2005). Erläuterung der Klassifikationsmatrix zum ULME-Kompetenzstufenmodell. In bwp@ - Berufs- und Wirtschaftspädagogik online, Heft 8/2005 (ISSN 1618-8543), unter: http://www.bwpat.de/ausgabe8/hofmeister_bwpat8.shtml [01.01.2016].

Hornschuh, H.-D. (2012). Vorbereitung auf Vergleichsarbeiten an Grundschulen. Übungsheft für die dritte Jahrgangsstufe. Offenburg: Mildenberger.

Hosenfeld, I.; Groß Ophoff, J. & Bittins, P. (2006). Vergleichsarbeiten und Schulentwicklung. Schulmanagement-Handbuch 118. München: Oldenbourg.

Ingenkamp, K. (2008). Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik. Weinheim und Basel: Beltz.

IQB: Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen, unter: https://www.iqb.hu-berlin.de [16.01.2016].

Jude, N. & Klieme, E. (2010). Das Programme for International Student Assessment (PISA). In E. Klieme; C. Artelt; J. Hartig; N. Jude; O. Köller; M. Prenzel; W. Schneider & P. Stanat (Hrsg.), *PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt* (S. 11-21). Münster: Waxmann.

Käpnick, F. (2003). Aufgabenformate für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Grundschulkinder. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 169-181). Offenburg: Mildenberger.

Käpnick, F. (2014). Mathematiklernen in der Grundschule. Berlin: Springer.

Kempinsky, H. (1952). Lebensvolle Raumlehre. Anleitungen zu einem wesenhaften Raumkundeunterricht. Bonn: Dürrschen.

Klauer, K.J. (2001). Wie misst man Schulleistungen? In F.E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 103-115). Weinheim und Basel: Beltz.

Klauer, K.J. & Leutner, D. (2007). Lehren und Lernen. Einführung in die Instruktionspsychologie. Weinheim und Basel: Beltz.

Klieme, E. (1986). Bildliches Denken als Mediator für Geschlechtsunterschiede beim Lösen mathematischer Probleme. In H.-G. Steiner (Hrsg.), *Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten, Band 13* (S. 133-151). Köln: Aulis.

Klieme, E.; Avenarius, H.; Blum, W.; Döbrich, P.; Gruber, H.; Prenzel, M. et al. (Hrsg.) (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. Bonn: BMBF.

Klieme, E.; Jude, N.; Baumert, J. & Prenzel, M. (2010). PISA 2000-2009: Bilanz der Veränderungen im Schulsystem. In E. Klieme; C. Artelt; J. Hartig; N. Jude; O. Köller; M. Prenzel; W. Schneider & P. Stanat (Hrsg.), *PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt* (S. 277-300). Münster: Waxmann.

Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG. In: *Zeitschrift für Pädagogik,* 52 (6), S. 876-903.

Klieme, E.; Neubrand, M. & Lüdtke, O. (2001). Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 141-191). Opladen: Leske + Budrich.

Köller, O. (2008). Bildungsstandards in einem Gesamtsystem der Qualitätssicherung im allgemein bildenden Schulsystem Deutschlands. In E. Klieme & R. Tippelt (Hrsg.), *Qualitätssicherung im Bildungswesen. Eine aktuelle Zwischenbilanz. Zeitschrift für Pädagogik. 53. Beiheft* (S. 59-75). Weinheim und Basel: Beltz.

Köller, O. & Baumert, J. (2008). Entwicklung schulischer Leistungen. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), *Entwicklungspsychologie* (S. 735-768). Weinheim: Beltz.

Köller, O.; Baumert, J. & Bos, W. (2001). TIMSS. Third International Mathematics and Science Study: Dritte internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 269-284). Weinheim und Basel: Beltz.

König-Wienand, A., Langer, K.-H. & Lewe, H. (2003). Selbstständiges Lernen fördern! Gute Aufgaben können dabei helfen. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 40-55). Offenburg: Mildenberger.

Krathwohl, D.R. (2002). A Revision of Bloom´s Taxonomy: An Overview. In Theory into Practice, Volume 41, Number 4, Autumn 2002. Ohio: College of Education, unter: http://www.unco.edu/cetl/sir/stating_outcome/documents/Krathwohl.pdf [02.01.2016].

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2001). Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Kreitzer, A.E. & Madaus, G.F. (1994). Empirical investigations of the hierarchical structure of the taxonomy. In L.W. Anderson & L.A. Sosniak (Eds.), *Bloom´s taxonomy: A forty-year retrospective.* Ninety-third yearbook for the National Society for the Study of Education: Part II (pp. 64-81). Chicago: University of Chicago Press.

Krutetskii, V.A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Translated from the Russian by J. Teller, Edited by J. Kilpatrick & I. Wirszup. Chicago and London: Chicago University Press.

Kultusministerkonferenz (KMK), unter: http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/ueberblick.html [16.01.2016].

Kultusministerkonferenz (2004a). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Deutsch für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). München: Luchterland, Wolters Kluwer.

Kultusministerkonferenz (2004b). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Luchterland, Wolters Kluwer.

Kultusministerkonferenz (2005a). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). München: Luchterland, Wolters Kluwer.

Kultusministerkonferenz (2005b). Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung. München: Luchterland, Wolters Kluwer.

Kultusministerkonferenz (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.

Kultusministerkonferenz & IQB (2013). Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4), unter: http://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm [08.08.2013].

Leininger, P.; Ernst, G.; Kistella, A. & Wallrabenstein, H. (2005). Nussknacker. Unser Rechenbuch für Klasse 4. Leipzig: Klett.

Lenné, H. (1969). Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart: Klett.

Leuders, T. (2006). Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. In W. Blum, Ch. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S.81-95). Berlin: Cornelsen.

Lienert, G.A. & Raatz, U. (1998). Testaufbau und Testanalyse. München: Psychologie Verlags Union.

Linn, M.C. & Petersen, A.C. (1986). A Meta-analysis of Gender Differences in Spatial Ability: Implications for Mathematics and Science Achievement. In J.S. Hyde & M.C. Linn (Eds.), *The psychology of gender - Advances through a meta-analysis* (pp. 67-101).Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Lorenz, J.H. (Hrsg.) (2005). Mathematikus 4. Braunschweig: Westermann.

Lüthje, Th. (2010). Das räumliche Vorstellungsvermögen von Kindern im Vorschulalter. Ergebnisse einer Interviewstudie. Berlin: Edission.

Maier, P.H. (1999). Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen. Mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht. Donauwörth: Auer.

Martin, M.O. & Kelly, D.L. (1996).Third International Mathematics and Science Study. Technical Report. Volume I: Design and Development. Boston: Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy.

Metzger, C.; Waibel, R.; Henning, C.; Hodel, M. & Luzi, R. (1993). Anspruchsniveau von Lernzielen und Prüfungen im kognitiven Bereich. St. Gallen: IWP (Hochschuldidaktische Schriften, Band 6).

Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend (Hrsg.) (2002). Rahmenplan Grundschule. Allgemeine Grundlegung Teilrahmenplan Mathematik. Grünstadt: Sommer.

Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend (Hrsg.) (2014). Rahmenplan Grundschule. Teilrahmenplan Mathematik. Grünstadt: Sommer.

Ministry of Education (2005). The Ontario Curriculum Grades 1-9. Mathematics. Ontario.

Müller-Wolfangel, U.; Schreiber, B. & Heilig, S. (2007). DUDEN. Einfach klasse in Mathematik. Wissen – Üben – Können. Grundschule 4. Klasse. Mannheim: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Beaton, A.E., Gonzalez, E.J., Kelly, D.L. & Smith, T.A. (1997). Mathematics Achievement in the Primary School Years: IEA´s Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Chestnut Hill, MA, unter: http://timssandpirls.bc.edu/timss1995i/TIMSSPDF/amtoc.pdf [17.09.2015].

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O. & Foy, P. (2005). IEA´s TIMSS 2003 International Report on Achievement in the Mathematics Cognitive Domains: Findings from a Developmental Project. Chestnut Hill, MA, unter: http://timssandpirls.bc.edu/PDF/t03_download/T03MCOGDRPT.pdf [29.12.2015].

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Gonzalez, E.J. & Chrostowski, S.J. (2004). TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings From IEA´s Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eight Grades. Chestnut Hill, MA, unter: http://timssandpirls.bc.edu/PDF/t03_download/T03INTLMATRPT.pdf [29.12.2015].

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Ruddock, G.J.; O´Sullivan, C.Y. & Preuschoff, C. (2009). TIMSS 2011 Assessment Frameworks. Chestnut Hill, MA, unter: http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/TIMSS2011_Frameworks.pdf [29.12.2015].

National Agency for Education (2011). Curriculum for the compulsory school, preschool class and the leisure-time centre 2011, Stockholm, unter: http://skola.uppsala.se/Global/Kvarngardesskolan/Bilder/Dokument/National%20Curriculum.pdf [01.01.2016].

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Naumann, J., Artelt, C., Schneider, W. & Stanat, P. (2010). Lesekompetenz von PISA 2000 bis PISA 2009. In E. Klieme; C. Artelt; J. Hartig; N. Jude; O. Köller; M. Prenzel; W. Schneider & P. Stanat Hrsg.), *PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt* (S. 23-71). Münster: Waxmann.

Neubrand, J. (2002). Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Hildesheim & Berlin: Franzbecker.

OECD (2013). PISA 2012 Ergebnisse: Was Schülerinnen und Schüler wissen und können (Band I): Schülerleistungen in Lesekompetenz, Mathematik und Naturwissenschaften. Deutschland: Bertelsmann.

Oeveste, H. (1987). Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter. Eine Revision der Theorie Piagets. Göttingen: Hogrefe.

Pant, H.A.; Böhme, K. & Köller, O. (2012). Das Kompetenzkonzept der Bildungsstandards und die Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen. In P. Stanat, H.A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 49-55). Münster: Waxmann.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Stuttgart: Klett.

Pippig, G. (1971). Zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten. Berlin: Volk und Wissen. Volkseigener Verlag Berlin.

Plath, M. (2013). Räumliches Vorstellungsvermögen im vierten Schuljahr. Eine Interviewstudie zu Lösungsstrategien und möglichen Einflussbedingungen auf den Strategieeinsatz. Lüneburg.

Pollitt, A.; Hutchinson, C.; Entwhistle, N. & de Luca, C. (1985). What makes examination questions difficult? Edinburgh: Scottish Academic Press.

Qualitäts- und UnterstützungsAgentur. Landesinstitut für Schule. NRW, unter: http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/vera3/ziel-der- vergleichsarbeiten/ kompetenzniveaus/ [23.05.2014].

Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1991). Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Radatz, H. & Schipper, W. (1983). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

R Core Team (2014). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, unter: http://www.R-project.org/ [15.01.2013].

Reich, K. (2008). Konstruktivistische Didaktik. Weinheim und Basel: Beltz.

Reiss, K. & Hammer, Chr. (2013). Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe. Basel Springer: Birkhäuser.

Reiss, K.; Heinze, A. & Pekrun, R. (2008). Mathematische Kompetenz und ihre Entwicklung in der Grundschule. In: *Kompetenzdiagnostik, Zeitschrift für Erziehungswissenschaft,* 8, S. 107-127.

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. In: *Grundschule,* 10, S. 34-37.

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141). Weinheim und Basel: Beltz.

Renkl, A. (1991). Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik. Dissertation Universität Heidelberg.

Resnick, L.B. (1983). Toward a cognitive theory of instruction. In S.B. Paris, G.M. Olson & H.W. Stevenson (Eds.), *Learning and motivation in the classroom* (pp. 5-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rinkens, H.D. & Hönisch, K. (Hrsg.) (2004). Welt der Zahl 4. Schuljahr. Mathematik lernen mit allen Sinnen. Hannover: Schroedel.

Rinkens, H.D. & Hönisch, K. (Hrsg.) (2008). Lernerfolgskontrollen auf drei Niveaustufen Klasse 4. Braunschweig: Schroedel.

Rohrmann, T. (2007). Jungen und Mädchen in der Schule. In Th. Fleischer, N. Grewe, B. Jötten, K. Seifried & B. Sieland (Hrsg.), *Handbuch Schulpsychologie. Psychologie für die Schule* (S. 221-229). Stuttgart: Kohlhammer.

Roick, Th.; Gölitz, D. & Hasselhorn, M. (2004). DEMAT 3+. Deutscher Mathematiktest für dritte Klassen. Göttingen: Beltz.

Roick, Th.; Gölitz, D. & Hasselhorn, M. (2006). DEMAT 4. Deutscher Mathematiktest für vierte Klassen. Göttingen: Beltz.

Roppelt, A. & Reiss, K. (2012). Beschreibung der im Fach Mathematik untersuchten Kompetenzen. In P. Stanat, H.A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 34-48). Münster: Waxmann.

Rost, D.H. (1977). Raumvorstellung. Psychologische und pädagogische Aspekte. Weinheim und Basel: Beltz.

Rowan, B.; Camburn, E.M. & Correnti, R. (2004). Teacher logs as a tool for studying educational process. Paper prepared for the conference Using Calendar and Diary Methodologies in Life Events Research, Michigan, pp. 243-268.

Rowan, B.; Harrison, D.M. & Hayes, A. (2004). Using Instructional Logs to Study Mathematics Curriculum and Teaching in the Early Grades. In: *Elementary School Journal*, 105 (1), pp. 103-127.

Sadker, D.; Sadker, M. & Zittleman, K.R. (2011). Questioning Skills. In J.M. Cooper (Eds.), *Classroom Teaching Skills* (pp. 107-152). Wadsworth: Cengage Learning.

Schipper, W. (2005). Rücksicht auf die Bildungsstandards im Fach Mathematik - Jahrgangsstufe 4. In J. Engel, R. Vogel & S. Wessolowski (Hrsg), *Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren: Leitbilder mathematischer und informatischer Aktivitäten (S. 351-360)*. Hildesheim: Franzbecker.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Schmidt-Thieme, B. (2003). Gute Aufgaben als Ausgangspunkt für mathematische Reflexion. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 157-168). Offenburg: Mildenberger.

Schott, F. & Azizi Ghanbari, Sh. (2008). Kompetenzdiagnostik, Kompetenzmodelle, kompetenzorientierter Unterricht. Zur Theorie und Praxis überprüfbarer Bildungsstandards. ComTrans - ein theoriegeleiteter Ansatz zum Kompetenztransfer als Diskussionsvorlage. Münster: Waxmann.

Schütte, S. (Hrsg.) (2006). Die Matheprofis 4. Ein Mathematikbuch für das 4. Schuljahr. München: Oldenbourg.

Schütte, S. (2008). Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur. München: Oldenbourg.

Seeger, F. (1990). Visualisierung, Schülerkonzepte und Aufgabenbearbeitung. In R. Bromme, F. Seeger & H. Steinbring, *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (S. 31-149). Köln: Aulius Verlag Deubner & Co KG.

Selter, Chr.; Walther, G.; Wessel, J. & Wendt, H. (2012). Kapitel III. Mathematische Kompetenzen im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In W. Bos; H. Wendt; O. Köller & Chr. Selter (Hrsg.), *TIMSS 2011. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 69-122). Münster: Waxmann.

SINUS, unter: http://www.sinus-an-grundschulen.de/ [22.01.2016].

Sodian, B. (2008). Entwicklung des Denkens. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), *Entwicklungspsychologie* (S. 436-479). Weinheim: Beltz.

Stanat, P. & Kunter, M. (2001). Geschlechterunterschiede in Basiskompetenzen. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 249-269). Opladen: Leske + Budrich.

Stanat, P.; Pant, H.A.; Richter, D. & Böhme, K. (2012a). IQB-Ländervergleich 2011: Zusammenfassung und Einordnung der Befunde. In P. Stanat, H.A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 291-300). Münster: Waxmann.

Stanat, P.; Pant, H.A.; Richter, D.; Böhme, K.; Engelbert, M.; Haag, N. et al. (2012b). Der Blick in die Länder. In P. Stanat, H.A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und*

Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011 (S. 131-172). Münster: Waxmann.

Stein, M.K., Grover, B.W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in refrom classes. In: *American Educational Reasearch Journal*, 33, pp. 455-488.

Steiner, H.-G. (1996). Lernen. 20 Szenarien aus dem Alltag. 2., vollständig überarbeitete Auflage. Bern: Hans Huber.

Steiner, H.-G. & Winkelmann, B. (1981). Aktuelle Probleme des Geometrieunterrichts aus der Sicht der Bielefelder Geometrietagung. In H.-G. Steiner & B. Winkelmann (Hrsg.), *Fragen des Geometrieunterrichts, Band 1* (S. 215-228). Köln: Aulis.

Steinweg, A.S. (2007). Mathematik auf dem Prüfstand. In: *Die Grundschulzeitschrift,* Jg. 21, Heft 207, S. 4-9.

Stern, E. (1999). Development of mathematical competencies. In F.E. Weinert & W. Schneider (Eds.), *Individual development from 3 to 12: Findings from the Munich longitudinal study.* New York: Cambridge University Press.

Stückrath, F. (1955). Kind und Raum. Psychologische Voraussetzungen der Raumlehre in der Volksschule. München: Kösel.

Tarelli, I.; Valtin, R.; Bos, W.; Bremerich-Vos, A. & Schwippert, K. (2012). IGLU 2011: Wichtige Ergebnisse im Überblick. In W. Bos, I. Tarelli, A. Bremerich-Vos, K. Schwippert (Hrsg.), *IGLU 2011. Lesekompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 11-26). Münster: Waxmann.

Testzentrale, unter: http://www.testzentrale.de/ [06.08.2015].

Thorndike, E.L. (1970). Psychologie der Erziehung. Stuttgart: Gustav Fischer.

Thurstone, L.L. (1938). Primary Mental Abilities. New Impression (August 1969). Chicago: University of Chicago Press.

Treumann, K. (1974). Dimensionen der Schulleistung. Teil 2: Leistungsdimensionen im Mathematikunterricht. Stuttgart: Klett.

Ufer, St. (2009). Der Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinutiät und Koheränz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 87-103). Münster: Waxmann.

Ufer, St.; Reiss, K. & Heinze, A. (2009). BIGMATH. Ergebnisse zur Entwicklung mathematischer Kompetenz in der Primarstufe. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinutiät und Koheränz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 61-85). Münster: Waxmann.

U.S. Department of Education (2012), unter: http://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/previousframework.aspx [12.02.2014].

U.S. Department of Education (2013), unter: https://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/whatmeasure.aspx [23.02.2015].

van Hiele, P.M. (1964). Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindlichen Zahlbegriffsbildung. In J. Piaget, K. Resag, A. Fricke, P.M. van Hiele & K. Odenbach, *Rechenunterricht und Zahlbegriff. Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffs und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht* (S. 105-131). Braunschweig: Westermann.

van Hiele, P.M. (1986). Structure and insight. A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press.

Vollrath, H.-J. (1981). Geometrie im Mathematikunterricht - Eine Analyse neuerer Entwicklungen. In H.-G. Steiner & B. Winkelmann (Hrsg.), *Fragen des Geometrieunterrichts, Band 1* (S. 11-27). Köln: Aulis.

Walpuski, M.; Kauertz, A.; Kampa, N.; Fischer, H.E., Mayer, J.; Sumfleth, E. & Wellnitz, N. (2010). ESNaS - Evaluation der Standards für die Naturwissenschaften in der Sekundarstufe I. In A. Gehrmann, U. Hericks & M. Lüders (Hrsg.), *Bildungsstandards und Kompetenzmodelle. Beiträge zu einer aktuellen Diskussion über Schule, Lehrerbildung und Unterricht* (S. 171-184).Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Walther, G. (2004). Gute und andere Aufgaben. Beschreibung des Moduls 1 für das Projekt Sinus-Transfer Grundschule, unter: http://sinus-transfer- grundschule.de/fileadmin/Materialien/ Modu1.pdf [08.08.2013].

