# Primzahlen mit einer ausgeschlossenen Ziffer

von

Fabian Karwatowski

aus Neuwied

Angenommene Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

Fachbereich 3: Mathematik/Naturwissenschaften

Universität Koblenz-Landau

Gutachter:

Prof. Dr. Ullrich

Prof. Dr. Brüdern

Prüfungskommission:

Prof. Dr. Wehner

Prof. Dr. Ullrich

Prof. Dr. Brüdern

Tag der mündlichen Prüfung:

03.09.2019

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Zusammenfassung / Abstract


Gegeben sei eine Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und eine Ziffer $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$. Wir untersuchen, ob es unendlich viele Primzahlen gibt, die in ihrer $b$-adischen Zifferndarstellung die Ziffer $a_0$ nicht besitzen. Genauer definieren wir für $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ die Menge

$$\mathcal{A}(X) = \{\sum_{i=0}^{k-1} n_i b^i < X \mid n_i \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\} \ \forall \ 0 \leq i \leq k-1\}$$

und zeigen $\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}(X)\} \asymp \frac{\#\mathcal{A}(X)}{\log X} = \frac{X^{\log(b-1)/\log b}}{\log X}$ für hinreichend große $X$, falls $b \geq 10$. Um dies nachzuweisen, verallgemeinern wir Maynards Beweis für den Fall $b = 10$ und nutzen hierzu auch die in [1] verwendeten Werkzeuge. Unter Anderem benötigen wir die Hardy-Littlewoodsche Kreismethode sowie diverse Siebmethoden, um die Minor-Arcs zu kontrollieren. Schließlich sehen wir, dass wir die Aussage vor allem dann auf beliebige Basen $b \geq 10$ und Ziffern $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ übertragen können, wenn zwei betragsmäßig größte Eigenwerte von Matrizen, die von $b$ und $a_0$ parametrisiert werden, bestimmte Abschätzungen erfüllen. Dass diese Abschätzungen im Fall $b \geq 102$ erfüllt sind, beweisen wir im letzten Kapitel. Für die Fälle $b = 10$ und $b = 11$ liegt ebenfalls ein Mathematica-Code vor, der die Abschätzungen bestätigt.

Let $b$ be a base equal to or greater than 2 and $a_0$ a digit in the set $\{0, ..., b-1\}$.
We investigate if there are infinitely many primes that do not have the digit $a_0$ in their digit representation in base $b$. Explicitly, we define for $X = b^k$ and $k \in \mathbb{N}_0$ the set

$$\mathcal{A}(X) = \{\sum_{i=0}^{k-1} n_i b^i < X \mid n_i \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\} \ \forall \ 0 \leq i \leq k-1\}$$

and show $\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}(X)\} \asymp \frac{\#\mathcal{A}(X)}{\log X} = \frac{X^{\log(b-1)/\log b}}{\log X}$ for sufficently large $X$, if $b \geq 10$.
To prove this, we generalize Maynard's proof for case $b = 10$ using the tools used in [1]. Among other things we need the Hardy-Littlewood circle method as well as various sieve methods to control the minor arcs. Finally, we see that we can transfer the statement to arbitrary bases $b \geq 10$ and digits $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$, especially if two largest eigenvalues of matrices, which are parameterized by $b$ and $a_0$, satisfy certain estimates. That these estimates are fulfilled in the case of $b \geq 102$, we prove in last chapter. For the cases $b = 10$ and $b = 11$ there is also a Mathematica code that confirms the estimates.

# 2. Notation

Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und mit $\mathbb{N}$ die Menge aller positiven ganzen (natürlichen) Zahlen, sodass $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt. Im Folgenden benutzen wir die Funktionen

$$\varphi(n) := \#\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n,\ ggT(m,n) = 1\}, \quad \tau(n) := \#\{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}, \quad \iota(n) := 1,$$

$$\omega(n) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p|n\}, \quad \mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & \text{, falls } n \text{ quadratfrei und } \omega(n) = k \\ 1 & \text{, falls } n = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Den Logarithmus von $y$ zur Basis $x$ symbolisieren wir durch $\log_x y$, für $x, y \in \mathbb{R}^+$. Ist dabei explizit keine Basis $x$ vorgegeben, so meinen wir mit log stets den natürlichen Logarithmus zur Basis $e$ und mit exp seine Umkehrfunktion, sodass $\exp(t) = e^t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wir setzen $e(t) = e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \cdot \sin(2\pi t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $i$ die imaginäre Einheit ist und definieren die Gauß-Klammern durch

$$\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\} \quad \text{und} \quad \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zum Einen symbolisieren wir mit $\|\ \|$ eine Norm, zum Anderen durch

$$\|x\| = \min\{|x - z| \mid z \in \mathbb{Z}\} \in [0, \frac{1}{2}]$$

den Abstand von $x \in \mathbb{R}$ zur nächsten ganzen Zahl. Dabei wird aus dem Zusammenhang klar, welche Definition gemeint ist.

Für zwei Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, wobei die Definitionsmenge $D$ nach oben unbeschränkt ist, schreiben wir

1) $f(x) = O(g(x))$, falls es eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|\ \forall\ x \in D$ gibt,
2) $f(x) = o(g(x))$ , falls $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ gilt.

Hängt die Konstante $c$ in 1), die wir folgend häufig auch als implizite Konstante im $O$-Glied bezeichnen, von einem Parameter $s$ ab, so indizieren wir dies durch $O_s$. Gleiches gilt für mehrere Parameter. Schreiben wir dagegen nur $O$, so ist die Konstante $c$ absolut und unabhängig von allen möglichen Parametern.

Weiter erklären wir für zwei Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ die Schreibweisen

3) $f \ll g$, falls es eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ mit $f(x) \leq c \cdot g(x) \;\; \forall \;\; x \in D$ gibt,

4) $f \gg g$, falls $g \ll f$,

5) $f \asymp g$ , falls $f \ll g$ und $f \gg g$,

6) $f \sim g$ , falls es eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = c \cdot g(x) \;\; \forall \;\; x \in D$ gibt.

Damit sind $f \asymp g$ und $g \asymp f$ gleichwertig und symbolisieren, dass zwei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $c_1 \cdot f(x) \leq g(x) \leq c_2 \cdot f(x) \;\; \forall \;\; x \in D$ existieren. In wenigen Ausnahmefällen verwenden wir die Schreibweise $f \ll g$, um die Existenz einer Konstanten $c \in \mathbb{R}^+$ mit $f(x) < c \cdot g(x) \;\; \forall \;\; x \in D$ anzuzeigen. Oder die Schreibweise $f \asymp g$ als Synonym für $c_1 \cdot f(x) \leq g(x) < c_2 \cdot f(x) \;\; \forall \;\; x \in D$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$. Darauf weisen wir dann aber nochmals explizit hin.

Hängt die Konstante $c$ in 3) $f \ll g$ oder die Konstanten $c_1, c_2$ in 5) $f \asymp g$ von einem Parameter $s$ ab, so indizieren wir dies durch $\ll_s$ bzw. $\asymp_s$. Gleiches auch für mehrere Parameter. Schreiben wir dagegen nur $\ll$, $\gg$ oder $\asymp$, so sind die jeweiligen Konstanten absolut und unabhängig von allen möglichen Parametern.

In der Regel betrachten wir lediglich Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass nach 1) und 3) die Schreibweisen $f(x) = O(g(x))$ und $f \ll g$ gleichwertig sind.
Wir nehmen schon vorweg, dass wir die Schreibweisen 1)-6) nur mit $D = \{X = b^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ verwenden, sodass sich unsere $o$-Glieder auf $X \longrightarrow \infty$ beziehen und die Funktionen hinter den $o$-bzw. $O$-Termen von $X = b^k$ abhängen.

Für ein Gitter $L \subseteq \mathbb{R}^m$ der Dimension $dim\, L = n$ mit Basis $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir

$$L = L(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Z} \;\forall\; 1 \leq i \leq n\}$$

und bezeichnen den Untervektorraum, in dem $L$ enthalten ist, durch

$$span(L) = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \;\forall\; 1 \leq i \leq n\}.$$

# 3. Einleitung

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}_0$ und wir definieren $\mathcal{A}(x) := \{a \in \mathcal{A} \mid a < x\}$ für $x \in \mathbb{R}^+$.
In der analytische Zahlentheorie haben dann viele Fragestellungen die Form :

1) Gibt es überhaupt eine, endlich oder unendlich viele Primzahlen in $\mathcal{A}$ ?
2) Können wir $\#\{p \in \mathcal{A}(x)\}$ abschätzen ?
3) Wie groß ist $\#\{p \in \mathcal{A}(x) \mid p \equiv n \bmod m\}$ für bestimmte $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ ?

Beispielsweise erhalten wir für $\mathcal{A} = \{p + 2 \mid p \in \mathbb{P}\}$ unter 1) gerade die Primzahlzwillingsvermutung oder für $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n = \{z \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq z \leq (n+1)^2\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ unter 1) die Frage nach der Existenz einer Primzahl zwischen zwei Quadratzahlen.

Wir gehen für eine gegebene Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und eine gegebene Ziffer $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ der Frage 2) nach, wobei wir

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) := \{\sum_{i=0}^{k-1} n_i b^i < X \mid n_i \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\} \;\forall\; 0 \leq i \leq k-1\}$$

für $X = b^k$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definieren und schließlich für bestimmte Paare $(b, a_0)$, die wir als ausgezeichnet bezeichnen und in Definition 4.1 erklären, das folgende Theorem beweisen.

**Theorem 1.1**:
Sei $X$ eine hinreichend große $b$-Potenz. Dann gilt $\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \asymp \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$.

Da für diese ausgezeichneten Paare $(b, a_0)$ stets $b \geq 10$ gefordert wird, stellt sich natürlich direkt die Frage, ob und gegebenenfalls welche Paare $(b, a_0)$ mit $b < 10$ ebenfalls Theorem 1.1 genügen. Dieser Frage gehe ich in einem gesonderten Artikel nach. Wir sollten uns der Schwierigkeit eines Beweises von Theorem 1.1 für kleinere $b$ aber bewusst sein: Für $b = 2$ und der dann einzig interessanten Wahl $a_0 = 0$ begegnen wir dem Problem der Mersennschen Primzahlen.

Wegen $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{A}(X) = (b-1)^k = X^{\log(b-1)/\log b}$ für $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir als einfachere Folgerung aus Theorem 1.1 insbesondere die Existenz unendlich vieler Primzahlen, welche in ihrer $b$-adischen Zifferndarstellung die Ziffer $a_0$ nicht enthalten, falls $b > 2$ ist (vgl. S.315).

Wir wollen kurz den Aufbau des Beweises zu Theorem 1.1 und damit die Struktur dieser Arbeit skizzieren. Um dem Leser das Analogiedenken zu vereinfachen, haben wir uns an der Gliederung der Quelle [1] orientiert. Der Beweis basiert im Wesentlichen auf einer Anwendung der Hardy-Littlewoodschen Kreismethode. Setzen wir

$$S_{\mathcal{A}}(\theta) := \sum_{a \in \mathcal{A}} e(a\theta) \quad \text{und} \quad S_{\mathbb{P}}(\theta) := \sum_{p \in \mathbb{P},\, p<X} e(p\theta) \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R},$$

so gilt nach der geometrischen Summenformel

$$\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} = \frac{1}{X} \cdot \sum_{0 \leq a < X} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) \cdot S_{\mathbb{P}}(\frac{-a}{X}) =: \sum .$$

Letzteres zerlegen wir in den Beitrag $\sum_{a \in \mathcal{M}} \sum$ der Major-Arcs, welche den Hauptterm liefern und in den Beitrag $\sum_{a \notin \mathcal{M}} \sum$ der Minor-Arcs, den wir zu einem Fehlerterm abschätzen :

$$\sum = \sum_{a \in \mathcal{M}} \sum + \sum_{a \notin \mathcal{M}} \sum .$$

Hierbei ist es wichtig, dass sich einzelne Summanden der Minor-Arcs aufheben bzw. der Fehlerterm nicht zu groß wird, sodass dieser eben nicht den Hauptterm der Major-Arcs dominiert.

In Kapitel 4 studieren wir die oben definierte Fouriertransformierte $S_{\mathcal{A}}(\theta)$ der Menge $\mathcal{A}$ und die dazu verwandte Funktion

$$F_X(\theta) = \frac{1}{\#\mathcal{A}} \cdot |S_{\mathcal{A}}(\theta)| \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Das wichtige Lemma 4.2 gibt uns die Möglichkeit, entsprechende Summen der Form $\sum_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^t$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ über Eigenwerte abzuschätzen. Für den Nachweis bedienen wir uns einiger Werkzeuge aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Linearen Algebra. Um es vorweg zu nehmen, können wir mit Lemma 4.2 die Gültigkeit von Theorem 1.1 auf lediglich zwei zu überprüfende Abschätzungen von Eigenwerten zurückführen, die schließlich in die Definition 4.1 eines ausgezeichneten Paares $(b, a_0)$ einfließen.

In Kapitel 5 zeigen wir lediglich eine Abschätzung, die wir später in Kapitel 12 wieder aufgreifen. Weiter führen wir in Kapitel 6 die konvexen logarithmischen Polytope ein und weisen Proposition 6.1 nach. Durch diese bzw. einige dazu ähnliche Hilfssätze können wir im Beweis von

Theorem 1.1 Summen der Form

$$\sum S(\mathcal{W}_{p_1 \dots p_k}, p_1) = o(\frac{\# \mathcal{A}}{\log X})$$

kontrollieren, falls wir im Produkt $p_1 \cdot .... \cdot p_k$ der Primzahlen einen Faktor abspalten können, der im Typ II-Bereich $[\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]$ liegt. Dabei ist $S(\mathcal{W}_d, z)$ mit $d \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{R}^+$ eine Siebfunktion, die später im Beweis von Theorem 1.1 eine Rolle spielt und wir wählen $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ vorab als eine hinreichend kleine rationale Zahl. So wird $\epsilon := 10^{-1000}$ auf jeden Fall genügen. Warum dies geschieht und weshalb $\epsilon$ rational zu wählen ist, wird später klar. Im Beweis von Proposition 6.1 benötigen wir vor allem unsere Abschätzung aus Proposition 6.2, die von den Major Arcs kommt und in Kapitel 7 nachgewiesen wird sowie die Propositionen 6.3 und 6.4, welche den Beitrag $\sum\limits_{\substack{0 \le a < X \\ a \notin \mathcal{M}}}$ der Minor-Arcs kontrollieren.

Den Beitrag der Minor-Arcs zerlegen wir ferner in den Beitrag $\sum\limits_{\substack{0 \le a < X \\ a \notin \mathcal{M},\, a \notin \mathcal{E}}}$ der allgemeinen Minor-Arcs und jenen $\sum\limits_{\substack{0 \le a < X \\ a \notin \mathcal{M},\, a \in \mathcal{E}}}$ der speziellen Minor-Arcs :

$$\sum_{\substack{0 \le a < X \\ a \notin \mathcal{M}}} = \sum_{\substack{0 \le a < X \\ a \notin \mathcal{M},\, a \notin \mathcal{E}}} + \sum_{\substack{0 \le a < X \\ a \notin \mathcal{M},\, a \in \mathcal{E}}} .$$

Die letzten beiden Summen behandeln wir in Kapitel 8 und 9. Dabei ist

$$\mathcal{E} = \{0 \le a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \ge \frac{1}{X^{23/80}}\}$$

eine Menge mit einigen interessanten Eigenschaften, die uns helfen, den Beitrag der Minor-Arcs möglichst klein zu halten.

Die Kapitel 10 und 11 dienen vor allem der Herleitung von Lemma 9.1, welches in Proposition 6.4 einfließt. Dazu verwenden wir einige Aussagen über Gitter, um entsprechende Teilsummen in Proposition 9.3 und 9.4 abzuschätzen. Diese haben nämlich die Form

$$\sum_{a_1, a_2} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}),$$

wobei die Summation über Paare $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0 \cap [0, X[$ geschieht, die ein Gitter $L = L_{a_1, a_2} \subseteq \mathbb{Z}^3$ höchstens zweiter Dimension induzieren, also entweder ein Gitter $L \subseteq \mathbb{Z}^3$ mit $dim\ L = 2$

(Proposition 9.3) oder eine Gerade $L \subseteq \mathbb{Z}^3$ (Proposition 9.4).

In Kapitel 12 leiten wir mithilfe von Proposition 5.1 und Proposition 6.1 die Abschätzung

$$\sum_{d \leq X^{1-\theta_1}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(d) \cdot S(\mathcal{W}_d, X^\theta) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

her, wobei $\mathcal{R} \subseteq [\epsilon, 1]^k$ ein logarithmisches Polytop ist, $\mathbf{1}_{\mathcal{R}}$ eine zugehörige Indikatorfunktion bezeichnet und $\theta_1 = \frac{9}{25} + 2\epsilon$, $\theta = \frac{17}{40} - 2\epsilon - \theta_1$ gilt. Dadurch können wir im Beweis von Theorem 1.1 wieder bestimmte Teilsummen der Größe $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ separieren.

Dessen Beweis erfolgt dann endgültig in Kapitel 13. Hier führen wir auch die Buchstab-Funktion $\omega$ ein. Die noch übrigen Summen in diesem Beweis, welche nicht die gewünschte Form haben und sich damit als $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ kontrollieren lassen, schätzen wir durch bestimmte Integrale über $\omega$ nach unten ab. Diese Integrale berechnen wir in einem Mathematica-Code, wodurch wir letztlich die Abschätzung $\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \gg \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$ erhalten. Die obere Schranke $\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$ ist dagegen wesentlich leichter als die untere Schranke mit dem „Fundamental Lemma of the Combinatorial Sieve Theory“ nachzuweisen. Somit schließen wir den Beweis von Theorem 1.1 für alle ausgezeichneten Paare $(b, a_0)$ ab.

Das letzte Kapitel 14 dient der Bestimmung dieser ausgezeichneten Paare $(b, a_0)$. Dazu schätzen wir die Eigenwerte, die in der Definition 4.1 eine Rolle spielen, durch die Zeilensummennorm der entsprechenden Matrix nach oben ab und erhalten schließlich mit Lemma 14.1 bzw. Korollar 14.2 ein entscheidendes Werkzeug. Wir weisen zunächst nach, dass jedes Paar $(b, a_0)$ für hinreichend große $b$ ausgezeichnet ist und können diese zwar effektive, aber vorerst nicht explizit angegebene untere Schranke für $b$ letztlich auf 102 taxieren. Wir zeigen also

**Theorem 1.2**:
Jedes Paar $(b, a_0)$ mit $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 102$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ ist ausgezeichnet.

Insbesondere genügen diese Paare $(b, a_0)$ dann Theorem 1.1. Für alle weiteren Paare mit $10 \leq b \leq 101$ können wir keine Schlussfolgerung mehr mit Korollar 14.2 treffen. Diese müssten einzeln mithilfe eines entsprechenden Mathematica-Code überprüft werden, welcher in [30] und [31] für die Fälle $b = 10$ und $b = 11$ gegeben ist. Für $b = 10$ und $b = 11$ sowie beliebiges $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ bestätigt dieser Code die entsprechenden Abschätzungen in Definition 4.1.

Der interessierte Leser möge die Anleitung darin nutzen, um weitere ausgezeichnete Paare $(b, a_0)$ zu ermitteln.

Weiter haben wir in Theorem 1.3* eine auf Annahmen beruhende Aussage gefolgert, dass auch alle Paare $(b, a_0)$ mit $50 \leq b \leq 101$ ausgezeichnet sind. Diese Annahmen können leider nicht mehr sauber analytisch bewiesen werden, da die auftretenden Funktionen sehr unhandlich sind. Sämtliche beigefügte Codes wurden mit der Mathematica-Version 11.3.0.0 erstellt und können mit dem kostenlosen Wolfram CD Player 11.3 angesehen werden.

Nachfolgend sei die Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 10$ (falls nicht explizit anders erwähnt) und die Ziffer $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ fixiert, sodass insbesondere alle Konstanten, die nur von $(b, a_0)$ abhängen, absolut sind. Die einzige Ausnahme stellt dabei das letzte Kapitel 14 dar. Wir erinnern nochmal daran, dass $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$, wenn nicht explizit anders erwähnt, stets die bereits oben eingeführte hinreichend kleine Konstante bezeichnet.

Ferner sei $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ immer eine $b$-Potenz, die wir als hinreichend groß annehmen. In einigen Fällen/Beweisen bedarf es dieser Einschränkung „$X$ hinreichend groß" jedoch nicht. Dies wird dem Leser in besagten Fällen/Beweisen ersichtlich.

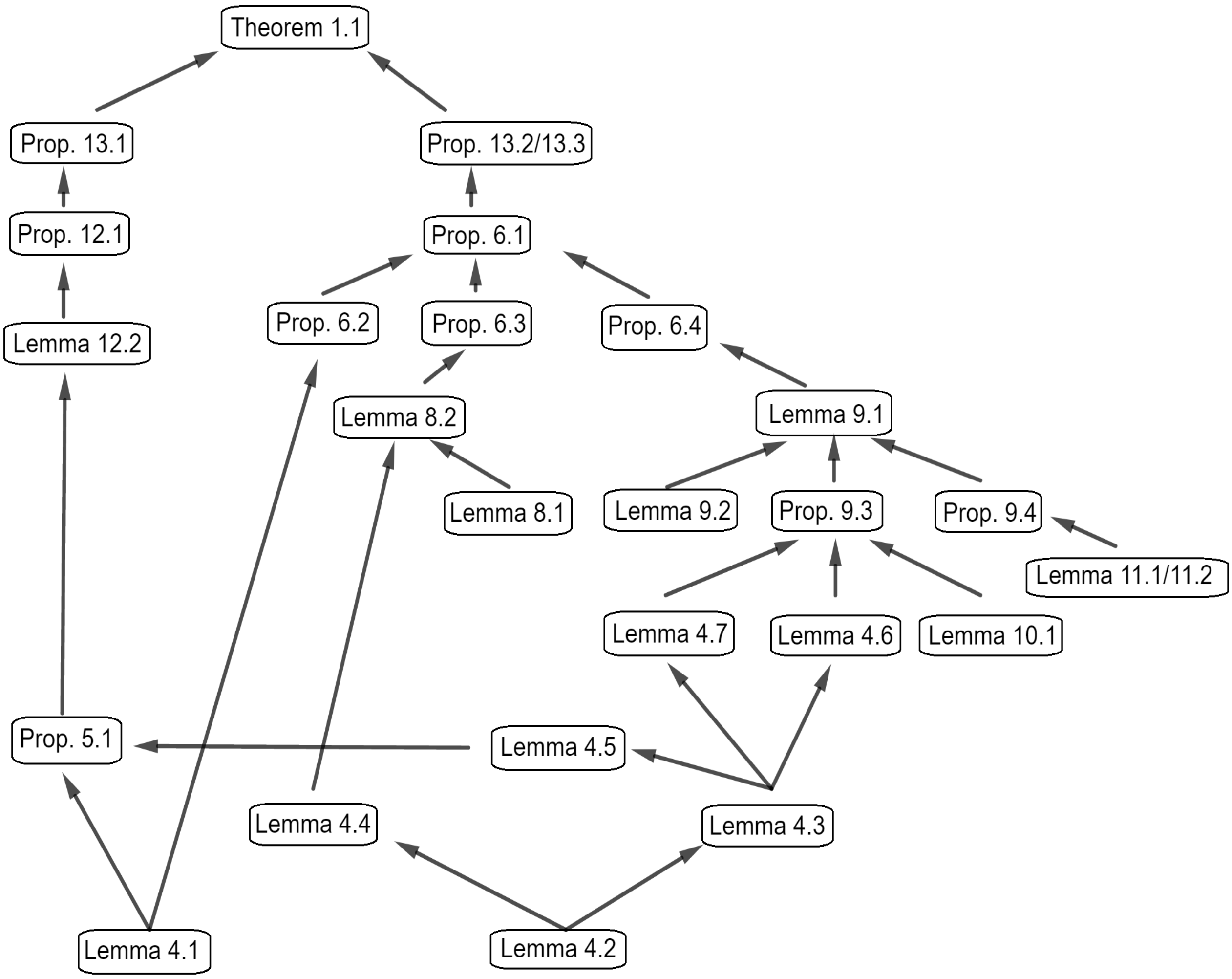
Wir werden eine verallgemeinerte Version des von Maynard betrachteten Spezialfall $b = 10$ beweisen. Als Grundlage dazu dient ausschließlich sein Preprint „Primes with restricted Digits", also Quelle [1], deren grundsätzliche Gliederung wir übernehmen, um leichter Analogien herstellen zu können. In [1] ist dabei per se an jeder Stelle die Basis 10 durch $b$ zu ersetzen.

Die endgültige Fassung von „Primes with restricted Digits" ist erst nach Anfertigung dieser Arbeit in den Inventiones Mathematica veröffentlicht worden, worin Mr. Maynard netterweise meinen Korrekturhinweis für Proposition 12.1 gewürdigt hat (siehe [18, Acknowledgements]). Zur Bequemlichkeit des Lesers sind entsprechende Querbeziehungen zwischen den Aussagen in [18] sowie jenen dieser Arbeit in einer Tabelle im Anhang hinterlegt.

Des Weiteren schließen wir die Lücken in [1], die sich beim Autor in Folge der Auseinandersetzung mit dieser Quelle ergaben. Somit soll dem Leser dieser Arbeit ein einfacheres Verständnis der Sachverhalte durch lückenlose Beweise ermöglicht werden. Dazu werden wir einige selbst konstruierte Hilfssätze formulieren, deren Nachweis in wenigen Fällen nicht geführt oder nur skizziert wird, ohne dass dabei echte Lücken entstehen. Dies geschieht vor allem dann, wenn ein Beweis sehr langwierige technische Umformungen beinhaltet oder keine wesentlich interessanten Ideen enthält. Einige Beweise und Hilfssätze werden in Teilkapitel untergliedert, die mit römischen Ziffern nummeriert werden.

Ferner werden die selbst konstruierten Hilfssätze in der Form *HS Lemma* oder *HS Proposition* u.s.w. angegeben, welches bedeutet, dass dies ein Hilfssatz für das genannte Lemma oder die entsprechende Proposition ist, die in ähnlicher Fassung für den Spezialfall $b = 10$ in [1] zu finden ist. Insbesondere stimmen die Bezeichnungen und Nummerierungen der Aussagen in den Kapiteln 4-13 dieser Arbeit mit jenen aus [1] überein.

Um die teilweise doch recht unübersichtlichen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Lemmata und Propositionen besser zu verstehen, dient dem Leser die folgende Übersicht:




Übersicht : Implikationen zwischen Lemmata und Propositionen

# 4. Fourier-Transformation

Für $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ definieren wir

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) := \{ \sum_{i=0}^{k-1} n_i b^i < X \mid n_i \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\} \ \forall \ 0 \leq i \leq k-1\}$$

als die Menge aller nicht-negativen ganzen Zahlen ($< X$), die im $b$-adischen System mit genau $k$-Ziffern $\neq a_0$ geschrieben werden, wobei führende Nullen erlaubt sind. Ferner setzen wir

$$\mathcal{A}(x) := \{a \in \mathcal{A}(X) \mid a < x\} \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^+, \ b \leq x < X = b^k \ (k \in \mathbb{N})$$

sowie $c := \frac{\log (b-1)}{\log \ b} \in \mathbb{R}^+$, sodass sich durch einfache Kombinatorik zunächst $\#\mathcal{A} = (b-1)^k = X^c$ für $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ ergibt und wir im Fall $k = 0$ insbesondere $\mathcal{A} = \emptyset$ erhalten.
Für $x \in \mathbb{R}^+$, $b \leq x < X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}$, $s < k$ mit $b^s \leq x < b^{s+1}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \{a \in \mathcal{A}(X) \mid a < x\} \subseteq \{a \in \mathcal{A}(X) \mid a < b^{s+1}\} \\
&= \{ \sum_{i=0}^{k-1} n_i b^i < b^{s+1} \mid n_i \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\} \ \forall \ 0 \leq i \leq k-1\} \\
&\subseteq \{(\underbrace{0...0n_s...n_0}_{k \text{ Ziffern}})_b \mid n_i \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\} \ \forall \ 0 \leq i \leq s\},
\end{aligned}$$

was $\#\mathcal{A}(x) \leq (b-1)^{s+1} = b^{c \cdot (s+1)} \leq b^c \cdot b^{cs} \ll x^c$ liefert, also $\#\mathcal{A}(x) \ll x^c$.
Die Fouriertransformierte der Menge $\mathcal{A}$ sei

$$S_{\mathcal{A}}(t) := \sum_{a \in \mathcal{A}} e(at) \quad \forall \ t \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\mathcal{F}_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{F}_X(t) = \frac{1}{\#\mathcal{A}} \cdot S_{\mathcal{A}}(t) = X^{-\frac{\log (b-1)}{\log \ b}} \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} e(at)$ ist offenbar stetig und stetig differenzierbar, d.h. ihre Ableitung $\mathcal{F}_X' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und wir schreiben

$$\begin{aligned}
F_X(t) &:= |\mathcal{F}_X(t)| = \frac{1}{\#\mathcal{A}} \cdot |S_{\mathcal{A}}(t)| = X^{-\frac{\log(b-1)}{\log b}} \cdot |\sum_{a \in \mathcal{A}} e(at)| \quad \text{sowie} \\
F_X'(t) &:= |\mathcal{F}_X'(t)| = 2\pi \cdot X^{-\frac{\log(b-1)}{\log b}} \cdot |\sum_{a \in \mathcal{A}} a \cdot e(at)|
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, sodass insbesondere $F_X, F_X' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ stetige Funktionen sind, wobei es sich formal bei $F_X'$ natürlich nicht um die Ableitung von $F_X$ handelt.

Dabei besitzen $F_X$ und $F_X'$ die folgenden Eigenschaften :

(1) $F_X(t) \leq 1 \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$,

(2) $F_X$ und $F_X'$ sind periodisch mit der Periodenlänge 1,

(3) $F_{UV}(t) = F_U(t) \cdot F_V(Ut) \quad \forall\ t \in \mathbb{R},\ U = b^u,\ V = b^v\ (u, v \in \mathbb{N}_0)$,

(4) $F_X(t) = \frac{1}{(b-1)^k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} |\sum_{n_i \in \{0,..,b-1\} \backslash \{a_0\}} e(n_i b^i t)| = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e(b^{i+1}t)-1}{e(b^i t)-1} - e(a_0 b^i t)|$

$\forall\ t \in \mathbb{R}$,

(5) $F_X(t) \leq F_Y(t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$, falls $X \geq Y = b^s\ (s \in \mathbb{N}_0)$.

und wir setzen $|\frac{e(b^{i+1}t)-1}{e(b^i t)-1} - e(a_0 b^i t)| := b-1$ in (4), falls $b^i t \in \mathbb{Z}$.

Die Eigenschaft (4) ergibt sich, indem wir $a = (n_{k-1}...n_0)_b$ mit $n_{k-1}, ..., n_0 \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\}$ für $a \in \mathcal{A}$ verwenden und daraus mithilfe $e(x) \cdot e(y) = e(x+y)\ \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$ auf $\sum_{a \in \mathcal{A}} e(at) = \prod_{i=0}^{k-1} \sum_{n_i \in \{0,..,b-1\} \backslash \{a_0\}} e(n_i b^i t)\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}$ schließen.

Aus (4) folgt leicht (3) und (1) ergibt sich wegen $|\sum_{a \in \mathcal{A}} e(at)| \leq \#\mathcal{A} = X^{\frac{\log(b-1)}{\log b}}\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}$.
Ferner liefern (1) und (3) die Eigenschaft (5) und (2) kommt wegen $e(x) = e(x+1)\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Im Nachweis von Lemma 4.1 verwenden den folgenden Hilfssatz über die Exponentialfunktion. Darin bezeichnet $\|x\|$ den Abstand von $x \in \mathbb{R}$ zur nächsten ganzen Zahl.

*HS Lemma 4.1:*
Es gilt $|e(n\theta) + e((n+1)\theta)| \leq 2 \cdot \exp(-\|\theta\|^2)\ \ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \theta \in \mathbb{R}$.

*Beweis:*
Sei $n \in \mathbb{Z}$ fixiert. Der von den Vektoren $e(n\theta)$ und $e((n+1)\theta)$ eingeschlossene Winkel am komplexen Einheitskreis beträgt $\alpha = 2\pi\theta$ und führen wir uns das von diesen Vektoren aufgespannte Parallelogramm vor Augen, so gilt nach dem Kosinussatz insbesondere

$$\begin{aligned} |e(n\theta) + e((n+1)\theta)|^2 &= |e(n\theta)|^2 + |e((n+1)\theta)|^2 - 2 \cdot |e(n\theta)| \cdot |e((n+1)\theta)| \cdot \cos(\pi - \alpha) \\ &= 2 + 2 \cdot \cos(\alpha) = 2 + 2 \cdot \cos(2\pi\theta). \end{aligned}$$

Nun weisen wir $2 + 2 \cdot \cos(2\pi\theta) \leq 4 \cdot \exp(-2 \cdot \|\theta\|^2) \ \forall \ \theta \in \mathbb{R}$ nach.

Aufgrund der Periodizität der Kosinusfunktion gilt $2 + 2 \cdot \cos(2\pi\theta) = 2 + 2 \cdot \cos(2\pi(\theta - \lfloor\theta\rfloor))$, sodass wegen $\|\theta\| = \|\theta - \lfloor\theta\rfloor\|$ insbesondere $\theta \in [0,1]$ angenommen werden darf.
Nach $\cos(2\pi\theta) = \cos(2\pi(1-\theta))$ und $\|\theta\| = \|1-\theta\| \ \forall\, \theta \in [0,1]$ darf sogar $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ vorausgesetzt werden, sodass nur noch $2+2\cdot\cos(2\pi\theta) \leq 4\cdot\exp(-2\cdot\theta^2)$ für alle $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ gezeigt werden muss (beachte: $\|\theta\| = \theta \ \forall \ \theta \in [0, \frac{1}{2}]$). Dies werden wir nun tun, wobei wir dazu $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ fixieren.

Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion liefert

$$\exp(-2 \cdot \theta^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2 \cdot \theta^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!} \cdot \theta^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n,$$

wenn wir die Folge $a_n := \frac{2^n}{n!} \cdot \theta^{2n} \in \mathbb{R}_0^+ \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$ definieren. Diese ist monoton fallend, weil $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2\cdot\theta^2}{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt ($\Leftarrow \theta \in [0, \frac{1}{2}]$). Daher gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ insbesondere

$$\sum_{n=2k}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sum_{m=k}^{\infty} (a_{2m} - a_{2m+1}) \geq 0,$$

woraus wir mit $k = 2$ leicht die Gültigkeit von

$$(1) \quad \exp(-2 \cdot \theta^2) \geq \sum_{n=0}^{3} (-1)^n \cdot a_n = 1 - 2 \cdot \theta^2 + 2 \cdot \theta^4 - \frac{8}{6} \cdot \theta^6 \quad \forall \ \theta \in [0, \frac{1}{2}]$$

erhalten. Ähnlich argumentieren wir mithilfe der Reihenentwicklung

$$\cos(2\pi\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2\pi\theta)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$$

der Kosinusfunktion, indem wir hier die Folge $b_n := \frac{(2\pi\theta)^{2n}}{(2n)!} \in \mathbb{R}_0^+ \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$ erklären. Dabei ist

$$b_{n+1} = b_n \cdot \frac{(2\pi\theta)^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)} \leq b_n \cdot \frac{\pi^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)} \leq b_n \cdot \frac{\pi^2}{3\cdot 4} \leq b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn wir $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ beachten. Daraus folgt wie oben $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n \leq 0$ und schließlich die Abschätzung

$$(2) \quad \cos(2\pi\theta) \leq \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \cdot b_n = 1 - 2\pi^2\theta^2 + \frac{2}{3} \cdot \pi^4\theta^4 \quad \forall \ \theta \in [0, \frac{1}{2}].$$

Nach (1) und (2) ist

$$2 \cdot \exp(-2 \cdot \theta^2) \geq 2 - 4\theta^2 + 4\theta^4 - \frac{8}{3} \cdot \theta^6 \geq 1 + 1 - 2\pi^2\theta^2 + \frac{2}{3} \cdot \pi^4\theta^4 \geq 1 + \cos(2\pi\theta)$$

für alle $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$, denn das mittlere $\geq$ - Zeichen steht aufgrund

$$\begin{aligned}
&2 - 4\theta^2 + 4\theta^4 - \frac{8}{3} \cdot \theta^6 \geq 2 - 2\pi^2\theta^2 + \frac{2}{3} \cdot \pi^4\theta^4 && \Leftrightarrow \\
&-4\theta^2 + 4\theta^4 - \frac{8}{3} \cdot \theta^6 \geq -2\pi^2\theta^2 + \frac{2}{3} \cdot \pi^4\theta^4 && \Leftrightarrow \\
&(2\pi^2 - 4) \cdot \theta^2 - (\frac{2}{3}\pi^4 - 4) \cdot \theta^4 - \frac{8}{3} \cdot \theta^6 \geq 0 && \Leftrightarrow \\
&\theta^2 \cdot (2\pi^2 - 4 - (\frac{2}{3}\pi^4 - 4) \cdot \theta^2 - \frac{8}{3} \cdot \theta^4) \geq 0 && \forall\ \theta \in [0, \frac{1}{2}]
\end{aligned}$$

und letzteres ist wegen

$$\begin{aligned}
&(\frac{2}{3}\pi^4 - 4) \cdot \theta^2 + \frac{8}{3} \cdot \theta^4 = \theta^2 \cdot (\frac{2}{3}\pi^4 - 4 + \frac{8}{3} \cdot \theta^2) \leq \theta^2 \cdot (\frac{2}{3}\pi^4 - 4 + \frac{2}{3}) \leq \frac{1}{4} \cdot (\frac{2}{3}\pi^4 - 4 + \frac{2}{3}) \\
&\leq 15.5 < 2\pi^2 - 4 \quad \forall\ \theta \in [0, \frac{1}{2}]
\end{aligned}$$

erfüllt. Damit haben wir

$$|e(n\theta) + e((n+1)\theta)|^2 = 2 + 2 \cdot \cos(2\pi\theta) \leq 4 \cdot \exp(-2 \cdot \|\theta\|^2) \quad \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \theta \in \mathbb{R}$$

gezeigt, womit sich nach Wurzelziehen auf beiden Seiten das gewünschte Resultat ergibt.

$\square$

**Lemma 4.1:**

Sei $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{N},\ q < X^{1/3},\ q = q_1 \cdot q_2$ mit $q_1, q_2 \in \mathbb{N},\ ggT(q_1, b) = 1$ sowie $q_1 \geq 2$ gegeben. Ferner sei $\eta \in \mathbb{R}$ mit $|\eta| < X^{-2/3}/2$. Dann gilt für $a \in \mathbb{Z},\ ggT(a, q) = 1$ stets

$$F_X(\frac{a}{q} + \eta) \leq \exp(-c_b \cdot \frac{\log X}{\log q})$$

mit einer nur von $b$ abhängigen absoluten Konstanten $c_b \in \mathbb{R}^+$, wobei $b \in \mathbb{N},\ b \geq 4$ gelte.

**Beweis:**

Die Aussage im Spezialfall $k = 0$ erhalten wir bereits aus Eigenschaft (1), sodass $k \in \mathbb{N}$ angenommen werden darf. Wir erinnern an Eigenschaft (4)

$$F_X(t) = \frac{1}{(b-1)^k} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} |\sum_{n_i \in \{0,..,b-1\} \backslash \{a_0\}} e(n_i b^i t)| \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

und schätzen zunächst den Betrag $|\sum_{n_i \in \{0,..,b-1\} \backslash \{a_0\}} e(n_i b^i t)|$ für festes $i \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ ab.

Setze $\theta := b^i t \in \mathbb{R}$. Wegen $b \geq 4$ gibt es in der Menge $\{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\}$ mindestens zwei Zahlen mit Differenz 1, welche wir mit $n$ und $n+1$ bezeichnen. Aus der Dreiecksungleichung und *HS Lemma 4.1* kommt daher

$$|\sum_{n_i \in \{0,...,b-1\} \backslash \{a_0\}} e(n_i b^i t)| = |\sum_{n_i \in \{0,...,b-1\} \backslash \{a_0\}} e(n_i \theta)| =$$

$$|e(n\theta) + e((n+1)\theta) + \sum_{\substack{n_i \in \{0,...,b-1\} \backslash \{a_0\} \\ n_i \neq n,\ n_i \neq n+1}} e(n_i \theta)| \leq$$

$$|e(n\theta) + e((n+1)\theta)| + |\sum_{\substack{n_i \in \{0,...,b-1\} \backslash \{a_0\} \\ n_i \neq n,\ n_i \neq n+1}} e(n_i \theta)| \leq |e(n\theta) + e((n+1)\theta)| + b - 3 \leq$$

$$b - 3 + 2 \cdot \exp(-\|\theta\|^2).$$

Ferner ist $b - 3 + 2 \cdot \exp(-\|\theta\|^2) \leq (b-1) \cdot \exp(-\frac{\|\theta\|^2}{b})\ \ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$, was wir wie folgt sehen.

Setze $x := \|\theta\|^2 \in [0, \frac{1}{4}]$ und definiere $f : [0, \frac{1}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := (b-1) \cdot \exp(-\frac{x}{b}) - (b-3) - 2 \cdot \exp(-x) \quad \forall\ x \in [0, \frac{1}{4}].$$

Dann ist $f$ monoton steigend auf $[0, \frac{1}{4}]$, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
f^{'}(x) &= -\frac{b-1}{b}\cdot \exp(-\frac{x}{b}) - 2\cdot(-1)\cdot\exp(-x)\\
&= \exp(-x+\log 2) - \exp(-\frac{x}{b}+\log(\frac{b-1}{b})) \geq 0 \quad \forall\ x\in[0,\frac{1}{4}]
\end{aligned}
$$

wegen $-x+\log 2 \geq -\frac{x}{b}+\log(\frac{b-1}{b})\ \ \forall\, x\in[0,\frac{1}{4}]$, wobei dies aufgrund $-x+\log 2\geq -\frac{x}{b}$ bzw. $\log 2 \geq \frac{1}{4} \geq x \geq x\cdot(1-\frac{1}{b})$ für $x\in[0,\frac{1}{4}]$ gilt (beachte: $\log(\frac{b-1}{b})<0\ \wedge\ \log 2\approx 0.69$).
Also ist $0=f(0)\leq f(x)\ \ \forall\ x\in[0,\frac{1}{4}]$, was gleichwertig zu der nachzuweisenden Ungleichung ist.
Daraus folgt

$$
(4.1.1)\quad |\sum_{n_i\in\{0,\ldots,b-1\}\setminus\{a_0\}} e(n_i b^i t)| \leq (b-1)\cdot\exp(-\frac{\|b^i t\|^2}{b}) \quad \forall\ 0\leq i\leq k-1,\ t\in\mathbb{R}.
$$

Setzen wir (4.1.1) in $F_X(t)=\prod\limits_{i=0}^{k-1}\frac{1}{b-1}\cdot|\sum\limits_{n_i\in\{0,..,b-1\}\setminus\{a_0\}} e(n_i b^i t)|$ ein, so kommt

$$
(4.1.2)\quad F_X(t)\leq \prod_{i=0}^{k-1}\exp(-\frac{\|b^i t\|^2}{b}) = \exp(-\frac{1}{b}\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\|b^i t\|^2) \quad \forall\ t\in\mathbb{R}.
$$

Wählen wir darin $t=\frac{a}{q}+\eta$, so liefert dies

$$
(4.1.3)\quad F_X(\frac{a}{q}+\eta)\leq \exp(-\frac{1}{b}\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\|b^i\cdot(\frac{a}{q}+\eta)\|^2).
$$

Im Folgenden schätzen wir $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\|b^i\cdot(\frac{a}{q}+\eta)\|^2$ für $a\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ ggT(a,q)=1$ und $\eta\in\mathbb{R}$, die den Voraussetzungen des Lemmas genügen, nach unten ab, wobei wir hierzu $t:=\frac{a}{q}+\eta$ definieren.

Aus $\|b^i t\|\leq\frac{1}{2b}$ folgt $z-\frac{1}{2b}\leq b^i t\leq z+\frac{1}{2b}$ für ein $z\in\mathbb{Z}$ und daraus $bz-\frac{1}{2}\leq b^{i+1}t\leq bz+\frac{1}{2}$, sodass $\|b^{i+1}t\|=|b^{i+1}t-bz|=b\cdot|b^i t-z|=b\cdot\|b^i t\|$ gilt, für alle $i\in\mathbb{N}_0$ :

$$
(4.1.4)\quad \|b^i t\|\leq\frac{1}{2b}\ \Rightarrow\ \|b^{i+1}t\|=b\cdot\|b^i t\| \quad \forall\ i\in\mathbb{N}_0.
$$

Nun zeigen wir $\|b^i t\|\leq\frac{1}{2q}\ \ \forall\ i\in\mathbb{N}_0,\ i\leq\frac{k}{3}$. Dazu fixieren wir $i\in\mathbb{N}_0,\ i\leq\frac{k}{3}$ zunächst.

Wegen $ggT(q_1,b^i)=ggT(a,q_1)=1$ ($\Leftarrow ggT(q_1,b)=ggT(a,q)=1\ \wedge\ q=q_1\cdot q_2$) gilt auch $ggT(q_1,b^i a)=1$, sodass sich für $q_1|b^i a$ insbesondere $q_1=1$ im Widerspruch zu $q_1\geq 2$ ergibt. Also ist $q_1\nmid b^i a$ bzw. $q_1 q_2\nmid b^i a$, was $b^i a=q_1 q_2\cdot z+r=q\cdot z+r$ mit $z\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{N}, 1\leq r\leq q_1 q_2-1=q-1$

impliziert. Verwenden wir $|\eta| < X^{-2/3}/2$ und $q < X^{1/3}$, so kommt

$$|b^i\eta| = b^i|\eta| < b^i \cdot X^{-2/3}/2 = b^i \cdot b^{-2k/3}/2 \leq b^{k/3} \cdot b^{-2k/3}/2 = b^{-k/3}/2 = \frac{1}{2 \cdot X^{1/3}} < \frac{1}{2q},$$

woraus $-\frac{1}{2q} < b^i\eta < \frac{1}{2q}$ folgt. Wegen $b^it = b^i \cdot (\frac{a}{q} + \eta) = b^i \cdot \frac{a}{q} + b^i\eta = z + \frac{r}{q} + b^i\eta$ liefert dies

$$z + \frac{2r-1}{2q} = z + \frac{r}{q} - \frac{1}{2q} < z + \frac{r}{q} + b^i\eta = b^it < z + \frac{r}{q} + \frac{1}{2q} = z + \frac{2r+1}{2q}$$

mit $1 \leq 2r-1,\ 2r+1 \leq 2q-1$ ($\Leftarrow 1 \leq r \leq q-1$) und $z \in \mathbb{Z}$, also $b^it \in [z, z+1]$.
Folglich ist $\|b^it\| = \min\{|b^it - z|, |b^it - (z+1)|\} \geq \frac{1}{2q}$, sodass wir

$$(4.1.5) \quad \|b^it\| \geq \frac{1}{2q} \quad \forall\ i \in \mathbb{N}_0,\ i \leq \frac{k}{3}$$

gezeigt haben. Ferner sind die folgenden Fälle zu unterscheiden :

<u>1.Fall</u>: $q \leq b$

Dann gilt nach (4.1.5) insbesondere $\|b^it\| \geq \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{2b}\ \ \forall\ i \in \mathbb{N}_0,\ i \leq \frac{k}{3}$, was die Gültigkeit von

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|b^i \cdot (\frac{a}{q} + \eta)\|^2 \geq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} \|b^i \cdot (\frac{a}{q} + \eta)\|^2 \geq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} (\frac{1}{2b})^2 \geq \frac{k}{3} \cdot \frac{1}{4b^2}$$

liefert, denn $k - 1 \geq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ und $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1 \geq \frac{k}{3}$ für $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt nach (4.1.3) insbesondere

$$F_X(\frac{a}{q} + \eta) \leq \exp(-\frac{1}{b} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \|b^i \cdot (\frac{a}{q} + \eta)\|^2) \leq \exp(-\frac{1}{b} \cdot \frac{k}{3} \cdot \frac{1}{4b^2}) = \exp(-\frac{1}{12b^3} \cdot k)$$

Wegen $\frac{\log X}{\log q} \leq \frac{k \cdot \log b}{\log 2}$ ($\Leftarrow q_1 \geq 2$) gilt auch $\frac{1}{12b^3} \cdot k \geq \frac{1}{12b^3} \cdot \frac{\log 2}{\log b} \cdot \frac{\log X}{\log q} > 0$, also insgesamt

$$(4.1.6) \quad F_X(\frac{a}{q} + \eta) \leq \exp(-\frac{1}{12b^3} \cdot \frac{\log 2}{\log b} \cdot \frac{\log X}{\log q}).$$

<u>2.Fall</u>: $q > b$

Dann ist $\frac{\log q}{\log b} > 1$ und wegen $q < X^{1/3} = b^{k/3}$ ist $\frac{k}{3} > \frac{\log q}{\log b} > 1$. Setze $m := \lfloor \frac{k}{3} / \frac{\log q}{\log b} \rfloor \in \mathbb{N}$ und definiere die paarweise disjunkten Intervalle $I_j = [\ j \cdot \frac{\log q}{\log b},\ (j+1) \cdot \frac{\log q}{\log b}\ [$ für $j = 0, 1, ..., m-1$, sodass $\dot{\bigcup}_{0 \leq j \leq m-1} I_j \subseteq [0, \frac{k}{3}]$ gilt.

Sei $0 \leq j \leq m-1$ fixiert. Wir sehen leicht, dass $I_j$ als Intervall der Breite $\frac{\log q}{\log b} > 1$ mindestens $\lceil \frac{\log q}{\log b} \rceil - 1 := n \in \mathbb{N}$ aufeinanderfolgende Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ enthält, welche wir mit $l, l+1, ..., l+n-1 \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen. Angenommen es gilt $\|b^{l+s}t\| < \frac{1}{2b^2} \;\; \forall \; 0 \leq s \leq n-1$. Wegen $l+s \in I_j \subseteq [0, \frac{k}{3}]$ ist insbesondere $\frac{1}{2q} \leq \|b^{l+s}t\| < \frac{1}{2b^2} < \frac{1}{2b}$ nach (4.1.5), für alle $0 \leq s \leq n-1$. Daraus folgt nach (4.1.4) jedoch induktiv die Gültigkeit von

$$\frac{1}{2b^2} > \|b^{l+n-1}t\| = b^{n-1} \cdot \|b^l t\| \geq b^{n-1} \cdot \frac{1}{2q},$$

also $q > b^{n+1} = \exp(\log b \cdot (n+1)) \geq \exp(\log b \cdot \log q / \log b) = \exp(\log q) = q$ ($\Leftarrow n+1 = \lceil \frac{\log q}{\log b} \rceil \geq \frac{\log q}{\log b}$) und damit ein Widerspruch. Folglich gilt

$$\text{(4.1.7)} \quad \text{Jedes Intervall } I_j \text{ enthält ein } i \in I_j \cap \mathbb{N}_0 \text{ mit } \|b^i t\| \geq \frac{1}{2b^2}, \text{ für } j = 0, ..., m-1.$$

Erinnern wir uns an $\dot{\bigcup}_{0 \leq j \leq m-1} I_j \subseteq [0, \frac{k}{3}]$ und beachten $i \leq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor \leq k-1$ für $i \in [0, \frac{k}{3}] \cap \mathbb{N}_0$ ($\Leftarrow k \geq 1$), so kommt nach (4.1.7)

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|b^i \cdot (\frac{a}{q} + \eta)\|^2 \geq \sum_{i \in [0, \frac{k}{3}] \cap \mathbb{N}_0} \|b^i t\|^2 \geq \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i \in I_j \cap \mathbb{N}_0} \|b^i t\|^2 \geq m \cdot \frac{1}{4b^4}.$$

Nun ist $m = \lfloor \frac{k}{3} / \frac{\log q}{\log b} \rfloor > \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{3} / \frac{\log q}{\log b}$ ($\Leftarrow m \geq 1$), was

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|b^i \cdot (\frac{a}{q} + \eta)\|^2 \geq m \cdot \frac{1}{4b^4} > \frac{1}{24} \cdot \frac{k \cdot \log b}{\log q} \cdot \frac{1}{b^4} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{b^4} \cdot \frac{\log X}{\log q} > 0$$

impliziert. Setzen wir dies in (4.1.3) ein, so erhalten wir :

$$\text{(4.1.8)} \quad F_X(\frac{a}{q} + \eta) \leq \exp(-\frac{1}{24b^5} \cdot \frac{\log X}{\log q})$$

Damit ist die Fallunterscheidung abgeschlossen und es gilt $F_X(\frac{a}{q} + \eta) \leq \exp(-c_b \cdot \frac{\log X}{\log q})$ mit der Konstanten $c_b := \min\{\frac{1}{24b^5}, \frac{1}{12b^3} \cdot \frac{\log 2}{\log b}\} \in \mathbb{R}^+$ nach (4.1.6) und (4.1.8).

□

Dem Nachweis von Lemma 4.1 entnehmen wir, dass dieses nicht nur für Basen $b \geq 10$, sondern sogar für $b \geq 4$ gilt. In Lemma 4.2 und danach benötigen wir mehrmals

*HS1 Lemma 4.2:*
Sei $J \in \mathbb{N}$ gegeben und $G(t_0, t_1, ..., t_J) := \sup\limits_{0 \leq \gamma < b^{-J-1}} \frac{1}{b-1} \cdot | \sum\limits_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot ((0, t_0 t_1 ... t_J)_b + \gamma)|$ für $t_0, t_1, ..., t_J \in \{0, ..., b-1\}$ definiert. Dann gilt

$$G(t_0, t_1, ..., t_J) \geq c(J, b)$$

mit einer nur von $J$ und $b$ abhängigen Konstanten $c(J, b) \in \mathbb{R}^+$.

*Beweis:*
Sei $a \in ]0, 1[$ zunächst fixiert. Wir definieren $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ g(x) = | \sum\limits_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(x)^n| \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ und sehen, dass $g$ gleichmäßig stetig (kurz gl.s.) ist auf $\mathbb{R}$, was im Wesentlichen daran liegt, dass die komplexe Betragsfunktion $| \ | : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ und die Funktionen $x \longmapsto e(x)^n$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\}$ gleichmäßig stetig sind :

(1) $\quad g$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Nach dem Satz über das Minimum und Maximum ist dann insbesondere die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ f(z) = \sup\limits_{0 \leq \gamma \leq a} | \sum\limits_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(z + \gamma)^n| = \max\limits_{0 \leq \gamma \leq a} | \sum\limits_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(z + \gamma)^n| \ \forall \ z \in \mathbb{R}$ erklärt und es gilt $f(z) = \sup\limits_{0 \leq \gamma \leq a} g(z + \gamma) = \max\limits_{0 \leq \gamma \leq a} g(z + \gamma)$, für alle $z \in \mathbb{R}$. Nun zeigen wir, dass $f$ stetig ist auf $\mathbb{R}$.

Sei $z_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ gegeben, wobei dieses $\epsilon$ nichts mit dem in Kap. 3 fixierten $\epsilon = 10^{-1000}$ zu tun hat. Aus der gl. Stetigkeit von $g$ folgt die Existenz von $\delta = \delta_\epsilon > 0$ mit $|g(z_0) - g(x)| < \epsilon$ $\forall \ x \in U_\delta(z_0)$ und $|g(z_0 + a) - g(y)| < \epsilon \ \ \forall \ y \in U_\delta(z_0 + a)$, wobei $U_\delta(z) = ]z - \delta, z + \delta[$ mit $\delta > 0$ die gewöhnliche $\delta$-Umgebung von $z \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Fixieren wir zunächst $z \in U_\delta(z_0)$, womit dann auch $z = z_0 + r$ mit festem $-\delta < r < \delta$ gilt, so erhalten wir

$$\{g(z + \gamma) \,|\, 0 \leq \gamma \leq a\} = \{g(z_0 + r + \gamma) \,|\, 0 \leq \gamma \leq a\} \subseteq \{g(z_0 + s) \,|\, -\delta < s < \delta + a\} =$$
$$\{g(z_0 + s) \,|\, 0 \leq s \leq a\} \,\cup\, \{g(z_0 + a + s) \,|\, 0 \leq s < \delta\} \,\cup\, \{g(z_0 + 0 + s) \,|\, -\delta < s \leq 0\} \subseteq$$
$$\{g(z_0 + \gamma) \,|\, 0 \leq \gamma \leq a\,\} \,\cup\, [g(z_0 + a) - \epsilon,\ g(z_0 + a) + \epsilon] \,\cup\, [g(z_0) - \epsilon,\ g(z_0) + \epsilon].$$

Die rechten Intervallgrenzen in der letzten Vereinigung haben einen Abstand $\leq \epsilon$ von $\sup\{g(z_0 + \gamma) \,|\, 0 \leq \gamma \leq a\,\}$, was

$$f(z) = \sup\{g(z+\gamma) \mid 0 \le \gamma \le a\} \le \sup\{g(z_0+\gamma) \mid 0 \le \gamma \le a\} + \epsilon = f(z_0) + \epsilon$$

impliziert. Ebenso gilt aufgrund der gl. Stetigkeit von $g$ insbesondere $|g(z) - g(x)| < \epsilon$ $\forall\ x \in U_\delta(z)$ und $|g(z+a) - g(y)| < \epsilon\ \ \forall\ y \in U_\delta(z+a)$. Ferner ist $z_0 = z + r_0$ mit $r_0 = -r$ und $-\delta < r_0 < \delta$, sodass wir analog zu oben auf $f(z_0) \le f(z) + \epsilon$ schließen, indem wir die Rollen von $z$ und $z_0$ vertauschen. Insgesamt ist $|f(z_0) - f(z)| \le \epsilon\ \ \forall\ z \in U_\delta(z_0)$ und daher

(2) $f$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Ferner besitzt $f$ keine Nullstellen, was wir wie folgt nachweisen. Sei $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist insbesondere $|\sum\limits_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(z_0+\gamma)^n| = 0$ bzw. $\sum\limits_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(z_0+\gamma)^n = 0$ für alle $0 \le \gamma \le a$. Für $\gamma_1, \gamma_2 \in [0,a]$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ist auch $e(z_0+\gamma_1) \neq e(z_0+\gamma_2)$, denn aus $e(z_0+\gamma_1) = e(z_0+\gamma_2)$ folgt $e^{2\pi i\cdot(\gamma_1-\gamma_2)} = 1$ bzw. $\gamma_1 - \gamma_2 \in \mathbb{Z}$, was wegen $\gamma_1 \neq \gamma_2$ und $|\gamma_1 - \gamma_2| \le a < 1$ ausgeschlossen ist. Definieren wir $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $h(x) := \sum\limits_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} x^n\ \ \forall\ x \in \mathbb{C}$, so sind also alle Elemente der unendlichen Menge $\{e(z_0+\gamma) \in \mathbb{C} \mid 0 \le \gamma \le a\}$ Nullstellen von $h$. Folglich besitzt $h$ als Polynom über $\mathbb{C}$ mit Grad $\le b-1$ unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{C}$, was dem Fundamentalsatz der Algebra widerspricht. Folglich besitzt $f$ keine Nullstellen und es gilt

(3) $f(z) > 0\ \ \ \forall\ z \in \mathbb{R}$.

Nach (2) ist $f$ insbesondere stetig auf dem kompakten Intervall $[0,1]$, sodass $f$ nach (3) sowie dem Satz vom Minimum und Maximum auf $[0,1]$ ein Minimum $c_a \in \mathbb{R}^+$ annimmt :

(4) $f(z) \ge c_a\ \ \ \forall\ z \in [0,1]$ mit $c_a \in \mathbb{R}^+$.

Wählen wir nun $a = b^{-J-1} \in ]0,1[$, so gilt

$$c_a \le f(z) = \sup_{0\le\gamma\le a} |\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(z+\gamma)^n| = \sup_{0\le\gamma<b^{-J-1}} |\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(z+\gamma)^n|\quad \forall\ z \in [0,1]$$

und mit $c(J,b) := \frac{1}{b-1} \cdot c_a \in \mathbb{R}^+$ schließen wir daraus

$$(5) \quad c(J,b) \leq \sup_{0\leq\gamma<b^{-J-1}} \frac{1}{b-1} \cdot |\sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} e(z+\gamma)^n| \quad \forall\, z \in [0,1].$$

Für $t_0, ..., t_J \in \{0, ..., b-1\}$ setzen wir $z = \sum_{i=0}^{J} t_i \cdot b^{-i-1} = (0, t_0...t_J)_b \in [0,1]$ in (5) ein und erhalten damit das gewünschte Resultat.

□

Zudem brauchen wir den nachfolgenden *HS2 Lemma 4.2*, wobei darin $M_t^T$ die Transponierte zur Matrix $M_t$ bezeichnet, die in Lemma 4.2 definiert wird. In *HS3 Lemma 4.2* wird eine Version des Satzes von Perron-Frobenius aufgeführt, die aus [8, S.104 Satz 14.1] stammt.

*HS2 Lemma 4.2:*
Sei $J \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}^+$ sowie die $b^J \times b^J$ Matrix $M_t^T$ gegeben durch

$$(M_t^T)_{i,j} = \begin{cases} G(t_0, t_1, ..., t_J)^t & \text{, falls } j-1 = (t_J...t_1)_b \text{ und } i-1 = (t_{J-1}...t_0)_b \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases},$$

wobei $G(t_0, t_1, ..., t_J)$ wie in *HS1 Lemma 4.2* definiert ist. Dann ist $M_t^T$ irreduzibel.

*Beweis:*
Aus *HS1 Lemma 4.2* folgt $G(t_0, t_1, ..., t_J)^t > 0 \quad \forall\ t_0, t_1, ..., t_J \in \{0, ..., b-1\}$. Wir nehmen $M_t^T$ als reduzibel an und verwenden die Definition 6.7 in [9]. Es gibt also eine disjunkte Zerlegung von $I = \{0, 1, ..., b^J - 1\}$ der Form $I = I_1 \dot\cup I_2$ in nicht-leere Teilmengen $I_1$ und $I_2$ mit der Eigenschaft

$$(1) \quad m_{i+1\,j+1} = 0 \quad \forall\ i \in\ I_1,\ j \in\ I_2,$$

wobei $m_{i+1\,j+1}$ die Koeffizienten von $M_t^T$ sind. Für $x = (t_J...t_1)_b \in I_2$ (beachte: $I_2 \subseteq I$) muss $y = (t_{J-1}...t_1t_0)_b \in I_2 \ \ \forall\ \ t_0 \in \{0, ..., b-1\}$ sein, denn wäre $y = (t_{J-1}...t_1t_0)_b \in I_1$ für ein $t_0 \in \{0, ..., b-1\}$, so erhalten wir nach (1) insbesondere $0 = m_{y+1\,x+1} = G(t_0, t_1, ..., t_J)^t$ und damit einen Widerspruch. Also gilt

$$(2) \quad x = (t_J...t_1)_b \in I_2 \ \Rightarrow\ y = (t_{J-1}...t_1t_0)_b \in I_2 \quad \forall\ t_0 \in \{0, ..., b-1\}.$$

Da $I_2 \neq \emptyset$ ist, gibt es ein Element $c = (c_J...c_1)_b \in I_2$. Nach (2) sind dann die Zahlen $c(i_1) = (c_{J-1}...c_1 i_1)_b$ für alle $i_1 \in \{0, ..., b-1\}$ in $I_2$ enthalten. Wiederum nach (2) sind dann auch die Zahlen $c(i_1, i_2) = (c_{J-2}...c_1 i_1 i_2)_b$ für alle $i_1, i_2 \in \{0, ..., b-1\}$ in $I_2$ enthalten.
So fortfahrend erhält man, dass die Zahlen $c(i_1, i_2, ..., i_J) = (i_1 i_2 ... i_J)_b$ für alle $i_1, i_2, .., i_J \in \{0, ..., b-1\}$ in $I_2$ enthalten sind. Damit ist aber $I_2 \supseteq I$ bzw. $I_2 = I$ und folglich $I_1 = \emptyset$. Also ist $M_t^T$ irreduzibel.

□

*HS3 Lemma 4.2 /Satz von Perron-Frobenius :*
Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \geq 0$ und irreduzibel, dann gibt es einen positiven Eigenwert $\lambda^*$ von $A$, sodass $|\lambda| \leq \lambda^*$ für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ gilt. Ferner gibt es einen positiven Eigenvektor $\vec{x} > 0$ zum Eigenwert $\lambda^*$ (d.h. alle Komponenten von $\vec{x}$ sind $> 0$) und wir nennen $\lambda^*$ den betragsmäßig größten Eigenwert von $A$.

Durch das folgende Lemma können wir die Summen $\sum\limits_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^t$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ über eine Eigenwertberechnung kontrollieren. Es stellt ein wichtiges Werkzeug im Beweis von Theorem 1.1 dar.

**Lemma 4.2:**
Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$ und $J \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$ gegeben sowie $\lambda = \lambda(t, J) \in \mathbb{R}_0^+$ der betragsmäßig größte Eigenwert der $b^J \times b^J$ Matrix $M_t$, welche durch

$$(M_t)_{i,j} = \begin{cases} G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})^t & \text{, falls } i - 1 = (t_{J+1}...t_2)_b \text{ und } j - 1 = (t_J...t_1)_b \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

definiert ist, wobei $G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})$ wie auf S.19 erklärt ist. Dann gilt $\sum\limits_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^t \ll_{t,J} \lambda^k$.

**Beweis:**
Nach Definition in *HS1 Lemma 4.2* und der Dreiecksungleichung ist $G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})^t \in [0, 1]$ für alle $t_1, t_2, ..., t_{J+1} \in \{0, ..., b-1\}$. Wir erklären eine Markov-Kette $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ der Ordnung $J$ von Zufallsvariablen $X_i$ wie folgt :

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $t_1, t_2, ..., t_n \in \{0, ..., b-1\}$ setzen wir $t_s = 0$ für $s \in \mathbb{Z}$, $s > n$ und definieren

$$(4.2.1) \quad P(X_n = t_1 \mid X_{n-i} = t_{i+1} \ \forall \ 1 \leq i \leq n-1)^t$$

$$:= \begin{cases} G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})^t & \text{, falls } n > J \\ G(\underbrace{t_1, t_2, ..., t_n, 0, ..., 0}_{\text{J+1 Zahlen}})^t & \text{, falls } n \leq J \end{cases}$$

$$= \begin{cases} G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})^t & \text{, falls } n > J \\ G(\underbrace{t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}, ..., t_{J+1}}_{\text{J+1 Zahlen}})^t & \text{, falls } n \leq J \end{cases} = G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})^t \quad \in [0,1]$$

als die Wahrscheinlichkeit (kurz: Wsk.), dass $X_n = t_1$ unter der Bedingung $X_{n-1} = t_2,\ X_{n-2} = t_3, ...,\ X_1 = t_n$ eintritt. Die Übergangswsk. für den Zustand $X_n = t_1$ ist also nur von $t_1$ selbst und den vorigen $J$ Zuständen abhängig. Folgend bezeichnen wir eine (4.2.1) genügende Teilkette $X_1, ..., X_n$ von $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus $n$ Zufallsvariablen als $n$-elementige Markov-Kette der Ordnung $J$ und beachten, dass für $n = 1 \leq J$ in (4.2.1) gerade $P(X_1 = t_1)^t := G(\underbrace{t_1, 0, ..., 0}_{\text{J+1 Zahlen}})^t$ definiert wird. Gemäß der Wsk.-Theorie erhalten wir durch iteratives Anwenden von (4.2.1)

$$P(X_{n+1-i} = t_i \ \forall \ 1 \leq i \leq n)^t =$$
$$P(X_n = t_1 \mid X_{n-i} = t_{i+1} \ \forall \ 1 \leq i \leq n-1)^t \cdot P(X_{n-i} = t_{i+1} \ \forall \ 1 \leq i \leq n-1)^t =$$
$$G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})^t \cdot P(X_{n-i} = t_{i+1} \ \forall \ 1 \leq i \leq n-1)^t =$$
$$G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})^t \cdot G(t_2, t_3, ..., t_{J+2})^t \cdot P(X_{n-1-i} = t_{i+2} \ \forall \ 1 \leq i \leq n-2)^t = .... =$$
$$\prod_{i=1}^{n} G(t_i, t_{i+1}, ..., t_{i+J})^t,$$

mit $t_s := 0$ für Indizes $s \in \mathbb{Z},\ s > n$. Zusammenfassend können wir

$$(4.2.2) \quad p(t_n, t_{n-1}, ..., t_1) =: P(X_{n+1-i} = t_i \ \forall \ 1 \leq i \leq n)^t = \prod_{i=1}^{n} G(t_i, t_{i+1}, ..., t_{i+J})^t \in [0,1]$$
$$\forall \ n \in \mathbb{N},\ t_1, ..., t_n \in \{0, ..., b-1\} \text{ mit } t_s := 0 \ \forall \ s \in \mathbb{Z},\ s > n$$

als Wsk. für den Zustand $X_1 = t_n,\ X_2 = t_{n-1}, ...,\ X_n = t_1$ der $n$-elementigen Markov-Kette der Ordnung $J$ interpretieren, für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus schließen wir

$$(4.2.3) \quad p(t_n, t_{n-1}, ..., t_0) = G(t_0, t_1, ..., t_J)^t \cdot p(t_n, t_{n-1}, ..., t_1)$$
$$\forall \ n \in \mathbb{N},\ t_0, ..., t_n \in \{0, ..., b-1\} \text{ mit } t_s := 0 \ \forall \ s \in \mathbb{Z},\ s > n.$$

Nach (4.2.3) können wir $G(t_0, t_1, ..., t_J)^t =: p(t_n, t_{n-1}, ..., t_0 | \, t_n, t_{n-1}, ..., t_1)$ als Übergangswsk. der $n$-elementigen Markov-Kette $X_1 = t_n, X_2 = t_{n-1}, ..., X_n = t_1$ zur $n+1$-elementigen Markov-Kette $X_1 = t_n, \; X_2 = t_{n-1}, ..., \; X_{n+1} = t_0$ der Ordnung $J$ interpretieren oder kürzer als Wsk. für den Übergang von Zustand $(t_n, t_{n-1}, ..., t_1)$ zum Zustand $(t_n, t_{n-1}, ..., t_0)$, wobei $t_s := 0 \; \forall s \in \mathbb{Z}, \, s > n$.