Walther, G.; Geiser, H.; Langeheine, R. & Lobemeier, K. (2003). Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In W. Bos, E.M. Lankes, M.Prenzel, K.Schwippert, G. Walther & R. Valtin (Hrsg.), *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich* (S. 189-226). Münster: Waxmann.

Walther, G. & Granzer, D. (2009). Kompetenzmodell Mathematik. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 108- 119). Weinheim und Basel: Beltz.

Walther, G.; Selter, C.; Bonsen, M. & Bos, W. (2008). Mathematische Kompetenz im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In W. Bos, M. Bonsen, J.Baumert, M. Prenzel, C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 49-85). Münster: Waxmann.

Walther, G.; Selter, Ch. & Neubrand, J. (2008). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther; M. van den Heuvel-Panhuizen; D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 16-41). Berlin: Cornelsen.

Weigand, H.G. (2009). Ziele des Geometrieunterrichts. In H.-G. Weigand; A. Filler; R. Hölzl; S. Kuntze; M. Ludwig; J. Roth; B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 13-34). Heidelberg: Spektrum.

Weinert, F.E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17-31). Weinheim und Basel: Beltz.

Weinert, F.E. & Stefanek, J. (1997). Entwicklung vor, während und nach der Grundschulzeit: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In F.E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 423-452). Weinheim: Beltz.

Weirich, S.; Haag, N. & Roppelt, A. (2012). Testdesign und Auswertung des Ländervergleichs: technische Grundlagen. In P. Stanat, H.A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 277-290). Münster: Waxmann.

Wendt, H.; Bos, W.; Selter, Chr. & Köller, O. (2012). TIMSS 2011: Wichtige Ergebnisse im Überblick. In W. Bos; H. Wendt; O. Köller & Chr. Selter (Hrsg.), *TIMSS 2011. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 13-26). Münster: Waxmann.

Wiese, I. (2016). Transparente Vorgaben für Lehrer? Eine Untersuchung zu den in den Bildungsstandards formulierten Anforderungsbereichen am Beispiel geometrischer Aufgaben in Jahrgangsstufe 4. In Schude, S. & Moegling, K. (Hrsg.), *Transparenz im Unterricht und in der Schule. Teil 2: Forschungsergebnisse und Diskussion,* im Druck.

Wilson, J.W. (1971). Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics. In B.S. Bloom, J.T. Hastings & G.F. Madaus (Eds), *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning* (pp. 643-696). New York: McGraw-Hill, Inc..

Winkelmann, H. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). Geschlechtsspezifische mathematische Kompetenz. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 142-156). Weinheim und Basel: Beltz.

Winkelmann, H. & Robitzsch, A. (2009). Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196). Weinheim und Basel: Beltz.

Winter, H. (1987). Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule. Reformen und Gegenreformen. Entdeckendes Lernen. Kreatives Üben. Berlin: Cornelsen.

Wirtz, M.A. & Caspar, F. (2002). Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität. Methoden zur Bestimmung und Verbesserung der Zuverlässigkeit von Einschätzungen mittels Kategoriensystemen und Ratingskalen. Göttingen: Hogrefe.

Wittmann, E.Ch. (1992). Üben im Lernprozeß. In E.Ch. Wittmann & G.N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (S. 175-182). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E.Ch. (1999). Konstruktion eines Geometriecurriculums ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In H. Henning (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung: Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden* (S. 205-223). Oldenburg: Bültmann und Gerriets.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2009). Das Zahlenbuch 4. Leipzig: Klett.

Wollring, B. (2003). Hausnetze auf begrenzten Flächen - Anspruchsvolle Aufgabenmuster zur Geometrie. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 131-143). Offenburg: Mildenberger.

Wollring, B. & Rinkens, H.-D. (2008). Raum und Form. In G. Walther; M. van den Heuvel-Panhuizen; D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 118-140). Berlin: Cornelsen.

Woolfolk, A. (2008). Pädagogische Psychologie. München: Pearson.

Zech, F. (1977). Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. 10. Auflage. Weinheim und Basel: Beltz.

Zeitler, S.; Heller, N. & Asbrand, B. (2012) (Hrsg.). Bildungsstandards in der Schule. Eine rekonstruktive Studie zur Implementation der Bildungsstandards. Münster: Waxmann

Zeitler, S.; Köller, O. & Tesch, B. (2010). Bildungsstandards und ihre Implikationen für Qualitätssicherung und Qualitätsentwicklung. In A. Gehrmann, U. Hericks & M. Lüders (Hrsg.), *Bildungsstandards und Kompetenzmodelle. Beiträge zu einer aktuellen Diskussion über Schule, Lehrerbildung und Unterricht* (S. 23-36). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Ziener, G. (2008). Bildungsstandards in der Praxis. Kompetenzorientiert unterrichten. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Anhang

Im Anhang sind nachfolgende Unterlagen in der angeführten Reihenfolge beigelegt:

Anhang A:	Genehmigung ADD
Anhang B:	Genehmigung Landesdatenschutzbeauftragter
Anhang C:	Informationen an die Teilnehmer der Untersuchung
Anhang D:	Stichprobe
Anhang E:	Teilstudie I: Schulbücher - Übersicht
Anhang F:	Teilstudie I: Schulbuchaufgaben - Rating
Anhang G:	Teilstudie I: Schulbuchaufgaben - Übereinstimmungsmatrizen für die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche
Anhang H:	Teilstudie II: Protokollbogen blanko
Anhang I:	Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 1-13 (Lehrkräfte 1-16)
Anhang J:	Teilstudie II: Auflistung der gewonnenen Erkenntnisse
Anhang K:	Teilstudie II: Protokollaufgaben - Rating
Anhang L:	Teilstudie II: Protokollaufgaben - Übereinstimmungsmatrizen für die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche
Anhang M:	DEMAT: Klassenbogen und Interpretationshinweise
Anhang N:	DEMAT: Auflistung der gewonnenen Erkenntnisse
Anhang O:	DEMAT: Aufgaben des Subtest Geometrie bearbeitet
Anhang P:	DEMAT: *t*-Test für abhängige Stichproben Subtests und Testgesamtwert
Anhang Q:	DEMAT: Normalverteilung
Anhang R:	Teilstudie III: Geometrische Aufgaben
Anhang S:	Teilstudie III: Auflistung der gewonnenen Erkenntnisse
Anhang T:	Teilstudie III: Geometrische Aufgaben bearbeitet

Anhang A: Genehmigung ADD

Rheinland-Pfalz
AUFSICHTS- UND DIENSTLEISTUNGSDIREKTION

Aufsichts- und Dienstleistungsdirektion | Postfach 13 20 | 54203 Trier

Frau
Ines Maurer
Westring 33
67269 Grünstadt

Kurfürstliches Palais
Willy-Brandt-Platz 3
54290 Trier
Telefon 0651 9494-0
Telefax 0651 9494-170
poststelle@add.rlp.de
www.add.rlp.de

12.05.2011

Mein Aktenzeichen	Ihr Schreiben vom	Ansprechpartner/-in / E-Mail	Telefon / Fax
51 111-32/41-11 Bitte immer angeben!	14.03.2011	Stefanie Heß stefanie.hess@add.rlp.de Sprechzeit Di. – Fr., 09:00 – 13:00	0651/9494-949 0651/9494-77949

Durchführung des Schulgesetzes
Antrag auf Genehmigung einer wissenschaftlichen Untersuchung im Rahmen Ihrer Dissertation mit dem Thema „Geometrisches Wissen von Grundschülern in Abhängigkeit von den im Unterricht genutzten Methoden“
Ihr Antrag vom 14.03.2011

Sehr geehrte Frau Maurer,

mit Ihrem Schreiben vom 14.03.2011 bitten Sie um die Genehmigung der Durchführung einer wissenschaftlichen Untersuchung mit dem o.a. Thema.

Nach § 67 Abs. 6 des Schulgesetzes Rheinland-Pfalz in der z. Z. gültigen Fassung genehmige ich die von Ihnen beabsichtigte Durchführung der Untersuchung in dem von Ihnen dargelegten Rahmen. Ein erhebliches pädagogisch-wissenschaftliches oder gleichwertiges Interesse wird anerkannt.

1/1

Konto:
Bundesbank Koblenz 570 015 13 (BLZ 570 000 00)
Postbank Köln 343 65-501 (BLZ 370 100 50)
Sparkasse Trier 251 63 (BLZ 585 501 30)
Vorlage Genehmigung.doc

Besuchszeiten / telefonische Erreichbarkeit:
Mo-Do 9.00-12.30 Uhr und 14.30-15.30 Uhr
Fr 9.00-13.00 Uhr

ADD
Aufsichts- und Dienstleistungsdirektion

Anhang B: Genehmigung Landesdatenschutzbeauftragter

Der Landesbeauftragte für den Datenschutz Rheinland-Pfalz

Internet: www.datenschutz.rlp.de
E-Mail: poststelle@datenschutz.rlp.de
Telefon: (06131) 208 2431
Telefax: (06131) 208 2497

Datum: 08.08.2011
Gesch.Z.: 6.08.22.001:0255

Frau
Ines Maurer
maurer-ines@web.de

Nachrichtlich.
Stefanie.Hess@add.rlp.de

Wissenschaftliche Untersuchung im Rahmen einer Dissertation mit dem Thema "Geometrisches Wissen von Grundschülern in Abhängigkeit von den im Unterricht eingesetzten Aufgaben"
Befragung von Lehrkräften und Testung von Schüler/Innen der 4. Klasse
Ihre E-Mail vom 07.07.2011

Sehr geehrte Frau Maurer,

für die Übersendung von Unterlagen zur datenschutzrechtlichen Beurteilung der von Ihnen beabsichtigten Untersuchung bedanke ich mich. Die Auswertung der Tests und der von den Lehrkräften geführten Unterrichtstagebüchern soll Auskunft darüber geben, welche Aufgaben im Geometrieunterricht gestellt werden und zu welchem Unterrichtserfolg dies führt.

Den Unterlagen ist zu entnehmen, dass eine Rückmeldung an die jeweiligen Klassenlehrer über die Angabe des Schülernamens auf dem Test erfolgen soll und die Testauswertung als Grundlage für die Verbalbeurteilung des Mathematikunterrichts im Zeugnis genutzt werden kann. Somit werden personenbeziehbare Daten erhoben. Auf der Grundlage einer wirksamen Einwilligung der Eltern bestehen dagegen keine durchgreifenden datenschutz-rechtlichen Bedenken, sofern Sie die Eltern mit dem Informationsschreiben noch auf Folgendes hinweisen:

* Die Einwilligung ist freiwillig und aus der Verweigerung der Einwilligung oder ihrem Widerruf für die Zukunft entstehen keine Nachteile.

* Weiterhin ist über die Art und Dauer der Speicherung sowie eine evtl. Veröffentlichung der Daten und die damit verbundenen Risiken, den möglichen Empfängerkreis sowie die verantwortliche Stelle aufzuklären.

* Insbesondere sind die Eltern darauf aufmerksam zu machen, dass die Testauswertung in die Verbalbeurteilung des Mathematikunterrichts im Zeugnis einfließen kann.

Ich gehe davon aus, dass Sie meinen datenschutzrechtlichen Hinweisen und Empfehlungen folgen werden, und wünsche Ihnen unter diesen Voraussetzungen für die Durchführung Ihres Forschungsvorhabens viel Erfolg.

Sollten noch Fragen offen geblieben sein, können Sie sich gerne unter der o.g. Telefonnummer an mich wenden.

Mit freundlichen Grüßen
Im Auftrag

gez.

Michael Smolle

Anhang C: Informationen an die Teilnehmer der Untersuchung

Folgende Informationen wurden an die Teilnehmer der Untersuchung (Schulleitung, Lehrkräfte, Schülerinnen und Schüler mit dazugehörigen Erziehungsberechtigten, Rater) versendet und können in den Unterlagen der Autorin eingesehen werden:

a) Anfrage Schulleitung (inkl. Angaben zur Untersuchung)
b) Informationsbrief zur Untersuchung für die Lehrkräfte (inkl. Einverständniserklärung)
c) Elterninformationsbriefe (Schreiben an die Erziehungsberechtigten inkl. Einverständniserklärung)
d) Tagebuch-Protokolle für die Lehrkräfte (Protokollbogen inkl. Beispiel zur Orientierung)
e) Allgemeine Erläuterungen und Anleitung zur Durchführung des DEMAT 3+/4 (inkl. Testbögen)
f) Auswertungsergebnisse zum DEMAT 3+/4 (Klassenbogen, Interpretationshinweise)
g) Fortlaufend aktuelle Informationen für die Lehrkräfte und Kontaktpflege
h) Anfrage und Informationsschreiben für die Rater

Auszug zu: g) Fortlaufend aktuelle Informationen für die Lehrkräfte

Liebe Teilnehmer, 14.08.11
wie in meiner E-Mail vom 05.08. angekündigt finden Sie im Folgenden noch einmal die nächsten Schritte im Überblick:

Zeit	**Was ist zu tun?**	**erledigt**
1. Schulwoche	Elterninformationsbriefe an die Schüler verteilen	
2. Schulwoche	Einverständniserklärungen einsammeln und im beigelegten frankierten Rückumschlag an mich versenden.	
3.-6. Schulwoche	DEMAT 3+ durchführen *(WICHTIG: Die Schüler schreiben diesen Test nur mit Einverständnis der Eltern mit!)*	
POST	Bitte senden Sie im Anschluss die Mathematiktests im beiliegenden frankierten Rückumschlag **ohne Auswertung** an mich zurück.	

erste 8 Wochen	Dokumentation des Geometrieunterrichts in Tagebuchform	
POST	Bitte senden Sie mir zu den Herbstferien die ausgefüllten Tagebuch-Blätter im frankierten Rückumschlag zu.	

Mit diesem Schreiben erhalten Sie zunächst die Elterninformationsbriefe sowie die Tagebuch-Protokolle (20 Exemplare mit Beispiel).
Die Testbögen des DEMAT 3+ (mit Anweisungen) folgen in der nächsten Woche.

Bei Fragen oder Verbesserungsvorschlägen wenden Sie sich bitte an mich:
0176/20643998 oder maurer-ines@web.de .

Viele Grüße
Ines Maurer

Anhang D: Stichprobe

Tabelle: Übersicht Stichprobe

Lehrkraft	Schülerzahl	Jungen	Mädchen
01	9	5	4
03	21	13	8
04	17	10	7
05	21	10	11
06	24	14	10
07	20	10	10
08	19	12	7
09	14	7	7
11	18	12	6
12	13	8	5
13	13	5	8
14	13	6	7
15	17	8	9
16	14	4	10
18	18	4	14
19	19	5	14
Summe	**270**	**133**	**137**

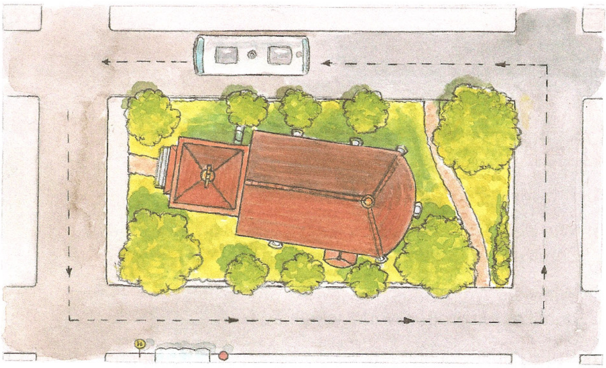
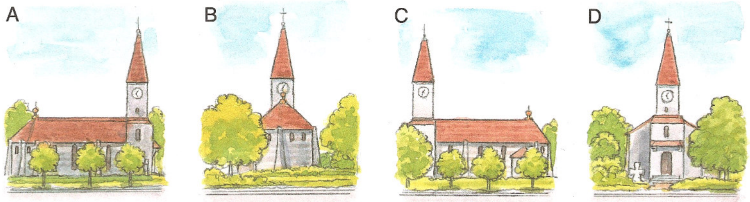
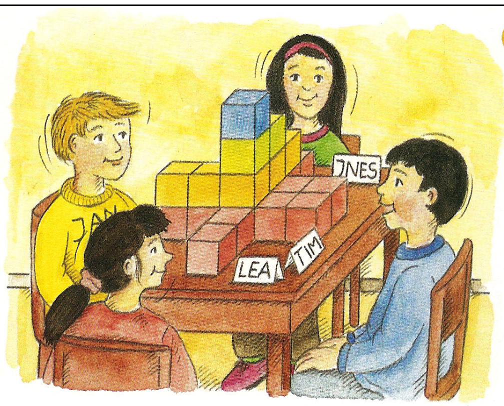
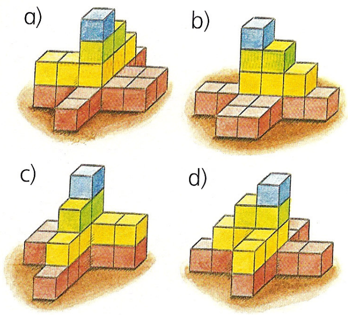
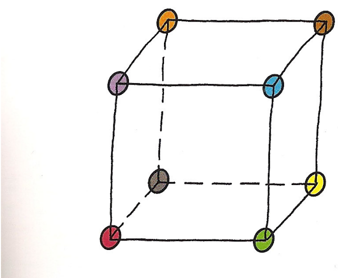
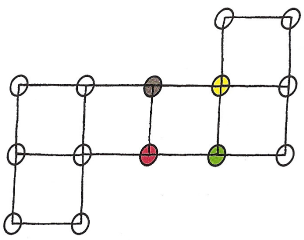
Anhang E: Teilstudie I: Schulbücher - Übersicht

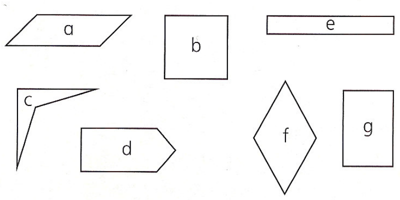
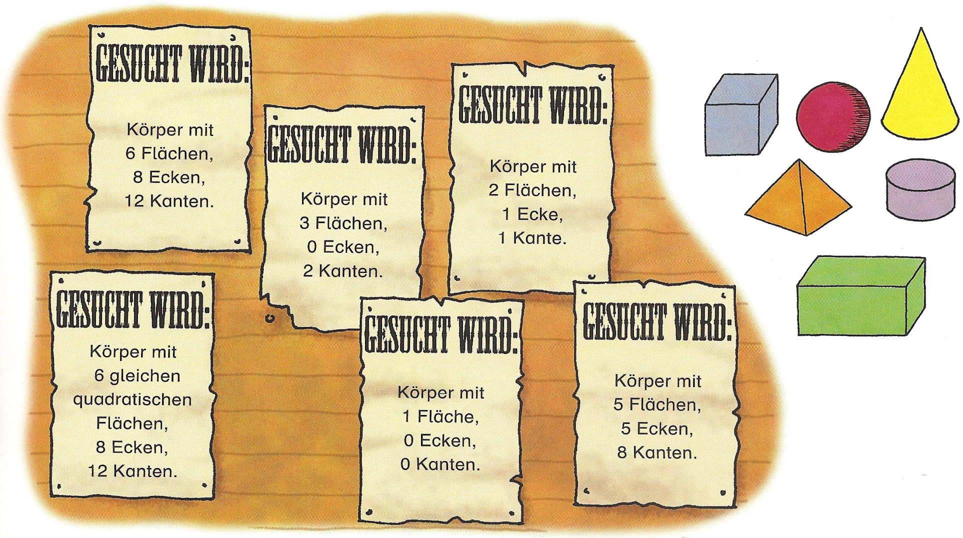
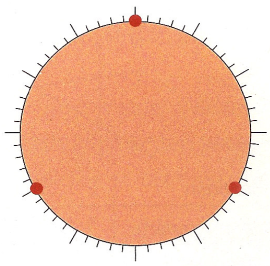
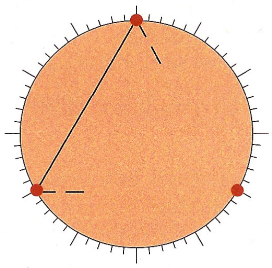
Tabelle: Übersicht Schulbücher

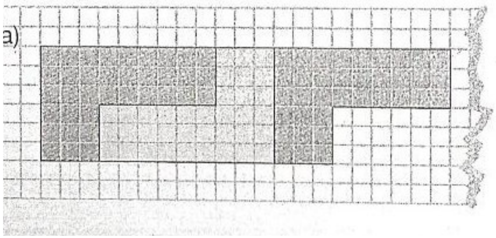
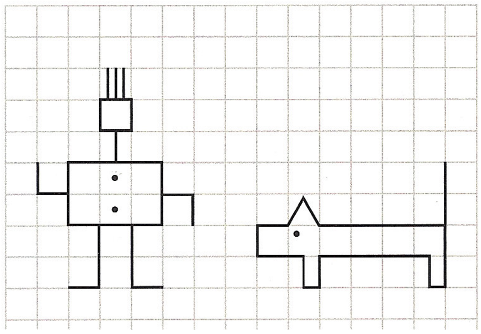
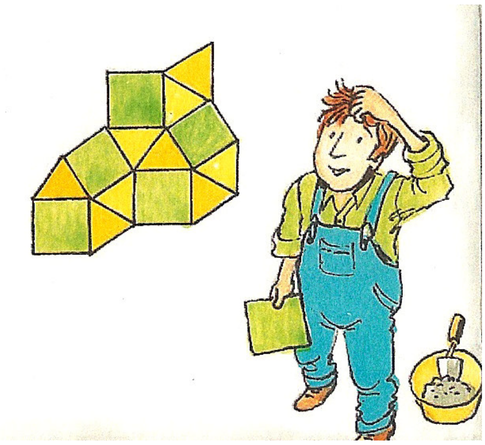
	Schulbuch für den Mathematikunterricht	Seiten insgesamt	Seiten zur Geometrie	prozentual [%]
1	Denken und Rechnen	114	20	18
2	Duden	101	16	16
3	Zahlenzauber	119	16	13
4	Mathehaus	142	18	13
5	Mathematikus	91	15	17
6	Matheprofis	101	20	20
7	Nussknacker	108	10	9
8	Primo	115	14	12
9	Welt der Zahl	124	20	16
10	Zahlenbuch	121	21	17
	Summe	**1136**	**170**	**15**

Anhang F: Teilstudie I: Schulbuchaufgaben - Rating

Alle 229 den Schulbüchern entnommenen geometrischen Aufgaben wurden nach den inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen geordnet und anschließend für das Rating tabellarisch angeordnet. Anbei wird jeweils ein Ausschnitt aus den inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen 1 bis 3 abgebildet. Der Ausschnitt zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 4 ist in Kapitel 8.1.1 zu finden. Die vollständige geratete Aufgabensammlung kann in den Unterlagen der Autorin eingesehen werden.