Daher ist die $b^J \times b^J$ Matrix $M_t^T$, also die Transponierte zu $M_t$, welche durch

$$(M_t^T)_{i,j} = \begin{cases} G(t_0, t_1, ..., t_J)^t & , \text{ falls } \; j - 1 = (t_J ... t_1)_b \; \text{ und } \; i - 1 = (t_{J-1} ... t_0)_b \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} ,$$

mit $t_0, ..., t_J \in \{0, ..., b-1\}$ gegeben ist, eine Art „Übergangsmatrix", denn nach obigem gilt

(4.2.4) Für $j = (t_J ... t_1)_b + 1$ und $i = (t_{J-1} ... t_0)_b + 1$ ist
$(M_t^T)_{i,j} = p(t_n, t_{n-1}, ..., t_0 | \, t_n, t_{n-1}, ..., t_1)$ die Wsk. für den Übergang vom Zustand $(t_n, t_{n-1}, ..., t_1)$ zum Zustand $(t_n, t_{n-1}, ..., t_0)$,
für alle $n \in \mathbb{N}, \; t_0, ..., t_n \in \{0, ..., b-1\}$ mit $t_s = 0 \; \forall \; s \in \mathbb{Z}, \; s > n$.

Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ schreiben wir folgend $\vec{x} \geq \vec{y}$, falls $\vec{x}_i \geq \vec{y}_i \;\; \forall \; 1 \leq i \leq m$ gilt sowie $\vec{x} \geq c$ mit $c \in \mathbb{R}$, falls $\vec{x} \geq c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Dabei besteht der letzte Vektor aus $m$ Komponenten mit dem Wert 1 und $\vec{v}_i$ bezeichnet die $i$.-Komponente im Vektor $\vec{v}$. Wir definieren

$$\vec{p}(l) := (M_t^T)^l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{b^J} \;\text{ mit }\; \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{b^J} \quad \forall \; l \in \mathbb{N}_0,$$

wobei insbesondere $\vec{p}(l), \; (M_t^T)^l \geq 0 \;\; \forall \; l \in \mathbb{N}_0$ gilt (beachte: $M_t \geq 0$).
Mithilfe von (4.2.4) zeigen wir induktiv

(4.2.5) In der $i = (t_l ... t_0)_b + 1$. Zeile von $\vec{p}(l)$ steht der Wert
$\vec{p}(l)_i \geq p(t_l, ..., t_0)$, falls $l \in \mathbb{N}_0, \; l < J$ ist.

Für $l = 0$ ($\Rightarrow l < J$) steht in der $i = (t_0)_b + 1$. Zeile von $\vec{p}(0) = (M_t^T)^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ der Wert $\vec{p}(0)_i = 1 \geq p(t_0)$, denn $(M_t^T)^0 = E$ und nach Definition gilt insbesondere $p(t_0) \leq 1$, womit der Induktionsanfang gesichert ist.

Angenommen (4.2.5) ist für ein $l \in \mathbb{N}_0,\ l < J-1$ bzw. $l+1 \leq J-1$ erfüllt.
Wegen $\vec{p}(l+1) = (M_t^T) \cdot \vec{p}(l)$ steht in der $i = (t_{l+1}...t_0)_b + 1$ Zeile von $\vec{p}(l+1)$ der Wert $\vec{p}(l+1)_i = \sum\limits_{j=1}^{b^J} (M_t^T)_{i,j} \cdot \vec{p}(l)_j$. Wir wählen $t_l^{'} := t_{l+1}, ..., t_1^{'} := t_2,\ t_0^{'} := t_1$ und dürfen dann nach der Induktionsannahme (4.2.5) auf die $i_0 := (t_{l+1}...t_1)_b + 1 = (t_l^{'}, ..., t_0^{'})_b + 1$. Zeile von $\vec{p}(l)$ anwenden, was $\vec{p}(l)_{(t_{l+1}...t_1)_b+1} = \vec{p}(l)_{i_0} \geq p(t_l^{'}, ..., t_0^{'}) = p(t_{l+1}, ..., t_1)$ liefert.

Aus (4.2.4) folgt mit $n := l+1 \leq J-1$ wegen $t_s = 0$ für alle $s \in \mathbb{Z},\ s > n = l+1$ auch $i = (t_{l+1}...t_0)_b + 1 = (0...0\, t_{l+1}...t_0)_b + 1 := (t_{J-1}...t_0)_b + 1$ sowie
$j = i_0 = (t_{l+1}...t_1)_b + 1 = (0...0\, t_{l+1}...t_1)_b + 1 := (t_J...t_1)_b + 1$, wenn wir $t_J = t_{J-1} = ... = t_{l+2} = 0$ wählen. Damit gilt $(M_t^T)_{i,j} = (M_t^T)_{i,i_0} = p(t_{l+1}, ..., t_0 | t_{l+1}, ..., t_1)$ nach (4.2.4) und insgesamt

$$p(t_{l+1}, ..., t_0) = p(t_{l+1}, ..., t_0 | t_{l+1}, ..., t_1) \cdot p(t_{l+1}, ..., t_1) \leq$$
$$(M_t^T)_{i,\, i_0} \cdot \vec{p}(l)_{i_0} \leq \sum_{j=1}^{b^J} (M_t^T)_{i,\, j} \cdot \vec{p}(l)_j = \vec{p}(l+1)_i,$$

denn das letzte $\leq$-Zeichen steht wegen $\vec{p}(l) \geq 0$ und $(M_t^T) \geq 0$.

Damit ist (4.2.5) induktiv nachgewiesen. Nun verwenden wir (4.2.4) sowie (4.2.5) und zeigen ebenfalls induktiv

(4.2.6) In der $i = (t_{J-1}...t_0)_b + 1$. Zeile von $\vec{p}(l)$ steht der Wert
$$\vec{p}(l)_i \geq \sum_{t_l, t_{l-1}, ..., t_J \in \{0,...,b-1\}} p(t_l, ..., t_0), \text{ falls } l \in \mathbb{N}_0,\ l \geq J \text{ ist.}$$

Sei $l = J$ und $i = (t_{J-1}...t_0)_b + 1$, also insbesondere $\vec{p}(l) = \vec{p}(J) = M_t^T \cdot \vec{p}(J-1)$.
Für $t_J \in \{0, ..., b-1\}$ wählen wir $t_{J-1}^{'} := t_J, ..., t_1^{'} := t_2,\ t_0^{'} := t_1$ und wenden (4.2.5) auf die $i_0 := (t_J...t_1)_b + 1 = (t_{J-1}^{'}...t_0^{'})_b + 1$. Zeile von $\vec{p}(J-1)$ an (beachte: $J-1 \in \mathbb{N}_0,\ J-1 < J$), sodass $\vec{p}(J-1)_{(t_J...t_1)_b+1} = \vec{p}(J-1)_{i_0} \geq p(t_{J-1}^{'}, ..., t_0^{'}) = p(t_J, ..., t_1)$ gilt.
Dies ergibt $\vec{p}(J-1)_{(t_J...t_1)_b+1} \geq p(t_J, ..., t_1)$ für alle $t_J \in \{0, ..., b-1\}$.

Aus (4.2.4) folgt mit $n := J$ für $i = (t_{J-1}...t_0)_b + 1$ sowie $j = i_0 = (t_J...t_1)_b + 1$ die Gültigkeit von $(M_t^T)_{(t_{J-1}...t_0)_b+1,\,(t_J...t_1)_b+1} = (M_t^T)_{i,j} = p(t_J,...,t_0|t_{J-1},...,t_1)$, für alle $t_J \in \{0,...,b-1\}$, was

$$\sum_{t_l,t_{l-1},...,t_J\{0,...,b-1\}} p(t_l,...,t_0) = \sum_{t_J=0}^{b-1} p(t_l,...,t_0) = \sum_{t_J=0}^{b-1} p(t_l,...,t_1)\cdot p(t_J,...,t_0|\,t_J,...,t_1) \leq$$
$$\sum_{t_J=0}^{b-1} \vec{p}(J-1)_{(t_J...t_1)_b+1}\cdot (M_t^T)_{(t_{J-1}....t_0)_b+1,\,(t_J...t_1)_b+1} \leq \sum_{j=1}^{b^J} \vec{p}(J-1)_j \cdot (M_t^T)_{i,j} = \vec{p}(J)_i = \vec{p}(l)_i$$

liefert, wenn wir $\vec{p}(J) = M_t^T \cdot \vec{p}(J-1)$ verwenden. Damit ist der Induktionsanfang gesichert.

Angenommen (4.2.6) ist für ein $l \in \mathbb{N}_0,\ l \geq J$ erfüllt. Sei $i = (t_{J-1}...t_0)_b + 1$ fixiert. Für $t_J \in \{0,...,b-1\}$ wählen wir $t'_{J-1} := t_J,...,t'_1 := t_2,\ t'_0 := t_1$ und dürfen dann nach der Induktionsannahme (4.2.6) auf die $i_0 := (t_J...t_1)_b + 1 = (t'_{J-1}...t'_0)_b + 1$. Zeile von $\vec{p}(l)$ anwenden, was schließlich

$$\vec{p}(l)_{(t_J...t_1)_b+1} = \vec{p}(l)_{(t'_{J-1}...t'_0)_b+1} = \vec{p}(l)_{i_0} \geq$$
$$\sum_{t'_l,t'_{l-1},...,t'_J\in\{0,...,b-1\}} p(t'_l,...,t'_0) = \sum_{t_{l+1},t_l,...,t_{J+1}\in\{0,...,b-1\}} p(t_{l+1},...,t_1)$$

liefert, für alle $t_J \in \{0,...,b-1\}$. Aus (4.2.4) folgt mit $n := l+1$ für
$i = (t_{J-1}...t_0)_b + 1$ sowie $j = i_0 = (t_J...t_1)_b + 1$ die Gültigkeit von
$(M_t^T)_{(t_{J-1}...t_0)_b+1,\,(t_J...t_1)_b+1} = (M_t^T)_{i,j} = p(t_{l+1},...,t_0|t_{l+1},...,t_1)$, für alle $t_J \in \{0,...,b-1\}$.

Insgesamt gilt daher

$$\sum_{t_{l+1},t_l,...,t_J\in\{0,...,b-1\}} p(t_{l+1},...,t_0) = \sum_{t_J=0}^{b-1} \sum_{t_{l+1},t_l,...,t_{J+1}\in\{0,...,b-1\}} p(t_{l+1},...,t_0) =$$
$$\sum_{t_J=0}^{b-1} \sum_{t_{l+1},t_l,...,t_{J+1}\in\{0,...,b-1\}} p(t_{l+1},...,t_1)\cdot p(t_{l+1},...,t_0|t_{l+1},...,t_1) =$$
$$\sum_{t_J=0}^{b-1} (M_t^T)_{(t_{J-1}...t_0)_b+1,\,(t_J...t_1)_b+1} \cdot \sum_{t_{l+1},t_l,...,t_{J+1}\in\{0,...,b-1\}} p(t_{l+1},...,t_1) \leq$$
$$\sum_{t_J=0}^{b-1} (M_t^T)_{(t_{J-1}...t_0)_b+1,\,(t_J...t_1)_b+1} \cdot \vec{p}(l)_{(t_J...t_1)_b+1} \leq \sum_{j=1}^{b^J} (M_t^T)_{i,j}\cdot \vec{p}(l)_j = \vec{p}(l+1)_i,$$

denn es ist $\vec{p}(l+1) = (M_t^T)\cdot\vec{p}(l)$ und $\vec{p}(l) \geq 0$ sowie $(M_t^T) \geq 0$, womit die Induktion auf $l+1$ abgeschlossen und (4.2.6) nachgewiesen ist.

Für $l \leq J-1$ liefert (4.2.5) die Abschätzung

$$\sum_{t_l,t_{l-1},...,t_0\in\{0,...,b-1\}} p(t_l,...,t_0) \leq \sum_{t_l,t_{l-1},...,t_0\in\{0,...,b-1\}} \vec{p}(l)_{(t_l t_{l-1}...t_0)_b+1} \leq$$
$$\sum_{t_{J-1},...,t_0\in\{0,...,b-1\}} \vec{p}(l)_{(t_{J-1}...t_0)_b+1} = \sum_{j=1}^{b^J} \vec{p}(l)_j,$$

denn jedes $1 \leq j \leq b^J$ ist eindeutig in der Form $j = (t_{J-1}...t_0)_b + 1$ mit $t_{J-1},...,t_0 \in \{0,...,b-1\}$ darstellbar und es gilt $\vec{p}(l) \geq 0$. Für $l \geq J$ erhalten wir

$$\sum_{t_l,t_{l-1},...,t_0\in\{0,...,b-1\}} p(t_l,...,t_0) = \sum_{t_{J-1},...,t_0\in\{0,...,b-1\}} \sum_{t_l,t_{l-1},...,t_J\in\{0,...,b-1\}} p(t_l,...,t_0) \leq$$
$$\sum_{t_{J-1},...,t_0\in\{0,...,b-1\}} \vec{p}(l)_{(t_{J-1},...,t_0)_b+1} = \sum_{j=1}^{b^J} \vec{p}(l)_j$$

nach (4.2.6) analog zu oben. Daraus folgt insgesamt

$$\text{(4.2.7)} \qquad \sum_{t_l,...,t_0\in\{0,...,b-1\}} p(t_l,...,t_0) \leq \sum_{j=1}^{b^J} \vec{p}(l)_j \quad \forall\ l \in \mathbb{N}_0.$$

Da $M_t^T \geq 0$ und irreduzibel ist ($\Leftarrow$ *HS2 Lemma 4.2*), besitzt $M_t^T$ nach dem Satz von Perron-Frobenius (*HS3 Lemma 4.2*) einen positiv-reellen und betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda = \lambda(t,J)$ mit dem Eigenvektor $\vec{x} = \vec{x}(\lambda) > 0$. Da die Eigenwerte einer Matrix und ihrer Transponierten stets diesselben sind, ist $\lambda \in \mathbb{R}^+$ auch der betragsmäßig größte Eigenwert von $M_t$. Ferner gibt es ein $r = r(\lambda) \in \mathbb{R}^+$, sodass auch $\vec{y}(\lambda) = \vec{y} = r \cdot \vec{x} > 1$ Eigenvektor zu $\lambda$ ist.

Aus $\lambda \cdot \vec{y} = M_t^T \cdot \vec{y}$ folgt induktiv $\lambda^l \cdot \vec{y} = (M_t^T)^l \cdot \vec{y}\ \ \forall\ l \in \mathbb{N}_0$, womit

$$\lambda^l \cdot \vec{y} = (M_t^T)^l \cdot \vec{y} \geq (M_t^T)^l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =: \vec{p}(l) \quad \forall\ l \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt } (\Leftarrow (M_t^T)^l \geq 0).$$

Setzen wir $c := c(\lambda) = c(t,J) = \sum_{j=1}^{b^J} \vec{y}_j \in \mathbb{R}^+$, so ist $\sum_{j=1}^{b^J} \vec{p}(l)_j \leq \sum_{j=1}^{b^J} (\lambda^l \cdot \vec{y})_j = \lambda^l \cdot c(t,J) \ll_{t,J} \lambda^l$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Daraus schließen wir

$$\sum_{t_l,...,t_0\in\{0,...,b-1\}} P(X_{l+1-i} = t_i\ \forall\ 0 \leq i \leq l)^t = \sum_{t_l,...,t_0\in\{0,...,b-1\}} p(t_l,...,t_0) \leq \sum_{j=1}^{b^J} \vec{p}(l)_j$$
$$\ll_{t,J} \lambda^l \ll_{t,J} \lambda^{l+1}$$

für alle $l \in \mathbb{N}_0$ nach (4.2.2), (4.2.7) und $\lambda = \lambda(t, J) > 0$. Also gilt

$$(4.2.8) \qquad \sum_{t_l,...,t_1 \in \{0,...,b-1\}} P(X_{l+1-i} = t_i \ \forall \ 1 \leq i \leq l)^t \ll_{t,J} \lambda^l \quad \forall \ l \in \mathbb{N}.$$

Für $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$ und $\theta = (0, t_1...t_k)_b$ mit $t_1, ..., t_k \in \{0, ..., b-1\}$ liefert Eigenschaft (4)

$$F_X(\sum_{i=1}^{k} t_i b^{-i}) = F_X(\theta) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e(b^j\theta) - 1}{e(b^{j-1}\theta) - 1} - e(a_0 b^{j-1}\theta)| =$$
$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e((t_1...t_j, t_{j+1}...t_k)_b) - 1}{e((t_1...t_{j-1}, t_j...t_k)_b) - 1} - e(a_0 \cdot (t_1...t_{j-1}, t_j...t_k)_b)| =$$
$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e((t_j, t_{j+1}...t_k)_b) - 1}{e((0, t_j...t_k)_b) - 1} - e(a_0 \cdot (0, t_j...t_k)_b)| =$$
$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e(\sum_{i=0}^{k-j} t_{i+j} b^{-i}) - 1}{e(\sum_{i=0}^{k-j} t_{i+j} b^{-i-1}) - 1} - e(a_0 \cdot \sum_{i=0}^{k-j} t_{i+j} b^{-i-1})|,$$

indem wir $e(r) = e(z + r) \ \forall \ r \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{Z}$ benutzen.

Wir setzen $t_s = 0 \ \forall \ s \in \mathbb{Z}, \ s > k$ und fixieren zunächst $1 \leq j \leq k$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{k-j} t_{i+j} b^{-i-1} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{J} t_{i+j} b^{-i-1} & \text{, falls } J \geq k - j \\ \sum_{i=0}^{J} t_{i+j} b^{-i-1} + \gamma \ \text{ mit } \ \gamma \in [0, b^{-J-1}[ & \text{, falls } J < k - j \end{cases}.$$

In beiden Fällen ist also $\sum_{i=0}^{k-j} t_{i+j} b^{-i-1} = \sum_{i=0}^{J} t_{i+j} b^{-i-1} + \gamma$ mit $\gamma \in [0, b^{-J-1}[$, was

$$\frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e(\sum_{i=0}^{k-j} t_{i+j} b^{-i}) - 1}{e(\sum_{i=0}^{k-j} t_{i+j} b^{-i-1}) - 1} - e(a_0 \cdot \sum_{i=0}^{k-j} t_{i+j} b^{-i-1})| \leq$$
$$\sup_{0 \leq \gamma < b^{-J-1}} \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e(\sum_{i=0}^{J} t_{i+j} b^{-i} + b\gamma) - 1}{e(\sum_{i=0}^{J} t_{i+j} b^{-i-1} + \gamma) - 1} - e(a_0 \cdot (\sum_{i=0}^{J} t_{i+j} b^{-i-1} + \gamma)| =$$
$$\sup_{0 \leq \gamma < b^{-J-1}} \frac{1}{b-1} \cdot | \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot ((0, t_j...t_{j+J})_b + \gamma)| = G(t_j, ..., t_{j+J})$$

impliziert, für alle $1 \leq j \leq k$. Daraus folgt

$$(4.2.9)\quad F_X(\sum_{i=1}^{k} t_i b^{-i}) \leq \prod_{j=1}^{k} G(t_j, ..., t_{j+J}) \quad \forall\ t_1, ..., t_k \in \{0, ..., b-1\}$$

$$\text{mit}\ \ t_s = 0\ \forall\ s \in \mathbb{Z},\ s > k.$$

Aus (4.2.2) mit $n = k$ und (4.2.9) erhalten wir

$$F_X(\sum_{i=1}^{k} t_i b^{-i})^t \leq \prod_{j=1}^{k} G(t_j, ..., t_{j+J})^t = p(t_k, ..., t_1)$$

für alle $t_1, ..., t_k \in \{0, ..., b-1\}$ mit $t_s = 0\ \ \forall\ s \in \mathbb{Z},\ s > k$. Dies liefert

$$\sum_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^t = \sum_{t_k,...,t_1 \in \{0,...,b-1\}} F_X(\sum_{i=1}^{k} t_i b^{-i})^t \leq \sum_{t_k,...,t_1 \in \{0,...,b-1\}} \prod_{j=1}^{k} G(t_j, ..., t_{j+J})^t =$$

$$\sum_{t_k,...,t_1 \in \{0,...,b-1\}} p(t_k, ..., t_1) = \sum_{t_k,...,t_1 \in \{0,...,b-1\}} P(X_{k+1-i} = t_i\ \ \forall\ 1 \leq i \leq k)^t \ll_{t,J} \lambda^k$$

nach (4.2.8) mit $l = k$, weil jedes $0 \leq a < X = b^k$ eindeutig in der Form $a = (t_1...t_k)_b$ mit $t_1, ..., t_k \in \{0, ..., b-1\}$ darstellbar ist.

$\square$

Wir erklären den Begriff eines ausgezeichneten Paares $(b, a_0)$ einer Basis $b$ und einer Ziffer $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ gemäß der folgenden Definition.

**Definition 4.1**:
Sei $b \in \mathbb{N},\ b \geq 10$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$.
Für $J \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}^+$ sei die $b^J \times b^J$ Matrix $M_t$ entsprechend Lemma 4.2 definiert und $\lambda(t, J) = \lambda_{b,a_0}(t, J) \in \mathbb{R}_0^+$ ihr betragsmäßig größter Eigenwert.
Gibt es ein nur von $(b, a_0)$ abhängiges $J = J(b, a_0) \in \mathbb{N}$, sodass sowohl $\lambda_{b,a_0}(1, J) \leq b^{27/77}$ als auch $\lambda_{b,a_0}(\frac{235}{154}, J) \leq b^{59/433}$ gilt, so nennen wir das Paar $(b, a_0)$ ausgezeichnet.

Diese Definition dient vor allem dazu, eine Verallgemeinerung des Maynardschen Spezialfalls $b = 10$ aus [1] nachzuweisen, denn es wird sich herausstellen, dass alle ausgezeichneten Paare Theorem 1.1 genügen. Folglich sind später alle ausgezeichneten Paare $(b, a_0)$ zu ermitteln. Wir lagern diese Bestimmung aufgrund ihrer Komplexität ins letzte Kapitel aus.

Im Folgenden handelt es sich bei dem fixierten Paar $(b, a_0)$ stets um ein ausgezeichnetes Paar und bei $J(b, a_0)$ stets um das entsprechende $J \in \mathbb{N}$, welches der besagten Eigenschaft in Definition 4.1 genügt.

**Lemma 4.3:**

Sei $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

(i) $$\sum_{t_1,\dots,t_k \in \{0,\dots,b-1\}} \prod_{j=1}^{k} G(t_j, ..., t_{j+J(b,a_0)}) \ll X^{27/77} \quad \text{mit } t_s = 0 \ \forall \ s \in \mathbb{Z}, \ s > k,$$

(ii) $$\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \sum_{0 \leq t < X} F_X(\frac{t}{X} + \beta) \ll X^{27/77},$$

(iii) $$\int_0^1 F_X(t) \, dt \ll \frac{1}{X^{50/77}},$$

(iv) $$\int_0^1 |F_X'(t)| \, dt \ll X^{27/77}.$$

**Beweis:**

Wir verwenden $F_X(\theta) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e(b^{i+1}\theta)-1}{e(b^i\theta)-1} - e(a_0 b^i \theta)|$ ($\Leftarrow$ (4)) und

$$F_X'(\theta) = 2\pi \cdot X^{-\frac{\log(b-1)}{\log b}} \cdot |\sum_{n \in \mathcal{A}} n \cdot e(n\theta)| = 2\pi \cdot \frac{1}{(b-1)^k} \cdot |\sum_{n \in \mathcal{A}} n \cdot e(n\theta)| \ \ \forall \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Für $k = 0$ bzw. $X = 1$ sind die Aussagen (i)-(iv) trivialerweise erfüllt, denn dann verschwindet die linke Seite in (i) und die linken Seiten in (ii)-(iv) sind wegen $F_1(\theta), |F_1'(\theta)| \ll 1 \ \forall \ \theta \in \mathbb{R}$ allesamt $\ll 1$, sodass wir folgend $k \in \mathbb{N}$ annehmen dürfen.

Nachweis zu (i): Aus der letzten Abschätzung im Beweis von Lemma 4.2 folgt

$$\sum_{t_1,\dots,t_k \in \{0,\dots,b-1\}} \prod_{j=1}^{k} G(t_j, ..., t_{j+J})^t \ll_{t,J} \lambda(t, J)^k \quad \text{mit } t_s = 0 \quad \forall \ s \in \mathbb{Z}, \ s > k,$$

für alle $J \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$, also insbesondere

$$\sum_{t_1,\dots,t_k \in \{0,\dots,b-1\}} \prod_{j=1}^{k} G(t_j, ..., t_{j+J(b,a_0)}) \ll_{J(b,a_0)} \lambda(1, J(b, a_0))^k \leq (b^{27/77})^k = X^{27/77}$$

und daraus (i), denn $J(b, a_0)$ ist eine nur von $(b, a_0)$ abhängige absolute Konstante.

Nachweis zu (ii): Aufgrund der Periodizität von $F_X(t)$ (vgl. (2)) genügt der Nachweis von

$$(*) \qquad \sum_{0\leq t<X} F_X(\frac{t}{X}+\beta) \ll X^{27/77} \quad \forall\ \beta \in [0,\frac{1}{X}[ = [0,\frac{1}{b^k}[.$$

Sei $\beta \in [0,\frac{1}{b^k}[$ fixiert, sodass $\beta = (0,\underbrace{0...0}_{\text{k-Nullen}}\beta_{k+1}\beta_{k+2}...)_b$ mit $\beta_{k+1},\beta_{k+2},... \in \{0,...,b-1\}$ gilt. Ferner ist jedes $t \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq t < X = b^k$ eindeutig in der Form $t = (t_{k-1}...t_0)_b = \sum\limits_{i=0}^{k-1} t_i b^i$ mit $t_i \in \{0,...,b-1\}\ \forall\ 0 \leq i \leq k-1$ darstellbar, was $\frac{t}{X} = \frac{t}{b^k} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} t_i b^{i-k} = (0,t_{k-1}t_{k-2}...t_0)_b$ und

$$(4.3.1) \qquad \sum_{0\leq t<X} F_X(\frac{t}{X}+\beta) = \sum_{t_0,...,t_{k-1}\in\{0,...,b-1\}} F_X((0,t_{k-1}t_{k-2}...t_0\beta_{k+1}\beta_{k+2}...)_b)$$

liefert.

Für fixierte $t_0,...,t_{k-1} \in \{0,...,b-1\}$ setzen wir
$\theta := (0,t_{k-1}t_{k-2}...t_0\beta_{k+1}\beta_{k+2}...)_b = (0,t_{k-1}t_{k-2}...t_0)_b + \beta$ und schätzen $F_X(\theta)$ nach oben ab.

Analog zum Beweis von Lemma 4.2 (vgl. Abs. unter (4.2.8)) erhalten wir

$$F_X(\theta) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{b-1} \cdot \left|\frac{e(b^i\beta + (t_{k-i},t_{k-i-1}...t_0)_b)-1}{e(b^{i-1}\beta + (0,t_{k-i}...t_0)_b)-1} - e(a_0\cdot(b^{i-1}\beta + (0,t_{k-i}...t_0)_b))\right|.$$

Nun gilt für festes $1 \leq i \leq k$ bzw. für den entsprechenden Faktor im Produkt stets

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-1}\cdot\left|\frac{e(b^i\beta + (t_{k-i},t_{k-i-1}...t_0)_b)-1}{e(b^{i-1}\beta + (0,t_{k-i}...t_0)_b)-1} - e(a_0\cdot(b^{i-1}\beta + (0,t_{k-i}...t_0)_b))\right| = \\
&\frac{1}{b-1}\cdot\Big|\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(b^{i-1}\beta + (0,t_{k-i}...t_0)_b)^n\Big| = \frac{1}{b-1}\cdot\Big|\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(b^{i-1}\beta)^n \cdot e((0,t_{k-i}...t_0)_b)^n\Big| = \\
&\frac{1}{b-1}\cdot\Big|\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e((0,t_{k-i}...t_0)_b)^n + \sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e((0,t_{k-i}...t_0)_b)^n\cdot(e(b^{i-1}\beta)^n-1)\Big| \leq \\
&\frac{1}{b-1}\cdot\Big|\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(n\cdot(0,t_{k-i}...t_0)_b)\Big| + \frac{1}{b-1}\cdot\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} |e(b^{i-1}\beta)^n - 1|
\end{aligned}$$

nach der Dreiecksungleichung, wobei aus der Definition von $G$ in *HS1 Lemma 4.2* insbesondere

$$G(t_{k-i}, t_{k-i-1}, ..., t_{k-i-J(b,a_0)}) =$$

$$\sup_{0 \leq \gamma < b^{-J(b,a_0)-1}} \frac{1}{b-1} \cdot |\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot ((0, t_{k-i} t_{k-i-1} ... t_{k-i-J(b,a_0)})_b + \gamma)| \geq$$

$$\frac{1}{b-1} \cdot |\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot (0, t_{k-i} ... t_0)_b)|$$

für das Definition 4.1 genügende $J(b, a_0)$ folgt. Dabei ist $t_s = 0$ für alle $s \in \mathbb{Z}$, $s < 0$ im Fall $J(b, a_0) > k - i$ zu setzen. Dies liefert insgesamt

$$\begin{aligned}
(4.3.2) \quad & \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e(b^i \beta + (t_{k-i}, t_{k-i-1} ... t_0)_b) - 1}{e(b^{i-1} \beta + (0, t_{k-i} ... t_0)_b) - 1} - e(a_0 \cdot (b^{i-1} \beta + (0, t_{k-i} ... t_0)_b))| \leq \\
& G(t_{k-i}, t_{k-i-1}, ..., t_{k-i-J(b,a_0)}) + \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} |e(b^{i-1} \beta)^n - 1| \\
& \forall \ 1 \leq i \leq k \ \text{ mit } \ t_s = 0 \ \forall \ s \in \mathbb{Z}, \ s < 0,
\end{aligned}$$

womit die Abschätzung von $\frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} |e(b^{i-1} \beta)^n - 1|$ für festes $1 \leq i \leq k$ verbleibt.

Für $b^{i-1} \beta \in \mathbb{Z}$ ist $e(b^{i-1} \beta) = 1$ und daher $\frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} |e(b^{i-1} \beta)^n - 1| = 0$, sodass $b^{i-1} \beta \notin \mathbb{Z}$ bzw. $e(b^{i-1} \beta) \neq 1$ angenommen werden darf, also insbesondere $\beta \neq 0$ und $\beta \in ]0, \frac{1}{b^k}[$. Damit ist

$$\frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} |e(b^{i-1} \beta)^n - 1| \leq \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{n=1}^{b-1} |e(b^{i-1} \beta)^n - 1|$$

und aus $e(b^{i-1} \beta) \neq 1$ sowie der geometrischen Summenformel kommt

$$e(b^{i-1} \beta)^n - 1 = (e(b^{i-1} \beta) - 1) \cdot \frac{e(b^{i-1} \beta)^n - 1}{e(b^{i-1} \beta) - 1} = (e(b^{i-1} \beta) - 1) \cdot \sum_{s=0}^{n-1} e(b^{i-1} \beta)^s, \text{ also}$$

$$|e(b^{i-1} \beta)^n - 1| \leq |(e(b^{i-1} \beta) - 1)| \cdot \sum_{s=0}^{n-1} 1 = n \cdot |(e(b^{i-1} \beta) - 1)|$$

für alle $1 \leq n \leq b - 1$. Daraus folgt

$$\frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} |e(b^{i-1} \beta)^n - 1| \leq \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{n=1}^{b-1} |e(b^{i-1} \beta)^n - 1| \leq \frac{1}{b-1} \cdot |(e(b^{i-1} \beta) - 1)| \cdot \sum_{n=1}^{b-1} n =$$

$$\frac{b}{2} \cdot |(e(b^{i-1} \beta) - 1)| \ll |(e(b^{i-1} \beta) - 1)| \ll \|b^{i-1} \beta\|,$$

denn allgemein gilt am komplexen Einheitskreis die Abschätzung $|e(r) - 1| = |e(\|r\|) - 1| \leq 2\pi \cdot \|r\|$ für alle $r \in \mathbb{R}$, indem wir den Kreisbogen der Länge $2\pi \cdot \|r\|$ mit der zugehörigen Kreissehne vergleichen. Wegen $\beta \in ]0, \frac{1}{b^k}[$ und $1 \leq i \leq k$ ist $0 < b^{i-1}\beta \leq b^{i-1} \cdot \frac{1}{b^k} \leq \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$, also $\|b^{i-1}\beta\| = b^{i-1}\beta$, was insgesamt

$$\frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} |e(b^{i-1}\beta)^n - 1| \ll b^{i-1}\beta$$

impliziert. Bezeichnet $c_1 \in \mathbb{R}^+$ die absolute Konstante in $\ll$, die also insbesondere nicht von $i$ abhängt, so gilt nach (4.3.2)

$$\begin{aligned}(4.3.3) \quad & \frac{1}{b-1} \cdot |\frac{e(b^i\beta + (t_{k-i}, t_{k-i-1}...t_0)_b) - 1}{e(b^{i-1}\beta + (0, t_{k-i}...t_0)_b)) - 1} - e(a_0 \cdot (b^{i-1}\beta + (0, t_{k-i}...t_0)_b))| \leq \\ & G(t_{k-i}, t_{k-i-1}, ..., t_{k-i-J(b,a_0)}) + c_1 \cdot b^{i-1}\beta \\ & \forall\ 1 \leq i \leq k \ \text{ mit } \ t_s = 0 \ \forall \ s \in \mathbb{Z},\ s < 0.\end{aligned}$$

Einsetzen von (4.3.3) in obige Darstellung von $F_X(\theta)$ als Produkt liefert eine geeignete Abschätzung nach oben, woraus wir nach Definition von $\theta$ auf

$$\begin{aligned}(4.3.4) \quad & \sum_{0 \leq t < X} F_X(\frac{t}{X} + \beta) = \sum_{t_0,...,t_{k-1} \in \{0,...,b-1\}} F_X((0, t_{k-1}t_{k-2}...t_0)_b + \beta) \leq \\ & \sum_{t_0,...,t_{k-1} \in \{0,...,b-1\}} \prod_{i=1}^{k} [G(t_{k-i}, t_{k-i-1}, ..., t_{k-i-J(b,a_0)}) + c_1 \cdot b^{i-1}\beta] \\ & \text{mit } \ t_s = 0 \ \forall \ s \in \mathbb{Z},\ s < 0.\end{aligned}$$

schließen. Wir fixieren wieder $t_0, ..., t_{k-1} \in \{0, ..., b-1\}$. Nach *HS1 Lemma 4.2* ist $G(t_{k-i}, t_{k-i-1}, ..., t_{k-i-J(b,a_0)}) \geq c(J(b, a_0), b) = c(b, a_0) \in \mathbb{R}^+$ für alle $1 \leq i \leq k$ und das Definition 4.1 genügende $J(b, a_0)$, sodass wir wegen $\beta \in [0, \frac{1}{b^k}[$ sowie der (absoluten) Konvergenz des Produktes $\prod_{n=1}^{\infty} 1 + c_3 b^{-n}$ mit $c_3 = \frac{c_1}{c(b,a_0)} \in \mathbb{R}^+$ die Gültigkeit von

$$\prod_{i=1}^{k}[G(t_{k-i},t_{k-i-1},...,t_{k-i-J(b,a_0)})+c_1\cdot b^{i-1}\beta]\leq$$
$$\prod_{i=1}^{k}G(t_{k-i},t_{k-i-1},...,t_{k-i-J(b,a_0)})\cdot\prod_{i=1}^{k}(1+c_3\cdot b^{i-1}\beta)\leq$$
$$\prod_{i=1}^{k}G(t_{k-i},t_{k-i-1},...,t_{k-i-J(b,a_0)})\cdot\prod_{i=1}^{k}(1+c_3\cdot b^{i-1-k})\leq$$
$$\prod_{i=1}^{k}G(t_{k-i},t_{k-i-1},...,t_{k-i-J(b,a_0)})\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_3\cdot b^{-n})\ll\prod_{i=1}^{k}G(t_{k-i},t_{k-i-1},...,t_{k-i-J(b,a_0)})$$

erhalten. Dabei ist $t_s=0\ \forall\ s\in\mathbb{Z},\ s<0$. Einsetzen in (4.3.4) liefert

$$\sum_{0\leq t<X}F_X(\frac{t}{X}+\beta)\ll\sum_{t_0,...,t_{k-1}\in\{0,...,b-1\}}\prod_{i=1}^{k}G(t_{k-i},t_{k-i-1},...,t_{k-i-J(b,a_0)})$$

und durch Umbenennung /Umsortierung der $t_j$ erhalten wir gemäß (i) die gewünschte Abschätzung (∗), womit (ii) gezeigt ist.

Nachweis zu (iii): Aus (ii) folgt

$$\int_0^1 F_X(t)\,dt=\sum_{0\leq a<X}\int_{a/X}^{(a+1)/X}F_X(t)\,dt=\sum_{0\leq a<X}\int_0^{1/X}F_X(\frac{a}{X}+\beta)\,d\beta=$$
$$\int_0^{1/X}\sum_{0\leq a<X}F_X(\frac{a}{X}+\beta)\,d\beta\ll\int_0^{1/X}X^{27/77}\,d\beta=\frac{1}{X^{50/77}},$$

denn jedes $t\in[\frac{a}{X},\frac{a+1}{X}]$ ist eindeutig in der Form $t=\frac{a}{X}+\beta$ mit $\beta\in[0,\frac{1}{X}]$ darstellbar.

Nachweis zu (iv): Wir verwenden $|F'_X(t)|=F'_X(t)=2\pi\cdot\frac{1}{(b-1)^k}\cdot|\sum_{n\in\mathcal{A}}n\cdot e(nt)|\ \forall\ t\in\mathbb{R}$. Analog zu [6, S.10 „We note that...“] mit $\mathcal{A}$ anstatt $\mathcal{B}$ oder [1, S.10 „Writing $U=10^u$...“] gilt

$$\sum_{n\in\mathcal{A}}n\cdot e(nt)=\sum_{j=0}^{k-1}[b^j\cdot\sum_{n_j\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}}n_je(n_jb^jt)\cdot\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{k-1}\sum_{n_i\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}}e(n_ib^it)]\quad\forall\ t\in\mathbb{R},$$

indem wir $n=\sum_{j=0}^{k-1}n_jb^j$ mit $n_0,n_1,...,n_{k-1}\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}$ für $n\in\mathcal{A}$ einsetzen und einige Umformungen vornehmen. Daraus folgt nach der Dreiecksungleichung

$$(4.3.5)\quad |\sum_{n\in\mathcal{A}} n\cdot e(nt)| \le \sum_{j=0}^{k-1} b^j \cdot |\sum_{n_j\in\{0,...b-1\}\setminus\{a_0\}} n_j e(n_j b^j t)| \cdot \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1} |\sum_{n_i\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}} e(n_i b^i t)|$$

$$\forall\ t\in\mathbb{R}.$$

Mithilfe der Abschätzung $|\sum\limits_{n_j\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}} n_j e(n_j b^j t)| \le \sum\limits_{\substack{n_j=0\\ n_j\neq a_0}}^{b-1} n_j \le \sum\limits_{n=0}^{b-1} n = \frac{b\cdot(b-1)}{2} \ll 1$ für alle $0\le j\le k-1$ und $t\in\mathbb{R}$ sowie $\sum\limits_{j=0}^{k-1} b^j = \frac{b^k-1}{b-1} \ll b^k = X$ mit $k\in\mathbb{N}$ kommt aus (4.3.5)

$$(4.3.6)\quad |F_X'(t)| \ll \frac{X}{(b-1)^k}\cdot \sup_{0\le j\le k-1} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1} |\sum_{n_i\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}} e(n_i b^i t)|$$

$$\ll X\cdot \sup_{0\le j\le k-1} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1} \frac{1}{b-1}\cdot |\sum_{n_i\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}} e(n_i b^i t)| \quad \forall\ t\in\mathbb{R},$$

wenn wir $\frac{1}{b-1}\ll 1$ beachten.

Sei $t\in[0,1]$ fixiert. Dann ist $t$ eindeutig in der Form $t=(0,t_1...t_k)_b+\beta$ mit $\beta\in[0,\frac{1}{X}[=[0,\frac{1}{b^k}[$ darstellbar und es gilt

$$\frac{1}{b-1}\cdot|\sum_{n_i\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}} e(n_i b^i t)| = \frac{1}{b-1}\cdot|\frac{e(b^{i+1}t)-1}{e(b^i t)-1} - e(a_0 b^i t)| =$$
$$\frac{1}{b-1}\cdot|\frac{e(b^{i+1}\beta+(t_{i+1},t_{i+2}...t_k)_b)-1}{e(b^i\beta+(0,t_{i+1}...t_k)_b)-1} - e(a_0\cdot(b^i\beta+(0,t_{i+1}...t_k)_b))| \le$$
$$G(t_{i+1},...,t_{i+1+J(b,a_0)}) + c_1\cdot b^i\beta$$

mit $t_s=0\ \ \forall\ s\in\mathbb{Z},\ s>k$ und $c_1\in\mathbb{R}^+$, welches wir analog zur Herleitung von (4.3.3) im Nachweis von (ii) erhalten, für alle $0\le i\le k-1$. Für festes $0\le j\le k-1$ ist daher

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1} \frac{1}{b-1}\cdot|\sum_{n_i\in\{0,...,b-1\}\setminus\{a_0\}} e(n_i b^i t)| \le \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k-1}[G(t_{i+1},...,t_{i+1+J(b,a_0)})+c_1\cdot b^i\beta] =$$
$$\prod_{i=0}^{k-1}[G(t_{i+1},...,t_{i+1+J(b,a_0)})+c_1\cdot b^i\beta] : [G(t_{j+1},...,t_{j+1+J(b,a_0)})+c_1\cdot b^j\beta] \ll$$
$$\prod_{i=0}^{k-1}[G(t_{i+1},...,t_{i+1+J(b,a_0)})+c_1\cdot b^i\beta],$$

denn nach *HS1 Lemma 4.2* gilt für das Defintion 4.1 genügende $J(b, a_0)$ insbesondere $G(t_{j+1}, ..., t_{j+1+J(b,a_0)}) + c_1 \cdot b^j \beta \geq G(t_{j+1}, ..., t_{j+1+J(b,a_0)}) \geq c(J(b, a_0), b) = c(b, a_0)$ mit $c(b, a_0) \in \mathbb{R}^+$. Analog zum Nachweis von (ii) (Abs. unter (4.3.4)) kommt

$$\prod_{i=0}^{k-1} [G(t_{i+1}, ..., t_{i+1+J(b,a_0)}) + c_1 b^i \beta] = \prod_{i=1}^{k} [G(t_i, ..., t_{i+J(b,a_0)}) + c_1 b^{i-1} \beta] \ll \prod_{i=1}^{k} G(t_i, ..., t_{i+J(b,a_0)}),$$

woraus wir

$$\sup_{0 \leq j \leq k-1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \frac{1}{b-1} \cdot \Big| \sum_{n_i \in \{0,...,b-1\} \setminus \{a_0\}} e(n_i b^i t) \Big| \ll \prod_{i=1}^{k} G(t_i, ..., t_{i+J(b,a_0)})$$

mit $t_s = 0$ für alle $s \in \mathbb{Z},\ s > k$ schließen. Insgesamt erhalten wir mit (4.3.6)

$$(4.3.7) \quad |F_X'(t)| \ll X \cdot \prod_{i=1}^{k} G(t_i, ..., t_{i+J(b,a_0)}) \quad \forall\ t = (0, t_1 ... t_k)_b + \beta,\ \beta \in [0, \frac{1}{b^k}[$$

$$\text{mit } t_s = 0\ \forall\ s \in \mathbb{Z},\ s > k.$$

Nach (i) und (4.3.7) gilt

$$\int_0^1 |F_X'(t)|\, dt = \sum_{t_1,...,t_k \in \{0,...,b-1\}} \int_0^{1/X} |F_X'((0, t_1 ... t_k)_b + \beta)|\, d\beta \ll$$

$$\sum_{t_1,...,t_k \in \{0,...,b-1\}} \int_0^{1/X} X \cdot \prod_{i=1}^{k} G(t_i, ..., t_{i+J(b,a_0)})\, d\beta = \sum_{t_1,...,t_k \in \{0,...,b-1\}} \prod_{i=1}^{k} G(t_i, ..., t_{i+J(b,a_0)})$$

$$\ll X^{27/77},$$

womit (iv) gezeigt ist.

□

**Lemma 4.4:**

Sei $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $B \in \mathbb{R},\ B \geq 1$. Dann gilt

(i) $\#\{0 \leq a < X |\ F_X(\frac{a}{X}) \gg \frac{1}{B}\} \ll\ B^{235/154} \cdot X^{59/433},$

(ii) $\#\{0 \leq a < X |\ F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B}\} \ll\ B^{235/154} \cdot X^{59/433},$

(iii) $\sum_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^{235/154} \ll X^{59/433}.$

**Beweis:**
Im Fall $k = 0$ bzw. $X = 1$ erhalten wir die Aussagen bereits aus Eigenschaft (1) und $B \geq 1$, sodass $k \in \mathbb{N}$ angenommen werden darf.

Wir setzen $A := \{0 \leq a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \gg \frac{1}{B}\}$, sodass für $a \in A$ insbesondere $1 \ll B \cdot F_X(\frac{a}{X})$ bzw. $1 \ll B^{235/154} \cdot F_X(\frac{a}{X})^{235/154}$ gilt. Dies liefert

$$\#A = \sum_{a \in A} 1 \ll \sum_{a \in A} B^{235/154} \cdot F_X(\frac{a}{X})^{235/154} \ll B^{235/154} \cdot \sum_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^{235/154}.$$

Verwenden wir Lemma 4.2 mit $t = \frac{235}{154} \in \mathbb{R}^+$, so ist $\sum\limits_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^{235/154} \ll_J \lambda(\frac{235}{154}, J)^k$ für alle $J \in \mathbb{N}$. Da $(b, a_0)$ ausgezeichnetes Paar ist, gilt $\lambda(\frac{235}{154}, J(b, a_0)) \leq b^{59/433}$ für das Definition 4.1 genügende $J(b, a_0)$. Daraus schließen wir $\sum\limits_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^{235/154} \ll_{J(b,a_0)} (b^{59/433})^k = X^{59/433}$ und damit (iii), denn $J(b, a_0)$ ist eine nur von $(b, a_0)$ abhängige absolute Konstante.

Folglich erhalten wir (i) und (ii), denn (ii) folgt aus (i) aufgrund der Mengeninklusion.

□

Im Nachweis von Lemma 4.5 benötigen wir *HS1 Lemma 4.5*. Die Aussage (i) wird auch in [1, S.10] und [6, S.9] verwendet und (ii) ist lediglich eine leichte Abwandlung von (i), sodass wir den Beweis nur oberflächlich skizzieren.

*HS1 Lemma 4.5:*
Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sowie $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\text{(i)} \quad F_X(t) \ll \frac{1}{\gamma} \cdot \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_X(s)\, ds + \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} |F_X'(s)|\, ds \qquad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

$$\text{(ii)} \quad F_X(t)^2 \ll \frac{1}{\gamma} \cdot \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_X(s)^2\, ds + \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_X(s) \cdot |F_X'(s)|\, ds \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

*Beweisskizze:*

Nachweis zu (i): Die Funktion $\mathcal{F}_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar, also ist $\mathcal{F}_X' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Nach [5, S.62 2)] gilt $\mathcal{F}_X(\theta_2) - \mathcal{F}_X(\theta_1) = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{F}_X'(s)\, ds$ für alle $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Verwenden wir diese Identität für $\theta_1 = s$ und $\theta_2 = t$, so erhalten wir schließlich

$$\mathcal{F}_X(t) = \frac{1}{\gamma} \cdot \int\limits_{t-\gamma}^{t+\gamma} \mathcal{F}_X(s)\, ds + \frac{1}{2\gamma} \cdot \int\limits_{t-\gamma}^{t+\gamma} [\int\limits_{s}^{t} \mathcal{F}_X^{'}(v)\, dv - \mathcal{F}_X(s)]\, ds \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Aus der Dreiecksungleichung, den Definitionen $F_X = |\mathcal{F}_X|,\ F_X^{'} = |\mathcal{F}_X^{'}|$ sowie der Abschätzung $|\int g(x)\, dx| \leq \int |g(x)|\, dx$ für Funktionen $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ folgt daraus insgesamt

$$F_X(t) \ll \frac{1}{\gamma} \cdot \int\limits_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_X(s)\, ds + \frac{1}{2\gamma} \cdot \int\limits_{t-\gamma}^{t+\gamma} \int\limits_{s}^{t} F_X^{'}(v)\, dv\, ds \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Für $s \in [t-\gamma, t+\gamma]$ ist insbesondere $\int\limits_{s}^{t} F_X^{'}(v)\, dv \leq \int\limits_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_X^{'}(v)\, dv$, was nach Einsetzen in die letzte Abschätzung das Resultat (i) liefert.

Nachweis zu (ii): Die Funktion $\mathcal{F}_X^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig. Ferner beachten wir die Stetigkeit von $(\mathcal{F}_X^2(t))^{'} = 2 \cdot \mathcal{F}_X(t) \cdot \mathcal{F}_X^{'}(t)\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}$ und können dann analog zu (i) mit $\mathcal{F}_X^2$ anstatt $\mathcal{F}_X$ argumentieren, womit wir (ii) erhalten.

$\square$

**Lemma 4.5:**

Sei $Y = b^r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$. Für $Q, d \in \mathbb{N}$ gilt

(i) $$\sup_{q \leq Q,\, \beta \in \mathbb{R}} \sum_{0 \leq a \leq q} \sup_{|\eta| \leq \frac{1}{10Q}} F_Y(\frac{a}{q} + \beta + \eta) \ll Q^{27/77} + \frac{Q}{Y^{50/77}},$$

(ii) $$\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{q \leq Q \\ d | q}} \sum_{\substack{0 < a \leq q \\ ggT(a,q)=1}} \sup_{|\eta| \leq \frac{d}{10Q^2}} F_Y(\frac{a}{q} + \beta + \eta) \ll (\frac{Q^2}{d})^{27/77} + \frac{Q^2}{d \cdot Y^{50/77}}.$$

**Beweis:**

Wir merken an, dass die 10 in $|\eta| \leq \frac{1}{10Q}$ und $|\eta| \leq \frac{d}{10Q^2}$ nichts mit der Basis zu tun hat und es sich in der dritten Aussage in [1, S.10 Lemma 4.5] bei $|\eta| \leq \frac{1}{10Q^2}$ anstatt $|\eta| \leq \frac{d}{10Q^2}$ um einen typographischen Fehler handelt. Ferner erhalten wir die zweite Aussage in [1, S.10 Lemma 4.5] als Spezialfall von (ii) mit $d = 1$.

Nachweis zu (i): Sei $q \in \mathbb{N},\ q \leq Q$ und $\beta \in \mathbb{R}$ fixiert und $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ zunächst beliebig, aber fest gewählt. Definiere $A := \{a \in \mathbb{N}_0 \mid a \leq q\}$. Für $a \in A$ wählen wir $\eta(a) \in \mathbb{R},\ \eta(a) \leq \frac{1}{10Q}$

und setzen $t(a) := \frac{a}{q} + \beta + \eta(a)$. Dann gilt für $a, a+1 \in A$ wegen $|\eta(a+1) - \eta(a)| \leq 2 \cdot \frac{1}{10Q}$ insbesondere $t(a+1) - t(a) = \frac{1}{q} + \eta(a+1) - \eta(a) \geq \frac{1}{q} - 2 \cdot \frac{1}{10Q} \geq \frac{1}{Q} - \frac{1}{5Q} > \frac{1}{2Q}$, also

$$(4.5.1) \quad t(a+1) - t(a) > \frac{1}{2Q} > 0 \quad \forall\ a, a+1 \in A.$$

Setzen wir $t := t(a)$ und $\gamma := \frac{1}{2Q}$ für $a \in A$ in *HS1 Lemma 4.5* (i) ein, so erhalten wir

$$(4.5.2) \quad F_X(\frac{a}{q} + \beta + \eta(a)) \ll 2Q \cdot \int\limits_{t(a)-\frac{1}{2Q}}^{t(a)+\frac{1}{2Q}} F_X(s)\, ds + \int\limits_{t(a)-\frac{1}{2Q}}^{t(a)+\frac{1}{2Q}} |F_X'(s)|\, ds \quad \forall\ a \in A.$$

Summation von (4.5.2) über alle $a \in A$ liefert

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A} F_X(\frac{a}{q} + \beta + \eta(a)) &\ll 2Q \cdot \sum_{a\in A} \int\limits_{t(a)-\frac{1}{2Q}}^{t(a)+\frac{1}{2Q}} F_X(s)\, ds + \sum_{a\in A} \int\limits_{t(a)-\frac{1}{2Q}}^{t(a)+\frac{1}{2Q}} |F_X'(s)|\, ds \\ &= 2Q \cdot \sum_{a\in A} \int\limits_{t(a)-\frac{1}{2Q}}^{t(a)} F_X(s)\, ds + \sum_{a\in A} \int\limits_{t(a)-\frac{1}{2Q}}^{t(a)} |F_X'(s)|\, ds \\ &\quad + 2Q \cdot \sum_{a\in A} \int\limits_{t(a)}^{t(a)+\frac{1}{2Q}} F_X(s)\, ds + \sum_{a\in A} \int\limits_{t(a)}^{t(a)+\frac{1}{2Q}} |F_X'(s)|\, ds.\end{aligned}$$

Nach (4.5.1) haben je zwei Werte $t(a)$ mit $a \in A$ einen Abstand größer $\frac{1}{2Q}$, sodass für $a \in A$ die Intervalle $[t(a), t(a) + \frac{1}{2Q}]$ untereinander bzw. $[t(a) - \frac{1}{2Q}, t(a)]$ untereinander paarweise disjunkt und die Vereinigungen $\dot{\bigcup\limits_{a\in A}} [t(a), t(a) + \frac{1}{2Q}]$ sowie $\dot{\bigcup\limits_{a\in A}} [t(a) - \frac{1}{2Q}, t(a)]$ jeweils in $[\min\limits_{a\in A} t(a) - \frac{1}{2Q}, \max\limits_{a\in A} t(a) + \frac{1}{2Q}]$ enthalten sind. Für stetige Funktionen $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ gilt daher

$$\sum_{a\in A} \int\limits_{t(a)}^{t(a)+\frac{1}{2Q}} g(s)\, ds \leq \int\limits_{\min\limits_{a\in A} t(a)-\frac{1}{2Q}}^{\max\limits_{a\in A} t(a)+\frac{1}{2Q}} g(s)\, ds \ \text{ und } \sum_{a\in A} \int\limits_{t(a)-\frac{1}{2Q}}^{t(a)} g(s)\, ds \leq \int\limits_{\min\limits_{a\in A} t(a)-\frac{1}{2Q}}^{\max\limits_{a\in A} t(a)+\frac{1}{2Q}} g(s)\, ds, \text{ was}$$

$$(4.5.3) \quad \sum_{a\in A} F_X(\frac{a}{q} + \beta + \eta(a)) \ll 4Q \cdot \int\limits_{\min\limits_{a\in A} t(a)-\frac{1}{2Q}}^{\max\limits_{a\in A} t(a)+\frac{1}{2Q}} F_X(s)\, ds + 2 \cdot \int\limits_{\min\limits_{a\in A} t(a)-\frac{1}{2Q}}^{\max\limits_{a\in A} t(a)+\frac{1}{2Q}} |F_X'(s)|\, ds,$$

liefert, wenn wir beide Abschätzungen mit $g = F_X$ bzw. $g = |F_X'|$ verwenden. Ferner ist $0 \leq \max\limits_{a\in A} t(a) - \min\limits_{a\in A} t(a) \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{10Q}$, da $|\eta(a)| \leq \frac{1}{10Q}\ \ \forall\ a \in A$ ist, sodass

$0 \leq \max_{a\in A} t(a) + \frac{1}{2Q} - (\min_{a\in A} t(a) - \frac{1}{2Q}) \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{10Q} + 2 \cdot \frac{1}{2Q} < 3$ gilt. Aufgrund der Periodizität von $F_X$ und $|F_X'|$ erhalten wir nach (4.5.3) und Lemma 4.3 (iii) sowie (iv) die Abschätzung

$$\sum_{a\in A} F_X(\frac{a}{q} + \beta + \eta(a)) \ll Q \cdot \int_0^1 F_X(s)\,ds + \int_0^1 |F_X'(s)|\,ds \ll \frac{Q}{X^{50/77}} + X^{27/77}. \tag{4.5.4}$$

Für $Y = b^r \geq Q$ wählen wir $X = b^k$ so, dass $X = b^k \leq Q < b^{k+1} = b \cdot X$ gilt, was $\frac{Q}{X^{50/77}} + X^{27/77} \leq \frac{Q}{(bX)^{50/77}} \cdot b^{50/77} + Q^{27/77} \leq \frac{Q}{Q^{50/77}} \cdot b^{50/77} + Q^{27/77} \ll Q^{27/77} \leq \frac{Q}{Y^{50/77}} + Q^{27/77}$ impliziert. Für $Y = b^r < Q$ wählen wir $X = Y$, sodass $\frac{Q}{X^{50/77}} + X^{27/77} < \frac{Q}{Y^{50/77}} + Q^{27/77}$ ist.

In beiden Fällen ist $X \leq Y$ und $\frac{Q}{X^{50/77}} + X^{27/77} \ll \frac{Q}{Y^{50/77}} + Q^{27/77}$, was wegen $F_Y(t) \leq F_X(t)$ $\forall\ t \in \mathbb{R}$ ($\Leftarrow$ (5)) und (4.5.4) die Gültigkeit von

$$\sum_{a\in A} F_Y(\frac{a}{q} + \beta + \eta(a)) \ll \frac{Q}{Y^{50/77}} + Q^{27/77}$$

liefert. Wählen wir für gegebenes $a \in A$ das $\eta(a) \in \mathbb{R}$, $|\eta(a)| \leq \frac{1}{10Q}$ stets so, dass $F_Y(\frac{a}{q} + \beta + \eta(a)) = \sup_{|\eta|\leq \frac{1}{10Q}} F_Y(\frac{a}{q} + \beta + \eta)$ gilt, was aufgrund der Stetigkeit von $F_Y$ auf dem kompakten Intervall $[\frac{a}{q} + \beta - \frac{1}{10Q}, \frac{a}{q} + \beta + \frac{1}{10Q}]$ nach dem Satz vom Minimum und Maximum möglich ist, so erhalten wir

$$\sum_{a\in A} \sup_{|\eta|\leq \frac{1}{10Q}} F_Y(\frac{a}{q} + \beta + \eta) \ll \frac{Q}{Y^{50/77}} + Q^{27/77}$$

und damit schließlich (i).

Nachweis zu (ii): Die wesentlichen Ideen wurden bereits im Beweis zu (i) vorgestellt.
Sei $\beta \in \mathbb{R}$ fixiert und $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ zunächst beliebig, aber fest gewählt. Definiere $A := \{(a,q)\,|\,a,q \in \mathbb{N}, 0 < a \leq q \leq Q, ggT(a,q) = 1, d|q\}$ und wähle $\eta(a,q) \in \mathbb{R}$, $|\eta(a,q)| \leq \frac{d}{10Q^2}$ für $(a,q) \in A$. Dabei können wir $d \leq Q$ annehmen, denn andernfalls ist $A$ leer und die Summe auf der linken Seite von (ii) verschwindet, sodass (ii) bereits gilt.
Für verschiedene $(a,q) \in A$ haben die Werte $t(a,q) := \frac{a}{q} + \beta + \eta(a,q)$ einen Abstand größer $\frac{d}{2Q^2}$, denn je zwei der reduzierten Brüche $\frac{a}{q}$ haben einen Abstand $\geq \frac{d}{Q^2}$ und wir beachten $|\eta(a,q)| \leq \frac{d}{10Q^2}$. Ferner ist $0 \leq \max_{(a,q)\in A} t(a,q) + \frac{d}{2Q^2} - \min_{(a,q)\in A} t(a,q) - \frac{d}{2Q^2} \ll 1$, wobei wir hierzu $d \leq Q$ benutzen.

Verwenden wir nun *HS1 Lemma 4.5* (i) mit $t := t(a,q)$ und $\gamma := \frac{d}{2Q^2}$ für $(a,q) \in A$ und argumentieren analog zu (i) mit $Q^2/d$ anstatt $Q$, erhalten wir als Resultat (ii).

$\square$

**Lemma 4.6:**

Seien $Y = b^r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $E \in \mathbb{R}, E \geq 1, E \ll Y$ gegeben. Für $q, Q, d \in \mathbb{N}$ gilt

(i) $$\sum_{0 \leq a \leq q} \sum_{\substack{|\eta| \ll \frac{E}{Y} \\ (\eta + \frac{a}{q}) \cdot Y \in \mathbb{Z}}} F_Y(\frac{a}{q} + \eta) \ll (qE)^{27/77} + \frac{qE}{Y^{50/77}},$$

(ii) $$\sum_{\substack{q \leq Q \\ d|q}} \sum_{\substack{0 < a \leq q \\ ggT(a,q)=1}} \sum_{\substack{|\eta| \ll \frac{E}{Y} \\ (\eta + \frac{a}{q}) \cdot Y \in \mathbb{Z}}} F_Y(\frac{a}{q} + \eta) \ll (\frac{Q^2 E}{d})^{27/77} + \frac{Q^2 E}{d \cdot Y^{50/77}}.$$

**Beweis:**

Nachweis zu (i): Es sind folgende Fälle zu unterscheiden, die in [1, S.11-12] fehlen :

<u>1.Fall</u>: $\frac{E}{Y} \gg \frac{1}{q}$

Definiere $A := \{(\eta, a) \mid 0 \leq a \leq q,\ |\eta| \ll \frac{E}{Y},\ (\eta + \frac{a}{q}) \cdot Y \in \mathbb{Z}\}$ und $T := \{t \in \mathbb{Z} \mid |t| \ll Y\}$, sodass die linke Seite von (i) gerade gleich $\sum_{(\eta,a) \in A} F_Y(\frac{a}{q} + \eta)$ ist. Für $(\eta, a) \in A$ setzen wir $t(\eta, a) := (\eta + \frac{a}{q}) \cdot Y \in \mathbb{Z}$, womit wegen $|\eta + \frac{a}{q}| \leq |\eta| + |\frac{a}{q}| \ll \frac{E}{Y} + 1 \ll 1$ auch $|t(\eta, a)| \ll Y$ und folglich $t(\eta, a) \in T$ gilt, wenn wir die Konstante in $|t| \ll Y$ aus der Definition von $T$ hinreichend groß wählen. Wir erklären $A_t := \{(\eta, a) \in A \,|\, t(\eta, a) = (\eta + \frac{a}{q}) \cdot Y = t\} = \{(\eta, a) \in A \,|\, \eta + \frac{a}{q} = \frac{t}{Y}\}$ für $t \in T$ und schätzen folgend $\#A_t$ nach oben ab.

Sei $t \in T$ fixiert. Dann ist $\#A_t = \#\{a \mid \exists\, \eta : (\eta, a) \in A_t\}$, denn für verschiedene Paare $(\eta, a), (\eta', a') \in A_t$ gilt $a \neq a'$, weil aus $a = a'$ auch $\eta = \frac{t}{Y} - \frac{a}{q} = \frac{t}{Y} - \frac{a'}{q} = \eta'$ folgt, also $(\eta, a) = (\eta', a')$. Nun ist $\#\{a \mid \exists\, \eta : (\eta, a) \in A_t\} \leq \#\{\frac{a}{q} \mid \exists\, |\eta| \ll \frac{E}{Y} :\ \eta + \frac{a}{q} = \frac{t}{Y}\}$, wobei wir die letzte Menge mit $A_t^*$ bezeichnen, die wir als nicht-leer voraussetzen dürfen, da sonst direkt $\#A_t = 0$ folgt. Offenbar unterscheiden sich je zwei Brüche aus $A_t^*$ um mindestens $\frac{1}{q}$.
Wählen wir $\frac{a_1}{q} := \min A_t^*$ sowie $\frac{a_2}{q} := \max A_t^*$ und denken uns die Brüche aus $A_t^*$ kanonisch geordnet, so kommt insgesamt $\#A_t^* \leq 1 + (\frac{a_2}{q} - \frac{a_1}{q}) : \frac{1}{q}$.
Aus $\frac{a_1}{q} + \eta_1 = \frac{a_2}{q} + \eta_2 = \frac{t}{Y}$ mit $|\eta_1|, |\eta_2| \ll \frac{E}{Y}$ folgt $|\frac{a_2}{q} - \frac{a_1}{q}| = |\eta_1 - \eta_2| \leq |\eta_1| + |\eta_2| \ll \frac{E}{Y}$ und damit $\#A_t^* \ll 1 + \frac{E}{Y} : \frac{1}{q} \ll \frac{qE}{Y}$ ($\Leftarrow \frac{E}{Y} \gg \frac{1}{q}$). Dies liefert wegen $\#A_t \leq \#A_t^*$ die Abschätzung

(4.6.1) $$\#A_t \ll \frac{qE}{Y} \quad \forall\ t \in T.$$

Somit erhalten wir

$$\sum_{(\eta,a)\in A} F_Y(\frac{a}{q}+\eta) = \sum_{(\eta,a)\in A} F_Y(\frac{t(\eta,a)}{Y}) = \sum_{t\in T} \#A_t \cdot F_Y(\frac{t}{Y}) \ll \frac{qE}{Y} \cdot \sum_{t\in T} F_Y(\frac{t}{Y}) \ll \frac{qE}{Y^{50/77}}$$

nach Lemma 4.3 (ii) und damit bereits (i) im ersten Fall, denn aufgrund der Periodizität von $F_Y$ gilt $\sum\limits_{t\in T} F_Y(\frac{t}{Y}) \ll \sum\limits_{0\le t<Y} F_Y(\frac{t}{Y}) \ll Y^{27/77}$.