Raum und Form: sich im Raum orientieren (IKB 1)	
Aufgabenstellung	**Zuordnung zu Anforderungsbereich**
Paul ist mit dem Bus um die Kirche herum gefahren. In welcher Reihenfolge und von wo hat er etwa fotografiert?   (Fuchs & Käpnick, 2008, S. 66)	2
 1 Wer sieht es so?  (Rinkens & Hönisch 2004, S. 27)	2
3 Betrachte den Würfel und kennzeichne die Eckpunkte im Würfelnetz mit den entsprechenden Farben.   (Müller-Wolfangel, Schreiber & Heilig, 2007, S. 47)	2

Raum und Form: geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen (IKB 2)	
Aufgabenstellung	**Zuordnung zu Anforderungs-bereich**
 Schreibe so: Vierecke: a, b, ______ Parallelogramme: ______ Rechtecke: ______ Quadrate: ______ (Rinkens & Hönisch 2004, S. 111)	1
Üben 2 Verbinde die Körper mit ihren Steckbriefen.  (Müller-Wolfangel, Schreiber & Heilig, 2007, S. 45)	1
a) Teile die Zeichenuhr in drei gleiche Abschnitte. 60 : 3 = ...  b) Verbinde die Punkte.  c) Welche Form erhältst du? (Wittmann & Müller, 2009, S. 90)	1

Raum und Form: einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen (IKB 3)	
Aufgabenstellung	**Zuordnung zu Anforderungsbereich**
Zeichne. Setze die Muster fort.  (Eidt et al., 2009, S. 82)	1
Vergrößere. Zeichne im Maßstab 2:1.  (Grassmann et al., 2010, S. 109)	2
Im Bad werden neue Fliesen verlegt. Der Fliesenleger hat zwei Sorten Fliesen: Quadrate und gleichseitige Dreiecke.  Könnte der Fliesenleger auch mit regelmäßigen Fünfecken und zusätzlich noch einer anderen Sorte Fliesen arbeiten? (Lorenz, 2005, S. 76)	3

Anhang G: Teilstudie I: Schulbuchaufgaben - Übereinstimmungsmatrizen für die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche

Tabelle: Übereinstimmungsmatrix Schulbuchaufgaben - IKB 1

		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	0	0	0
	AB II	0	34	2
	AB III	0	1	2

Number of observed agreements: 36 (92.31% of the observations)
Kappa= 0.530
95% confidence interval: From 0.064 to 0.996
The strength of agreement is considered to be 'moderate'.

Tabelle: Übereinstimmungsmatrix Schulbuchaufgaben - IKB 2

		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	30	9	0
	AB II	3	54	0
	AB III	0	3	2

Number of observed agreements: 86 (85.15% of the observations)
Kappa= 0.705
95% confidence interval: From 0.571 to 0.840
The strength of agreement is considered to be 'good'.

Tabelle: Übereinstimmungsmatrix Schulbuchaufgaben - IKB 3

		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	9	0	0
	AB II	0	16	1
	AB III	0	0	5

Number of observed agreements: 30 (96.77% of the observations)Kappa= 0.946
95% confidence interval: From 0.843 to 1.000
The strength of agreement is considered to be 'very good'.

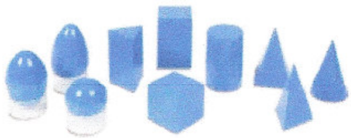
Tabelle: Übereinstimmungsmatrix Schulbuchaufgaben - IKB 4

		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	9	0	0
	AB II	0	34	0
	AB III	0	4	11

Number of observed agreements: 54 (93.10% of the observations)
Kappa= 0.873
95% confidence interval: From 0.753 to 0.993
The strength of agreement is considered to be 'very good'.

Anhang H: Teilstudie II: Protokollbogen blanko (Seite 1)

Geometrieunterricht in Klasse 4



Datum	
Thema	
Zeit in Minuten	

Kompetenzen: *Bitte ankreuzen!*

sich im Raum orientieren		über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen
		räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten)
		zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen)
geometrische Figuren erkennen benennen und darstellen		Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen
		Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen
		Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden, Falten...)
		Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen
einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen		ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern)
		Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen
		(symmetrische) Muster fortsetzen und selbst entwickeln
Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen		die Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen
		Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen
		Rauminhalte vergleichen und durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen

Quelle: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004).Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom15.10.2004.

Anhang H: Teilstudie II: Protokollbogen blanko (Seite 2)

Notieren Sie die eingesetzten Aufgaben (und beschreiben Sie ggf. knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts):
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf (FREIWILLIG!)	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg		
Arbeitsphase		
Abschluss		

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 1

Exemplarisch wird von jeder Lehrkraft ein bearbeiteter Protokollbögen aufgeführt. Alle eingegangenen 148 Protokollbögen können in den Unterlagen der Autorin eingesehen werden.

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von Lehrkraft 1 zum Thema „Der Zirkel - Kreise" (50 Minuten, 01.02.12).

Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben:
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg	L-Vortrag/Demonstration - Zirkel - Zeichnen v. Kreisen - Radius Durchmesser	
Arbeitsphase	I: Zeichnen v. Kreisen Zeichnen v. Kreisen m. Radiusangabe Kontrolle in PA II Zeichnen v. Kreisen m. Angabe des Durchmessers Kontrolle in PA	(auf Blanko-Papier) S. 64 Nr. 1 a) + b) S. 64 Nr. 2 a) / b)
Abschluss	Blitzlicht: Schwierigkeiten beim Umgang m. d. Zirkel	

→ I. d. folgenden 3 Std. arbeiteten d. Schüler an einer Lerntheke zu Lineal + Geodreieck (s. Kopien)

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 2

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von Lehrkraft 3 zum Thema „Quadrate und Rechtecke zeichnen" (45 Minuten, 29.11.11). Diese Lehrkraft reichte alle Protokolle digital ein (inklusive der eingescannten Aufgaben).

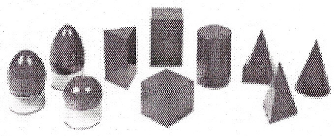
Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben: (ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	**Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?**
Einstieg	Präsentation eines Quadrates und eines Rechteckes Eigenschaften werden zugeordnet Zeichnen eines Quadrates und eines Rechteckes	stummer Impuls (Aufklappen der Tafel) Ss benennen Eigenschaften und ordnen zu Hinweise zum richtigen Zeichnen werden gegeben, Geodreieck als Hilfsmittel noch einmal besprochen
Arbeitsphase	Zeichnen von Quadraten und Rechtecken	Welt der Zahl S. 38, Nr. 1,2,3, *4
Abschluss	Wahrnehmungstäuschungen besprechen (S.38, Nr.8)	Aufgabe im Buch Ss überprüfen mit dem Geodreieck Ha: Zeichnen von Quadraten und Rechtecken, Aufgaben fertig machen

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 3

Lehrkraft 4 arbeitete nicht mit den Protokollbögen, sondern mit der angebotenen Alternative (allerdings ohne Angabe der Kompetenzen). Alle zu bearbeitenden Aufgaben wurden in Kopie angehängt.

Geometrieunterricht in Klasse 4



Hunde

Datum	Zeit (Min)	Thema und Aufgaben	Kompetenzen
7.9.	90'	Geometrische Begriffe wiederholen	
8.9.	30'	Umgang mit dem Geodreieck	
9.9.	30'	Umgang mit dem Zirkel	
		(Zirkelblumen)	
6.10.	90'	Zirkel/Geodreieck → Flächen	
		konstruieren, Radius, Durchmesser	
7.12.	90'	Körper/Körpermodelle/Kantenmodelle	
24.2.	30'	Flächen und Flächeninhalt	
29.2.	30'	Symmetrie, Arbeit mit dem Geobrett	
23.6.	30'	Linien und Strecken parallel/senkrecht zu, Umfang	

Immer wieder eine Aufgabe im Tagesplan:
Geometriekartei vom Klett-Verlag 1x pro Woche

- Wie viele Würfel
- Netze
- Kanten, Ecken, Flächen
- Symmetrie
- Spiegeln mit dem Spiegelbuch
- Grundrisss und Seitenansicht
- Quader kippen
- Von Ecke zu Ecke
- Baupläne

Spiel: „Schauen und Bauen“

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 4

Lehrkraft 5 arbeitete nicht mit den Protokollbögen, sondern schrieb die Stundenverläufe wie folgt auf. Alle zu bearbeitenden Aufgaben wurden in Kopie angehängt.

2. Einheit: **Ebene Figuren vergrößern / verkleinern**
(1 Stunde)

Einstieg: Freies Arbeiten
Jedes Kind bekommt ein Tütchen mit Streichhölzern

Arbeitsphasen:

1. Handelndes Tun:

   a) Figuren legen nach Angaben

   Lege ein Rechteck mit 6 Streichhölzern
   ein Quadrat mit 8 Streichhölzern usw.

   b) Vergrößere die Figuren so, dass jede Seite doppelt (dreimal/viermal) so lang ist

   c) Verkleinere die Figuren

2. Zeichnerische Umsetzung:

   Dargestellte Figuren (Arbeitsblatt) vergrößern und verkleinern

Erkenntnisgewinnung:

Was muss beim Vergrößern oder Verkleinern beachtet werden, damit die Figur ihre Form behält? (Gemeinsame Bearbeitung eines Merksatzes)

Arbeitsmaterial:

Streichhölzer
Arbeitsblätter

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 5

Auch Lehrkraft 6 arbeitete nicht mit den Protokollbögen, sondern schrieb die Stundenverläufe wie folgt nieder. Seite eins des Protokollbogens und alle zu bearbeitenden Aufgaben wurden in Kopie angehängt.

Der Geometrieunterricht zum Thema „Geometrische Körper und ihre Eigenschaften" umfasste 100 Minuten und wurde am 09.08. und am 16.08.11 gehalten.

Geometrische Körper und ihre Eigenschaften

Einführung

- Kinder ertasten einen Würfel hinter ihrem Rücken
- Wiederholung der Eigenschaften des Würfels
- Wiederholung der Begriffe „Ecke, Kante, Fläche“

Erarbeitung

- Betrachtung folgender Körper: Quader, Pyramide, Dreieckssäule, Zylinder, Kegel und Kugel

(Die Dreieckssäule ist den Kindern unbekannt, alle anderen Körper sind ihnen bereits bekannt)

Danach Arbeit im Buch, S. 28 sowie AH, S. 15, Nr. 1 und 2 (teilweise als Hausaufgabe)

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 6

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von Lehrkraft 7 zum Thema „Würfel- und Quadernetze" (50 Minuten, 21.10.11). Die Arbeitsblätter und erwähnten Aufgaben waren angehängt.

Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrie-unterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben:
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg	Bespr. der H.A. (ZW 30) Woran habt ihr "falsche" Netze erkannt? Wiederholung aus 3. Schj.: Überprüfungsmöglichkeiten: ▶ 6 Flächen ?! ▶ T-Form ?! Kontrolle der "Flügelchen" re + li ?! ▶ bei Quadernetzen: gleiche Flächen haben eine jeweils andere Fläche im Netz zwischen sich ?! weitere Überprüfungsmöglichkeit: gefärbte Ecken Beilage 7 → Ss bekommen ein T-Würfelnetz / auch an Tafel	
Arbeitsphase	Ss markieren die je zu einer Ecke zugehörigen Flächenecken in einer Farbe → Kontrolle durch Farbe → Ergebnis a. Tafel B S. 27 a.) A–H Ecken färben b.) Kontrolle durch Modellflächen (⇒ werden vorher auseinandergeschnitten!) c.) welche Netze lassen sich noch legen, die hier nicht abgebildet sind?	
Abschluss	Ergebnisbesprechung H.A. B.S. 28 (ähnliche Aufgaben mit Quader ⇒ Beilage 7 = Quadernetz zum Färben + Falten)	

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 7

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von Lehrkraft 8 zum Thema „Experimentieren mit Würfel- und Quadernetzen" (100 Minuten, 21. und 22.09.11). Die Arbeitsblätter waren angehängt.

Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben:
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg	L: Präsentiert ein Quadernetz mit eingefärbten Ecken S: spekulieren, weshalb die Ecken eingefärbt sind. S: erkennen, dass immer aufeinandertreffende die gleiche Farbe haben.	Demoquadernetz (groß)
Arbeitsphase	S: ergänzen auf Würfel und Quadernetzen Farbecken der aufeinandertreffenden Ecken → verschiedene Arbeitsblätter auch prakt. Nachfalten möglich	(ABs, teils aus Lehrwerk Mathebuch 4, Mildenberger)
Abschluss	S/L: vergleichen die Ergebnisse anhand einer Lösungsfolie	

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 8

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von Lehrkraft 9 zum Thema „Experimente mit dem Geodreieck" (100 Minuten, 15. und 16.11.11). Die Arbeitsblätter waren angehängt.

Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben:
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg	• Wiederholung Aufbau Geodreieck • mündliche Aufgaben → an der Tafel besprechen (S. 48 Nr. 1)	
Arbeitsphase	• Aufgaben S. 48 ins Heft	S. 48 Nr. 1, 2, 3, 4 (5)
Abschluss	• Vergleichen, benennen	

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 9

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von Lehrkraft 11 zum Thema „Eigenschaften geometrischer Körper" (50 Minuten, keine Angabe zum Datum). Das Arbeitsblatt war angehängt.

Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrie-unterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben:
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg	- Kontrolle der Hausaufgabe - Wiederholung von Namen und Eigenschaften der geometrischen Körper	- Arbeitsheft
Arbeitsphase	- Schüler erhalten Arbeitsblatt mit Namen, Bildern und Eigenschaften geometrischer Körper in verwürfelter Reihenfolge. - Schüler schneiden die einzelnen Teile aus, sortieren sie nach Namen, Bild und Eigenschaften und kontrollieren mit Lösungsblatt. - Schüler prägen sich Namen und Eigenschaften der geometrischen Körper ein.	- Arbeitsblatt mit Name, Bild und Eigenschaft der geometrischen Körper
Abschluss	- Lehrer zeigt Schüler Modell eines geometrischen Körpers - Schüler nennen Namen und Eigenschaften	- Modelle geometrischer Körper

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 10

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von Lehrkraft 12 zum Thema „Maßstab" (70 Minuten, 20.06.12). Die Aufgabe war zudem als Kopie angehängt.

Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben:
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg	Google Earth → Verändern des Maßstabes von der Weltansicht bis zu jedem Wohnhaus der einzelnen Schüler	
Arbeitsphase	Überleitung zu Luftbildaufnahme im Buch → Verbalisieren der Unterschiede • Rechnen mit verschiedenen Maßstaben: • Orientieren auf Stadtplänen	Duden S. 98/99 AH S. 49
Abschluss	Ortsbild von Ellenz-Poltersdorf als Luftbild → Markieren von wichtigen Gebäuden: Kirche, Schule, Restaurant, ...	

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 11

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von den parallel arbeitenden Lehrkräften 13 und 14 zum Thema „Verschiedene Körpernetze erkennen" (50 Minuten, 16.12.11). Die Aufgaben wurden aus dem genannten Schulbuch in Kopie angehängt.

Notieren Sie die eingesetzten Aufgaben (und beschreiben Sie ggf. knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts):
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf (FREIWILLIG!)	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg		Pappwürfel wird an verschiedenen Kanten aufgeschnitten, bis ein Würfelnetz entsteht. Ein weiterer Würfel wird von den S. an verschiedenen Kanten aufgeschnitten. Beide Netze werden miteinander verglichen und besprochen.
Arbeitsphase		Duden Schülerbuch S. 30 Nr. 1
Abschluss		Gemeinsamen sammeln der gefundenen Würfelnetze an der Tafel.

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 12

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von den parallel arbeitenden Lehrkräften 15 und 16 zum Thema „Koordinaten markieren Punkte im Gitternetz" (50 Minuten, 02.09.11). Die Aufgaben wurden den angehängten Arbeitsblättern entnommen.

Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben:
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg	Folie 1 wird aufgedeckt (erste S.: Äußerungen - Was könnte es sein?) Aufklappen des verdeckten Tafelantrags „Goldsack, Edelsteinkiste, Zauberbuch und Zaubertrank warten auf glückliche Finder" U-gespräch mit Fazit: „Ohne Startpunkt und Richtungsangaben können wir die Dinge nicht finden."	Stummer Impuls Folie 1 2. Stummer Impuls Folie 2 über Folie 1
Arbeitsphase	1. Lösungsbeschreibungen: Gehe … nach rechts, gehe … hoch „Koordinaten markieren Punkte im Gitternetz" S. tragen Koordinaten der Fundstücke ein, formulieren Regel für Rechts- und Hochachsenkoordinaten Anwendungsphase: Tragt die Koordinaten im Heft ein Übungsphase: „Tragt 10 Punkte mit ihren Koordinaten ein. Die Punkte dürfen nicht schon in Blatt 1 vorkommen."	L: Für jede Fundstelle gibt es eine Angabe auf der Rechts- und Hochachse. Tafelantrag Arbeitsblatt 1 Arbeitsblatt 2 } nach Anweisung bearbeiten Ergebnisvergleich (zufällige Übereinstimmungen)
Abschluss	H.A. Aufgabenstellung mit erweitertem Umfang formulieren	Kopiervorlage AB 7.1 aus Helmut Leutenbauer: Geometrie in der Grundschule (Auer)

Anhang I: Teilstudie II: Protokollbogen bearbeitet 13

Das folgende Unterrichtsprotokoll stammt von den parallel arbeitenden Lehrkräften 18 und 19 zum Thema „Symmetrie" (50 Minuten, 26.08.11). Die Aufgaben wurden aus dem genannten Schulbuch beziehungsweise Arbeitsheft in Kopie angehängt.