<u>2.Fall</u>: $\frac{E}{Y} \ll \frac{1}{q}$

Wir wählen $U = b^u$ $(u \in \mathbb{N}_0)$ und $V = b^v$ $(v \in \mathbb{N}_0)$ mit $UV \le Y$ derart, dass

$$\text{(4.6.2)} \quad c_1 \cdot \max\{\frac{Y}{qE}, 1\} \le V \le c_2 \cdot \max\{\frac{Y}{qE}, 1\} \quad \text{sowie}$$
$$\text{(4.6.3)} \quad c_3 \cdot \max\{\frac{Y}{VE}, 1\} \le U \le c_4 \cdot \max\{\frac{Y}{VE}, 1\}$$

mit den positiven Konstanten $c_1 = c_3 = \frac{1}{b}$ und $c_2 = c_4 = 1$ gilt.

Diese Wahl ist aus dem folgenden Grund möglich :

Es gilt $c_2 \cdot \max\{\frac{Y}{qE}, 1\} \ge 1$ und wegen $c_1 = \frac{1}{b}$ gibt es eine $b$-Potenz $V = b^v$, die (4.6.2) genügt, denn im Intervall $[\log_b(c_1 \cdot \max\{\frac{Y}{qE}, 1\}), \log_b(c_2 \cdot \max\{\frac{Y}{qE}, 1\})] \subseteq [-1, +\infty[$ der Breite 1 liegt eine Zahl $v \in \mathbb{N}_0$. Da $q, E, Y \ge 1$ ist, gilt $\min\{\frac{qE}{Y}, 1\} \le 1 = c_2 \le \min\{qE, Y\}$, was

$$V \le c_2 \cdot \max\{\frac{Y}{qE}, 1\} \le \min\{qE, Y\} \cdot \max\{\frac{Y}{qE}, 1\} = Y \cdot \min\{\frac{qE}{Y}, 1\} \cdot \max\{\frac{Y}{qE}, 1\} = Y$$

liefert, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ ist $\min\{x, y\} = \frac{1}{\max\{\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\}}$. Analog zu oben gibt es wegen $c_4 \cdot \max\{\frac{Y}{VE}, 1\} \ge 1$ und $c_3 = \frac{1}{b}$ eine $b$-Potenz $U = b^u$ $(u \in \mathbb{N}_0)$, die (4.6.3) erfüllt. Dabei ist

$$VU \le V \cdot c_4 \cdot \max\{\frac{Y}{VE}, 1\} = \max\{\frac{Y}{E}, V\} \le \max\{\frac{Y}{E}, Y\} \le Y,$$

weil $V \le Y$ und $E \ge 1$. Aus (4.6.2) und (4.6.3) folgt $U \le \frac{Y}{VE} + 1 \le \frac{Y}{c_1 \cdot \frac{Y}{qE} E} + 1 = bq + 1 \ll q$ sowie $\frac{Y}{UV} \le \frac{Y}{V \cdot c_3 \frac{Y}{VE}} = bE \ll E$, also

$$\text{(4.6.4)} \quad U \ll q \quad \wedge \quad Y/UV \ll E.$$

Sei $k_1 \in \mathbb{R}^+$ die Konstante in $|\eta| \ll \frac{E}{Y}$, also $|\eta| \ll \frac{E}{Y} \Leftrightarrow |\eta| \le k_1 \cdot \frac{E}{Y}$.

Nun ist $Y/UV$ ebenfalls eine $b$-Potenz ($\Leftarrow Y/UV \ge 1$) und wir erhalten mit Eigenschaft (3) und

$F_{UV}(\frac{a}{q}+\eta) \le F_U(\frac{a}{q}+\eta) \le \sup\limits_{|\gamma|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}} F_U(\frac{a}{q}+\gamma)$ ($\Leftarrow$ (5)) für alle $|\eta| \le k_1 \cdot \frac{E}{Y}$ die Abschätzung

$$(4.6.5) \quad F_Y(\frac{a}{q}+\eta) \le F_{Y/UV}(UV\cdot(\frac{a}{q}+\eta)) \cdot \sup_{|\gamma|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}} F_U(\frac{a}{q}+\gamma) \quad \forall\ a\in\mathbb{Z},\ |\eta|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}.$$

Dies liefert

$$\sum_{0\le a\le q}\ \sum_{\substack{|\eta|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}\\(\eta+\frac{a}{q})\cdot Y\in\mathbb{Z}}} F_Y(\frac{a}{q}+\eta) \le \sum_{0\le a\le q}[\sup_{|\gamma|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}} F_U(\frac{a}{q}+\gamma)\cdot \sum_{\substack{|\eta|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}\\(\eta+\frac{a}{q})\cdot Y\in\mathbb{Z}}} F_{Y/UV}(UV\cdot(\frac{a}{q}+\eta))].$$

Für festes $a\in\mathbb{Z}$ erhalten wir mit $s = Y\cdot\frac{a}{q}$, $n = Y\cdot\frac{a}{q}+Y\eta$ sowie $m = n - \lfloor s - k_1\cdot E\rfloor$ weiter

$$\sum_{\substack{|\eta|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}\\(\eta+\frac{a}{q})\cdot Y\in\mathbb{Z}}} F_{Y/UV}(UV\cdot(\frac{a}{q}+\eta)) = \sum_{\substack{-k_1\cdot E\le Y\eta\le k_1\cdot E\\ Y\eta+Y\cdot\frac{a}{q}\in\mathbb{Z}}} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot(Y\cdot\frac{a}{q}+Y\eta)) =$$

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\-k_1\cdot E\le n-s\le k_1\cdot E}} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot n) \le \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\0\le m\le k_2\cdot E}} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot m+\frac{UV}{Y}\cdot\lfloor s-k_1\cdot E\rfloor) \le$$

$$\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\0\le m\le k_2\cdot E}} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot m+\beta) =: \sum\nolimits_2,$$

wenn wir $k_2 := 2k_1+1\in\mathbb{R}^+$ wählen (beachte: $E\ge 1$). Also gilt

$$(4.6.6) \quad \sum_{0\le a\le q}\ \sum_{\substack{|\eta|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}\\(\eta+\frac{a}{q})\cdot Y\in\mathbb{Z}}} F_Y(\frac{a}{q}+\eta) \le \sum\nolimits_1\cdot\sum\nolimits_2 \quad \text{mit } \sum\nolimits_1 := \sum_{0\le a\le q}\ \sup_{|\gamma|\le k_1\cdot\frac{E}{Y}} F_U(\frac{a}{q}+\gamma).$$

Nun schätzen wir $\sum_1$ mithilfe von Lemma 4.5 (i) nach oben ab.

Wegen $\frac{E}{Y} \ll \frac{1}{q}$ gibt es ein $n\in\mathbb{N}$, $n\ll 1$ mit $k_1\cdot\frac{E}{Y}\le n\cdot\frac{1}{10q}$, sodass

$$\sum\nolimits_1 \le \sum_{0\le a\le q}\ \sup_{|\gamma|\le n\cdot\frac{1}{10q}} F_U(\frac{a}{q}+\gamma)$$

ist. Wir setzen $\beta_i := i\cdot\frac{1}{10q}$ für $i\in\mathbb{Z}$, $-n\le i\le n$, womit $[-n\cdot\frac{1}{10q}, n\cdot\frac{1}{10q}] \subseteq \bigcup\limits_{-n\le i\le n} [\beta_i-\frac{1}{10q}, \beta_i+\frac{1}{10q}]$ und folglich wegen $F_U(t)\ge 0\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$ insbesondere

$$\sup_{|\gamma|\leq n\cdot\frac{1}{10q}} F_U(\frac{a}{q}+\gamma) \leq \sum_{i=-n}^{n} \sup_{|\gamma|\leq\frac{1}{10q}} F_U(\frac{a}{q}+\beta_i+\gamma) \quad \forall\ a\in\mathbb{Z}$$

gilt. Daher ist

$$\sum\nolimits_1 \leq \sum_{i=-n}^{n} \sum_{0\leq a\leq q} \sup_{|\gamma|\leq\frac{1}{10q}} F_U(\frac{a}{q}+\beta_i+\gamma)$$

Verwenden wir $Q := q$, $\eta := \gamma$ und $U := Y$ in Lemma 4.5 (i), so erhalten wir

$$\sum_{0\leq a\leq q} \sup_{|\gamma|\leq\frac{1}{10q}} F_U(\frac{a}{q}+\beta+\gamma) \leq \sup_{q\leq Q:=q,\,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{0\leq a\leq q} \sup_{|\gamma|\leq\frac{1}{10Q}} F_U(\frac{a}{q}+\beta+\gamma) \ll$$
$$Q^{27/77} + \frac{Q}{U^{50/77}} = q^{27/77} + \frac{q}{U^{50/77}} \ll \frac{q}{U^{50/77}}$$

nach (4.6.4) für alle $\beta\in\mathbb{R}$, also auch für jedes $\beta_i$ mit $i\in\mathbb{Z}, -n\leq i\leq n$ . Aus $n \ll 1$ folgt daher

$$(4.6.7)\quad \sum\nolimits_1 \leq \sum_{i=-n}^{n} \sum_{0\leq a\leq q} \sup_{|\gamma|\leq\frac{1}{10q}} F_U(\frac{a}{q}+\beta_i+\gamma) \ll \sum_{i=-n}^{n} \frac{q}{U^{50/77}} \ll \frac{q}{U^{50/77}}.$$

Nun schätzen wir noch $\sum_2$ bzw. $\sum\limits_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ 0\leq m\leq k_2\cdot E}} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot m+\beta)$ für festes $\beta\in\mathbb{R}$ ab.

Setze $n := \lfloor\frac{k_2\cdot E}{Y/UV}\rfloor + 1 \in \mathbb{N}$, sodass insbesondere $n\cdot\frac{Y}{UV} > k_2\cdot E$ und wegen $\frac{E}{Y/UV} \gg 1$ ($\Leftarrow$ (4.6.4)) auch $n \asymp \frac{E}{Y/UV}$ gilt. Dies liefert die Abschätzung

$$\sum_{0\leq m\leq k_2\cdot E} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot m+\beta) \leq \sum_{0\leq m<n\cdot\frac{Y}{UV}} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot m+\beta) =$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i\cdot\frac{Y}{UV}\leq m<(i+1)\cdot\frac{Y}{UV}} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot m+\beta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{0\leq m<\frac{Y}{UV}} F_{Y/UV}(\frac{m}{Y/UV}+\beta) \ll$$
$$n\cdot(Y/UV)^{27/77}$$

aufgrund der Periodizität von $F_{Y/UV}$ und Lemma 4.3 (ii), wobei wir
beachten, dass $Y/UV$ eine $b$-Potenz ist ($\Leftarrow UV\leq Y$). Aus $n \ll \frac{E}{Y/UV}$ folgt daher

$$\sum_{0\leq m\leq k_2\cdot E} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot m+\beta) \ll \frac{E}{(Y/UV)^{50/77}} \quad \forall\ \beta\in\mathbb{R},$$

also insgesamt

$$(4.6.8) \qquad \sum\nolimits_2 \ll \frac{E}{(Y/UV)^{50/77}}.$$

Einsetzen von (4.6.7), (4.6.8) und $V \ll \max\{\frac{Y}{qE}, 1\}$ liefert schließlich

$$\sum\nolimits_1 \cdot \sum\nolimits_2 \ll \frac{q}{U^{50/77}} \cdot \frac{E}{(Y/UV)^{50/77}} = \frac{qE}{Y^{50/77}} \cdot V^{50/77} \ll$$
$$\frac{qE}{Y^{50/77}} \cdot \max\{(\frac{Y}{qE})^{50/77}, 1\} \leq \frac{qE}{Y^{50/77}} \cdot (1 + (\frac{Y}{qE})^{50/77}) = (qE)^{27/77} + \frac{qE}{Y^{50/77}}$$

und damit nach (4.6.6) die Gültigkeit von (i) auch im zweiten Fall.

Nachweis zu (ii): Es sind folgende Fälle zu unterscheiden, die in [1, S.11-12] fehlen :

1.Fall: $\frac{E}{Y} \gg \frac{d}{Q^2}$

Analog zum ersten Fall im Nachweis zu (i) definieren wir $T := \{t \in \mathbb{Z} \mid |t| \ll Y\}$ und $A := \{(\eta, a, q) \mid q \leq Q,\ d|q,\ ggT(a, q) = 1,\ 0 < a \leq q,\ |\eta| \ll \frac{E}{Y},\ (\eta + \frac{a}{q}) \cdot Y \in \mathbb{Z}\}$, sodass die linke Seite von (ii) gerade gleich $\sum\limits_{(\eta,a,q)\in A} F_Y(\frac{a}{q} + \eta)$ ist.

Für $(\eta, a, q) \in A$ setzen wir $t(\eta, a, q) := (\eta + \frac{a}{q}) \cdot Y \in \mathbb{Z}$, womit wegen $|\eta + \frac{a}{q}| \leq |\eta| + |\frac{a}{q}| \ll \frac{E}{Y} + 1 \ll 1$ auch $|t(\eta, a, q)| \ll Y$ und folglich $t(\eta, a, q) \in T$ gilt, wenn wir die Konstante in $|t| \ll Y$ aus der Definition von $T$ hinreichend groß wählen.

Ferner setzen wir $A_t := \{(\eta, a, q) \in A \mid t(\eta, a, q) = (\eta + \frac{a}{q}) \cdot Y = t\} = \{(\eta, a, q) \in A \mid \eta + \frac{a}{q} = \frac{t}{Y}\}$ für $t \in T$ und folgern $\#A_t \ll \frac{Q^2 E}{dY}$ mit der gleichen Idee wie in (i) :

Dazu verwenden wir die Teilerfremdheit von $a$ und $q$, um zunächst von zu zählenden Tripeln $(\eta, a, q)$ in $A_t$ auf zu zählende Paare $(a, q)$ mit $ggT(a, q) = 1$ und somit auf zu zählende (reduzierte) Brüche in $A_t^* = \{\frac{a}{q} \mid \exists\, |\eta| \ll \frac{E}{Y} :\ \eta + \frac{a}{q} = \frac{t}{Y},\ ggT(a, q) = 1,\ q \leq Q,\ d|q\}$ zu kommen, d.h. es gilt wieder $\#A_t \leq \#A_t^*$. Nun haben je zwei Brüche aus $A_t^*$ einen Abstand $\geq \frac{d}{Q^2}$ und argumentieren wir weiter analog zu (i) mit $\frac{d}{Q^2}$ anstatt $\frac{1}{q}$, so erhalten wir $\#A_t \ll \frac{Q^2 E}{dY}\ \ \forall\ t \in T$ und daraus schließlich $\sum\limits_{(\eta,a,q)\in A} F_Y(\frac{a}{q} + \eta) \ll \frac{Q^2 E}{dY} \cdot Y^{27/77} = \frac{Q^2 E}{dY^{50/77}}$ nach Lemma 4.3 (ii).

2.Fall: $\frac{E}{Y} \ll \frac{d}{Q^2}$

Analog zum zweiten Fall im Nachweis von (i) können wir $U = b^u$ $(u \in \mathbb{N}_0)$ und $V = b^v$ $(v \in \mathbb{N}_0)$ mit $UV \leq Y$ und den Eigenschaften $V \asymp \max\{\frac{Y}{(Q^2/d)E}, 1\}$ sowie $U \asymp \{\frac{Y}{VE}, 1\}$ wählen, wobei $\frac{Q^2}{d}$ gerade $q$ entspricht. Damit gilt insbesondere auch $U \ll \frac{Q^2}{d}$ sowie $Y/UV \ll E$.

Verwenden wir Abschätzung (4.6.5), die unabhängig vom betrachteten Fall ist, und argumentieren analog zum Absatz unter (4.6.5), d.h. speziell fixieren wir dann auch $q \in \mathbb{N}$, so kommt

$$\sum_{\substack{q\leq Q\\ d|q}} \sum_{\substack{0<a\leq q\\ ggT(a,q)=1}} \sum_{\substack{|\eta|\leq k_1\cdot\frac{E}{Y}\\ (\eta+\frac{a}{q})\cdot Y\in\mathbb{Z}}} F_Y(\frac{a}{q}+\eta) \leq {\sum}_1' \cdot {\sum}_2, \text{ wobei}$$

$${\sum}_1' := \sum_{\substack{q\leq Q\\ d|q}} \sum_{\substack{0<a\leq q\\ ggT(a,q)=1}} \sup_{|\gamma|\leq k_1\cdot\frac{E}{Y}} F_U(\frac{a}{q}+\gamma) \text{ und } {\sum}_2 := \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ 0\leq m\leq k_2\cdot E}} F_{Y/UV}(\frac{UV}{Y}\cdot m+\beta)$$

zu setzen ist und die Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ wie im Nachweis zu (i) definiert sind.

Die Abschätzung $\sum_2 \ll \frac{E}{(Y/UV)^{50/77}}$ kann aus (i) übernommen werden, während wir $\sum_1'$ mit der gleichen Idee wie $\sum_1$ abschätzen.

Wegen $\frac{E}{Y} \ll \frac{d}{Q^2}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \ll 1$ mit $k_1 \cdot \frac{E}{Y} \leq n \cdot \frac{1}{10Q^2/d}$. Nun nimmt $\frac{Q^2}{d}$ die Rolle von $q$ ein und wir erhalten durch Verwendung von Lemma 4.5 (ii) mit $\eta := \gamma$, $Y := U$ schließlich $\sum_1' \ll \frac{Q^2/d}{U^{50/77}}$ analog zum entsprechenden Teil im Nachweis zu (i). Daraus folgern wir mithilfe von $V \ll \max\{\frac{Y}{(Q^2/d)E}, 1\}$ die Gültigkeit von (ii) auch im zweiten Fall.

□

Nun besitzen wir genügend Mittel, um das wichtige Lemma 4.7 nachzuweisen und damit das Kapitel 4 abzuschließen. Dazu werden noch zwei Hilfssätze angegeben, auf deren Nachweis wir allerdings verzichten bzw. ihn nur oberflächlich skizzieren, da hierzu keine wesentlich interessanten Ideen verwendet werden.

*HS1 Lemma 4.7*:

Sei $d,\ q_1,\ q_2 \in \mathbb{N}$ und $ggT(q_1,b) = ggT(q_2,b) = ggT(d,q_1q_2) = 1$. Unter denen im Beweis von Lemma 4.7 gegebenen Definitionen für $d,\ d_1,\ d_2,\ d_3$ abhängig von den $b$-Potenzen $D$ und $V$ gilt

(i) Jede prime Restklasse $[a]_{q_1q_2d}$ ist eindeutig in der Form

$[a_1d + (b_1 + d_1b_2 + d_1d_2b_3)q_1q_2]_{q_1q_2d}$ mit $a_1, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N},\ a_1 \le q_1q_2,$

$ggT(a_1, q_1q_2) = 1,\ b_1 \le d_1,\ b_2 \le d_2,\ b_3 \le d_3,\ ggT(b_1 + d_1b_2 + d_1d_2b_3, d) = 1$

darstellbar und umgekehrt.

(ii) Jede prime Restklasse $[a_2]_{q_1q_2d_1d_2}$ ist eindeutig in der Form

$[a_1Dd_1d_2 + (b_1 + d_1b_2)q_1q_2D/d_3]_{q_1q_2d_1d_2}$ mit $a_1, b_1, b_2 \in \mathbb{N},\ a_1 \le q_1q_2,$

$ggT(a_1, q_1q_2) = 1,\ b_1 \le d_1,\ b_2 \le d_2,\ ggT(b_1 + d_1b_2, d_1d_2) = 1$

darstellbar und umgekehrt.

(iii) Jede prime Restklasse $[a_3]_{q_1q_2d_1}$ ist eindeutig in der Form

$[a_1d_1DV + b_1q_1q_2DV/d_2d_3]_{q_1q_2d_1}$ mit $a_1, b_1 \in \mathbb{N},\ a_1 \le q_1q_2,\ ggT(a_1, q_1q_2) = 1,$

$b_1 \le d_1,\ ggT(b_1, d_1) = 1$ darstellbar und umgekehrt.

*Beweis*: Der elementare Beweis kann mit dem Chinesischen Restsatz geführt werden.

*HS2 Lemma 4.7*:

Für $X = b^k\ (k \in \mathbb{N}_0)$ gilt

(i) $$\int_0^1 F_X(t)^2\,dt = \frac{1}{(b-1)^k},$$

(ii) $$\int_0^1 F_X'(t)^2\,dt \ll \frac{b^{2k}}{(b-1)^k},$$

(iii) $$\int_0^1 F_X(t)\cdot|F_X'(t)|\,dt \ll \frac{b^k}{(b-1)^k}.$$

*Beweisskizze*:

Wir verwenden $F_X(t) = \frac{1}{(b-1)^k}\cdot|\sum\limits_{n\in\mathcal{A}} e(nt)|$ und $F_X'(t) = 2\pi\cdot\frac{1}{(b-1)^k}\cdot|\sum\limits_{n\in\mathcal{A}} n\cdot e(nt)|\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}$ sowie die Tatsache, dass die Funktionen $e(nt)$ ein Orthonormalsystem bilden. So ergibt sich

$$\int_0^1 |\sum_{n\in\mathcal{A}} e(nt)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathcal{A}} 1 = \#\mathcal{A} = (b-1)^k \quad \text{sowie}$$

$$\int_0^1 |\sum_{n\in\mathcal{A}} n\cdot e(nt)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathcal{A}} n^2 \ll \sum_{n\in\mathcal{A}} b^{2k} = b^{2k}\cdot(b-1)^k.$$

Daraus folgt bereits (i) und (ii). Nun verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in der Form $\int_0^1 F_X(t)\cdot|F_X^{'}(t)|\,dt \le (\int_0^1 F_X(t)^2\,dt)^{1/2}\cdot(\int_0^1 F_X^{'}(t)^2\,dt)^{1/2}$ und nach Einsetzen von (i) sowie (ii) erhalten wir (iii).

□

**Lemma 4.7**:

Gegeben seien die $b$-Potenzen $D$, $E$, $Y$, $Q_1$, $Q_2$ mit $DE \le Y$ und $q_1 \in \mathbb{N}$, $q_1 \asymp Q_1$, $ggT(q_1,b)=1$ sowie $d\in\mathbb{N},\ d\asymp D,\ d|b^u$ für ein $u\in\mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$S := S(d,q_1,Q_2,E,Y) := \sum_{\substack{q_2\asymp Q_2\\ ggT(q_2,b)=1}} \sum_{\substack{a\le dq_1q_2\\ ggT(a,dq_1q_2)=1}} \sum_{\substack{|\eta|\ll \frac{E}{Y}\\ Y\cdot(\frac{a}{dq_1q_2}+\eta)\in\mathbb{Z}}} F_Y(\frac{a}{dq_1q_2}+\eta).$$

Dann gilt $S \ll (DE)^{27/77}\cdot(Q_1Q_2^2)^{1/21} + \frac{E^{5/6}D^{3/2}Q_1Q_2^2}{Y^{10/21}}$.

**Beweis**:

Wegen $DE\le Y$ gilt $\frac{Y}{DE}=b^s$ mit $s\in\mathbb{N}_0$ und wir können eine $b$-Potenz $V=b^v$ $(v\in\mathbb{N}_0)$ mit $b\cdot\frac{Y}{DE}=b^{s+1}\le V^2\le b^{s+2}=b^2\cdot\frac{Y}{DE}$ finden, d.h. insbesondere ist $V^2\asymp\frac{Y}{DE}$.
Folglich ist auch $X := \frac{V^2}{Y/DE}\ge b$ eine $b$-Potenz mit $X\asymp 1$.
Sei $d_3 := ggT(d,D)\in\mathbb{N}$ und $d_2d_3 := ggT(d,VD)$, sodass $d=d_1d_2d_3$ mit $d_1,d_2,d_3\in\mathbb{N}$ gilt. Aus $d|b^u$ folgt für $ggT(q_1,b)=ggT(q_2,b)=1$ insbesondere $ggT(d,q_1q_2)=1$, womit wir die Voraussetzungen von *HS1 Lemma 4.7* erhalten. Für $q_2\asymp Q_2,\ ggT(q_2,b)=1$ setzen wir

$$\sum\nolimits_0(q_2) := \sum_{\substack{a\le dq_1q_2\\ ggT(a,dq_1q_2)=1}} \sum_{\substack{|\eta|\ll\frac{E}{Y}\\ Y\cdot(\frac{a}{dq_1q_2}+\eta)\in\mathbb{Z}}} F_Y(\frac{a}{dq_1q_2}+\eta)$$

und schließen aus *HS1 Lemma 4.7* (i) und der Periodizität von $F_Y$ auf die Gültigkeit von

$$(4.7.1)\quad \sum\nolimits_0(q_2) = \sum_{\substack{a_1 \le q_1 q_2 \\ ggT(a_1, q_1 q_2)=1}} \sum_{\substack{b_1 \le d_1,\, b_2 \le d_2,\, b_3 \le d_3 \\ ggT(b_1 + d_1 b_2 + d_1 d_2 b_3, d)=1}} \sum_{\substack{t = \frac{a_1}{q_1 q_2} + \frac{b_1}{d_1 d_2 d_3} + \frac{b_2}{d_2 d_3} + \frac{b_3}{d_3} + \eta \\ |\eta| \ll \frac{E}{Y},\, Y \cdot t \in \mathbb{Z}}} F_Y(t)$$

$$\forall\ q_2 \asymp Q_2,\ ggT(q_2, b) = 1,$$

wobei wir $\frac{a_1 d + (b_1 + d_1 b_2 + d_1 d_2 b_3) q_1 q_2}{q_1 q_2 d} = \frac{a_1}{q_1 q_2} + \frac{b_1}{d_1 d_2 d_3} + \frac{b_2}{d_2 d_3} + \frac{b_3}{d_3}$ beachten.

Sei $t = \frac{a_1}{q_1 q_2} + \frac{b_1}{d_1 d_2 d_3} + \frac{b_2}{d_2 d_3} + \frac{b_3}{d_3} + \eta$ mit $Y \cdot t \in \mathbb{Z}$ und $|\eta| \ll \frac{E}{Y}$ zunächst fixiert.
Aus den Eigenschaften (2) und (3) folgt $F_{YX}(t) = F_Y(t) \cdot F_X(Yt) = F_Y(t) \cdot F_X(0)$.
Wegen $X \asymp 1$ und $|\sum\limits_{n \in \mathcal{A}} e(n \cdot 0)| = \sum\limits_{n \in \mathcal{A}} 1 \ge 1$ ($\Leftarrow X \ge b$, Def. $\mathcal{A}$) liefert die Definition von $F_X$ insbesondere $F_X(0) \gg 1$, also $F_{YX}(t) \gg F_Y(t)$. Ferner definieren wir

$$\beta_1 := DV^2 \cdot (\frac{a_1}{q_1 q_2} + \frac{b_1}{d_1 d_2 d_3} + \frac{b_2}{d_2 d_3} + \frac{b_3}{d_3}) \text{ und } \beta_2 := \frac{a_1}{q_1 q_2} + \frac{b_1}{d_1 d_2 d_3} + \frac{b_2}{d_2 d_3},$$

sodass wir analog zu [1, S.13] mithilfe $F_Y(t) \ll F_{XY}(t)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}(4.7.2)\quad & F_Y(t) \ll F_{XY}(t) = F_E(\beta_1 + DV^2\eta) \cdot F_D(\beta_2 + \frac{b_3}{d_3} + \eta) \cdot F_{V^2}(D\beta_2 + D\eta) \le \\ & F_E(\beta_1 + DV^2\eta) \cdot \sup_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} [F_D(\beta_2 + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \cdot F_{V^2}(D\beta_2 + D\gamma)] \ll \\ & F_E(\beta_1 + DV^2\eta) \cdot \sup_{|\gamma| \ll [\frac{E}{Y}} F_D(\beta_2 + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \cdot (F_V(D\beta_2 + D\gamma)^2 + F_V(DV\beta_2 + DV\gamma)^2)]\end{aligned}$$

erhalten, indem wir die Eigenschaften (2) und (3) u.a. mit $XY = DEV^2$ sowie $d_3 | D$ und die triviale Ungleichung $x \cdot y \le \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)\ \ \forall\ \ x, y \in \mathbb{R}_0^+$ verwenden. Auf mehr Details zur Herleitung von (4.7.2) verzichten wir, weil die wichtigsten Mittel dazu aufgeführt wurden und die entsprechende Abschätzung auch in [1, S.13] zu finden ist.

Fassen wir (4.7.1) und (4.7.2) unter Beachtung obiger Definitionen sowie
$F_V(DV\beta_2 + DV\gamma) = F_V(\frac{a_1 DV}{q_1 q_2} + \frac{b_1 DV/d_2 d_3}{d_1} + DV\gamma)$ ($\Leftarrow \frac{b_2 DV}{d_2 d_3} \in \mathbb{Z}$) zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{\substack{q_2 \asymp Q_2 \\ ggT(q_2,b)=1}} \sum\nolimits_0 (q_2) \\
&= \sum_{\substack{q_2 \asymp Q_2 \\ ggT(q_2,b)=1}} \sum_{\substack{a_1 \le q_1 q_2 \\ ggT(a_1,q_1q_2)=1}} \sum_{\substack{b_1 \le d_1,\, b_2 \le d_2,\, b_3 \le d_3 \\ ggT(b_1+d_1b_2+d_1d_2b_3,d)=1}} \sum_{\substack{t=\frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_1}{d_1d_2d_3}+\frac{b_2}{d_2d_3}+\frac{b_3}{d_3}+\eta \\ |\eta| \ll \frac{E}{Y},\, Y\cdot t \in \mathbb{Z}}} F_Y(t) \\
&= \sum_{\substack{q_2 \asymp Q_2 \\ ggT(q_2,b)=1}} \sum_{\substack{a_1 \le q_1 q_2 \\ ggT(a_1,q_1q_2)=1}} \sum_{\substack{b_1 \le d_1,\, b_2 \le d_2,\, b_3 \le d_3 \\ b_4=b_1+d_1b_2+d_1d_2b_3 \\ ggT(b_4,d)=1}} \sum_{\substack{|\eta| \ll \frac{E}{Y} \\ (\frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_4}{d}+\eta)\cdot Y \in \mathbb{Z}}} F_Y(\frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_4}{d}+\eta) \\
&\ll \sum\nolimits' \sum_{\substack{|\eta| \ll \frac{E}{Y} \\ (\frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_4}{d}+\eta)\cdot Y \in \mathbb{Z}}} [F_E(\beta_1 + DV^2\eta) \\
&\qquad \cdot \sup_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} [F_D(\beta_2 + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \cdot (F_V(D\beta_2 + D\gamma)^2 + F_V(DV\beta_2 + DV\gamma)^2)]] \\
&= \sum\nolimits' [\sup_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} [F_D(\beta_2 + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \cdot (F_V(D\beta_2 + D\gamma)^2 + F_V(\frac{a_1 DV}{q_1q_2} + \frac{b_1 DV/d_2d_3}{d_1} + DV\gamma)^2)] \\
&\qquad \cdot \sum\nolimits_1],
\end{aligned}$$

indem wir $\frac{b_4}{d} = \frac{b_1}{d_1d_2d_3} + \frac{b_2}{d_2d_3} + \frac{b_3}{d_3}$ beachten und

$$\sum\nolimits' := \sum_{\substack{q_2 \asymp Q_2 \\ ggT(q_2,b)=1}} \sum_{\substack{a_1 \le q_1 q_2 \\ ggT(a_1,q_1q_2)=1}} \sum_{\substack{b_1 \le d_1,\, b_2 \le d_2,\, b_3 \le d_3 \\ b_4=b_1+d_1b_2+d_1d_2b_3 \\ ggT(b_4,d)=1}} \sum_{\substack{\beta_1 = DV^2\cdot(\frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_4}{d}) \\ \beta_2 = \frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_4}{d}-\frac{b_3}{d_3}}} \qquad \text{sowie}$$

$$\sum\nolimits_1 := \sum_{\substack{|\eta| \ll \frac{E}{Y} \\ (\frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_4}{d}+\eta)\cdot Y \in \mathbb{Z}}} F_E(\beta_1 + DV^2\eta) \qquad \text{für } \beta_1 = DV^2 \cdot (\frac{a_1}{q_1q_2} + \frac{b_4}{d})$$

definieren. Für $\beta_1 = DV^2 \cdot (\frac{a_1}{q_1q_2} + \frac{b_4}{d})$ setzen wir $\beta' := \frac{a_1}{q_1q_2} + \frac{b_4}{d}$ und bezeichnet $c_3 \in \mathbb{R}^+$ die Konstante in $|\eta| \ll \frac{E}{Y}$, so erhalten wir wegen $\frac{X}{E} = \frac{DV^2}{Y}$ mit $z = (\beta' + \eta) \cdot Y$ insbesondere

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{-c_3\cdot\frac{E}{Y} \le \eta \le c_3 \cdot \frac{E}{Y} \\ (\beta'+\eta)\cdot Y \in \mathbb{Z}}} F_E(DV^2 \cdot (\beta' + \eta)) = \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z} \\ Y\beta' - c_3 E \le z \le Y\beta' + c_3 E}} F_E(\frac{X \cdot z}{E}).$$

Wegen $X \asymp 1$ nimmt der Zähler $X \cdot z$ unter den letzten Summationsbedingungen nur Werte aus einem Intervall der Form $[s, s + c_4 \cdot E[$ mit $s \in \mathbb{Z}$, $c_4 \in \mathbb{R}^+$ an, womit die letzte Summe aufgrund der Periodizität von $F_E$ und Lemma 4.3 (ii) durch $\ll \sum_{0 \le a < E} F_E(\frac{a}{E}) \ll E^{27/77}$ nach oben beschränkt ist. Dies in die Abschätzung von $S$ eingesetzt liefert

$$(4.7.3)\quad S \ll E^{27/77}\cdot {\sum}' \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_D(\beta_2+\frac{b_3}{d_3}+\gamma)\cdot \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_V(D\beta_2+D\gamma)^2\ +$$
$$E^{27/77}\cdot {\sum}' \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_D(\beta_2+\frac{b_3}{d_3}+\gamma)\cdot \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_V(\frac{a_1DV}{q_1q_2}+\frac{b_1DV/d_2d_3}{d_1}+DV\gamma)^2.$$

Nun folgt aus $b_4 = b_1 + d_1b_2 + d_1d_2b_3$, $ggT(b_4, d) = 1$ stets $ggT(b_1 + d_1b_2, d_1d_2) = 1$ und $ggT(b_1, d_1) = 1$ wegen $d_1d_2|d$, sodass wir durch einfache Supremumsbildung auf

$$\begin{aligned}
&{\sum}' \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_D(\beta_2+\frac{b_3}{d_3}+\gamma)\cdot \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_V(D\beta_2+D\gamma)^2 \le {\sum}_2\cdot{\sum}_3\\
&{\sum}' \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_D(\beta_2+\frac{b_3}{d_3}+\gamma)\cdot \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_V(\frac{a_1DV}{q_1q_2}+\frac{b_1DV/d_2d_3}{d_1}+DV\gamma)^2 \le {\sum}_4\cdot{\sum}_5 \quad \text{mit}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\sum}_2 &:= \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \sum_{b_3\le d_3} \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_D(\beta+\frac{b_3}{d_3}+\gamma),\\
{\sum}_3 &:= \sum_{\substack{q_2\asymp Q_2\\ ggT(q_2,b)=1}} \sum_{\substack{a_1\le q_1q_2\\ ggT(a_1,q_1q_2)=1}} \sum_{\substack{b_1\le d_1,\, b_2\le d_2\\ ggT(b_1+d_1b_2,d_1d_2)=1}} \sum_{\beta_2=\frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_1}{d_1d_2d_3}+\frac{b_2}{d_2d_3}} \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_V(D\beta_2+D\gamma)^2,\\
{\sum}_4 &:= \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{b_2\le d_2\\ b_3\le d_3}} \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_D(\beta+\frac{b_2+d_2b_3}{d_2d_3}+\gamma),\\
{\sum}_5 &:= \sum_{\substack{q_2\asymp Q_2\\ ggT(q_2,b)=1}} \sum_{\substack{a_1\le q_1q_2\\ ggT(a_1,q_1q_2)=1}} \sum_{\substack{b_1\le d_1,\\ ggT(b_1,d_1)=1}} \sup_{|\gamma|\ll \frac{E}{Y}} F_V(\frac{a_1DV}{q_1q_2}+\frac{b_1DV/d_2d_3}{d_1}+DV\gamma)^2
\end{aligned}$$

schließen, wobei wir für die zweite Abschätzung zudem $F_D(\beta_2+\frac{b_3}{d_3}+\gamma) = F_D(\beta_3+\frac{b_2+d_2b_3}{d_2d_3}+\gamma)$ mit $\beta_3 := \frac{a_1}{q_1q_2}+\frac{b_1}{d_1d_2d_3}$ verwenden und gewisse Summationsbedingungen wie z.B. jene für $\beta_1$ in ${\sum}'$ fallen lassen können. Auf weitere technische Details zu diesen Abschätzungen verzichten wir. Dies liefert insgesamt nach (4.7.3)

$$(4.7.4)\quad S \ll E^{27/77}\cdot({\sum}_2\cdot{\sum}_3+{\sum}_4\cdot{\sum}_5),$$

welches bereits [1, S.13 (4.1)] ähnelt.