Beschreiben Sie knapp den Ablauf des Geometrieunterrichts und notieren Sie die eingesetzten Aufgaben:
(ggf. Lehrwerk und Seitenzahl angeben)

	Ablauf	Welche Aufgaben haben Sie eingesetzt?
Einstieg	Vorwissen artikulieren, Begriffe klären	Tafel, Freihandzeichnungen, Skizzen Begriffe: Symmetrie Symmetrieachse Achsensymmetrie gleichmäßig Spiegelung Abstand
Arbeitsphase	Einzelarbeit 1) Symmetrieachsen einzeichnen 2) Figuren achsensymmetrisch ergänzen 3) Eine symmetrische Figur zeichnen 4) Figur an einer Achse auf Karopapier spiegeln	Super M 4 Schülerbuch S. 13 Arbeitsheft S. 8
Abschluss	Partnerarbeit: Figuren achsensymmetrisch ergänzen	Karopapier

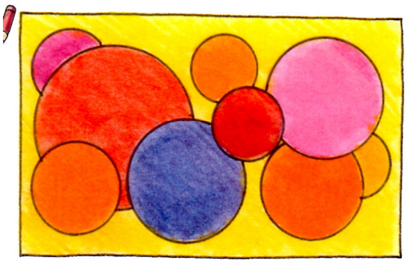
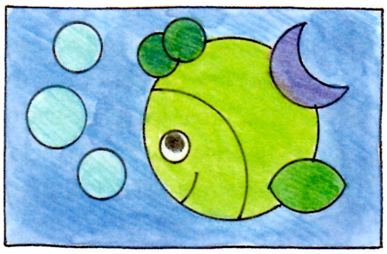
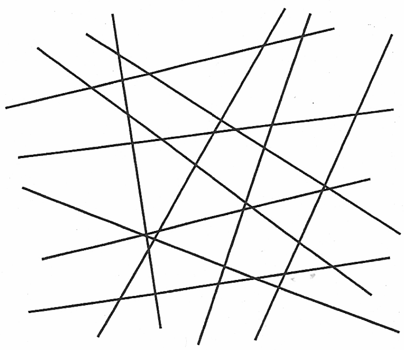
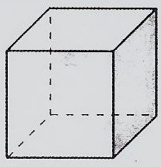
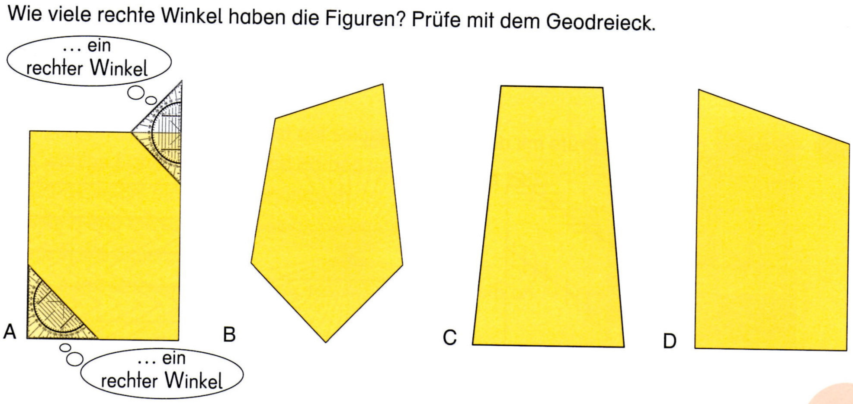
Anhang J: Teilstudie II: Auflistung der gewonnenen Erkenntnisse

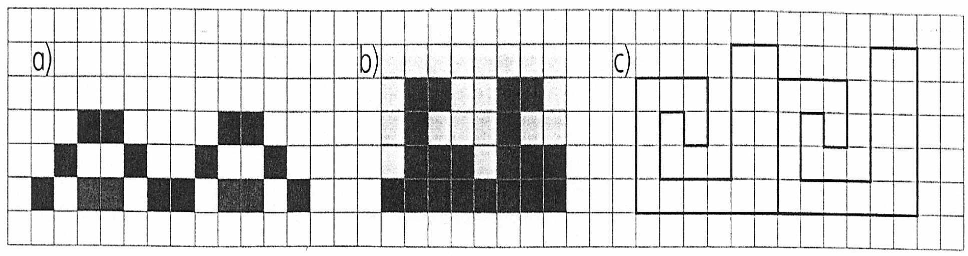
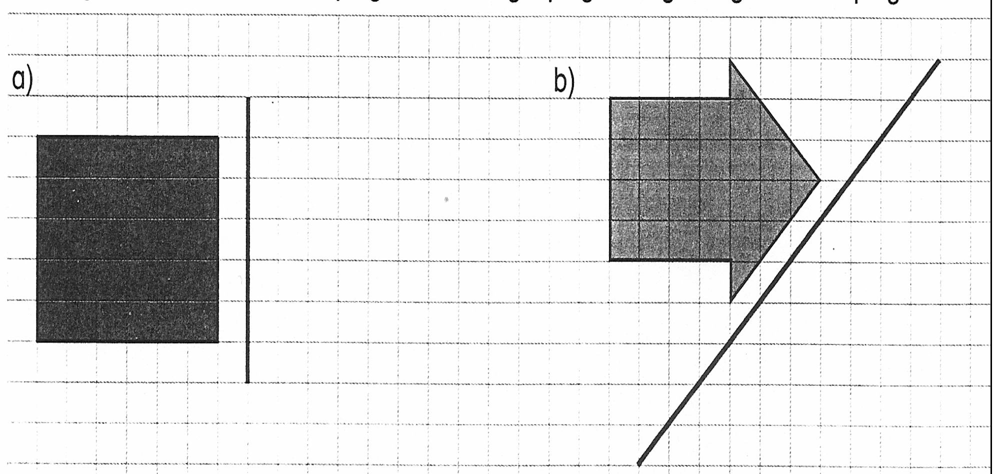
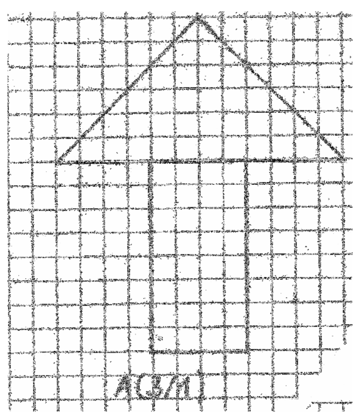
Folgende Dokumente können sortiert nach Lehrkräften bei der Autorin eingesehen werden:

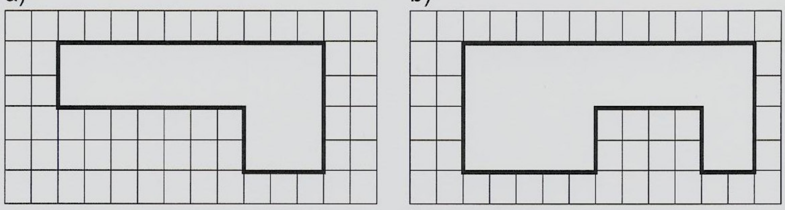
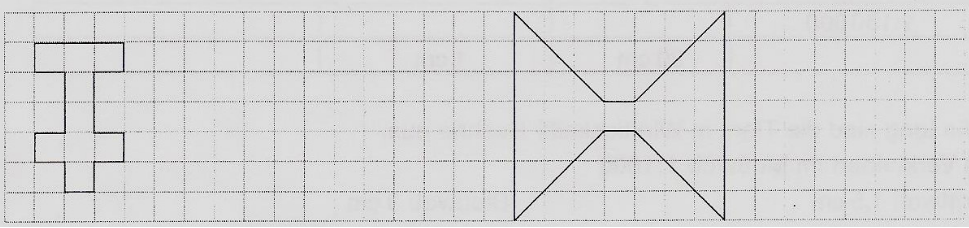
a) Protokolle aller Lehrkräfte (148 Protokolle insgesamt)
b) Übersicht der eingegangenen Protokolle (mit Themenangabe)
c) 653 entnommene geometrische Aufgaben (sortiert nach IKB 1-4, geratet)
d) Übersicht über die protokollierte Unterrichtszeit und entnommene Aufgaben
e) Verteilung der entnommenen Aufgaben auf die Anforderungsbereiche (nach Rating)

Anhang K: Teilstudie II: Protokollaufgaben - Rating

Alle 653 den Protokollen entnommenen, schriftlich zu bearbeitenden geometrischen Aufgaben wurden nach den inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen geordnet und anschließend für das Rating tabellarisch angeordnet. Anbei wird jeweils ein Ausschnitt aus den inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen 2 bis 4 abgebildet. Der Ausschnitt zum inhaltsbezogenen Kompetenzbereich 1 ist in Kapitel 8.1.2 zu finden. Die vollständige geratete Aufgabensammlung kann in den Unterlagen der Autorin eingesehen werden.

Raum und Form: geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen (IKB 2)	
Aufgabenstellung	**Zuordnung zu Anforderungs-bereich**
Zeichne eigene Bilder mit Kreisen auf ein Blatt Papier.   (Lehrkraft 3)	1
4 Nur zwei Linien sind zueinander parallel. Färbe sie.  (Lehrkraft 12)	1
1  Schreibe den Text ab und ergänze. Ein Würfel hat ___ Ecken, ___ Kanten, ___ Seitenflächen. Die Seitenflächen sind ________. Alle Seitenflächen sind ________. (Lehrkraft 6)	1
Wie viele rechte Winkel haben die Figuren? Prüfe mit dem Geodreieck. 	1

(Lehrkraft 3)	
Raum und Form: einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen (IKB 3)	
Aufgabenstellung	**Zuordnung zu Anforderungs-bereich**
Übertrage in dein Heft und setze fort.  (Lehrkraft 12)	1
Überlege auch hier vor dem Spiegeln, wo die gespiegelte Figur liegen wird. Spiegle dann.  (Lehrkraft 12)	2
Zeichne den Pfeil doppelt so groß:  (Lehrkraft 15)	2

Raum und Form: Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen (IKB 4)	
Aufgabenstellung	**Zuordnung zu Anforderungs-bereich**
③ Wie groß sind Inhalt und Umfang der Flächen? a) b)  FI: FI: FU: FU: (Lehrkraft 6)	1
Bestimme den Flächeninhalt in ☐ und wandle jede Figur in ein Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt um.  (Lehrkraft 4)	2
⑤ Eine rechteckige Fläche hat den Flächeninhalt von 16 Quadratmetern. Wie groß kann der Umfang sein? Wie lang ist der kleinstmögliche Umfang? Eine Skizze kann dir helfen. (Lehrkraft 6)	3

Anhang L: Teilstudie II: Protokollaufgaben - Übereinstimmungsmatrizen für die vier inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche

Tabelle: Übereinstimmungsmatrix Protokollaufgaben - IKB 1

		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	28	0	0
	AB II	4	89	1
	AB III	0	0	15

Number of observed agreements: 132 (96.35% of the observations)
Kappa= 0.926
95% confidence interval: From 0.862 to 0.990
The strength of agreement is considered to be 'very good'.

Tabelle: Übereinstimmungsmatrix Protokollaufgaben - IKB 2

		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	210	14	0
	AB II	12	45	0
	AB III	0	1	2

Number of observed agreements: 257 (90.49% of the observations)
Kappa= 0.721
95% confidence interval: From 0.623 to 0.819
The strength of agreement is considered to be 'good'.

Tabelle: Übereinstimmungsmatrix Protokollaufgaben - IKB 3

		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	64	11	0
	AB II	4	73	0
	AB III	0	1	2

Number of observed agreements: 139 (89.68% of the observations)
Kappa= 0.800
95% confidence interval: From 0.707 to 0.892
The strength of agreement is considered to be 'good'.

Tabelle: Übereinstimmungsmatrix Protokollaufgaben - IKB 4

		Rater 1		
		AB I	AB II	AB III
Rater 2	AB I	23	4	0
	AB II	2	46	0
	AB III	0	0	2

Number of observed agreements: 71 (92.21% of the observations)
Kappa= 0.838
SE of kappa = 0.064
95% confidence interval: From 0.713 to 0.963
The strength of agreement is considered to be 'very good'.

Anhang M: DEMAT: Klassenbogen und Interpretationshinweise

Nach der Auswertung der DEMAT-Testbögen am Anfang und am Ende des vierten Schuljahres wurden die jeweiligen Schülerleistungen in Form des exemplarisch abgebildeten Klassenbogens (inkl. Abkürzungsübersicht) an die Lehrkräfte übermittelt, der die bei den einzelnen Aufgaben, den Subtests und dem Testgesamtwert für die einzelnen Schülerinnen und Schüler sowie für die gesamte Klasse erzielten Ergebnisse abbildete. Zusätzlich zu den Mittelwerten wurde der sich daraus ergebende Prozentrang eingetragen. Die Klassenbögen aller 16 Klassen zum DEMAT 3+ und zum DEMAT 4 können in den Unterlagen der Autorin eingesehen werden.

Tabelle: Klassenbogen exemplarisch

Nr.	Name	ZS	AD	SU	MU	SR	SZ	FL	LS	LU	ST Arith-metik	ST Sach-rechnen	ST Geo-metrie	Test-gesamt-wert
	zu erreichende Punkte	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**3**	**3**	**2**	**4**	**15**	**8**	**8**	**31**
1	xyi	3	3	3	4	3	2	3	1	4	13	7	6	**26**
…														
	Summe	**20**	**29**	**32**	**32**	**29**	**21**	**25**	**11**	**33**	**113**	**62**	**57**	**232**
	Mittelwert	**2,22**	**3,22**	**3,56**	**3,56**	**3,22**	**2,33**	**2,78**	**1,22**	**3,67**	**12,56**	**6,89**	**6,33**	**25,78**
	Prozentrang der Mittelwerte	**96**	**94**	**100**	**99**	**88**	**93**	**99**	**79**	**96**	**100**	**96**	**98**	**100**

Die Lehrkräfte erhielten des Weiteren die Normentabellen für Mädchen/Jungen und Hinweise zur Interpretation der individuell erzielten Prozentränge (Tab.) sowie der Klassenmittelwerte (Tab.). Die vollständigen Dokumente mit den Erläuterungen für die Lehrkräfte und den Interpretationshinweisen zu den Ergebnissen des DEMAT 3+ und des DEMAT 4 können ebenfalls in den Unterlagen der Autorin eingesehen werden.

Tabelle: Inhaltliche Beurteilung der Normwerte des DEMAT 3+ (Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004, S.23)

Prozentrang	Leistungsbeurteilung
≤ 4	sehr schwache Leistung
5-15	schwache Leistung
16-24	unterdurchschnittliche Leistung
25-75	durchschnittliche Leistung
76-90	überdurchschnittliche Leistung
≥ 91	weit überdurchschnittliche Leistung

Tabelle: Interpretationshinweise für Klassenleistungen des DEMAT 3+ (Roick, Gölitz & Hasselhorn, 2004, S:26)

		Klassenmittelwert		
		Prozentrang 0-24	**Prozentrang 25-75**	**Prozentrang 76-100**
Klassenstreuung	**Prozentrang 0–75**	Klasse insgesamt eher schwach	durchschnittliche Klasse	Klasse insgesamt eher stark
	Prozentrang 76–100	die eher schwache Leistung der Klasse ist evtl. durch einzelne Kinder bedingt	Kinder der Klasse sind sehr leistungsheterogen	die eher starke Leistung der Klasse ist evtl. durch einzelne Kinder bedingt

Anhang N: DEMAT: Auflistung der gewonnenen Erkenntnisse

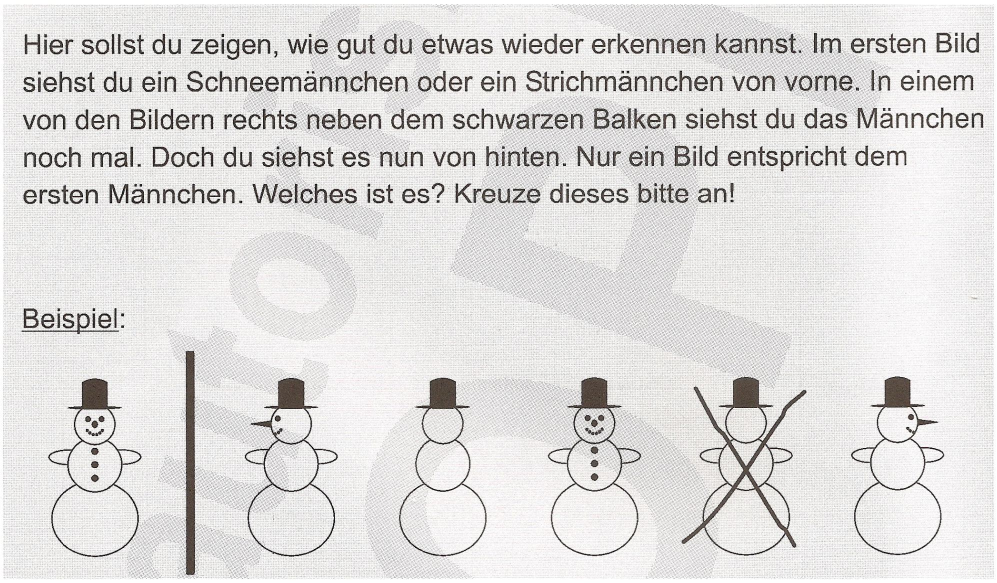
Folgende Dokumente können bei der Autorin eingesehen werden:

a) Testbögen des DEMAT 3+ und des DEMAT 4 aller 270 Schülerinnen und Schüler
b) Klassenbögen der 16 Klassen zum DEMAT 3+ und zum DEMAT 4 (Rohwerte)
c) Klassenbögen der 16 Klassen zum DEMAT 3+ und zum DEMAT 4 (T-Werte)
d) Prozentuale Verteilung der Schülerinnen und Schüler in den Subtests (T-Werte)
e) Prozentuale Verteilung der Schülerinnen in den Subtests (T-Werte)
f) Prozentuale Verteilung der Schüler in den Subtests (T-Werte)
g) Klassenweise Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die drei Leistungsgruppen
h) Klassenweise Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die drei Leistungsgruppen (Geschlecht)
i) Auswürfe aus R: *t*-Test für abhängige Stichproben für die Stichprobe insgesamt (Subtests und Testgesamtwert)
j) Auswürfe aus R: *t*-Test für abhängige Stichproben klassenweise (Subtests und Testgesamtwert)

Anhang O: DEMAT: Aufgaben des Subtest Geometrie bearbeitet

Zur Veranschaulichung werden exemplarisch die Aufgabenbearbeitungen zu den geometrischen Aufgaben des Subtests Geometrie (SG4T) von jeweils einem Schüler beziehungsweise einer Schülerin der drei Leistungsgruppen abgebildet (LG 1: Schülerin 19.09; LG 2: Schülerin 09.15; LG 3: Schüler 03.14).