Für festes $\beta \in \mathbb{R}$ schätzen wir $\sum\limits_{b_3 \leq d_3} \sup\limits_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} F_D(\beta + \frac{b_3}{d_3} + \gamma)$ und damit $\sum_2$ ab.

Sei $k_1 \in \mathbb{R}^+$ die Konstante in $|\gamma| \ll \frac{E}{Y}$. Wegen $DE \leq Y$ bzw. $\frac{E}{Y} \leq \frac{1}{D}$ und $d_3 \leq d \ll D$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \ll 1$ mit $k_1 \cdot \frac{E}{Y} \leq n \cdot \frac{1}{10d_3}$. Also ist

$$\sum_{b_3 \leq d_3} \sup_{|\gamma| \leq k_1 \cdot \frac{E}{Y}} F_D(\beta + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \leq \sum_{0 \leq b_3 \leq d_3} \sup_{|\gamma| \leq n \cdot \frac{1}{10d_3}} F_D(\beta + \frac{b_3}{d_3} + \gamma)$$

und wir definieren $\alpha_i := i \cdot \frac{1}{10d_3}$ für $i \in \mathbb{Z}$, $-n \leq i \leq n$, sodass $[-n \cdot \frac{1}{10d_3}, n \cdot \frac{1}{10d_3}] \subseteq \bigcup\limits_{-n \leq i \leq n} [\alpha_i - \frac{1}{10d_3}, \alpha_i + \frac{1}{10d_3}]$ und wegen $F_D(t) \geq 0 \ \ \forall \ t \in \mathbb{R}$ auch

$$\sup_{|\gamma| \leq n \cdot \frac{1}{10d_3}} F_D(\beta + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \leq \sum_{i=-n}^{n} \sup_{|\gamma| \leq \frac{1}{10d_3}} F_D(\beta + \frac{b_3}{d_3} + \alpha_i + \gamma) \quad \forall \ 0 \leq b_3 \leq d_3$$

gilt. Verwenden wir nun Lemma 4.5 (i) mit $\eta := \gamma$, $Q := d_3$ und $Y := D$, so kommt

$$\sum_{0 \leq b_3 \leq d_3} \sup_{|\gamma| \leq \frac{1}{10d_3}} F_D(\beta' + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \leq \sup_{d_3 \leq d_3 := Q,\, \beta' \in \mathbb{R}} \sum_{0 \leq b_3 \leq d_3} \sup_{|\gamma| \leq \frac{1}{10d_3} = \frac{1}{10Q}} F_D(\beta' + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \ll$$
$$Q^{27/77} + \frac{Q}{D^{50/77}} = d_3^{27/77} + \frac{d_3}{D^{50/77}} \ll d_3^{27/77}$$

für alle $\beta' \in \mathbb{R}$, also insbesondere für jedes $\beta' = \beta + \alpha_i$. Dies in obige Abschätzungen eingesetzt liefert wegen $n \ll 1$ die Gültigkeit von $\sum\limits_{b_3 \leq d_3} \sup\limits_{|\gamma| \leq k_1 \cdot \frac{E}{Y}} F_D(\beta + \frac{b_3}{d_3} + \gamma) \ll d_3^{27/77} \ \ \forall \ \beta \in \mathbb{R}$ und daher

$$(4.7.5) \qquad \sum\nolimits_2 \ll d_3^{27/77}.$$

Analog dazu erhalten wir $\sum_4 \ll (d_2 d_3)^{27/77}$ mithilfe Lemma 4.5 (i), wobei wir ausnutzen, dass die Zahlen $b_2 + d_2 b_3$ für $b_2 \leq d_2$, $b_3 \leq d_3$ paarweise inkongruent mod $d_2 d_3$ sind bzw. alle Restklassen mod $d_2 d_3$ darstellen, also $\sum_4 = \sup\limits_{\beta \in \mathbb{R}} \sum\limits_{b_5 \leq d_2 d_3} \sup\limits_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} F_D(\beta + \frac{b_5}{d_2 d_3} + \gamma)$ gilt. Daraus folgt

$$(4.7.6) \qquad \sum\nolimits_4 \ll (d_2 d_3)^{27/77}.$$

Unter den Summationsbedingungen in $\sum_3$ ist $D\beta_2 = \frac{a_1 D d_1 d_2 + (b_1 + d_1 b_2) q_1 q_2 D / d_3}{q_1 q_2 d_1 d_2}$ und wir schließen aufgrund der Periodizität von $F_V$ nach *HS1 Lemma 4.7* (ii)

$$(4.7.7) \qquad \sum\nolimits_3 = \sum_{\substack{q_2 \asymp Q_2 \\ ggT(q_2, b) = 1}} \sum_{\substack{a_2 \leq q_1 q_2 d_1 d_2 \\ ggT(a_2, q_1 q_2 d_1 d_2) = 1}} \sup_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} F_V(\frac{a_2}{q_1 q_2 d_1 d_2} + D\gamma)^2.$$

Ferner liefert *HS1 Lemma 4.7* (iii) und $\frac{a_1 DV}{q_1 q_2} + \frac{b_1 DV/d_2 d_3}{d_1} = \frac{a_1 d_1 DV + b_1 q_1 q_2 DV/d_2 d_3}{q_1 q_2 d_1}$ die Gleichung

$$(4.7.8) \quad \sum\nolimits_5 = \sum_{\substack{q_2 \asymp Q_2 \\ ggT(q_2,b)=1}} \sum_{\substack{a_3 \le q_1 q_2 d_1 \\ ggT(a_3, q_1 q_2)=1}} \sup_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} F_V\Big(\frac{a_3}{q_1 q_2 d_1} + DV\gamma\Big)^2.$$

Wegen $M := \min\{V, d_1 d_2 Q_1 Q_2^2\} \ge 1$ liegt im Intervall $[\log_b(\frac{1}{b} \cdot M),\ \log_b(M)] \subseteq [-1, +\infty[$ der Breite 1 mindestens ein $r \in \mathbb{N}_0$, sodass $\frac{1}{b} \cdot M \le b^r := R \le M \le V$ gilt. Also ist $R \le V$ und $R \asymp \min\{V, d_1 d_2 Q_1 Q_2^2\}$. Aus $|\gamma| \ll \frac{E}{Y}$ folgt $|D\gamma| \le |DV\gamma| \ll DV \cdot \frac{E}{Y} \ll V \cdot \frac{1}{V^2} = \frac{1}{V} \le \frac{1}{R}$, was

$$\sup_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} F_V\Big(\frac{a_2}{q_1 q_2 d_1 d_2} + D\gamma\Big)^2 \le \sup_{|\eta| \ll \frac{1}{R}} F_R\Big(\frac{a_2}{q_1 q_2 d_1 d_2} + \eta\Big)^2 \quad \text{und}$$
$$\sup_{|\gamma| \ll \frac{E}{Y}} F_V\Big(\frac{a_3}{q_1 q_2 d_1} + DV\gamma\Big)^2 \le \sup_{|\eta| \ll \frac{1}{R}} F_R\Big(\frac{a_3}{q_1 q_2 d_1} + \eta\Big)^2$$

nach Eigenschaft (5) impliziert. Dies in (4.7.7) und (4.7.8) eingesetzt liefert

$$(4.7.9) \quad \sum\nolimits_3 \le \sum\nolimits_3' := \sum_{q_2 \asymp Q_2} \sum_{\substack{a \le q_1 q_2 d_1 d_2 \\ ggT(a, q_1 q_2 d_1 d_2)=1}} \sup_{|\eta| \ll \frac{1}{R}} F_R\Big(\frac{a}{q_1 q_2 d_1 d_2} + \eta\Big)^2$$
$$\sum\nolimits_5 \le \sum\nolimits_5' := \sum_{q_2 \asymp Q_2} \sum_{\substack{a \le q_1 q_2 d_1 \\ ggT(a, q_1 q_2 d_1)=1}} \sup_{|\eta| \ll \frac{1}{R}} F_R\Big(\frac{a}{q_1 q_2 d_1} + \eta\Big)^2.$$

Im Folgenden schätzen wir $\sum_3'$ und $\sum_5'$ ab. Dazu zeigen wir zunächst

$$(*) \quad \sum_{q_2 \asymp Q_2} \sum_{\substack{a \le q_1 q_2 d_1 d_2 \\ ggT(a, q_1 q_2 d_1 d_2)=1}} F_R\Big(\frac{a}{q_1 q_2 d_1 d_2} + \eta(a, q_2)\Big)^2 \ll$$
$$d_1 d_2 Q_1 Q_2^2 \cdot \int_0^1 F_R(t)^2\, dt + \Big(1 + \frac{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}{R}\Big) \cdot \int_0^1 F_R(t) \cdot |F_R'(t)|\, dt,$$

wobei $|\eta(a, q_2)| \le c_1 \cdot \frac{1}{R}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}^+$ für alle $(a, q_2)$ unter obigen Summationsbedingungen ist.

Letztere schreiben wir in $\mathcal{S} := \{(a, q_2) \in \mathbb{N}^2 \mid q_2 \asymp Q_2,\ a \le d_1 d_2 q_1 q_2,\ ggT(a, d_1 d_2 q_1 q_2) = 1\}$ und definieren $\mathcal{T} := \{\frac{a}{q_1 q_2 d_1 d_2} \mid (a, q_2) \in \mathcal{S}\}$ mit $\#\mathcal{T} = t \in \mathbb{N}$, denn $\mathcal{S}$ dürfen wir als nicht-leer voraussetzen. Dabei gibt es aufgrund der Reduziertheit der Brüche in $\mathcal{T}$ eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T},\ f(a, q_2) := \frac{a}{q_1 q_2 d_1 d_2}$, womit die Summe in $(*)$ gerade gleich $\sum_{(a,q_2) \in \mathcal{S}} F_R(f(a, q_2) + \eta(a, q_2))^2$ ist.

Je zwei (reduzierte) Brüche $f(a,q_2),\ f(a',q_2') \in \mathcal{T}$ haben einen Abstand $\geq \frac{1}{d_1 d_2 q_1 q_2 q_2'} \asymp \frac{1}{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}$, also einen Abstand $\geq c_2 \cdot \frac{1}{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}$ mit $c_2 \in \mathbb{R}^+$. Denken wir uns die Brüche $b_i$ in $\mathcal{T} = \{b_i \mid i = 1, ..., t\}$ kanonisch geordnet, d.h. gilt $b_1 < b_2 < ... < b_t$, so erhalten wir induktiv aus $b_{i+1} - b_i \geq c_2 \cdot \frac{1}{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}$ für alle $1 \leq i \leq t-1$ die Gültigkeit von

$$|b_s - b_l| \geq |s-l| \cdot \frac{c_2}{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2} \quad \forall\ 1 \leq s,l \leq t.$$

Wir setzen $m := \lceil 3 \cdot \frac{c_1}{c_2} \cdot (1 + \frac{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}{R}) \rceil \in \mathbb{N}$ sowie $\mathcal{T}_j := \{b_i \mid 1 \leq i \leq t,\ i \equiv j \bmod m\}$ für $j = 1, ..., m$, wobei $m \ll 1 + \frac{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}{R}$ ist. Damit wird $\mathcal{T}$ in die $m$ disjunkten Teilmengen $\mathcal{T}_j$ zerlegt und folglich aufgrund der Bijektion $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ auch $\mathcal{S}$ in die $m$ disjunkten Teilmengen $\mathcal{S}_j := \{(a,q_2) \in \mathcal{S} \mid f(a,q_2) \in \mathcal{T}_j\}$ mit $j = 1, ..., m$. Es gilt also $\dot{\bigcup\limits_{1 \leq j \leq m}} \mathcal{S}_j = \mathcal{S}$.

Sei $1 \leq j \leq m$ fixiert. Für verschiedene Paare $(a,q_2),\ (a',q_2') \in \mathcal{S}_j$ sind auch deren Bilder $b_s := f(a,q_2) \in \mathcal{T}_j$ bzw. $b_l := f(a',q_2') \in \mathcal{T}_j$ mit $1 \leq s,l \leq t,\ s \neq l,\ s \equiv l \equiv j \bmod m$ verschieden, sodass sich wegen $|s-l| \geq m$ insbesondere

$$|f(a,q_2) - f(a',q_2')| = |b_s - b_l| \geq m \cdot \frac{c_2}{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2} \geq 3 \cdot c_1 \cdot (\frac{1}{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2} + \frac{1}{R})$$

ergibt. Dies liefert aufgrund $|\eta(a,q_2)|,\ |\eta(a',q_2')| \leq c_1 \cdot \frac{1}{R}$ nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}|f(a,q_2) + \eta(a,q_2) - f(a',q_2') - \eta(a',q_2')| &\geq 3 \cdot c_1 \cdot (\frac{1}{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2} + \frac{1}{R}) - 2 \cdot c_1 \cdot \frac{1}{R} \\ &> c_1 \cdot (\frac{1}{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2} + \frac{1}{R}) := \gamma > 0.\end{aligned}$$

Folglich sind die Zahlen $f(a,q_2) + \eta(a,q_2)$ für verschiedene $(a,q_2) \in \mathcal{S}_j$ verschieden und haben einen Abstand $> \gamma$, woraus

$$\sum_{(a,q_2) \in \mathcal{S}_j} F_R(f(a,q_2) + \eta(a,q_2))^2 = \sum_{t \in \mathcal{U}_j} F_R(t)^2$$

mit $\mathcal{U}_j := \{f(a,q_2) + \eta(a,q_2) \mid (a,q_2) \in \mathcal{S}_j\}$ und $|t_1 - t_2| > \gamma$ für alle $t_1, t_2 \in \mathcal{U}_j,\ t_1 \neq t_2$ folgt.

Letzteres impliziert, dass die Intervalle $[t-\gamma, t]$ bzw. $[t, t+\gamma]$ für $t \in \mathcal{U}_j$ paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung $\dot{\bigcup\limits_{t \in \mathcal{U}_j}} [t-\gamma, t]$ bzw. $\dot{\bigcup\limits_{t \in \mathcal{U}_j}} [t, t+\gamma]$ jeweils in $[\min \mathcal{U}_j - \gamma,\ \max \mathcal{U}_j + \gamma]$ enthalten ist. Nach *HS1 Lemma 4.5* (ii) gilt $F_R(t)^2 \ll \frac{1}{\gamma} \cdot \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_R(s)^2\, ds + \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_R(s) \cdot |F_R'(s)|\, ds$ für alle $t \in \mathcal{U}_j$, was die Abschätzung

$$\sum_{t\in\mathcal{U}_j} F_R(t)^2 \ll \sum_{t\in\mathcal{U}_j}[\frac{1}{\gamma}\cdot\int\limits_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_R(s)^2\,ds + \int\limits_{t-\gamma}^{t+\gamma} F_R(s)\cdot|F_R^{'}(s)|\,ds] =$$

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\sum_{t\in\mathcal{U}_j}[\int\limits_{t}^{t+\gamma} F_R(s)^2\,ds + \int\limits_{t-\gamma}^{t} F_R(s)^2\,ds] + \sum_{t\in U_j}[\int\limits_{t}^{t+\gamma} F_R(s)\cdot|F_R^{'}(s)|\,ds + \int\limits_{t-\gamma}^{t} F_R(s)\cdot|F_R^{'}(s)|\,ds] \le$$

$$\frac{1}{\gamma}\cdot 2\cdot\int\limits_{\min\mathcal{U}_j-\gamma}^{\max\mathcal{U}_j+\gamma} F_R(s)^2\,ds + 2\cdot\int\limits_{\min\mathcal{U}_j-\gamma}^{\max\mathcal{U}_j+\gamma} F_R(s)\cdot|F_R^{'}(s)|\,ds \ll$$

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\int\limits_0^1 F_R(s)^2\,ds + \int\limits_0^1 F_R(s)\cdot|F_R^{'}(s)|\,ds$$

liefert, indem wir zuletzt die Periodizität von $F_R$ und $F_R^{'}$ ausnutzen sowie

$$0 \le \max\mathcal{U}_j + \gamma - (\min\mathcal{U}_j - \gamma) \le$$

$$2\gamma + \max_{(a,q_2)\in\mathcal{S}_j} f(a,q_2)+\eta(a,q_2) - (\min_{(a,q_2)\in\mathcal{S}_j} f(a,q_2)+\eta(a,q_2)) \le 2\gamma + 1 + 2\cdot c_1\cdot\frac{1}{R} \ll 1$$

beachten ($\Leftarrow \gamma \ll 1,\ R \ge 1,\ f(a,q_2) = \frac{a}{q_1q_2d_1d_2} \in ]0,1]$). Daraus schließen wir

$$\sum_{(a,q_2)\in\mathcal{S}_j} F_R(f(a,q_2)+\eta(a,q_2))^2 \ll \frac{1}{\gamma}\cdot\int\limits_0^1 F_R(s)^2\,ds + \int\limits_0^1 F_R(s)\cdot|F_R^{'}(s)|\,ds \quad \forall\ 1\le j\le m,$$

sodass wir nach $\dot{\bigcup\limits_{1\le j\le m}} \mathcal{S}_j = \mathcal{S}$ und $\frac{m}{\gamma} \ll d_1d_2Q_1Q_2^2$ die Gültigkeit von

$$\sum_{(a,q_2)\in\mathcal{S}} F_R(f(a,q_2)+\eta(a,q_2))^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{(a,q_2)\in\mathcal{S}_j} F_R(f(a,q_2)+\eta(a,q_2))^2 \ll$$

$$m\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\int\limits_0^1 F_R(s)^2\,ds + m\cdot\int\limits_0^1 F_R(s)\cdot|F_R^{'}(s)|\,ds \ll$$

$$d_1d_2Q_1Q_2^2\cdot\int\limits_0^1 F_R(t)^2\,dt + (1+\frac{d_1d_2Q_1Q_2^2}{R})\cdot\int\limits_0^1 F_R(t)\cdot|F_R^{'}(t)|\,dt$$

erhalten und folglich $(*)$ bewiesen ist. Damit haben wir offensichtlich auch

$$(4.7.10)\quad \sum\nolimits_3^{'} \ll d_1d_2Q_1Q_2^2\cdot\int\limits_0^1 F_R(t)^2\,dt + (1+\frac{d_1d_2Q_1Q_2^2}{R})\cdot\int\limits_0^1 F_R(t)\cdot|F_R^{'}(t)|\,dt$$

gezeigt, wenn wir für ein gegebenes Paar $(a,q_2)\in\mathcal{S}$ das $\eta(a,q_2)\in\mathbb{R},\ |\eta(a,q_2)| \ll \frac{1}{R}$ stets so wählen, dass $F_R(\frac{a}{q_1q_2d_1d_2}+\eta(a,q_2))^2 = \sup\limits_{|\eta|\ll\frac{1}{R}} F_R(\frac{a}{q_1q_2d_1d_2}+\eta)^2$ ist, was aufgrund der Stetigkeit von $F_R$ nach dem Satz vom Minimum und Maximum möglich ist. Setzen wir die Abschätzungen (i) und (iii) aus *HS2 Lemma 4.7* für $R = b^r$ ein, so gilt

$$d_1 d_2 Q_1 Q_2^2 \cdot \int_0^1 F_R(t)^2 \, dt + (1 + \frac{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}{R}) \cdot \int_0^1 F_R(t) \cdot |F_R'(t)| \, dt \ll \frac{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}{(b-1)^r} + \frac{b^r}{(b-1)^r}.$$

Offenbar ist für $b \geq 10$ insbesondere $\frac{\log(b-1)}{\log b} > \frac{20}{21}$ und daher $\frac{1}{(b-1)^r} = R^{-\frac{\log(b-1)}{\log b}} < R^{-20/21}$ sowie $\frac{b^r}{(b-1)^r} = \frac{R}{(b-1)^r} < R^{1/21}$. Mithilfe dieser Ungleichungen sowie $R \asymp \min\{V, d_1 d_2 Q_1 Q_2^2\}$ und $V^2 \asymp \frac{Y}{DE}$ können wir

$$\frac{d_1 d_2 Q_1 Q_2^2}{(b-1)^r} + \frac{b^r}{(b-1)^r} \ll (d_1 d_2 Q_1 Q_2^2)^{1/21} + d_1 d_2 Q_1 Q_2^2 \cdot (\frac{Y}{DE})^{-10/21}$$

nachweisen, indem wir die Fälle $\min\{V, d_1 d_2 Q_1 Q_2^2\} = V$ und $\min\{V, d_1 d_2 Q_1 Q_2^2\} = d_1 d_2 Q_1 Q_2^2$ unterscheiden. Auf mehr Einzelheiten dazu verzichten wir, da die Fallunterscheidung kaum Interessantes beinhaltet. Dies liefert nach (4.7.9) und (4.7.10) die Schranke

$$\sum\nolimits_3 \leq \sum\nolimits_3' \ll (d_1 d_2 Q_1 Q_2^2)^{1/21} + d_1 d_2 Q_1 Q_2^2 \cdot (\frac{Y}{DE})^{-10/21}.$$

Nun ist $\sum_5'$ ein Spezialfall von $\sum_3'$ mit $d_2 = 1$, sodass analog dazu

$$\sum\nolimits_5 \leq \sum\nolimits_5' \ll (d_1 Q_1 Q_2^2)^{1/21} + (d_1 Q_1 Q_2^2) \cdot (\frac{Y}{DE})^{-10/21}$$

kommt. Einsetzen unserer Abschätzungen für $\sum_2, \sum_3, \sum_4$ und $\sum_5$ in (4.7.4) liefert unter Beachtung von $d = d_1 d_2 d_3 \ll D$, $\frac{10}{21} + \frac{27}{77} < \frac{5}{6}$ sowie $1 + \frac{10}{21} < \frac{3}{2}$ das gewünschte Resultat.

$\square$

# 5. Typ I-Bereich

Wir definieren $\kappa := \begin{cases} \frac{\varphi(b)}{b-1} & \text{, falls } ggT(a_0,b) \neq 1 \\ \frac{\varphi(b)-1}{b-1} & \text{, falls } ggT(a_0,b) = 1 \end{cases}$ und $\kappa_2 := \frac{b}{\varphi(b)} \cdot \kappa$.

**Proposition 5.1:**

Sei $X \geq b$ eine $b$-Potenz und $A \geq 2$ sowie $Q \geq 1,\ Q \ll X^{50/77} \cdot (\log X)^{-2A}$ gegeben. Setze

$$\mathcal{A}_q^{'} := \{a \in \mathcal{A} \mid q|a,\ ggT(a,b) = 1\} \quad \forall\ q \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\sum\limits_{\substack{q<Q \\ ggT(q,b)=1}} |\#\mathcal{A}_q^{'} - \kappa \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{q}| \ll_A \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^A}$.

**Beweis:**

Die Möbiusfunktion ist definiert durch $\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & \text{, falls } n \text{ quadratfrei und } \omega(n) = k \\ 1 & \text{, falls } n = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$,

wobei $\omega(n)$ die Anzahl der Primteiler von $n$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun $\#\mathcal{A}_q^{'} = \sum\limits_{d|b} \mu(d) \sum\limits_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ dq|a}} 1\ \ \forall\ q \in \mathbb{N},\ ggT(q,b) = 1$, indem wir ein entsprechendes $q$ zunächst fixieren.

Für festes $d|b$ erhalten wir $\sum\limits_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ dq|a}} 1 = \sum\limits_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ d|a,\, q|a}} 1 = \sum\limits_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ q|a,\, d|ggT(a,b)}} 1$ unter Verwendung von

$dq|a \ \Leftrightarrow\ d|a \ \wedge\ q|a$ ($\Leftarrow ggT(q,b) = 1 \ \wedge\ d|b$), woraus sich direkt

$$\sum_{d|b} \mu(d) \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ dq|a}} 1 = \sum_{d|b} \mu(d) \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ q|a,\, d|ggT(a,b)}} 1 = \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ q|a}} \sum_{d|ggT(a,b)} \mu(d) = \sum_{t|b} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ q|a,\, ggT(a,b)=t}} \sum_{d|t} \mu(d) := \sum\nolimits_1$$

ergibt. Aus Möbiusinversion bzgl. des Dirichletprodukts kommt $\sum\limits_{d|t} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } t = 1, \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

für alle $t \in \mathbb{N}$ [7, S.20 Satz 4.4]. Folglich ist $\sum_1 = \sum\limits_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ q|a,\, ggT(a,b)=1}} 1 = \#\mathcal{A}_q^{'}$ und daher

$$(5.1.1) \quad \#\mathcal{A}_q^{'} = \sum_{d|b} \mu(d) \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ dq|a}} 1 \quad \forall\ q \in \mathbb{N},\ ggT(q,b) = 1.$$

Mithilfe der geometrischen Summenformel schließen wir $\frac{1}{dq} \cdot \sum_{0\leq b_1<dq} e(b_1 \cdot \frac{a}{dq}) = \begin{cases} 1, \text{ falls } dq|a \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

für alle $a \in \mathbb{Z},\ d, q \in \mathbb{N}$, sodass nach Definition von $S_{\mathcal{A}}$ auf S.12 und (5.1.1) wegen $S_{\mathcal{A}}(0) = S_{\mathcal{A}}(1) = \#\mathcal{A}$ insbesondere

$$(5.1.2) \quad \#\mathcal{A}'_q = \sum_{d|b} \mu(d) \sum_{a\in\mathcal{A}} \frac{1}{dq} \cdot \sum_{0\leq b_1<dq} e(b_1 \cdot \frac{a}{dq}) = \sum_{d|b} \frac{\mu(d)}{dq} \sum_{0\leq b_1<dq} \sum_{a\in\mathcal{A}} e(a \cdot \frac{b_1}{dq}) =$$
$$= \sum_{d|b} \frac{\mu(d)}{dq} \sum_{0\leq b_1<dq} S_{\mathcal{A}}(\frac{b_1}{dq}) = \sum_{d|b} \frac{\mu(d)}{dq} \sum_{1\leq b_1\leq dq} S_{\mathcal{A}}(\frac{b_1}{dq}) := \sum\nolimits_2$$
$$\forall\ q \in \mathbb{N},\ ggT(q, b) = 1$$

gilt. Sei $q \in \mathbb{N},\ ggT(q, b) = 1$ fixiert. Wir finden

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{q|b_1} \sum\nolimits_2 + \sum_{q\nmid b_1} \sum\nolimits_2 = \sum_{d|b} \frac{\mu(d)}{dq} \sum_{1\leq m\leq d} S_{\mathcal{A}}(\frac{m}{d}) + \sum_{d|b} \frac{\mu(d)}{dq} \sum_{\substack{1\leq b_1\leq dq \\ q\nmid b_1}} S_{\mathcal{A}}(\frac{b_1}{dq})$$

und für festes $d|b$ kommt mit $q' = \frac{q}{s}$ sowie $b'_1 = b_1 \cdot \frac{q'}{q}$ weiter

$$\sum_{\substack{1\leq b_1\leq dq \\ q\nmid b_1}} S_{\mathcal{A}}(\frac{b_1}{dq}) = \sum_{\substack{s|q \\ s<q}} \sum_{\substack{1\leq b_1\leq dq \\ ggT(b_1,q)=s}} S_{\mathcal{A}}(\frac{b_1}{dq}) = \sum_{\substack{s|q \\ s<q}} \sum_{\substack{1\leq b_1\leq dq,\ \frac{b_1}{s}\in\mathbb{N} \\ ggT(\frac{b_1}{s}, \frac{q}{s})=1}} S_{\mathcal{A}}(\frac{b_1/s}{d \cdot q/s})$$
$$= \sum_{\substack{q'|q \\ q'>1}} \sum_{\substack{1\leq b_1\leq dq,\ b_1\cdot\frac{q'}{q}\in\mathbb{N} \\ ggT(b_1\cdot\frac{q'}{q}, q')=1}} S_{\mathcal{A}}(\frac{b_1 \cdot q'/q}{dq'}) = \sum_{\substack{q'|q \\ q'>1}} \sum_{\substack{1\leq b'_1\leq dq' \\ ggT(b'_1,q')=1}} S_{\mathcal{A}}(\frac{b'_1}{dq'}),$$

was nach (5.1.2) insgesamt

$$(5.1.3) \quad \#\mathcal{A}'_q = \sum_{d|b} \frac{\mu(d)}{dq} \sum_{1\leq m\leq d} S_{\mathcal{A}}(\frac{m}{d}) + \sum_{d|b} \frac{\mu(d)}{dq} \sum_{\substack{q'|q \\ q'>1}} \sum_{\substack{1\leq b_1\leq dq' \\ ggT(q', b_1)=1}} S_{\mathcal{A}}(\frac{b_1}{dq'}) := \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4$$
$$\forall\ q \in \mathbb{N},\ ggT(q, b) = 1$$

liefert. Wir halten $q \in \mathbb{N},\ ggT(q, b) = 1$ wieder fest und schätzen zunächst $\sum_4$ ab. Verwenden wir $|S_{\mathcal{A}}(t)| = \#\mathcal{A} \cdot F_X(t)\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}$ und die Dreiecksungleichung, so impliziert dies

$$|\sum\nolimits_4| \leq \frac{\#\mathcal{A}}{q} \cdot \sum_{d|b} \sum_{\substack{q'|q \\ q'>1}} \sum_{\substack{1\leq b_1\leq dq' \\ ggT(q', b_1)=1}} F_X(\frac{b_1}{dq'}).$$

Für fixiertes $d|b$ ist $s \cdot d = b$ mit $s \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\sum_{\substack{q'|q \\ q'>1}} \sum_{\substack{1\le b_1 \le dq' \\ ggT(q',b_1)=1}} F_X(\frac{b_1}{dq'}) \le \sum_{\substack{q'|q \\ q'>1}} \sum_{\substack{1\le b_2 \le bq' \\ ggT(q',b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'}),$$

weil aus $1 \le b_1 \le dq'$, $ggT(q', b_1) = 1$ mit $q'|q$, $q' > 1$ stets $1 \le b_2 := b_1 s \le dq's = bq'$ und $ggT(b_2, q') = ggT(b_1 s, q') = 1$ folgt (beachte: $ggT(s, q') = 1 \Leftarrow s|b \wedge q'|q \wedge ggT(q, b) = 1$), also jeder Summand der linken Seite auch auf der rechten Seite enthalten ist.