Arbeitsanweisung für Seite 19 des Testbogens:

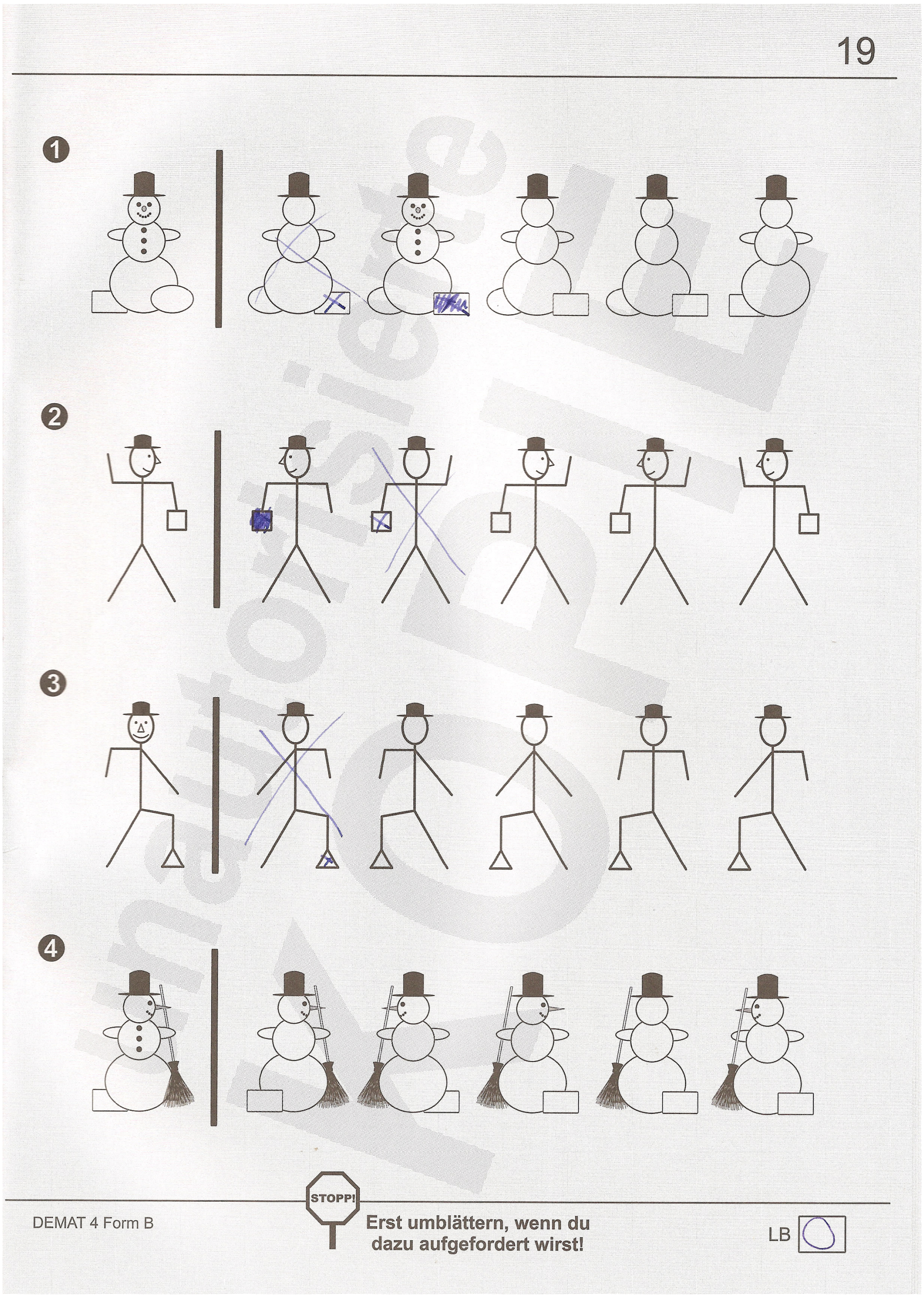

Hier sollst du zeigen, wie gut du etwas wieder erkennen kannst. Im ersten Bild siehst du ein Schneemännchen oder ein Strichmännchen von vorne. In einem von den Bildern rechts neben dem schwarzen Balken siehst du das Männchen noch mal. Doch du siehst es nun von hinten. Nur ein Bild entspricht dem ersten Männchen. Welches ist es? Kreuze dieses bitte an!

Beispiel:

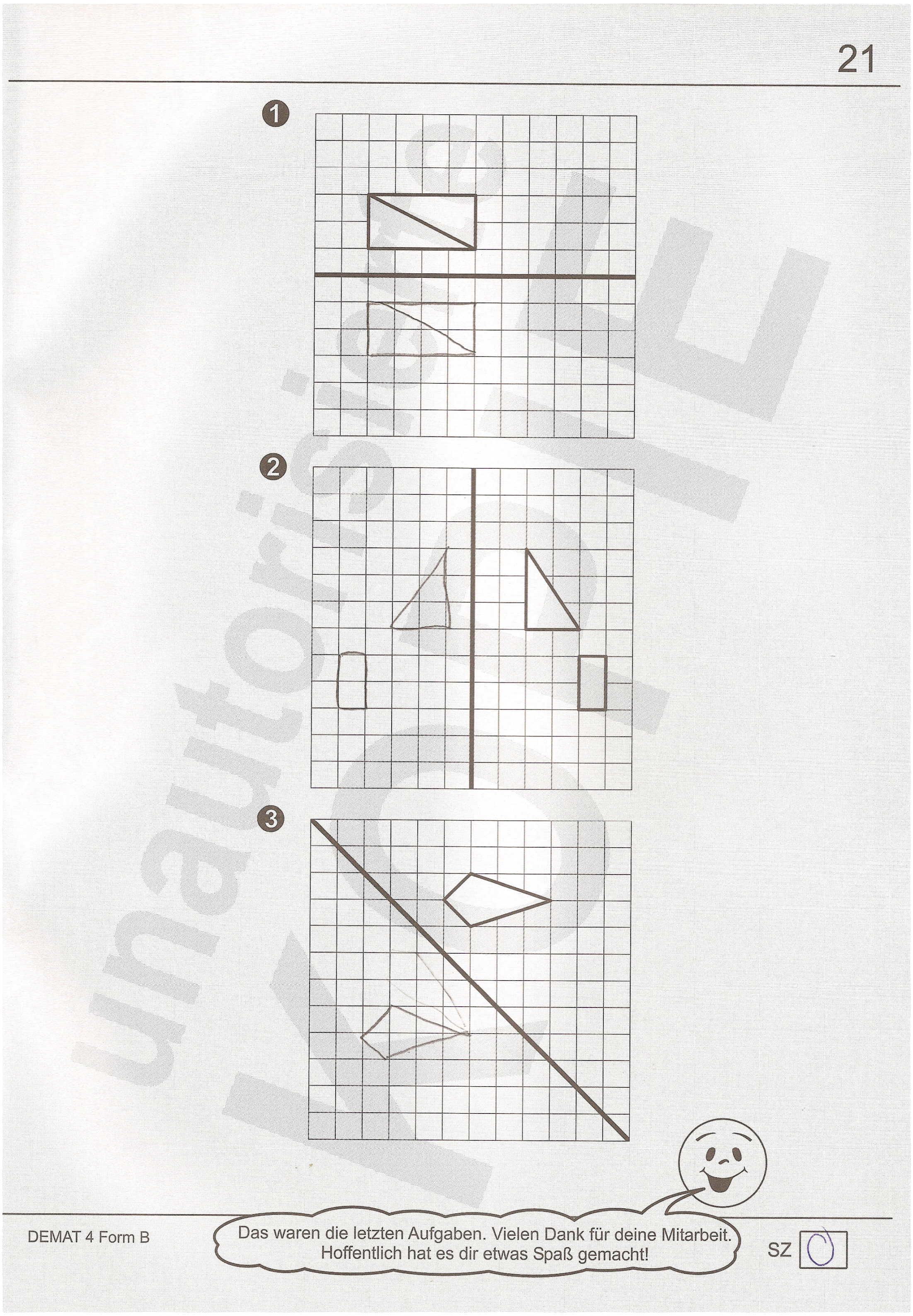
Arbeitsanweisung für Seite 21 des Testbogens:

Im Bild unten siehst du eine Form und eine schwarze Linie. Die Linie, die in dieser Aufgabe senkrecht ist, stellt die Spiegelachse dar. Zeichne ohne Lineal mit deinem Bleistift das Spiegelbild der Form!

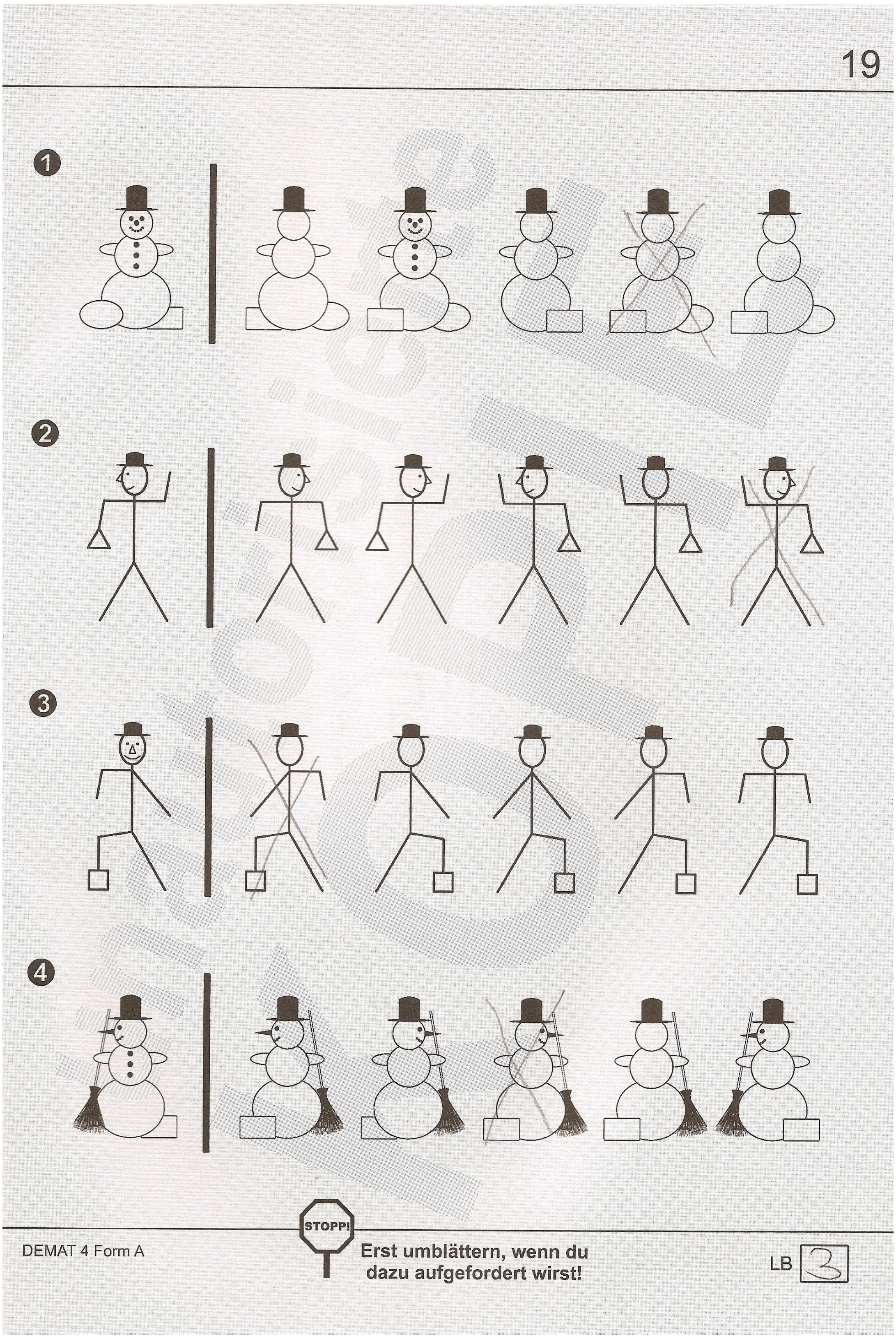
Anhang O: DEMAT: Aufgaben des Subtest Geometrie bearbeitet (LG 1, S. 19)



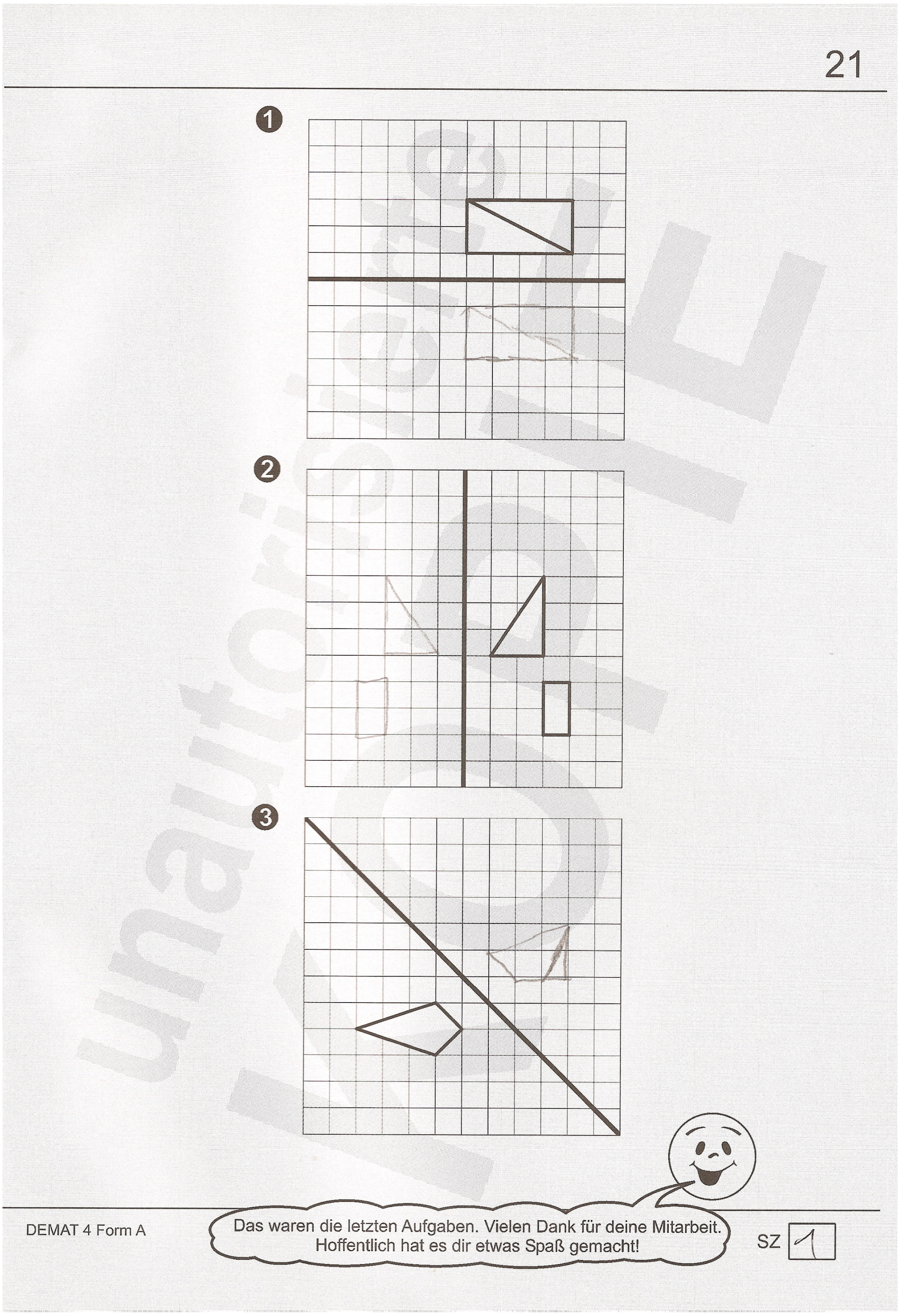
Anhang O: DEMAT: Aufgaben des Subtest Geometrie bearbeitet (LG 1, S. 21)



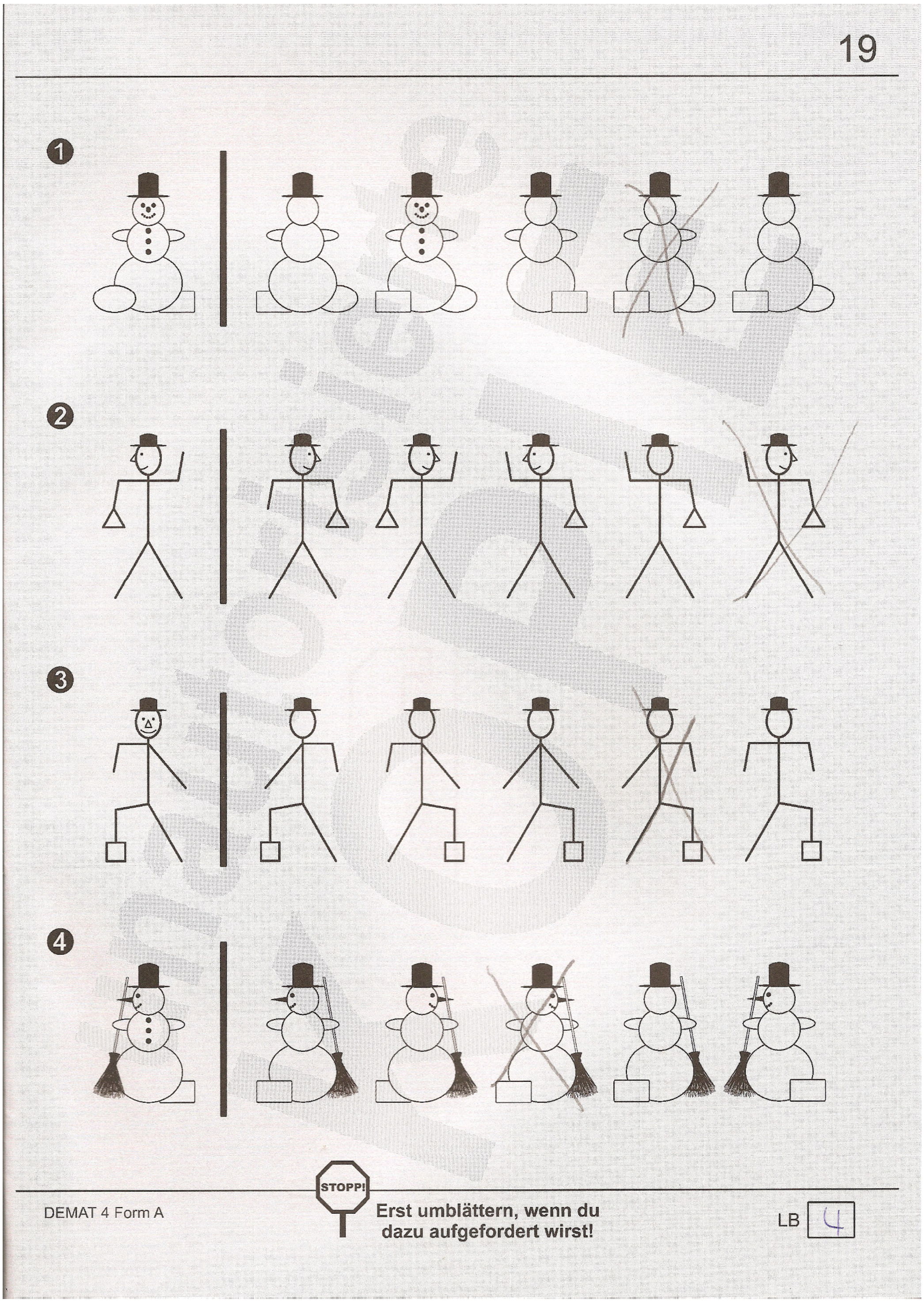
Anhang O: DEMAT: Aufgaben des Subtest Geometrie bearbeitet (LG 2, S. 19)



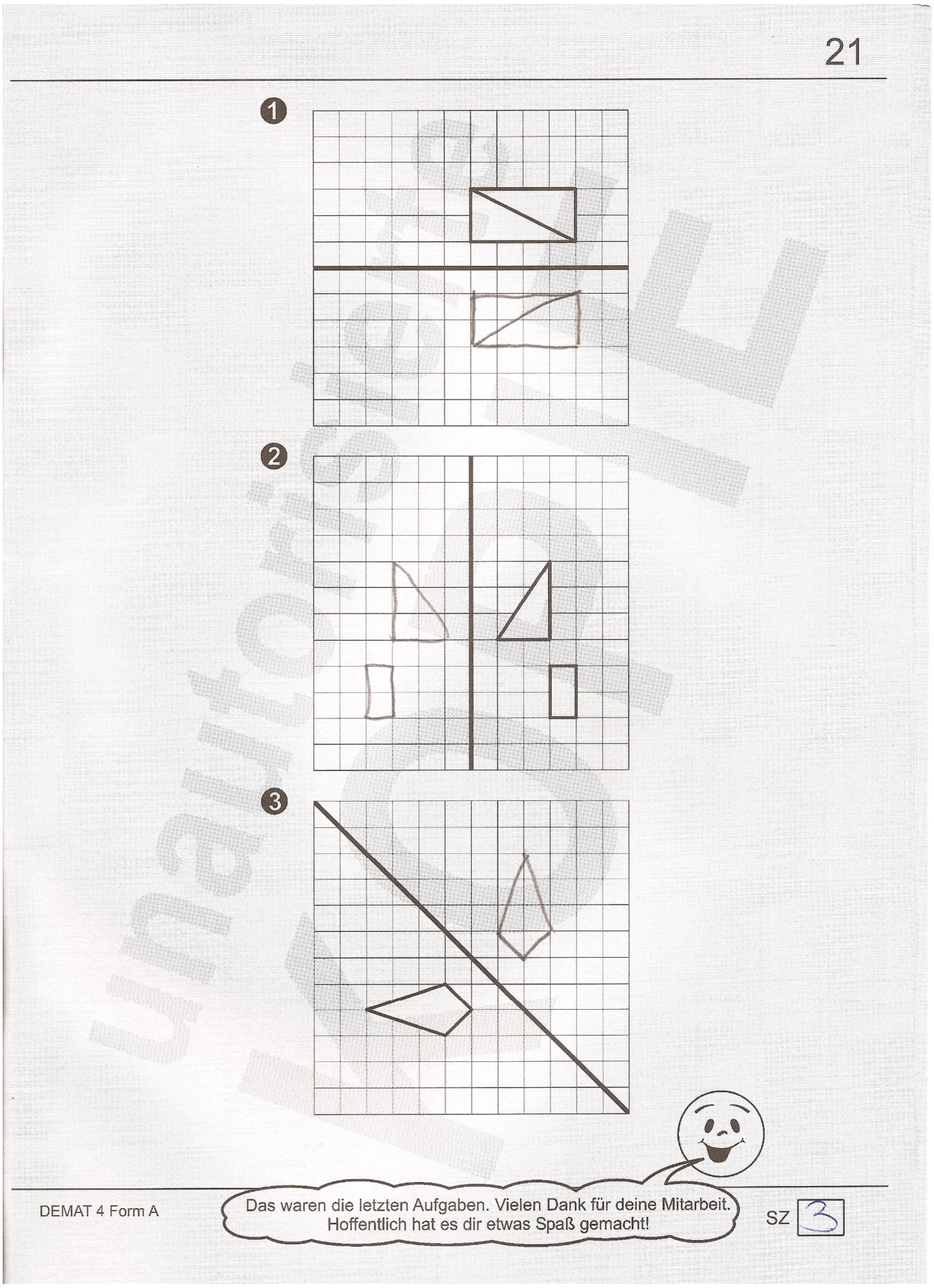
Anhang O: DEMAT: Aufgaben des Subtest Geometrie bearbeitet (LG 2, S. 21)



Anhang O: DEMAT: Aufgaben des Subtest Geometrie bearbeitet (LG 3, S. 19)



Anhang O: DEMAT: Aufgaben des Subtest Geometrie bearbeitet (LG 3, S. 21)



Anhang P: DEMAT: *t*-Test für abhängige Stichproben (Subtests, Testgesamtwert)

Die ermittelten Rohwerte der 270 Schülerinnen und Schüler wurden in T-Werte umgewandelt. Mit diesen Daten wurde der *t*-Test für abhängige Stichproben berechnet. Es folgt die Darstellung der in Kapitel 7.3 genannten signifikante Ergebnisse. Alle weiteren Berechnungen können bei der Autorin eingesehen werden.

Testgesamtwert (signifikante negative Leistungsentwicklung):

Klasse 1 (t (8) = 3.8849, p = 0.004642, mean of the differences = 7.888889)
Klasse 3 (t (20) = 3.8347, p = 0.001035, mean of the differences = 6.380952)
Klasse 5 (t (20) = 2.5532, p = 0.01895, mean of the differences = 3.761905)
Klasse 6 (t (23) = 2.7599, p = 0.01115, mean of the differences = 2.666667)
Klasse 9 (t (13) = 2.4147, p = 0.03121, mean of the differences = 4.142857)
Klasse 11 (t (17) = 3.3006, p = 0.004225, mean of the differences = 5.111111)
Klasse 13 (t (12) = 3.1575, p = 0.00826, mean of the differences = 3.769231)
Klasse 14 (t (12) = 5.1121, p = 0.0002566, mean of the differences = 7.538462)
Klasse 19 (t (18) = 2.5195, p = 0.02142, mean of the differences = 3.263158)

Subtest Arithmetik (signifikante negative Leistungsentwicklung):

Klasse 1 (t (8) = 4.3643, p = 0.002399, mean of the differences = 8.222222)
Klasse 3 (t (20) = 3.779, p = 0.001179, mean of the differences = 7.666667)
Klasse 5 (t (20) = 4.0966, p = 0.0005613, mean of the differences = 6.095238)
Klasse 7 (t (19) = 2.4752, p = 0.02291, mean of the differences = 4.4)
Klasse 8 (t (18) = 2.924, p = 0.009062, mean of the differences = 4)
Klasse 11 (t (17) = 3.4464, p = 0.003082, mean of the differences = 6.5)
Klasse 13 (t (12) = 3.148, p = 0.008406, mean of the differences = 4.846154)
Klasse 14 (t (12) = 4.3171, p = 0.001001, mean of the differences = 9)

Anhang Q: DEMAT: Normalverteilung

In Kapitel 9.1.1 wurde die Normalverteilung der geometrischen Leistungen der Schülerstichprobe geprüft. Zusätzlich zu dem abgebildeten Histogramm wurden die Daten anhand eines Q-Q Plots überprüft, der die geringe Abweichung von der Normalverteilung visualisierte.

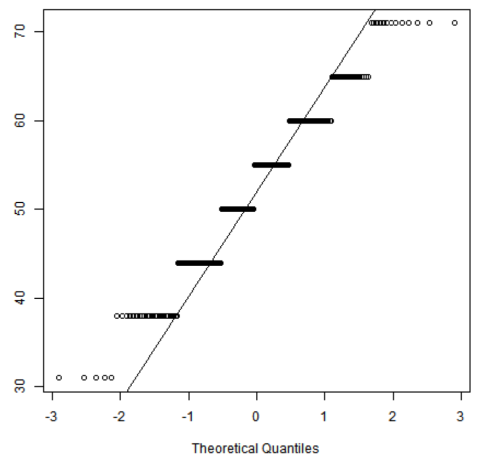


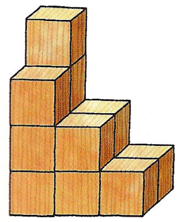
Abbildung: Q-Q Plot.

Anhang R: Teilstudie III: Geometrische Aufgaben

Inhaltsbezogener Kompetenzbereich 1: sich im Raum orientieren

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Aus wie vielen Würfeln besteht der Würfelbau?



Antwort: Der Würfelbau besteht aus _______ Würfeln.

Abbildung: Aufgabe AB1a-1 (in Anlehnung an Müller-Wolfangel, Schreiber & Heilig, 2007, S. 51).

Harkan und Ole haben den Oldtimer im Technikmuseum von verschiedenen Seiten fotografiert. Schau dir an, wo Harkan und Ole stehen. Wer hat welches Foto gemacht?

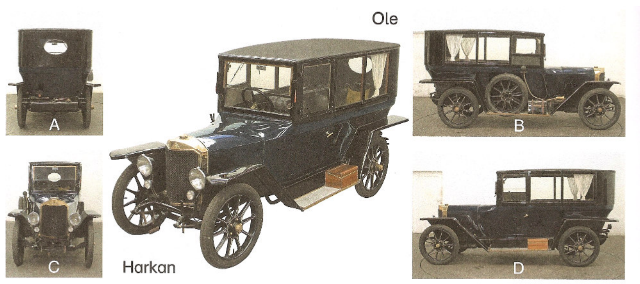


Abbildung: Aufgabe AB1b-1 (in Anlehnung an Fuchs & Käpnick, 2008, S. 66).

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Welche der abgebildeten Netze sind Würfelnetze? Kreuze an!

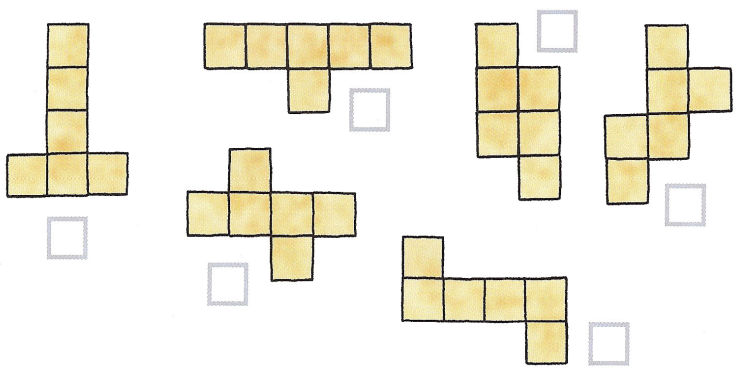


Abbildung: Aufgabe AB2a-1 (in Anlehnung an Müller-Wolfangel, Schreiber & Heilig, 2007, S. 46).

In dem Netz fehlt eine Fläche, um daraus einen Quader zu falten. Ergänze die fehlende Fläche. Es gibt mehrere Möglichkeiten!

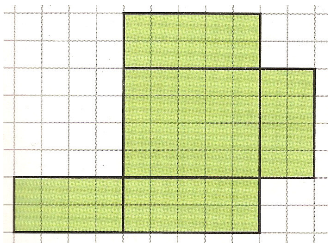
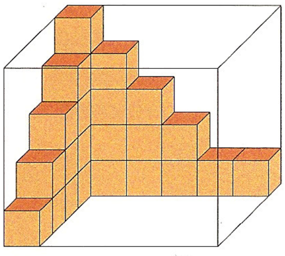


Abbildung: Aufgabe AB2b-1 (in Anlehnung an Leininger, Ernst, Kistella & Wallrabenstein, 2005, S. 29).

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

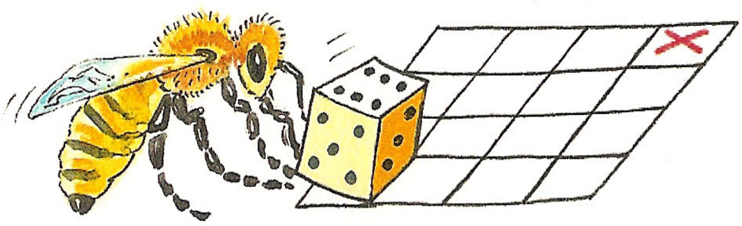
Tom baut eine Schachtel, bei der alle Kanten doppelt so lang sind wie bei dieser Schachtel. Wie viele Würfel passen dann hinein?



Antwort: In die Schachtel passen dann ____ Würfel hinein.

Abbildung: Aufgabe AB3a-1 (in Anlehnung an Lorenz, 2005, S. 60).

Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann der Würfel zum angekreuzten Feld kommen, wenn er nur nach rechts und nach hinten gekippt wird?



Antwort: Der Würfel kann auf ____ verschiedenen Wegen zum angekreuzten Feld kommen.

Abbildung: Aufgabe AB3b-1 (in Anlehnung an Lorenz, 2005, S. 71).

Inhaltsbezogener Kompetenzbereich 2: geometrische Figuren

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Fülle die Tabelle aus:

	Form der Flächen	Gesamtzahl der Flächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Beispiel
Würfel					
Kegel					
Zylinder					

Abbildung: Aufgabe AB1a-2 (in Anlehnung an Fuchs & Käpnick, 2008, S. 64).

Zeichne ein Rechteck von
7 cm Länge und 4 cm Breite.

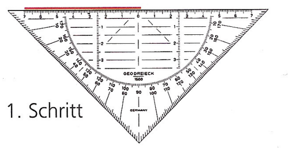


Abbildung: Aufgabe AB1b-2 (in Anlehnung an Eidt, Lammel, Voß & Wichmann, 2009, S. 62).

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Zeichne nach und male an:

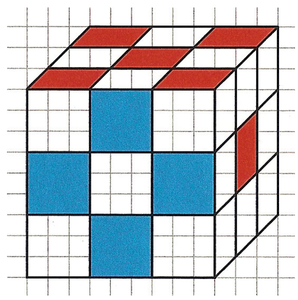


Abbildung: Aufgabe AB2a-2 (in Anlehnung an Lorenz, 2005, S. 64).

Kann das stimmen?

a) „Es gibt kein Dreieck mit zwei rechen Winkeln."

b) „Das Quadrat hat vier rechte Winkel."

Abbildung: Aufgabe AB2b-2 (in Anlehnung an Eidt, Lammel, Voß & Wichmann, 2009, S. 61).

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Stimmt das? Begründe mit den Eigenschaften der Figuren oder zeige ein Gegenbeispiel.

a) Jedes Viereck ist ein Parallelogramm.

b) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.

Abbildung: Aufgabe AB3a-2 (in Anlehnung an Lorenz, 2005, S. 25).

Zeichne die Figuren ohne Absetzen und ohne doppelte Linien nach. Markiere Anfangs- und Endpunkt rot.

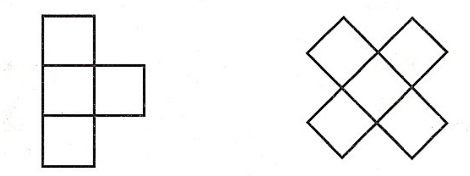


Abbildung: Aufgabe AB3b-2 (in Anlehnung an Wittmann & Müller, 2009, S. 17).

Inhaltsbezogener Kompetenzbereich 3: geometrische Abbildungen

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Setze das durch Verschiebung entstandene Muster noch einmal daran.

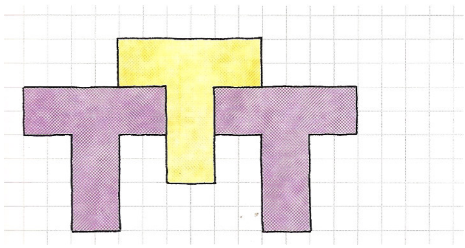


Abbildung: Aufgabe AB1a-3 (in Anlehnung an Müller-Wolfangel, Schreiber & Heilig, 2007, S. 53).

Sind die Verkehrsschilder symmetrisch? Zeichne die Symmetrieachsen ein!

Abbildung: Aufgabe AB1b-3 (in Anlehnung an Leininger, Ernst, Kistella & Wallrabenstein, 2005, S. 94).

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Spiegele die Figur an allen Achsen!

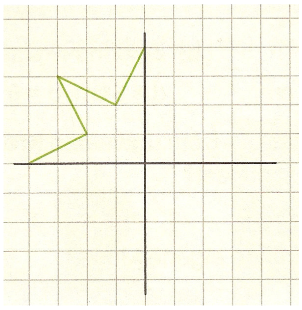


Abbildung: Aufgabe AB2a-3 (in Anlehnung an Fuchs & Käpnick, 2008, S. 112).

Zeichne die Figur verkleinert, jede Linie halb so lang.

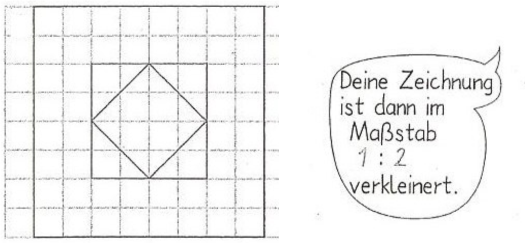


Abbildung: Aufgabe AB2b-3 (in Anlehnung an Eidt, Lammel, Voß & Wichmann, 2009, S. 87).

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Irina hat eine Regel gefunden, wie sie ein Haus vergrößern kann. Wie sieht das fünfte Haus aus? Zeichne es auf!

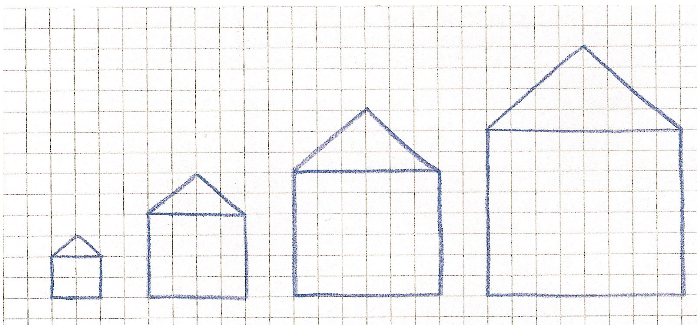


Abbildung: Aufgabe AB3a-3 (in Anlehnung an Schütte, 2006, S. 73).

Ergänze zu einer achsensymmetrischen Figur!

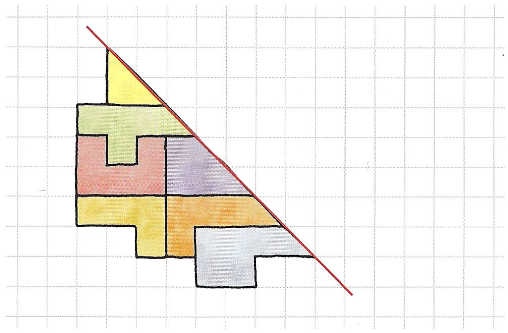


Abbildung: Aufgabe AB3b-3 (in Anlehnung an Müller-Wolfangel, Schreiber & Heilig, 2007, S. 53).

Inhaltsbezogener Kompetenzbereich 4: Flächen- und Rauminhalte

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Wie viele Zentimeterquadrate passen in das Rechteck? Zeichne und rechne.

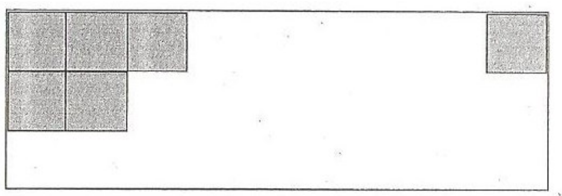


Abbildung: Aufgabe AB1a-4 (Eidt, Lammel, Voß & Wichmann, 2009, S. 83).

Wie groß ist der Umfang dieser Fläche?

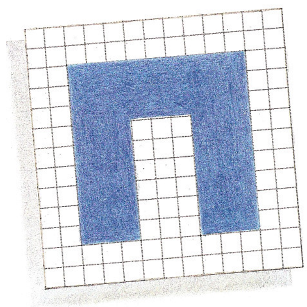


Abbildung: Aufgabe AB1b-4 (in Anlehnung an Schütte, 2006, S. 71).

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Zeichne eine weitere Figur mit derselben Flächengröße, aber einer anderen Form.

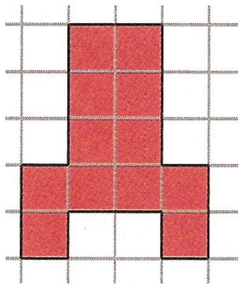


Abbildung: Aufgabe AB2a-4 (in Anlehnung an Leininger, Ernst, Kistella & Wallrabenstein, 2005, S. 97).