Einsetzen in unsere Abschätzung von $|\sum_4|$ liefert wegen $\sum\limits_{d|b} 1 = \tau(b) \ll 1$ insbesondere

$$\sum\nolimits_4 = O(\frac{\#\mathcal{A}}{q} \cdot \sum_{\substack{q'|q \\ q'>1}} \sum_{\substack{1\le b_2 \le bq' \\ ggT(q',\, b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'})).$$

Ferner gilt $\sum_3 = \frac{1}{q} \cdot \sum\limits_{d|b} \frac{\mu(d)}{d} \sum\limits_{1\le m \le d} S_{\mathcal{A}}(\frac{m}{d}) = \frac{1}{q} \cdot \#\mathcal{A}_1'$, indem wir $q = 1$ in (5.1.3) einsetzen und beachten, dass in diesem Fall $\sum_4$ verschwindet. Durch einfache Kombinatorik finden wir $\#\mathcal{A}_1' = \#\{a \in \mathcal{A} \mid ggT(a, b) = 1\} = \kappa \cdot \#\mathcal{A}$, indem wir verwenden, dass in $\mathcal{A}_1'$ alle im $b$-adischen System $k$-stelligen Zahlen mit Ziffern $\neq a_0$ enthalten sind ($X = b^k$), wobei führenden Nullen erlaubt sind, deren Endziffer $n_0$ teilerfremd zu $b$ ist (vgl. S.249). Dies liefert nach (5.1.3)

$$\text{(5.1.4)} \quad \#\mathcal{A}_q' = \kappa \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{q} + O(\frac{\#\mathcal{A}}{q} \cdot \sum_{\substack{q'|q \\ q'>1}} \sum_{\substack{1\le b_2 \le bq' \\ ggT(q',\, b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'})) \quad \forall\ q \in \mathbb{N},\ ggT(q, b) = 1.$$

Summation von (5.1.4) über alle $q \in \mathbb{N}$, $q < Q$, $ggT(q, b) = 1$ liefert mit $q = q'q''$ die Schranke

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{q<Q \\ ggT(q,b)=1}} |\#\mathcal{A}_q' - \kappa \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{q}| &\ll \#\mathcal{A} \cdot \sum_{\substack{1<q'<Q \\ ggT(q',b)=1}} \frac{1}{q'} \sum_{\substack{1\le b_2 \le bq' \\ ggT(q',\, b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'}) \sum_{\substack{q''<\frac{Q}{q'} \\ ggT(q'',\, b)=1}} \frac{1}{q''} \\ &\ll \#\mathcal{A} \cdot \log X \cdot \sum_{\substack{1<q'<Q \\ ggT(q',b)=1}} \frac{1}{q'} \sum_{\substack{1\le b_2 \le bq' \\ ggT(q',\, b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'}),\end{aligned}$$

denn es gilt $\sum\limits_{\substack{q''<\frac{Q}{q'} \\ ggT(q'',\, b)=1}} \frac{1}{q''} \le 1 + \sum\limits_{2\le q''<Q} \frac{1}{q''} \ll \log X$ für entsprechendes $q'$ unter den Summationsbedingungen, indem wir die letzte Summe durch das Integral $\int\limits_1^Q \frac{1}{x}\, dx = \log Q \ll \log X$ nach oben abschätzen und $\log X \ge 1$ sowie $Q \ll X$ verwenden. Dies liefert auch die Existenz eines $s \in \mathbb{N}_0$, $s \ll \log X$ mit $2^s \le Q < 2^{s+1}$ und wir setzen $Q_i := 2^i$ für $0 \le i \le s$, womit insbesondere

$Q_i \leq Q \ll X^{50/77} \cdot (\log X)^{-2A}\ \forall\ 0 \leq i \leq s$ und $[1, Q] \subseteq \dot{\bigcup\limits_{0 \leq i \leq s}} [Q_i, 2Q_i[$ gilt. Letzteres impliziert

$$\sum_{\substack{1<q'<Q \\ ggT(q',b)=1}} \frac{1}{q'} \sum_{\substack{1 \leq b_2 \leq bq' \\ ggT(q',b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'}) \leq \sum_{i=0}^{s} \sum_{\substack{q' \in [Q_i, 2Q_i[ \\ ggT(q',b)=1 \\ q'>1}} \frac{1}{q'} \sum_{\substack{0<b_2 \leq bq' \\ ggT(q',b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'})$$

$$\ll \log X \cdot \sup_{0 \leq i \leq s} \frac{1}{Q_i} \cdot \sum_{\substack{q' \in [Q_i, 2Q_i[ \\ ggT(q',b)=1 \\ q'>1}} \sum_{\substack{0<b_2<bq' \\ ggT(q',b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'})$$

wegen $s + 1 \ll \log X$ und $b_2 \neq bq'$ ($\Leftarrow q' > 1 \ \wedge\ ggT(q',\ b_2) = 1$). Insgesamt kommt

$$(5.1.5) \qquad \sum_{\substack{q<Q \\ ggT(q,b)=1}} |\#\mathcal{A}_q' - \kappa \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{q}| \ll \#\mathcal{A} \cdot (\log X)^2 \cdot \sup_{0 \leq i \leq s} \frac{1}{Q_i} \cdot \sum_{\substack{q' \in [Q_i, 2Q_i[ \\ ggT(q',b)=1 \\ q'>1}} \sum_{\substack{0<b_2<bq' \\ ggT(q',b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'}).$$

Im Folgenden schätzen wir $\sum(i) := \sum\limits_{\substack{q' \in [Q_i, 2Q_i[ \\ ggT(q',b)=1 \\ q'>1}} \sum\limits_{\substack{0<b_2<bq' \\ ggT(q',b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'})$ für festes $0 \leq i \leq s$ mithilfe Lemma 4.1 und Lemma 4.5 nach oben ab. Für $q' \in \mathbb{N},\ ggT(q', b) = 1$ ist

$$\sum_{\substack{0<b_2<bq' \\ ggT(q',b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'}) = \sum_{d|b} \sum_{\substack{0<b_2<bq' \\ ggT(q',b_2)=1,\ ggT(b_2,b)=d}} F_X(\frac{b_2}{bq'}) =$$

$$\sum_{d|b} \sum_{\substack{0<b_2'<\frac{b}{d}\cdot q' \\ ggT(b_2'\cdot d,\ q')=1,\ ggT(b_2', \frac{b}{d})=1}} F_X(\frac{b_2'}{q' \cdot b/d}) = \sum_{d|b} \sum_{\substack{0<b_2'<\frac{b}{d}\cdot q' \\ ggT(\frac{b}{d}\cdot q',\ b_2')=1}} F_X(\frac{b_2'}{q' \cdot b/d})$$

mit $b_2 = b_2' \cdot d$, denn wegen $ggT(q', b) = 1$ gilt $ggT(b_2' \cdot d, q') = 1 \ \Leftrightarrow\ ggT(b_2', q') = 1\ \ \forall\ d|b$.
Somit kommt

$$\sum(i) = \sum_{d|b} \sum_{\substack{q' \in [Q_i, 2Q_i[ \\ ggT(q',b)=1 \\ q'>1}} \sum_{\substack{0<b_2'<\frac{b}{d}\cdot q' \\ ggT(\frac{b}{d}\cdot q',\ b_2')=1}} F_X(\frac{b_2'}{q' \cdot b/d}) \ll \sup_{d|b} \sum_{\substack{q' \cdot \frac{b}{d} \ll Q_i \\ ggT(q',\ b)=1 \\ q'>1}} \sum_{\substack{0<b_2<\frac{b}{d}\cdot q' \\ ggT(\frac{b}{d}\cdot q',\ b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{q' \cdot b/d}),$$

indem wir $\sum\limits_{d|b} 1 = \tau(b) \ll 1$ beachten und bemerken, dass aus $d|b$ bzw. $\frac{b}{d} \leq b \ll 1$ und $q' \ll Q_i$ insbesondere $q' \cdot \frac{b}{d} \ll Q_i$ folgt. Nun sind die folgenden Fälle zu unterscheiden :

<u>1.Fall</u>: $Q_i \geq (\log X)^{f(A)}$ mit $f(A) = \frac{77}{23}A + \frac{154}{23}$

Sei $d|b$ fixiert. Mit $q := q^{'} \cdot \frac{b}{d}$ sowie $a := b_2$ kommt nach Lemma 4.5 (ii) (wähle darin $d = 1$)

$$\sum_{\substack{q^{'} \cdot \frac{b}{d} \ll Q_i \\ ggT(q^{'}, b)=1 \\ q^{'} > 1}} \sum_{\substack{0 < b_2 < \frac{b}{d} \cdot q^{'} \\ ggT(\frac{b}{d} \cdot q^{'}, b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{q^{'} \cdot b/d}) \ll \sum_{q \ll Q_i} \sum_{\substack{0 < a \leq q \\ ggT(a,q)=1}} F_X(\frac{a}{q}) \ll Q_i^{54/77} + \frac{Q_i^2}{X^{50/77}}, \text{ also}$$

$$\sum(i) \ll Q_i \cdot (\frac{1}{Q_i^{23/77}} + \frac{Q_i}{X^{50/77}}).$$

Nach Voraussetzung ist $A \geq 2$ sowie $Q_i/X^{50/77} \ll (\log X)^{-2A} \leq (\log X)^{-A-2}$ und es gilt

$$\frac{1}{Q_i^{23/77}} \leq \frac{1}{(\log X)^{f(A) \cdot 23/77}} = \frac{1}{(\log X)^{A+2}},$$

sodass sich insgesamt $\sum(i) \ll \frac{Q_i}{(\log X)^{A+2}}$ ergibt.

<u>2.Fall</u>: $Q_i < (\log X)^{f(A)}$ mit $f(A) = \frac{77}{23}A + \frac{154}{23}$

Sei $d|b$ fixiert. Setze

$$A := \{(a, q) \in \mathbb{N}^2 \mid q = q^{'} \cdot \frac{b}{d} \ll Q_i, \ ggT(a, q) = 1, \ q^{'} \in \mathbb{N}, \ q^{'} > 1, \ ggT(q^{'}, b) = 1\}.$$

Mit $b_2 = a$ kommt

$$\sum_{\substack{q^{'} \cdot \frac{b}{d} \ll Q_i \\ ggT(q^{'}, b)=1 \\ q^{'} > 1}} \sum_{\substack{0 < b_2 < \frac{b}{d} \cdot q^{'} \\ ggT(\frac{b}{d} \cdot q^{'}, b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{q^{'} \cdot b/d}) \ll Q_i^2 \cdot \sup_{(a,q) \in A} F_X(\frac{a}{q}),$$

denn es wird über $\ll Q_i^2$ Summanden summiert. Wir fixieren $(a, q) \in A$.

Aus $q \ll Q_i < (\log X)^{f(A)}$ folgt insbesondere $q < X^{1/3}$ für hinreichend große $X$ in Abhängigkeit von $A$, d.h. für alle $X > S_1(A)$ mit der unteren Schranke $S_1(A) \in \mathbb{R}^+$.
Einsetzen von $\eta := 0, \ q_1 := q^{'} \geq 2, \ q_2 := \frac{b}{d}$ in Lemma 4.1 liefert die Abschätzung

$$F_X(\frac{a}{q}) \leq \exp(-c_b \cdot \frac{\log X}{\log q}) \text{ mit } c_b \in \mathbb{R}^+ \text{ für alle } X > S_1(A).$$

Ferner können wir eine untere Schranke $S_2(A) \in \mathbb{R}^+$ finden, sodass $\exp(c_b \cdot \frac{\log X}{\log q}) \geq (\log X)^{2f(A)+2}$ für $X > S_2(A)$ gilt, indem wir $\log q \ll_A f(A) \cdot \log(\log X)$ verwenden ($\Leftarrow q \ll Q_i < (\log X)^{f(A)}$). Mit $S_3(A) := \max\{S_1(A), S_2(A)\} \in \mathbb{R}^+$ gilt zusammenfassend

$$\sup_{(a,q)\in A} F_X(\frac{a}{q}) \leq \frac{1}{(\log X)^{2f(A)+2}} \quad \forall\ X > S_3(A).$$

Für $X \leq S_3(A)$ erhalten wir $\sup\limits_{(a,q)\in A} F_X(\frac{a}{q}) \leq 1 \ll_A \frac{1}{(\log X)^{2f(A)+2}}$ mit Eigenschaft (1). Daher ist

$$\sum_{\substack{q' \cdot \frac{b}{d} \ll Q_i \\ ggT(q', b)=1 \\ q' > 1}} \sum_{\substack{0 < b_2 < \frac{b}{d} \cdot q' \\ ggT(\frac{b}{d} \cdot q', b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{q' \cdot b/d}) \ll Q_i^2 \cdot \sup_{(a,q)\in A} F_X(\frac{a}{q}) \ll_A \frac{Q_i^2}{(\log X)^{2f(A)+2}} \leq \frac{Q_i}{(\log X)^{A+2}},$$

wegen $Q_i < (\log X)^{f(A)}$ und $f(A) > A$, also $\sum(i) \ll_A \frac{Q_i}{(\log X)^{A+2}}$ auch im zweiten Fall.

Somit gilt in beiden Fällen $\sum(i) \ll_A \frac{Q_i}{(\log X)^{A+2}}$ und folglich

$$\frac{1}{Q_i} \cdot \sum_{\substack{q' \in [Q_i, 2Q_i[ \\ ggT(q', b)=1 \\ q' > 1}} \sum_{\substack{0 < b_2 < bq' \\ ggT(q', b_2)=1}} F_X(\frac{b_2}{bq'}) \ll_A \frac{1}{(\log X)^{A+2}} \quad \forall\ 0 \leq i \leq s,$$

was eingesetzt in (5.1.5) das gewünschte Resultat liefert.

$\square$

# 6. Konvexe Polytope und Typ II-Bereich

Wir definieren ein konvexes Polytop $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^l$ mit $l \in \mathbb{N}$ als beschränkten Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume $H^-_{f,\,\alpha} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^l \mid f(\vec{v}) \leq \alpha\}$, wobei $f$ eine lineare Abbildung und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, gemäß [10, S.209 Definition 3.1.9, S.211 Theorem 3.1.10]. Fordern wir keine Beschränkheit, so handelt es sich bei $\mathcal{R}$ um ein Polyeder. Im Folgenden sei per se ein Polytop konvex und wir verzichten darauf, zusätzlich das Adjektiv konvex zu nennen.

Es gilt also $\mathcal{R} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} H^-_{f_i,\,\alpha_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie $f_i \in \hom(\mathbb{R}^l, \mathbb{R})$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, für alle $1 \leq i \leq n$.

Dabei ist $f_i(\vec{x}) = \sum\limits_{j=1}^{l} s_{j,i} \cdot x_j$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$ mit $s_{j,i} \in \mathbb{R} \;\; \forall \; 1 \leq j \leq l,\; 1 \leq i \leq n$ und wir setzen $S(\mathcal{R}) := \{s_{j,i} \mid \; 1 \leq j \leq l,\; 1 \leq i \leq n\} \cup \{0\}$. Letzteres erklären wir auch im Falle eines nicht beschränkten endlichen Durchschnitts $\mathcal{R} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} H^-_{f_i,\,\alpha_i}$. Für $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ nennen wir ein Polytop $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^l$ logarithmisch (kurz. log.), falls für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \alpha_i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log X)^{1/2}} \;\Rightarrow\; s_{j,i} \neq -\frac{1}{2} \quad \forall \; 1 \leq j \leq l,\\
&(2) \quad \alpha_i = -(\log(\log(\log(\log X))))^{-1} \quad \text{oder} \quad \alpha_i \text{ ist von } X \text{ unabhängig},\\
&(3) \quad s_{j,i} \text{ ist von } X \text{ unabhängig für alle } 1 \leq j \leq l.
\end{aligned}
$$

Dabei ist Eigenschaft (3) für alle $1 \leq i \leq n$ gleichwertig mit der Unabhängigkeit der Menge $S(\mathcal{R})$ von $X$. Aus dem Zusammenhang wird später stets klar, auf welches $X = b^k$ sich ein logarithmisches Polytop bezieht. Diese Definition ist nützlich, um einige Lücken in [1] zu schließen. Es werden nämlich an einigen Stellen stärkere Versionen der Sätze benötigt als die in [1] bewiesenen Varianten, welche komplett von $X$ unabhängige Polytope voraussetzen.

Für eine beliebige Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^l$, die nicht zwingend ein Polytop sein muss, definieren wir

$$
\mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \text{ mit } \left(\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}\right) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad \text{sowie}
$$

$$
\Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{\substack{n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \\ \left(\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}\right) \in \mathcal{R}}} \prod_{i=1}^{l} \log p_i
$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dabei sind die Primzahlen $p_1, ..., p_l$ weder notwendigerweise kanonisch geordnet noch paarweise verschieden und es gilt $\mathbf{1}_{\mathcal{R}}(0) = \Lambda_{\mathcal{R}}(0) = 0$. Weiter setzen wir

$$S_{\mathcal{R}}(\theta) := \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot e(n\theta) = \sum_{0 \leq n < X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot e(n\theta) \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R}$$

und definieren für eine beliebige Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}$ deren Indikatorfunktion durch

$$\mathbf{1}_C(n) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n \in C \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Im Folgenden verwenden wir die kanonische Primfaktorzerlegung (kurz: PFZ) der Basis $b$ in der Form $b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ mit $r = \omega(b) \in \mathbb{N}$, $e_i \in \mathbb{N}\ \ \forall\ 1 \leq i \leq r$ und schreiben allgemein $\mathbb{P}(n) := \{p \in \mathbb{P} \mid p|n\} \cup \{1\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei insbesondere $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P} \cup \{1\}$, $\mathbb{P}(1) = \{1\}$ und $\mathbb{P}(b) = \{p_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{1\}$ ist. Wenn nicht explizit anders erwähnt, meinen wir folgend mit $p$ oder $p_i$ stets Primzahlen.

Ziel des 6. Kapitels ist der Nachweis von Proposition 6.1 und einiger ähnlicher Hilfssätze, die wir später in Kap.12 und 13 benötigen. Sie stellen ein wichtiges Werkzeug im Beweis von Theorem 1.1 dar und fußen auf den Propositionen 6.2-6.4, welche ihrerseits die Beiträge der Major- und Minor-Arcs zur Kreismethode kontrollieren. Der Beweis von Proposition 6.2 wird erst in Kap.7 erfolgen, während Proposition 6.3 im Wesentlichen in Kap.8 entwickelt wird. Ferner verwenden wir im Nachweis von Proposition 6.4 einige noch zu zeigende Aussagen von Kap.9. Die entsprechenden Hilfssätze für die Propositionen 6.1 und 6.4 werden dieses Mal hinter den Hauptbeweis gestellt.

**Proposition 6.2** (Major Arcs):

Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$, $\delta := (\log(\log X))^{-1}$ und $\eta \in ]0,1]$, $C \in \mathbb{R}^+$ von $X$ unabhängige Konstanten sowie $l \in \mathbb{N}$, $2 \leq l \ll \frac{1}{\eta}$. Ferner seien $a_1, ..., a_{l-1} \in \mathbb{R}^+$ mit $\min\limits_{1\leq i\leq l-1} a_i \geq \frac{\eta}{2}$ und $S := \sum\limits_{i=1}^{l-1} a_i < 1 - \frac{\eta}{2}$ sowie

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(a_1, ..., a_{l-1}) := \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid e_i \in [a_i,\ a_i + \delta^2[\ \forall\ 1 \leq i \leq l-1\ \wedge\ \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta,\ 1[\}.$$

gegeben. Für hinreichend kleine Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$, die nur von $\eta$ und $C$ abhängen, setze

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(C, \eta) :=$$

$$\{0 \leq a < X \mid \exists\, q \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{Z},\ ggT(q,d) = 1,\ q \leq k_2 \cdot (\log X)^C\ :\ |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}\}.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{a\in\mathcal{M}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^C}),$$

wobei die von $\eta$ und $C$ abhängige implizite Konstante im $O$-Glied effektiv bestimmbar ist.

**Beweis:** siehe Kap.7 und S.141.

**Proposition 6.3** (allgemeine Minor-Arcs):

Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$ und $\delta, \eta, C$ sowie $\mathcal{R}$ wie in Proposition 6.2 gegeben und die Menge $\mathcal{E}$ wie in Lemma 8.2 auf S.160 definiert. Dann gilt $\frac{1}{X} \cdot \sum\limits_{\substack{0\leq a<X \\ a\notin\mathcal{E}}} |S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| = O_\eta(\frac{\#\mathcal{A}}{X^\epsilon})$.

**Beweis**:

Die Abschätzung folgt direkt aus Lemma 8.2 (iii) sowie $|S_{\mathcal{A}}(\theta)| = F_X(\theta) \cdot \#\mathcal{A}\ \ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$.

$\square$

**Proposition 6.4** (spezielle Minor Arcs):
Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$, $\delta := (\log(\log X))^{-1}$ gegeben und $\eta \in ]0,1]$ sowie $A \in \mathbb{R},\ A \geq 2$ von $X$ unabhängige Konstanten. Ferner genügen $l \in \mathbb{N},\ 2 \leq l \ll \frac{1}{\eta}$ und $a_1, ..., a_{l-1} \in \mathbb{R}^+$ den Eigenschaften $\min\limits_{1\leq i\leq l-1} a_i \geq \frac{\eta}{2}$ und $S := \sum\limits_{i=1}^{l-1} a_i < 1-\frac{\eta}{2}$ sowie $\sum\limits_{i=1}^{l_1} a_i \in [\frac{9}{25}+\frac{\epsilon}{2}, \frac{17}{40}-\frac{\epsilon}{2}]$ für ein $l_1 \in \mathbb{N},\ l_1 < l$.

Die Mengen $\mathcal{R}$ sowie $\mathcal{M}(C,\eta)$ seien wie in Proposition 6.2 und $\mathcal{E}$ wie in Lemma 8.2 definiert, wobei $C = C(A,\eta) \in \mathbb{R}^+$ hinreichend groß in Abhängigkeit von $A$ und $\eta$ gewählt wird. Insbesondere ergibt sich $C \sim \frac{1}{\eta}$ und es gilt $\frac{1}{X} \cdot |\sum\limits_{\substack{a\in\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| = O_\eta(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^A})$.

**Beweis**:
Sei $a \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq a < X$ fixiert. Nach [15, S.2] gibt es eine Dirichletapproximation der Form

$$(*) \quad |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq \frac{1}{q\cdot(\lfloor X^{1/2}\rfloor + 1)} \leq \frac{1}{qX^{1/2}} \text{ mit } d \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ ggT(d,q) = 1,\ q \leq \lfloor X^{1/2}\rfloor.$$

Unter allen gekürzten Brüchen $\frac{d}{q}$, welche die Dirichletapproximation $(*)$ von $\frac{a}{X}$ erfüllen, betrachten wir nur diejenigen mit kleinstem Nenner $q_1$ und wählen unter diesen den eindeutig bestimmten Bruch $\frac{d_1}{q_1}$ aus, welcher $\frac{a}{X}$ am nächsten liegt. Dieser ist deshalb eindeutig bestimmt, weil aus $|\frac{a}{X} - \frac{d_1}{q_1}| \leq \frac{1}{q_1X^{1/2}}$ und $|\frac{a}{X} - \frac{d_2}{q_1}| \leq \frac{1}{q_1X^{1/2}}$ mit $d_1 \neq d_2$ der Widerspruch

$$\frac{1}{q_1} \leq |\frac{d_2}{q_1} - \frac{d_1}{q_1}| \leq |\frac{a}{X} - \frac{d_2}{q_1}| + |\frac{a}{X} - \frac{d_1}{q_1}| \leq \frac{2}{q_1X^{1/2}}, \text{ also } 10 \leq b^k = X \leq 4$$

folgt. Wir bezeichnen diesen eindeutig bestimmten Bruch mit $\mathcal{D}(\frac{a}{X}) = \frac{d_1}{q_1}$, wobei stets $d_1 \in \mathbb{Z},\ q_1 \in \mathbb{N},\ ggT(d_1,q_1) = 1,\ q_1 \leq \lfloor X^{1/2}\rfloor \leq X^{1/2}$ und $|\frac{a}{X} - \frac{d_1}{q_1}| \leq \frac{1}{q_1X^{1/2}}$ ist.

Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0,\ m \ll \log X$ mit $2^m \leq X^{1/2} < 2^{m+1}$ und wir setzen $Q_i := 2^i$ sowie $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i) := \{0 \leq a < X \mid \mathcal{D}(\frac{a}{X}) = \frac{d}{q},\ Q_i \leq q < 2Q_i\}$ für $i = 0, ..., m$, sodass insbesondere $\{0 \leq a < X\} = \dot{\bigcup\limits_{0\leq i\leq m}} \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i)$ gilt. Dabei ergibt sich die Disjunktheit der Mengen $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i)$ aus jener der Intervalle $[Q_i, 2Q_i[$.

Sei $0 \leq i \leq m$ fixiert. Dann ist $2^{m-i} \leq \frac{X^{1/2}}{Q_i} < 2^{m-i+1}$ und aus $a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i)$ mit $\mathcal{D}(\frac{a}{X}) = \frac{d}{q}$ folgt $|\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq \frac{1}{qX^{1/2}} \leq \frac{X^{1/2}}{Q_iX} < \frac{2^{m-i+1}}{X}$, sodass $|\frac{a}{X} - \frac{d}{q}|$ in genau einem Intervalle $[0, \frac{1}{X}[$ oder $[\frac{E_j}{X}, \frac{2E_j}{X}[$ mit $E_j := 2^j$ für $j = 0, ..., m-i$ enthalten ist. Setzen wir ferner $E_{-1} := 0$, so liegt $a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i)$ folglich in genau einer der Mengen

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i, E_{-1}) := \{a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i) \mid \mathcal{D}(\frac{a}{X}) = \frac{d}{q} \ \wedge \ |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \in [0, \frac{1}{X}[\} \quad \text{oder}$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i, E_j) := \{a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i) \mid \mathcal{D}(\frac{a}{X}) = \frac{d}{q} \ \wedge \ |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \in [\frac{E_j}{X}, \frac{2E_j}{X}[\} \quad \text{für } j = 0, ..., m-i,$$

und diese Mengen sind paarweise disjunkt, was insgesamt $\dot{\bigcup}_{-1\leq j\leq m-i} \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i, E_j) = \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i)$ liefert und zwar für alle $0 \leq i \leq m$.

Daraus folgt $\{0 \leq a < X\} = \dot{\bigcup}_{0\leq i\leq m} \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i) = \dot{\bigcup}_{0\leq i\leq m} \ \dot{\bigcup}_{-1\leq j\leq m-i} \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q_i, E_j)$, wobei offenbar $1 \leq Q_i \leq 2^m \leq X^{1/2}$ und $E_j = 0$ für $j = -1$ sowie $1 \leq E_j = 2^j \leq 2^{m-i} \leq \frac{X^{1/2}}{Q_i}$ für alle $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq m-i$ gilt. Für $1 \leq Q \leq X^{1/2}$ und $E = 0$ oder $1 \leq E \leq \frac{X^{1/2}}{Q}$ definieren wir

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q, E) := \{0 \leq a < X \mid \mathcal{D}(\frac{a}{X}) = \frac{d}{q}, \ Q \leq q < 2Q \ : |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \in \begin{cases} [0, \frac{1}{X}[ & \text{, falls } E = 0 \\ [\frac{E}{X}, \frac{2E}{X}[ & \text{, sonst} \end{cases} \},$$

sodass wir nach obigem wegen $m \ll \log X$ und $\log X \geq 1$ insbesondere

$$(6.4.1) \quad \{0 \leq a < X\} = \bigcup_{Q,E}^{*} \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q, E)$$

gezeigt haben, wobei $\bigcup^{*}_{Q,E}$ bedeutet, dass über $O((\log X)^2)$ disjunkte Mengen mit $1 \leq Q \leq X^{1/2}$ und $E = 0$ oder $1 \leq E \leq \frac{X^{1/2}}{Q}$ vereinigt wird. Wir benötigen hier zwingend die oben erklärte Menge $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ anstatt die in Lemma 9.1 [1, S.22] und dem Beweis von Proposition 6.4 [1, S.23] verwendete Menge $\mathcal{F}$, um die disjunkte Zerlegung (6.4.1) zu gewährleisten.
Nach der Definition in Proposition 6.2 ist

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(C, \eta) :=$$
$$\{0 \leq a < X \mid \exists\, q \in \mathbb{N}, \ d \in \mathbb{Z}, \ ggT(q, d) = 1, \ q \leq k_2 \cdot (\log X)^C \ : \ |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}\}$$

mit nur von $\eta$ und $C$ abhängigen Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$. Sei nun $a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q, E)$ mit $\mathcal{D}(\frac{a}{X}) = \frac{d}{q}$. Für $Q + E \leq k_3 \cdot (\log X)^C$ mit $k_3 = k_3(\eta, C) := \frac{1}{2} \cdot \min\{k_1, k_2\} \in \mathbb{R}^+$ ist $1 \leq Q \leq k_3 \cdot (\log X)^C$ und $E \leq k_3 \cdot (\log X)^C$, sodass aus $|\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq \max\{\frac{1}{X}, \frac{2E}{X}\} \leq \frac{2k_3 \cdot (\log X)^C}{X} \leq \frac{k_1 \cdot (\log X)^C}{X}$ und $q < 2Q \leq 2k_3 \cdot (\log X)^C \leq k_2 \cdot (\log X)^C$ insbesondere $a \in \mathcal{M}$ folgt.
Dies liefert wegen $k_3 = k_3(\eta, C)$ die Implikation

$$(6.4.2) \quad a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\backslash\mathcal{M} \;\Rightarrow\; Q+E \gg_{\eta,C} (\log X)^C.$$

Angenommen es gilt

$$(*) \quad \frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_\eta \frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\varepsilon/200}}$$

für alle Paare $(Q,E)$ mit $1\le Q\le X^{1/2}$ und $E=0$ oder $1\le E\le \frac{X^{1/2}}{Q}$.

Dann liefern (6.4.1), (6.4.2) und $(*)$ die Abschätzung

$$\frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{a\in\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| = \frac{1}{X}\cdot|\sum_{Q,E}^{*}\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| =$$
$$\frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{Q,E\\ Q+E\gg_{\eta,C}(\log X)^C}}^{*}\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \le$$
$$\sum_{\substack{Q,E\\ Q+E\gg_{\eta,C}(\log X)^C}}^{*}\frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_\eta \sum_{\substack{Q,E\\ Q+E\gg_{\eta,C}(\log X)^C}}^{*}\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}} \ll_{\eta,C}$$
$$\sum_{\substack{Q,E\\ Q+E\gg_{\eta,C}(\log X)^C}}^{*}\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(\log X)^{C\cdot\epsilon/200}} \le \sum_{Q,E}^{*}\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{C\cdot\epsilon/200-O(\frac{1}{\eta})}} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{C\cdot\epsilon/200-O(\frac{1}{\eta})-2}},$$

wobei $\sum\limits_{Q,E}^{*}$ bedeutet, dass genau über die $O((\log X)^2)$ Mengen summiert wird, über die in $\bigcup\limits_{Q,E}^{*}$ disjunkt vereinigt wird. Wählen wir nun $C$ in Abhängigkeit von $A$ und $\eta$ derart, dass $C\cdot\epsilon/200-O(\frac{1}{\eta})-2\ge A$ gilt, was für $C=C(\eta)\sim\frac{1}{\eta}$ mit genügend großer Proportionalitätskonstante erfüllt ist (beachte: $A,\epsilon$ sind Konstanten und $\frac{1}{\eta}\ge 1$), so kommt insgesamt

$$\frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{a\in\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_\eta \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^A},\text{ also } \frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{a\in\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| = O_\eta(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^A}).$$

Damit verbleibt der Nachweis von $(*)$. Dazu seien $Q,E$ mit $1\le Q\le X^{1/2}$ und $E=0$ oder $1\le E\le\frac{X^{1/2}}{Q}$ nachfolgend fixiert. Wir definieren

$$\mathcal{R}_1 := \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{l_1} \mid e_i \in [a_i, a_i + \delta^2[ \ \forall\ 1 \leq i \leq l_1\} \text{ und}$$

$$\mathcal{R}_2^+ := \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{l-l_1} \mid e_i \in [a_{l_1+i}, a_{l_1+i} + \delta^2[ \ \forall\ 1 \leq i \leq l - l_1 - 1\},$$

sodass $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2^+ \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\} = \mathcal{R}$ nach Definition von $\mathcal{R}$ in Proposition 6.2 ist. Durch einfache Anwendung der Definitionen von $\Lambda_{\mathcal{R}}, \Lambda_{\mathcal{R}_1}$ und $\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}$ erhalten wir daraus

$$(6.4.3) \quad \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{X^{1-\delta} \leq n_1 m = n < X} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1) \cdot \Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m) \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

welches der letzten Gleichung in [1, S.23] ähnelt. Für $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \leq X$ ergibt sich wegen der eindeutigen PFZ von $n_1$ bzw. $\sum_{n_1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l_1}} 1 \leq l_1!$ sowie $l_1 < l \ll \frac{1}{\eta}$ insbesondere

$$\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1) = \sum_{\substack{n_1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l_1} \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_{l_1}}{\log X}) \in \mathcal{R}_1}} \prod_{i=1}^{l_1} \log p_i \leq \sum_{n_1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l_1}} (\log n_1)^{l_1} \leq l_1! \cdot (\log X)^{l_1} \leq l! \cdot (\log X)^l,$$

also $\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1) \ll_\eta (\log X)^l$. Analog dazu schließen wir $\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m) \ll_\eta (\log X)^l$ für $m \in \mathbb{N}$, $m \leq X$, sodass wir insgesamt

$$(6.4.4) \quad \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1) \ll_\eta (\log X)^l \ \wedge\ \Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m) \ll_\eta (\log X)^l \quad \forall\ n_1, m \in \mathbb{N},\ n_1, m \leq X$$

erhalten. Aus $\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1) \neq 0$ folgt $n_1 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l_1}$ mit $(\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_{l_1}}{\log X}) \in \mathcal{R}_1$, also $\frac{\log p_i}{\log X} \in [a_i, a_i + \delta^2[$ für alle $1 \leq i \leq l_1$, sodass $\sum_{i=1}^{l_1} \frac{\log p_i}{\log X} \in [\sum_{i=1}^{l_1} a_i, \sum_{i=1}^{l_1} a_i + l_1\delta^2[ \subseteq [\frac{9}{25}, \frac{17}{40}]$ ist, denn es gilt
$\sum_{i=1}^{l_1} a_i \in [\frac{9}{25} + \frac{\epsilon}{2}, \frac{17}{40} - \frac{\epsilon}{2}]$ sowie $0 \leq l_1\delta^2 \leq l\delta^2 \ll \frac{1}{\eta} \cdot \delta^2$ bzw. $0 \leq l_1\delta^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für hinreichend große $X$, wenn wir uns an $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ erinnern. Damit ist $n_1 \in [X^{9/25}, X^{17/40}]$, falls $\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1) \neq 0$.