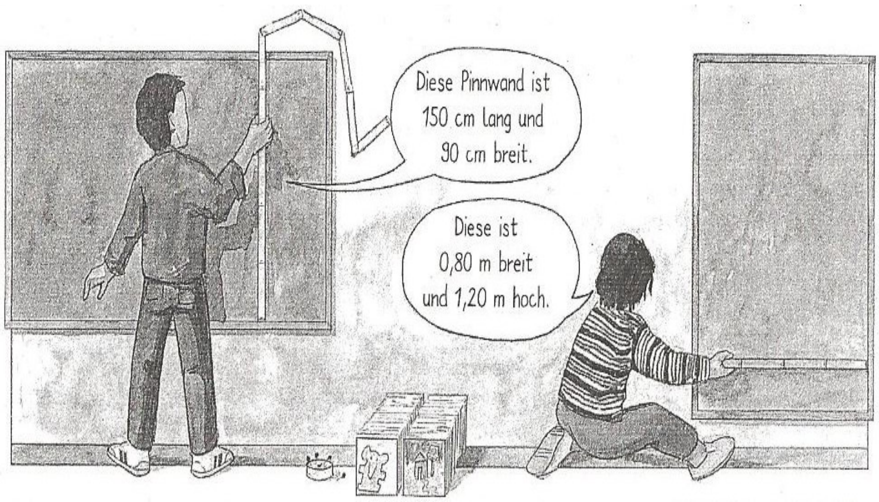
Wo muss man die Fläche, wo den Umfang berechnen?
Schreibe ein weiteres Beispiel dazu!

Umfang	**Fläche**
Teppichrand	Leseteppich

Abbildung: Aufgabe AB2b-4 (in Anlehnung an Gierlinger, 2009, S. 93).

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Tim und Lea wollen 28 quadratische Bilder aufhängen. Jedes Bild ist 20 cm lang. Welche Pinnwand reicht, um alle Bilder aufzuhängen?



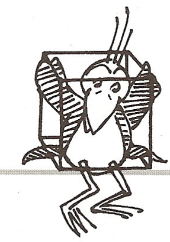
Antwort:

________ Pinnwand reicht, um alle Bilder aufzuhängen.

Abbildung: Aufgabe AB3a-4 (in Anlehnung an Eidt, Lammel, Voß & Wichmann, 2009, S. 83).

Ein Kantenmodell soll 12 cm lang,
8 cm breit und 6 cm hoch werden.

Wie viel Draht
wird benötigt?



Antwort:

Es wird ____ cm Draht benötigt.

Abbildung: Aufgabe AB3b-4 (in Anlehnung an Leininger, Ernst, Kistella & Wallrabenstein, 2005, S. 31).

Anhang S: Teilstudie III: Auflistung der gewonnenen Erkenntnisse

Folgende Dokumente können bei der Autorin eingesehen werden:

a) Aufgabenbearbeitungen der 270 Schülerinnen und Schüler (Aufgabenbögen)
b) Lösungsverhalten der 270 Schülerinnen und Schüler (Excel)
c) Lösungshäufigkeiten insgesamt
d) Lösungshäufigkeiten klassenweise
e) Lösungshäufigkeiten Geschlecht
f) Lösungshäufigkeiten Leistungsgruppen
g) Lösungshäufigkeiten Leistungsgruppen und Geschlecht
h) Lösungshäufigkeiten mit den aus den Unterrichtsprotokollen gewonnenen Erkenntnissen
i) Varianzanalyse (F-Test mit Post-hoc-Test Tukey HSD)
j) Effektgrößen (Cohens *d*, Z-Test)

Auszug zu: b) Lösungsverhalten der 270 Schülerinnen und Schüler (Excel)

Tabelle: Lösungsverhalten

Name	AB1a-1	AB2b-1	AB3b-4	AB1b-2	AB2b-4	AB3b-3	AB1a-2	AB2a-3	...
01 01	1	1	1	1	0	0	0	0	...
01 02	1	1	1	1	0	0	0	0	...
01 05	1	1	1	1	1	1	1	1	...
01 06	1	1	0	0	1	0	0	0	...
01 08	1	1	0	1	1	0	0	1	...
01 09	1	1	1	1	0	1	0	1	...
01 10	1	1	0	1	0	1	1	1	...
01 11	1	0	1	1	0	1	0	1	...
01 12	1	0	0	1	0	0	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Anhang T: Teilstudie III: Geometrische Aufgaben bearbeitet

Die insgesamt 6480 bearbeiteten geometrischen Aufgaben der 270 Schülerinnen und Schüler können vollständig bei der Autorin eingesehen werden. Anbei sind Auszüge zu sechs der 24 geometrischen Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen dargestellt, um die Anmerkungen aus Kapitel 9 zu veranschaulichen.

Aufgabe AB1a-2 wurde von 32% der Schülerinnen und Schüler vollständig und korrekt beantwortet, in Kapitel 9.1.2 wurde sie bereits genauer betrachtet. Anbei zuerst eine als richtig gewertete Aufgabenbearbeitung, gefolgt von einer fehlerhaften Bearbeitung.

7. Fülle die Tabelle aus:

	Form der Flächen	Gesamtzahl der Flächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Beispiel
Würfel	eckig	6	8	12	
Kegel	rund	2	0	1	
Zylinder	rund	3	0	2	

Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB1a-2 (durch eine aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsstark eingestufte Schülerin 01.10)

7. Fülle die Tabelle aus:

	Form der Flächen	Gesamtzahl der Flächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Beispiel
Würfel	4 Seiten	6	16	16	Würfel
Kegel	2 Seiten	2	1	1	Zwerge
Zylinder	3 Seiten	3	0	4	Dose

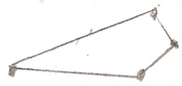
Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB1a-2 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsstark eingestufter Schüler 03.14)

Aufgabe AB3a-2 wurde lediglich von 14% der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler richtig bearbeitet. Die erste Abbildung zeigt eine als korrekt gewertete Schülerlösung. Die folgenden beiden Abbildungen zeigen die Probleme der Mehrheit der Schülerinnen und Schüler beim Begründen auf.

15. Stimmt das? Begründe mit den Eigenschaften der Figuren oder zeige ein Gegenbeispiel.

a) Jedes Viereck ist ein Parallelogramm.

Nein weil



b) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.

Ja weil es vier rechte Winkel hat und deswegen parallel ist

1

Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB3a-2 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG 2 zugeordneter Schüler 04.05)

15. Stimmt das? Begründe mit den Eigenschaften der Figuren oder zeige ein Gegenbeispiel.

a) Jedes Viereck ist ein Parallelogramm. Nein das stimmt nicht nicht jedes Viereck ist ein Parallelogramm.

b) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm. Nein, nicht jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.

0

Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB3a-2(aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG 2 zugeordnete Schülerin 04.16)

15. Stimmt das? Begründe mit den Eigenschaften der Figuren oder zeige ein Gegenbeispiel.

a) Jedes Viereck ist ein Parallelogramm.

X Nein, denn es gibt auch schiefe und ungleichmäßige Vierecken.

b) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.

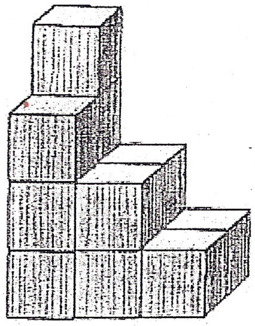
Nein, denn Rechtecken können auch schief und ungleichmäßig sein.

0

Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB3a-2(aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG 2 zugeordnete Schülerin 04.20)

Aufgabe AB1a-1 konnte von 90% der Schülerinnen und Schüler richtig gelöst werden. Die folgenden drei Abbildungen sollen die Spannweite der fehlerhaften Aufgabenbearbeitungen der übrigen 10% aufzeigen.

1.



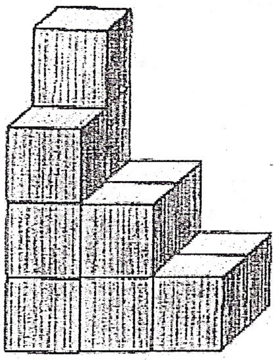
Aus wie vielen Würfeln besteht der Würfelbau?

Antwort:
Der Würfelbau besteht aus 12 Würfeln.

0

Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB1a-1 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG 2 zugeordnete Schülerin 05.26)

1.



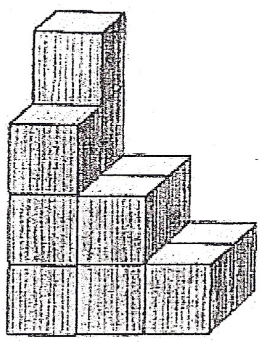
Aus wie vielen Würfeln besteht der Würfelbau?

Antwort:
Der Würfelbau besteht aus 7 Würfeln.

0

Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB1a-1
(aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG 2 zugeordnete Schüler 08.04)

1.



Aus wie vielen Würfeln besteht der Würfelbau?

Antwort:
Der Würfelbau besteht aus 15 Würfeln.

0

Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB1a-1(aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 12.02)

Aufgabe AB2a-3 konnte von 56% der Schülerinnen und Schüler, wie auf der ersten Abbildung zu sehen, zufriedenstellend bearbeitet werden. Die weiteren vier Abbildungen zu dieser Aufgabe zeigen die Probleme der übrigen Schülerinnen und Schüler auf, denen es unmöglich war, die Figur an allen Achsen zu spiegeln.

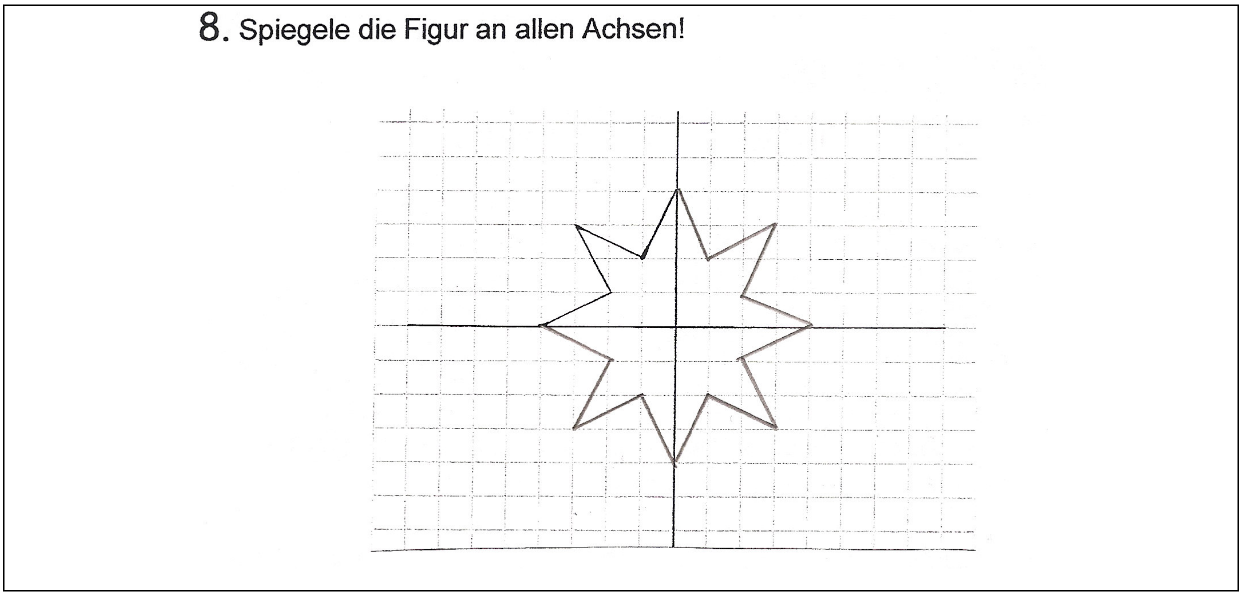


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-3 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsstark eingestufte Schülerin 12.12)

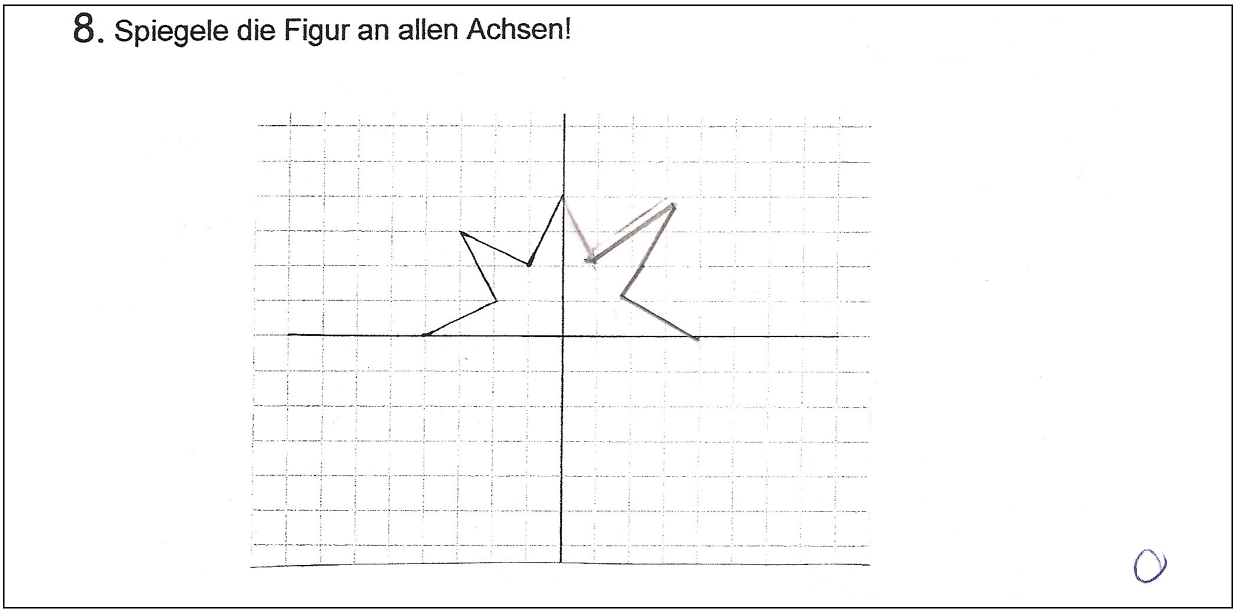


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-3 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG 2 zugeordneter Schüler 14.03)

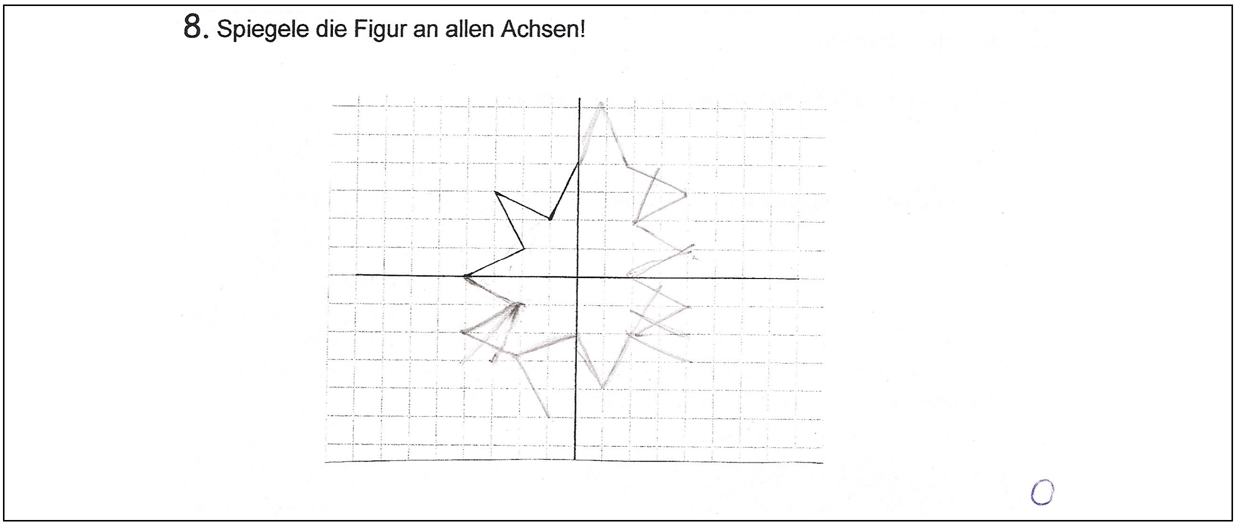


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-3 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 05.07)

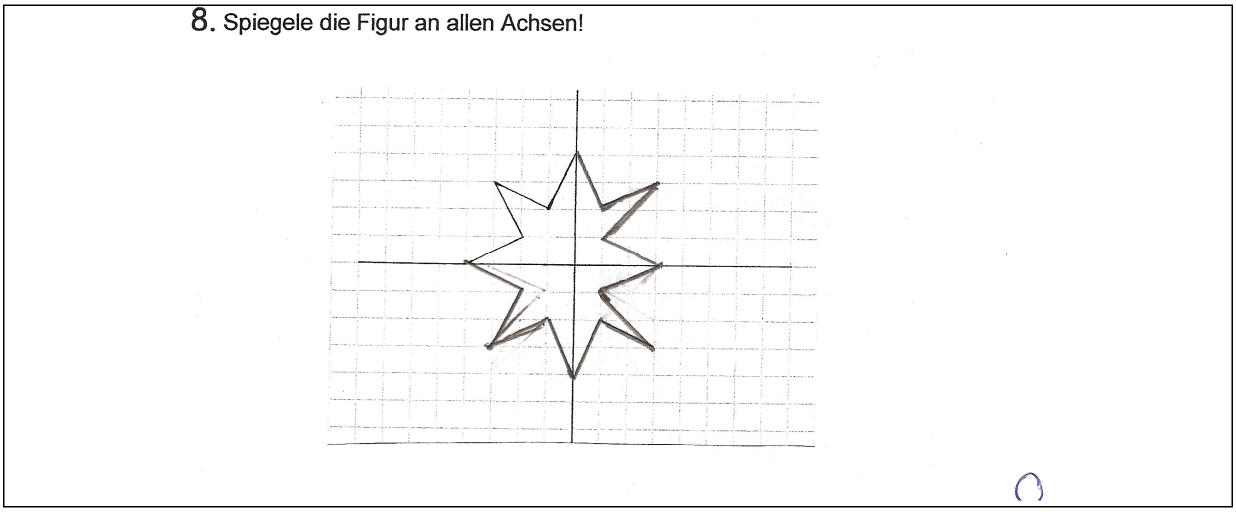


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-3 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 07.09)

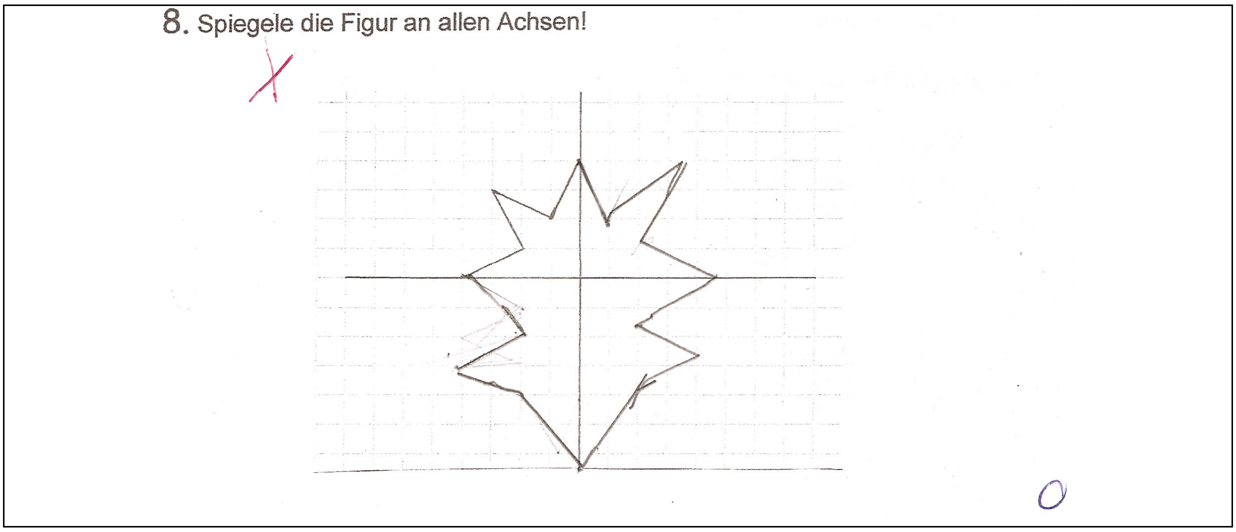


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-3 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 11.07)

Aufgabe AB2a-2, die von 41% der Schülerinnen und Schüler wie auf der ersten Abbildung ersichtlich bearbeitet werden konnte, stellte große Schwierigkeiten für die übrigen Schülerinnen und Schüler dar.

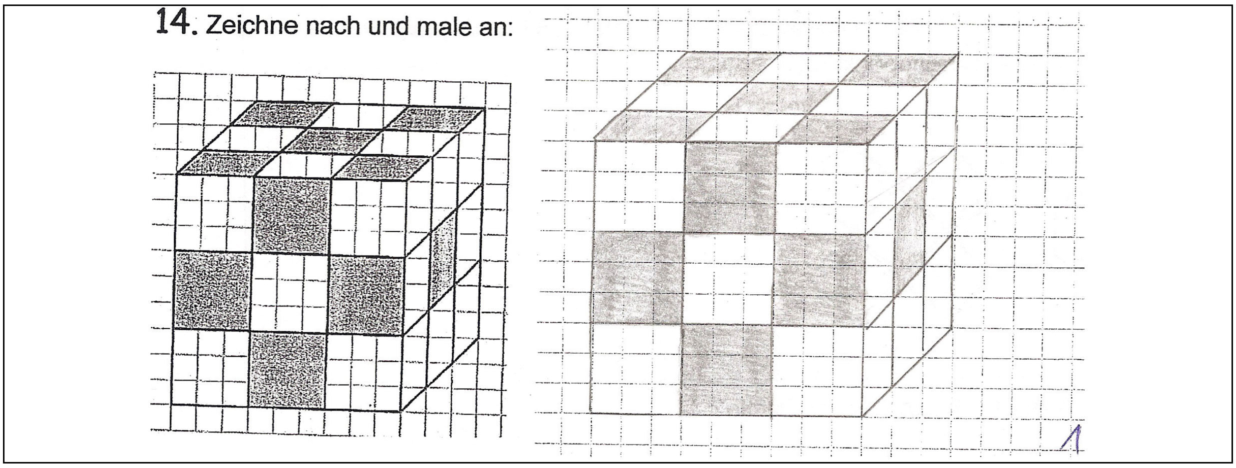


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-2 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG2 zugeordnete Schülerin 06.22)

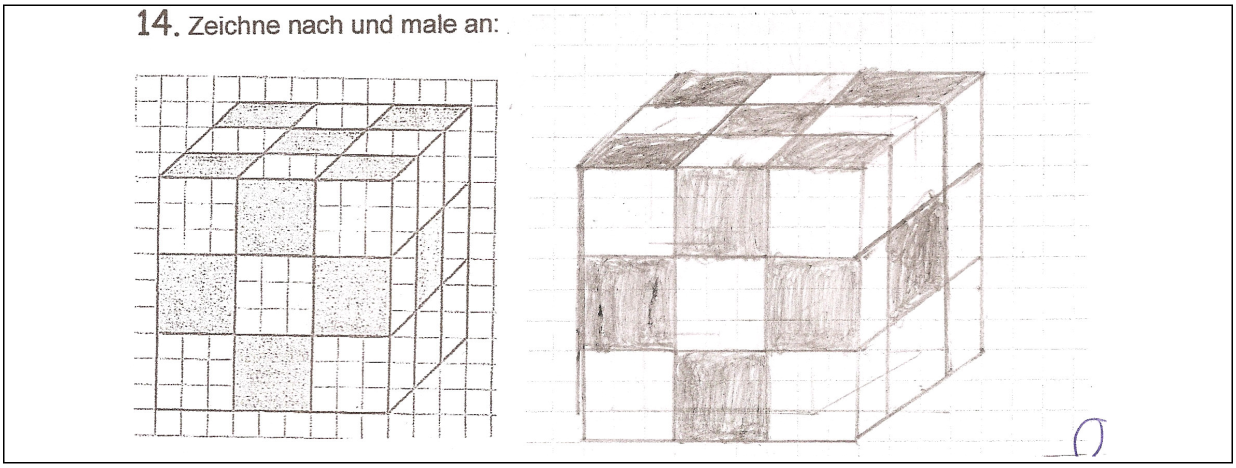


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-2 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG2 zugeordneter Schüler 11.01)

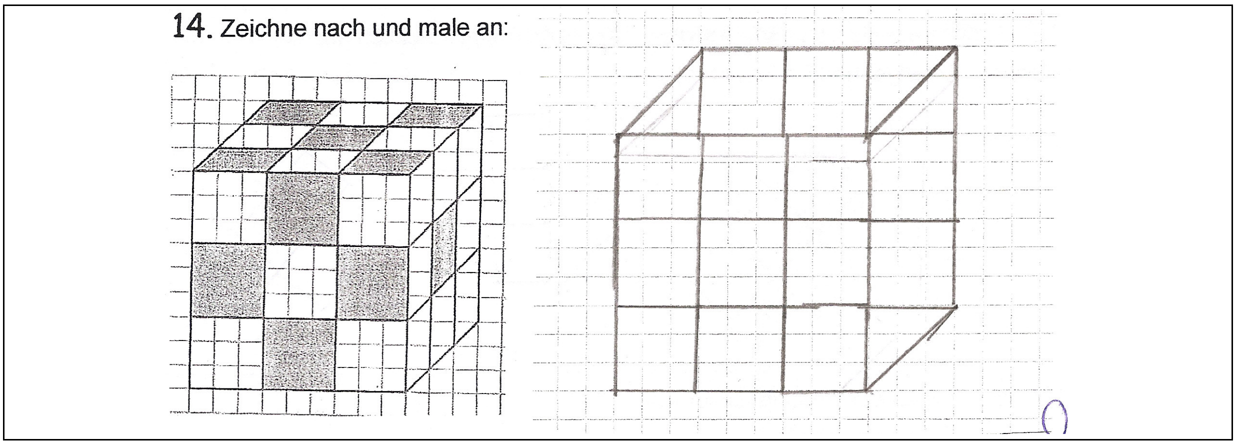


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-2 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 05.10)

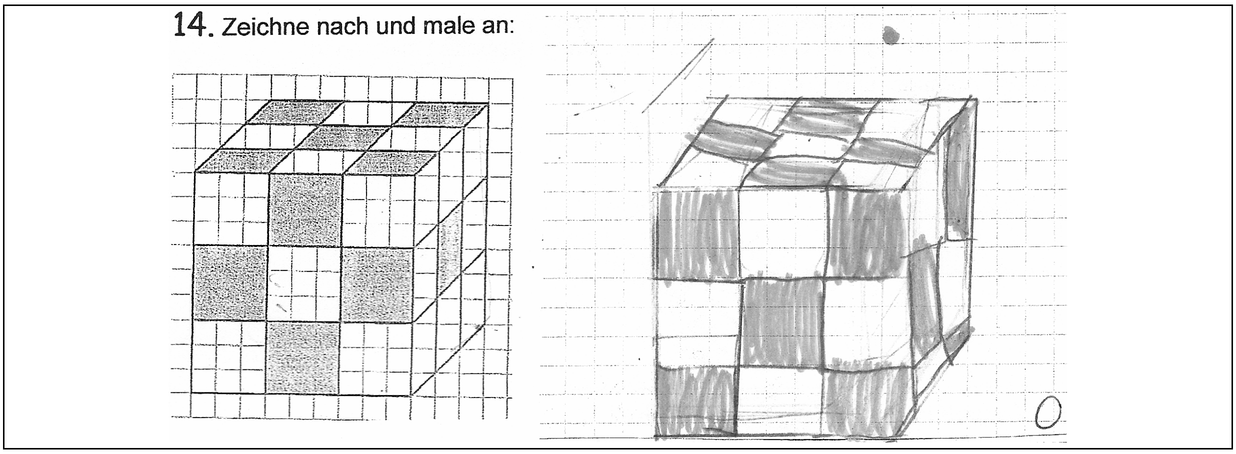


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-2 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufte Schülerin 18.12)

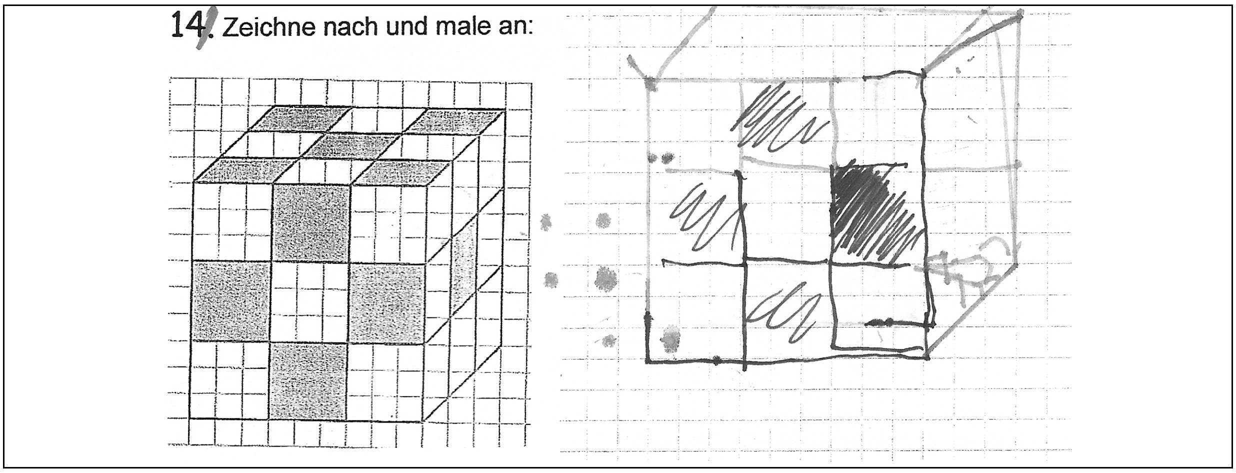


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-2 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 07.06)

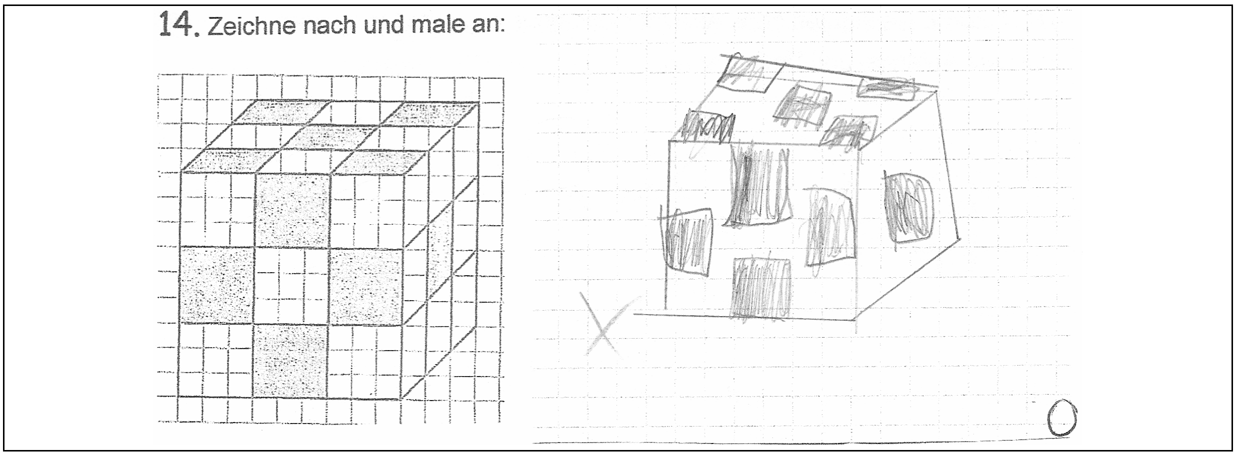


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2a-2 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 09.02)

Aufgabe Ab2b-1 konnte insgesamt von 72% der Schülerinnen und Schüler richtig bearbeitet werden. Die Probleme der übrigen Schülerinnen und Schüler zeigen die folgenden drei Aufgabenbearbeitungen exemplarisch auf.

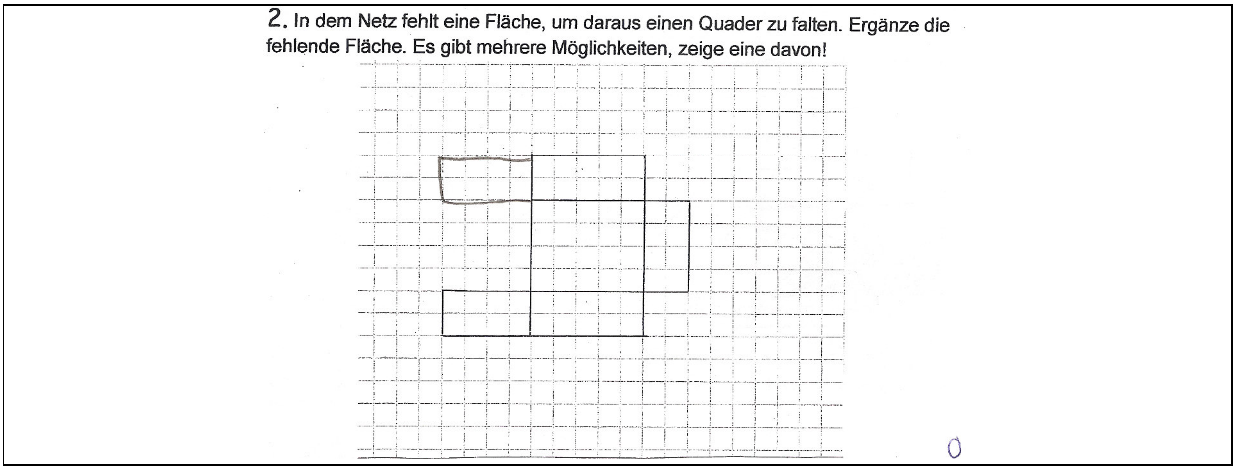


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2b-1 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) LG 2 zugeordneter Schüler 06.01)

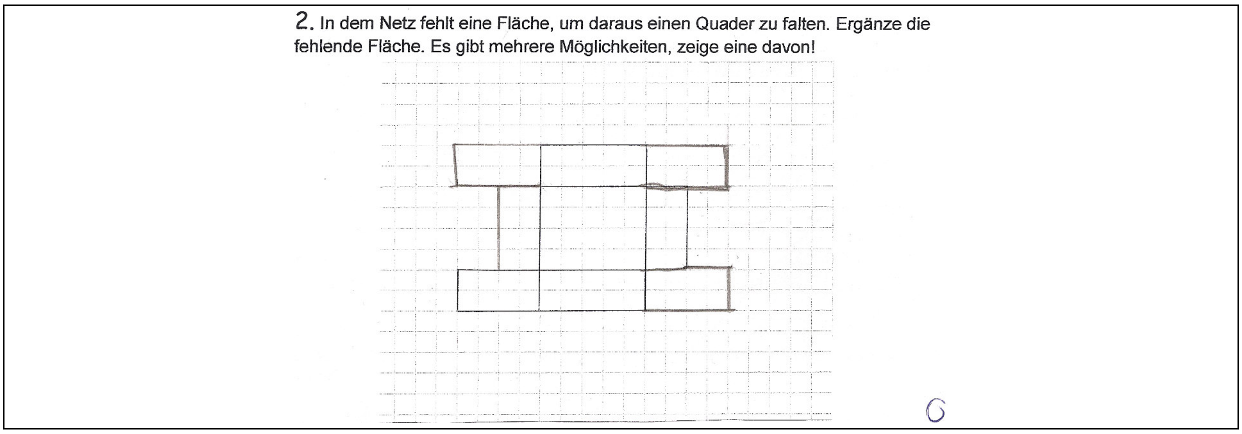


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2b-1 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 08.01)

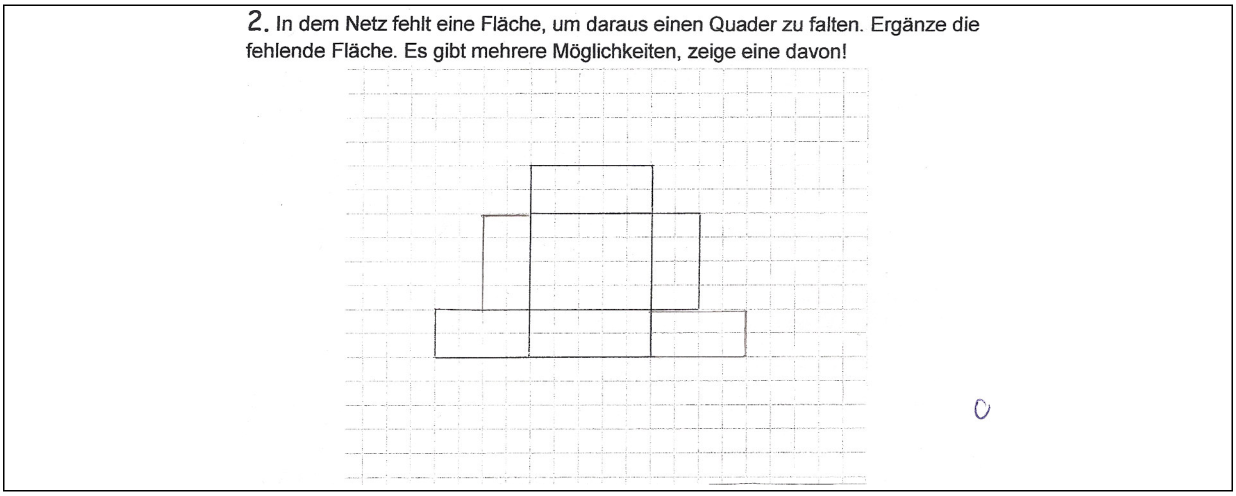


Abbildung: Bearbeitung der Aufgabe AB2b-1 (aufgrund des Subtest Geometrie (DEMAT 4) als leistungsschwach eingestufter Schüler 13.01)

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Dissertation selbstständig ohne Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle den benutzten Quellen wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen sind als solche einzeln kenntlich gemacht.

Diese Arbeit ist bislang keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt worden und auch nicht veröffentlicht worden.

Ich bin mir bewusst, dass eine falsche Erklärung rechtliche Folgen haben wird.

Würzweiler, den 04.02.2016 ____

Unterschrift (Ines Wiese)

Lebenslauf

Zu meiner Person

Ines Wiese

geboren am 21.12.1985
deutsche Staatsangehörigkeit
verheiratet, geb. Maurer

Bildungsgang

08/1996 – 03/2005	Allgemeine Hochschulreife, Wilhelm-Erb-Gymnasium, Winnweiler
04/2005 – 09/2008	Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen, Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
10/2006 – 04/2009	Zertifikat „Deutsch als Fremdsprache – Ausländerpädagogik“
10/2008 – 03/2009	Erweiterungsprüfung für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen im Fach Evangelische Religionslehre
02/2009 – 07/2010	Zweite Staatsprüfung für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen, Staatliches Studienseminar Rohrbach, Grundschule Asselheim
03/2009 – 03/2010	Eignungsfeststellungsverfahren zur Promotion
04/2010 – 05/2016	Promotion, Titel der Dissertation: „Kognitive Anforderungen in geometrischen Aufgaben des vierten Schuljahres. Eine Untersuchung zu den Anforderungsbereichen der Bildungsstandards."

Berufliche Tätigkeit

08/2010 – heute	Lehrkraft an der Theodor-Heuss-Schule