Es existieren $r, s \in \mathbb{N}_0$, $r, s \ll \log X$ mit $2^r \leq \frac{X^{17/40}}{X^{9/25}} < 2^{r+1}$ und $2^s \leq X < 2^{s+1}$.
Setze $N_i := 2^i \cdot X^{9/25}$ für $i = 0, \ldots, r$ und $M_j := 2^j$ für $j = 0, \ldots, s$. Folglich ist jedes $n_1 \in [X^{9/25}, X^{17/40}]$ in genau einem Intervall $[N_i, 2N_i[$ für $i = 0, \ldots, r$ enthalten und jedes $m \in [1, X]$ liegt in genau einem Intervall $[M_j, 2M_j[$ für $j = 0, \ldots, s$, sodass (6.4.3) insbesondere

$$\Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{X^{1-\delta}\leq n_1 m = n < X} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m) = \sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1 m = n < X\\ \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\neq 0}} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m) =$$

$$\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1 m = n < X\\ n_1\in[X^{9/25},X^{17/40}]\\ m\in[1,X]}} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m) = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} \sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1 m = n < X\\ n_1\in[N_i,2N_i[\\ m\in[M_j,2M_j[\\ M_j<\frac{X}{N_i}}} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ liefert, also wegen $r,s\ll\log X$ auch

$$(6.4.5)\quad \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{\substack{N,M\\ M<\frac{X}{N}}}^{*} \sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1 m = n < X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m) \quad \forall\ n\in\mathbb{N},$$

wobei $\sum\limits_{\substack{N,M\\ M<\frac{X}{N}}}^{*}$ bedeutet, dass über die $O((\log X)^2)$ Paare $(N_i,M_j)=(N,M)$ mit $N\in[X^{9/25},X^{17/40}]$ und $1\leq M<\frac{X}{N}$ summiert wird und $x\asymp y$ hier und folgend stets $y\leq x<2y$ meint.
Verwenden wir (6.4.5) sowie die Definition $S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X}) = \sum\limits_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n)e(\frac{-an}{X})\ \forall\ a\in\mathbb{Z}$, so erhalten wir nach einfachen Umformungen

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X}) =$$

$$\sum_{\substack{N,M\\ M<\frac{X}{N}}}^{*} \sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) \sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1 m < X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X}).$$

Angenommen es gilt

$$(**)\quad \frac{1}{X}\cdot\Big|\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) \sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1 m < X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\Big|$$
$$\ll_\eta \frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\varepsilon/200}}$$

für alle Paare $(N,M)$ mit $N\in[X^{9/25},X^{17/40}]$, $1\leq M<\frac{X}{N}$ und alle Paare $(Q,E)$ mit $1\leq Q\leq X^{1/2}$, $E=0$ oder $1\leq E\leq\frac{X^{1/2}}{Q}$. Nach der letzten Gleichung folgt daraus

$$\frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \leq$$

$$\sum_{\substack{N,M\\ M<\frac{X}{N}}}^{*}\frac{1}{X}|\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})| \ll_\eta$$

$$\sum_{\substack{N,M\\ M<\frac{X}{N}}}^{*}\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\varepsilon/200}} \ll \frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})+2}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\varepsilon/200}} = \frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\varepsilon/200}}$$

und daher $(*)$, denn $\sum\limits_{\substack{N,M\\ M<\frac{X}{N}}}^{*} 1 = O((\log X)^2)$ und die 2 wird ins $O(\frac{1}{\eta})$ absorbiert ($\Leftarrow \eta\in]0,1]$).

Es genügt somit der Nachweis von $(**)$. Dazu seien $N\in[X^{9/25},X^{17/40}]$ und $1\leq M<\frac{X}{N}$ sowie $1\leq Q\leq X^{1/2}$ und $E=0$ oder $1\leq E\leq\frac{X^{1/2}}{Q}$ fixiert. Aus $n_1\asymp N$ und $m\asymp M$ folgt $n_1m\leq 4NM\leq 4X<X^3$ und wir bezeichnen das Integral aus *HS1 Prop.6.4* (ii) mit $I(n_1,m)$. Ferner setzen wir auch hier $c:=\frac{1}{\log X}$ und $T:=X^3$ analog zu *HS1 Prop.6.4*, sodass dieser die Gültigkeit von $I(n_1,m)=\begin{cases}1+O(X^{-2}), \text{ falls } X^{1-\delta}\leq n_1m<X\\ O(X^{-2}) \quad , \text{ sonst}\end{cases}$ liefert. Daraus folgt

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot I(n_1,m) =$$

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot(1+O(X^{-2}))+$$

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X \text{ (f)}\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot O(X^{-2}) =$$

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})+$$

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot O(X^{-2})+$$

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X \text{ (f)}\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot O(X^{-2}),$$

wobei die letzten beiden Summanden nach Bildung der jeweiligen Beträge und Addition dieser insgesamt ein $O(\frac{1}{X^2}\cdot\sum\limits_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}}|S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})|\cdot\sum\limits_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}|\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)|)$ darstellen, sodass

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot I(n_1,m)=$$
$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})+$$
$$O(\frac{1}{X^2}\cdot\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}}|S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})|\cdot\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}|\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)|)$$

gilt. Wir schätzen nun das letzte $O$-Glied ab. Aus $n_1\asymp N$ und $m\asymp M$ folgt $n_1,m\leq X$ für hinreichend große $X$, womit wir nach (6.4.4) und $\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}1\asymp NM<X$ die Gültigkeit von

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}}|S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})|\cdot\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}|\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)|\ll_\eta\sum_{a\in\mathcal{E}}|S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})|\cdot(\log X)^{2l}\cdot NM<$$
$$X\cdot(\log X)^{2l}\cdot\sum_{a\in\mathcal{E}}|S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})|$$

erhalten. Aufgrund $F_X(\theta)=\frac{1}{\#\mathcal{A}}\cdot|S_{\mathcal{A}}(\theta)|\ \ \forall\ \theta\in\mathbb{R}$ und Lemma 8.2 (ii) ist $\sum_{a\in\mathcal{E}}|S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})|\ll\#\mathcal{A}\cdot X^{23/80}$, woraus wir

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}}|S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})|\cdot\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}|\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)|\ll_\eta X\cdot X^{23/80}\cdot(\log X)^{2l}\cdot\#\mathcal{A}=$$
$$X^2\cdot\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{X^{57/80}}\ll X^2\cdot\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}}$$

folgern, denn es gilt $Q+E\ll X^{1/2}$ und daher $(Q+E)^{\epsilon/200}\ll X^{\epsilon/400}\ll X^{57/80}$. Damit ist der untersuchte $O$-Term ein $O_\eta(\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}})$, sodass wir

$$\text{(6.4.6)}\quad\frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X\\ n_1\asymp N,\, m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})=$$
$$\frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot I(n_1,m)+$$
$$O_\eta(\frac{1}{X}\cdot\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}})$$

gezeigt haben. Wir definieren $f,g:[-T,T]^2\longrightarrow\mathbb{C}$ durch

$$f(t_1,t_2) = \sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_\mathcal{D}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_\mathcal{A}(\frac{a}{X}) \sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot(n_1m)^{i(t_1-t_2)}\cdot e(\frac{-an_1m}{X}),$$

$$g(t_1,t_2) = (\frac{1}{X^{1-\delta}+\tau})^{c+it_1}\cdot(X-\frac{1}{2})^{c+it_2}\cdot\frac{1}{c+it_1}\cdot\frac{1}{c+it_2}$$

für alle $t_1,t_2\in[-T,T]$, wobei das $\tau\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ aus *HS1 Prop.6.4* (i) stammt und setzen

$$\Omega := \{(a,n_1,m)\mid a\in\mathcal{F}_\mathcal{D}(Q,E)\cap\mathcal{E},\ a\notin\mathcal{M},\ n_1\asymp N,\ m\asymp M\}.$$

Für eine beliebige Funktion $h:\Omega\times[-T,T]^2\longrightarrow\mathbb{C}$ gilt aufgrund der Linearität des (Doppel-)Integrals insbesondere

$$\sum_{(a,n_1,m)\in\Omega}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} h(a,n_1,m,t_1,t_2)\ dt_1\,dt_2 = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\sum_{(a,n_1,m)\in\Omega} h(a,n_1,m,t_1,t_2)\ dt_1\,dt_2.$$

Durch die Substitution $s_1=c+it_1,\ s_2=c+it_2$ folgern wir zunächst

$$I(n_1,m) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\cdot\int_{c-iT}^{c+iT}\int_{c-iT}^{c+iT}(\frac{n_1m}{X^{1-\delta}+\tau})^{s_1}\cdot(\frac{X-\frac{1}{2}}{n_1m})^{s_2}\cdot\frac{ds_1}{s_1}\cdot\frac{ds_2}{s_2} =$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\cdot i^2\cdot\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}(n_1m)^{i(t_1-t_2)}\cdot g(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}(n_1m)^{i(t_1-t_2)}\cdot g(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$$

und daraus weiter mithilfe obiger Eigenschaft des Doppelintegrals

$$\frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_\mathcal{D}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_\mathcal{A}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot I(n_1,m) =$$
$$\frac{1}{X}\cdot\sum_{(a,n_1,m)\in\Omega} S_\mathcal{A}(\frac{a}{X})\,\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\,\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\,e(\frac{-an_1m}{X})\cdot I(n_1,m) =$$
$$\frac{1}{4\pi^2X}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\sum_{(a,n_1,m)\in\Omega} S_\mathcal{A}(\frac{a}{X})\,\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\,\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\,e(\frac{-an_1m}{X})\cdot(n_1m)^{i(t_1-t_2)}\cdot g(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 =$$
$$\frac{1}{4\pi^2X}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} f(t_1,t_2)\cdot g(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

Nutzen wir $|\int\int h(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2|\le\int\int|h(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2$ für Funktionen $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{C}$, so gilt

$$(6.4.7)\quad \frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot I(n_1,m)|\ll$$
$$\frac{1}{X}\cdot\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|f(t_1,t_2)|\cdot|g(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2.$$

Wir schätzen zunächst $\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|g(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2$ ab und verwenden dazu

$$|g(t_1,t_2)|=(\frac{X-1/2}{X^{1-\delta}+\tau})^c\cdot\frac{1}{(c^2+t_1^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(c^2+t_2^2)^{1/2}}\quad\forall\ t_1,t_2\in[-T,T].$$

Wegen $\tau\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ gilt $0<\frac{X-1/2}{X^{1-\delta}+\tau}\le k_4\cdot X^{\delta}$ mit einer Konstanten $k_4\in\mathbb{R}^+$, woraus

$$(\frac{X-1/2}{X^{1-\delta}+\tau})^c\le k_4^c\cdot X^{\delta\cdot c}\ll X^{\delta\cdot c}=\exp(\log X\cdot\delta\cdot c)=\exp(\delta)\ll 1$$

folgt, indem wir uns an $c=\frac{1}{\log X}$ und $\delta=(\log(\log X))^{-1}$ erinnern sowie $k_4^c\ll 1$ beachten. Also ist $|g(t_1,t_2)|\ll\frac{1}{(c^2+t_1^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(c^2+t_2^2)^{1/2}}\ \forall\ t_1,t_2\in[-T,T]$. Dies liefert

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|g(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2\ll\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{(c^2+t_1^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(c^2+t_2^2)^{1/2}}\,dt_1\,dt_2=(\int_{-T}^{T}\frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}}\,dt)^2$$

und nach der Substitution $t=t_3\cdot c$ ($\Rightarrow dt=c\cdot dt_3$) sowie $T=X^3,\ c=\frac{1}{\log X}$ ist

$$0\le\int_{-T}^{T}\frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}}\,dt=\int_{-T/c}^{T/c}\frac{1}{(1+t_3^2)^{1/2}}\,dt_3=2\cdot\int_{0}^{T/c}\frac{1}{(1+t_3^2)^{1/2}}\,dt_3=$$
$$2\cdot(\int_0^1\frac{1}{(1+t_3^2)^{1/2}}\,dt_3+\int_1^{T/c}\frac{1}{(1+t_3^2)^{1/2}}\,dt_3)\le 2\cdot(1+\int_1^{T/c}\frac{1}{t_3}\,dt_3)=2\cdot(1+\log(\frac{T}{c}))=$$
$$2\cdot(1+\log(X^3\cdot\log X))\ll\log X,$$

woraus insgesamt

$$(6.4.8)\quad\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|g(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2\ll(\log X)^2$$

folgt.

Angenommen es gilt

$$(***)\quad \frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot(n_1m)^{i(t_1-t_2)}\cdot e(\frac{-an_1m}{X}) =$$
$$O_\eta(\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}})$$

für alle $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ sowie für alle Paare $(N,M)$ mit $N\in[X^{9/25},X^{17/40}]$, $1\leq M<\frac{X}{N}$ und alle Paare $(Q,E)$ mit $1\leq Q\leq X^{1/2}$, $E=0$ oder $1\leq E\leq\frac{X^{1/2}}{Q}$. Dann gilt insbesondere auch $\frac{1}{X}\cdot|f(t_1,t_2)|\ll_\eta\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}}\ \ \forall\ t_1,t_2\in[-T,T]$, was nach (6.4.7) und (6.4.8) die Abschätzung

$$\frac{1}{X}\cdot|\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{n_1\asymp N\\ m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})\cdot I(n_1,m)|\ll$$
$$\frac{1}{X}\cdot\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|f(t_1,t_2)|\cdot|g(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2\ll_\eta\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}}\cdot\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|g(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2\ll$$
$$\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})+2}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}}=\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}}$$

liefert, indem wir die 2 ins $O(\frac{1}{\eta})$ absorbieren ($\Leftarrow\eta\in]0,1]$). Dies eingesetzt in (6.4.6) liefert

$$\frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{a\in\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E)\cap\mathcal{E}\\ a\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})\sum_{\substack{X^{1-\delta}\leq n_1m<X\\ n_1\asymp N,\ m\asymp M}}\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot e(\frac{-an_1m}{X})=O_\eta(\frac{(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\cdot\#\mathcal{A}}{(Q+E)^{\epsilon/200}})$$

und damit die Gültigkeit von $(**)$. Damit ist noch $(***)$ zu zeigen, wobei wir dazu wieder die entsprechenden Parameter $t_1,t_2,N,M,Q,E$ fixieren.

Aus (6.4.4) ergibt sich $\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)=O_\eta((\log X)^l)$ und $\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)=O_\eta((\log X)^l)$ für alle $n_1,m\in\mathbb{N}$ mit $n_1\asymp N$, $m\asymp M$, denn dann ist auch $n_1,m\leq X$ für hinreichend große $X$. Definieren wir

$$\alpha_{n_1}:=\Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1)\cdot n_1^{i(t_1-t_2)}/(\log X)^{l+1}\in\mathbb{C}\quad\forall\ n_1\in\mathbb{N},\ n_1\asymp N\ \text{ und}$$
$$\beta_m:=\Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m)\cdot m^{i(t_1-t_2)}/(\log X)^{l+1}\in\mathbb{C}\quad\forall\ m\in\mathbb{N},\ m\asymp M,$$

so gilt offenbar $|\alpha_{n_1}|\ll_\eta\frac{1}{\log X}$ und $|\beta_m|\ll_\eta\frac{1}{\log X}$ für alle entsprechenden $n_1,m$, denn $|n_1^{i(t_2-t_1)}|=|m^{i(t_2-t_1)}|=1$. Ist nun $\eta\in]0,1]$ eine von $X$ unabhängige Konstante, so folgt daraus direkt $|\alpha_{n_1}|\ll 1$ und $|\beta_m|\ll 1$ für alle entsprechenden $n_1,m$. Wählen wir später $\eta=\eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 auf S.80-81, so können wir $\eta=\eta(X)$ für hinreichend große $X$ und damit auch die stetig von $\eta = \eta(X)$ abhängigen impliziten Konstanten (besser: Funktionen) in $|\alpha_{n_1}| \ll_\eta \frac{1}{\log X}$ und $|\beta_m| \ll_\eta \frac{1}{\log X}$ wieder als konstant gegenüber $\frac{1}{\log X}$ ansehen. Also ergibt sich ebenso $|\alpha_{n_1}| \ll 1$ und $|\beta_m| \ll 1$ bei Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1.

Dies zur Erklärung, weshalb wir in der Definition von $\alpha_{n_1}$ und $\beta_m$ durch $(\log X)^{l+1}$ anstatt $(\log X)^l$ dividieren, denn letzteres würde nur $|\alpha_{n_1}| \ll_\eta 1$ und $|\beta_m| \ll_\eta 1$ implizieren, woraus wir bei Wahl von $\eta = \eta(X)$ eben nicht auf $|\alpha_{n_1}| \ll 1$ und $|\beta_m| \ll 1$ schließen könnten.

Setzen wir weiter $\gamma_a := \frac{S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})}{\#\mathcal{A} \cdot F_X(\frac{a}{X})}$ $\forall\ a \in \mathbb{Z}$, so ist nach Definition von $F_X$ insbesondere $|\gamma_a| = 1$. Folglich gilt

$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E) \cap \mathcal{E} \\ a \notin \mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) \sum_{\substack{n_1 \asymp N \\ m \asymp M}} \Lambda_{\mathcal{R}_1}(n_1) \cdot \Lambda_{\mathcal{R}_2^+}(m) \cdot (n_1 m)^{i(t_1 - t_2)} \cdot e(\frac{-a n_1 m}{X}) =$$
$$\frac{1}{X} \cdot \#\mathcal{A} \cdot \sum_{\substack{a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E) \cap \mathcal{E} \\ a \notin \mathcal{M}}} F_X(\frac{a}{X}) \cdot \gamma_a \cdot \sum_{\substack{n_1 \asymp N \\ m \asymp M}} \alpha_{n_1} \cdot \beta_m \cdot (\log X)^{2l+2} \cdot e(\frac{-a n_1 m}{X}) =$$
$$\frac{1}{X} \cdot \#\mathcal{A} \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})} \cdot \sum_{\substack{a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E) \cap \mathcal{E} \\ a \notin \mathcal{M}}} \sum_{\substack{n_1 \asymp N \\ m \asymp M}} F_X(\frac{a}{X}) \cdot \alpha_{n_1} \beta_m \gamma_a \cdot e(\frac{-a n_1 m}{X}),$$

denn $2l + 2 \ll \frac{1}{\eta}$, sodass $(***)$ erfüllt ist, wenn

$$|\sum_{\substack{a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q,E) \cap \mathcal{E} \\ a \notin \mathcal{M}}} \sum_{\substack{n_1 \asymp N \\ m \asymp M}} F_X(\frac{a}{X}) \cdot \alpha_{n_1} \beta_m \gamma_a \cdot e(\frac{-a n_1 m}{X})| \ll_\eta \frac{X \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}}{(Q+E)^{\epsilon/200}}$$

für alle Paare $(N, M)$ mit $N \in [X^{9/25}, X^{17/40}]$, $1 \leq M < \frac{X}{N}$ und alle Paare $(Q, E)$ mit $1 \leq Q \leq X^{1/2}$, $E = 0$ oder $1 \leq E \leq \frac{X^{1/2}}{Q}$ gilt. Diese Aussage erhalten wir gerade aus Lemma 9.1 auf S.168, denn das dortige $O(1)$ im Exponent entspricht einem $O(\frac{1}{\eta})$ ($\Leftarrow \eta \in ]0,1]$) und die Voraussetzungen für $\alpha_{n_1}, \beta_m$ und $\gamma_a$ sind nach obigem bereits erfüllt.

$\square$

*HS1 Proposition 6.4*:

Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$, $\delta \in [0,1]$ und $c = \frac{1}{\log X}$ sowie $T = X^3$. Dann gilt

(i) Es gibt ein $\tau \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ mit $\|X^{1-\delta} + \tau\| = \frac{1}{2}$ und

$$X^{1-\delta} \leq n_1 m < X \;\Leftrightarrow\; X^{1-\delta} + \tau < n_1 m < X - \frac{1}{2} \;\forall\; n_1, m \in \mathbb{N}.$$

(ii) Für das $\tau$ aus (i) und alle $n_1, m \in \mathbb{N}$, $n_1, m < X^3$ gilt

$$I(n_1, m) := \frac{1}{(2\pi i)^2} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} \int_{c-iT}^{c+iT} (\frac{n_1 m}{X^{1-\delta} + \tau})^{s_1} \cdot (\frac{X - \frac{1}{2}}{n_1 m})^{s_2} \cdot \frac{ds_1}{s_1} \cdot \frac{ds_2}{s_2} =$$

$$\begin{cases} 1 + O(X^{-2}) & \text{, falls } X^{1-\delta} \leq n_1 m < X \\ O(X^{-2}) & \text{, sonst} \end{cases}.$$

*Beweis*:

Nachweis zu (i): Seien $n_1, m \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Beziehung $n_1 m < X \;\Leftrightarrow\; n_1 m < X - \frac{1}{2}$ folgt direkt aus $X \in \mathbb{N}$.

Für $X^{1-\delta} = s \in \mathbb{N}_0$ wähle $\tau := -\frac{1}{2}$, sodass $X^{1-\delta} + \tau = s - \frac{1}{2}$ und $\|X^{1-\delta} + \tau\| = \frac{1}{2}$ sowie

$$s = X^{1-\delta} \leq n_1 m \;\Leftrightarrow\; s - \frac{1}{2} < n_1 m \;\Leftrightarrow\; X^{1-\delta} + \tau < n_1 m$$

ist, insgesamt also $X^{1-\delta} \leq n_1 m < X \;\Leftrightarrow\; X^{1-\delta} + \tau < n_1 m < X - \frac{1}{2}$ gilt.

Für $X^{1-\delta} \notin \mathbb{N}_0$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}_0$ mit $X^{1-\delta} \in ]s, s+1[$, also $X^{1-\delta} \in ]s, s+\frac{1}{2}]$ oder $X^{1-\delta} \in ]s+\frac{1}{2}, s+1[$. Wir wählen $\tau := s + \frac{1}{2} - X^{1-\delta} \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, sodass in beiden Fällen $\|X^{1-\delta} + \tau\| = \|s + \frac{1}{2}\| = \frac{1}{2}$ und $X^{1-\delta} + \tau = s + \frac{1}{2}$ gilt. Dies liefert

$$X^{1-\delta} \leq n_1 m \;\Leftrightarrow\; s + 1 \leq n_1 m \;\Leftrightarrow\; s + \frac{1}{2} < n_1 m \;\Leftrightarrow\; X^{1-\delta} + \tau < n_1 m$$

und damit $X^{1-\delta} \leq n_1 m < X \;\Leftrightarrow\; X^{1-\delta} + \tau < n_1 m < X - \frac{1}{2}$ auch für $X^{1-\delta} \notin \mathbb{N}_0$.

Nachweis zu (ii): Seien $n_1, m \in \mathbb{N}$, $n_1, m < X^3$ fixiert. Wir wählen das $\tau$ gemäß (i) und setzen $y_1 := \frac{n_1 m}{X^{1-\delta}+\tau} \in \mathbb{R}^+$ sowie $y_2 := \frac{X - \frac{1}{2}}{n_1 m} \in \mathbb{R}^+$, wobei $y_1, y_2 \neq 1$ sind, da $n_1 m \in \mathbb{N}$ und

$\|X^{1-\delta}+\tau\| = \|X-\frac{1}{2}\| = \frac{1}{2}$, also $X^{1-\delta}+\tau,\ X-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ist. Im Folgenden zeigen wir

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y_1^{s_1}}{s_1}\,ds_1\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y_2^{s_2}}{s_2}\,ds_2 = \begin{cases}1+O(X^{-2}) & \text{, falls } y_1, y_2 > 1\\ O(X^{-2}) & \text{, sonst}\end{cases}.$$

Dazu verwenden wir die Formel von Perron [2, S.26], die speziell

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\,ds = \delta(y)+O\Big(\frac{y^c}{T\cdot|\log y|}\Big)$$

mit $\delta(y) := \begin{cases}0 & \text{, falls } 0<y<1\\ 1 & \text{, falls } y>1\end{cases}$ für alle $y\in\mathbb{R}^+,\ y\neq 1$ liefert und schätzen zunächst den Fehlerterm $O(\frac{y^c}{T\cdot|\log y|})$ für $y=y_1$ und $y=y_2$ ab.

Es ist $y_1 = \frac{n_1 m}{X^{1-\delta}+\tau} \leq \frac{n_1 m}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot n_1 m < 2\cdot X^6 < X^7$ ($\Leftarrow X \geq b$) und $y_2 = \frac{X-\frac{1}{2}}{n_1 m} \leq X$, also $\log y_1 \leq 7\cdot\log X$ und $\log y_2 \leq \log X$, sodass $0 \leq y_1^c = \exp(\log y_1\cdot c) \leq \exp(7\cdot\log X\cdot\frac{1}{\log X}) = e^7$ und $0 \leq y_2^c = \exp(\log y_2\cdot c) \leq \exp(\log X\cdot\frac{1}{\log X}) = e$ ($\Leftarrow c = \frac{1}{\log X} > 0$) gilt, in beiden Fällen also

$$(1) \quad y_1^c = O(1) \quad \wedge \quad y_2^c = O(1).$$

Nun zeigen wir $(1+\gamma)\cdot|\log x| \geq |x-1|\ \ \forall\ x\in[1-\gamma, 1+\gamma]$ mit $\gamma\in[0,1[$.

Sei $f:[1-\gamma,1+\gamma]\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x) = (1+\gamma)\cdot\log x-(x-1)$. Dann ist $f(1)=0$ und $f'(x) = (1+\gamma)\cdot\frac{1}{x}-1 \geq 0\ \ \forall\ x\in[1-\gamma,1+\gamma]$, womit $f$ monoton steigend ist und daher $f(x)\leq 0\ \ \forall\ x\in[1-\gamma,1]$ und $f(x)\geq 0\ \ \forall\ x\in[1,1+\gamma]$ gilt. Daraus folgt

$$(1+\gamma)\cdot\log x-(x-1)\leq 0 \text{ bzw. } (1+\gamma)\cdot|\log x| \geq |x-1| \quad \forall\ x\in[1-\gamma,1] \text{ sowie}$$
$$(1+\gamma)\cdot\log x-(x-1)\geq 0 \text{ bzw. } (1+\gamma)\cdot|\log x| \geq |x-1| \quad \forall\ x\in[1,1+\gamma],$$

insgesamt also $(1+\gamma)\cdot|\log x| \geq |x-1|\ \ \forall\ x\in[1-\gamma,1+\gamma]$. Wählen wir nun $\gamma=\frac{1}{2}$, so gilt

$$(2) \quad \frac{1}{|\log x|} \ll \frac{1}{|x-1|} \quad \forall\ x\in\dot{U}_{0.5}(1),$$

wobei $\dot{U}_{0.5}(1) = [0.5,\ 1.5]\backslash\{1\}$. Mithilfe (2) schätzen wir $\frac{1}{|\log y|}$ für $y=y_1$ und $y=y_2$ ab.

Es gilt $|y_1 - 1| = |\frac{n_1 m - X^{1-\delta} - \tau}{X^{1-\delta}+\tau}| \geq \frac{1/2}{X^{1-\delta}+\tau} \gg \frac{1}{X}$, denn $|n_1 m - X^{1-\delta} - \tau| \geq \frac{1}{2}$ wegen $n_1 m \in \mathbb{N}$ und $\|X^{1-\delta} + \tau\| = \frac{1}{2}$. Also ist $\frac{1}{|y_1 - 1|} \ll X$ und daher $\frac{1}{|\log y_1|} \ll X$, falls $y_1 \in \dot{U}_{0.5}(1)$.
Im Fall $y_1 \notin \dot{U}_{0.5}(1)$ ist offenbar auch $\frac{1}{|\log y_1|} \ll 1 \ll X$ (beachte: $y_1 \in \mathbb{R}^+$, $y_1 \neq 1$), sodass wir in beiden Fällen $\frac{1}{|\log y_1|} \ll X$ erhalten.

Ferner ist $|y_2 - 1| = |\frac{X - 1/2 - n_1 m}{n_1 m}| \gg \frac{1}{X}$, denn $|\frac{X-1/2-n_1 m}{n_1 m}| \gg \frac{1}{X} \Leftrightarrow$ $X \gg |\frac{n_1 m}{X - 1/2 - n_1 m}| = |\frac{X - \frac{1}{2}}{X - 1/2 - n_1 m} - 1|$ und letzteres ist wegen $|\frac{X-\frac{1}{2}}{X-1/2-n_1 m} - 1| \leq \frac{|X - \frac{1}{2}|}{|X - 1/2 - n_1 m|} + 1$ sowie $|X - 1/2 - n_1 m| \geq \frac{1}{2}$ ($\Leftarrow \|X - \frac{1}{2}\| = \frac{1}{2} \wedge n_1 m \in \mathbb{N}$) erfüllt.
Analog zu oben schließen wir aus $|y_2 - 1| \gg \frac{1}{X}$ auf die Gültigkeit von $\frac{1}{|\log y_2|} \ll X$ und haben

$$(3) \qquad \frac{1}{|\log y_1|} \ll X \quad \wedge \quad \frac{1}{|\log y_2|} \ll X$$

gezeigt. Nach (1) und (3) mit $T = X^3$ ist

$$O(\frac{y_1^c}{T \cdot |\log y_1|}) = O(X^{-2}) \quad \wedge \quad O(\frac{y_2^c}{T \cdot |\log y_2|}) = O(X^{-2}),$$

was mit $y = y_1 \neq 1$ bzw. $y = y_2 \neq 1$ nach $(*)$ gerade

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y_1^{s_1}}{s_1} \cdot \frac{y_2^{s_2}}{s_2} \, ds_1 \, ds_2 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y_1^{s_1}}{s_1} \, ds_1 \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y_2^{s_2}}{s_2} \, ds_2 =$$
$$(\delta(y_1) + O(X^{-2})) \cdot (\delta(y_2) + O(X^{-2})) = \begin{cases} 1 + O(X^{-2}) & \text{, falls } y_1, y_2 > 1 \\ O(X^{-2}) & \text{, sonst} \end{cases}$$

liefert. Aus der Definition von $y_1, y_2$ sowie (i) folgt

$$y_1, y_2 > 1 \Leftrightarrow X - \frac{1}{2} > n_1 m > X^{1-\delta} + \tau \Leftrightarrow X > n_1 m \geq X^{1-\delta},$$

und schließlich das gewünschte Resultat (ii).

$\square$

**Proposition 6.1:**

Sei $X = b^k$ ($k \in \mathbb{N}$), $\delta := (\log(\log X))^{-1}$ und $\eta \in ]0,1]$ eine von $X$ unabhängige Konstante sowie $l_1, l \in \mathbb{N}$, $l_1 \leq l \ll \frac{1}{\eta}$. Ferner sei

$$\mathcal{R} \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^l \mid \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$$

ein logarithmisches Polytop. Dann gilt

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(a) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) + O_{S(\mathcal{R}),\eta}\left(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}\right),$$

wobei das $O$-Glied ein $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ ist, falls wir $\eta = \eta(X)$ gemäß folgender Bemerkung 1 wählen.

**Bemerkung 1 zu Prop.6.1-6.4**:

Die von $\eta$ und $C$ abhängigen impliziten Konstanten in den Fehlertermen/$O$-Gliedern von Prop. 6.1-6.4, folgend Fehlertermkonstanten genannt, und auch alle übrigen von $\eta$ und $C$ abhängigen Konstanten in den Prop. 6.1-6.4 sowie deren Beweise sind allesamt effektiv berechenbar und hängen ferner stetig von $\eta$ bzw. $C$ ab. Um diese Eigenschaft zu gewährleisten, ist es zwingend erforderlich, anstatt des Satzes von Siegel-Walfisz im Beweis von Proposition 6.2 eben die in *HS1 Prop.6.2* dargestellte effektive Version zu nutzen, wobei die darin enthaltene effektive Konstante $C_1(C)$ ebenfalls stetig von $C$ abhängt (vgl. S.138).

Eine exakte und effektive Berechnung der Fehlertermkonstanten würde hier den Rahmen sprengen. Jedoch gibt uns die stetige Abhängigkeit dieser Fehlertermkonstanten von $\eta$ und $C$ Raum zu folgender Überlegung :

Die Einschränkung in Prop. 6.1-6.4, dass $\eta$ und $C$ von $X$ unabhängige Konstanten sind, dient vor allem einer einfacheren Beweisdarstellung. Wir setzen wieder $\delta := (\log(\log X))^{-1}$.
Wählen wir $\eta := \eta(X) > 0$ als Nullfolge und $C := C(X) \sim \frac{1}{\eta(X)}$ nun in Abhängigkeit von $X$, wobei letzteres aus Proposition 6.4 kommt, zum Beispiel $\eta := \eta(X) = (\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$, derart, dass sich $\eta$ und $C$ bzw. $\frac{1}{\eta}$ hinreichend langsam gegenüber der $X$-, $\log X$- und $\delta^{-1}$-Änderung verändern, bei hinreichend großen $X$ bzw. $X \longrightarrow \infty$, so können wir $\eta$ und $C$ bzw. $\frac{1}{\eta}$ stets als Konstanten gegenüber $X$, $\log X$ und $\delta^{-1}$ auffassen.

Ferner können wir dann auch die von $\eta$ und $C$ stetig abhängigen Fehlertermkonstanten oder in diesem Fall besser -funktionen in den Prop. 6.1-6.4 als konstant gegenüber $X$, $\log X$ und $\delta^{-1}$ annehmen, für $X \longrightarrow \infty$, denn eine geringe $\eta$-bzw. $C$-Änderung verursacht wegen der Stetigkeit auch eine kontrollierbare (geringe) Änderung der Fehlertermfunktionen. Je nach Struktur der Fehlertermfunktionen schalten wir einfach weitere Logarithmen in die Definition von $\eta(X)$ vor, um ein hinreichend langsames Wachstum dieser Funktionen zu generieren. Diese stetig von $\eta$ und $C$ abhängigen Fehlertermfunktionen haben die Form exp(...), wobei in (...) Ausdrücke mit mehreren ineinander verschachtelten log-Funktionen stehen.

Die gleichen Aussagen erhalten wir auch für jede hier auftretende Funktion $f = f(\eta, C) = f(X)$, die stetig von $\eta$ und $C$ abhängt, wie z.B. für die Konstante/Funktion $k = k(S(\mathcal{R}), \eta)$ auf S.114.

Damit wird die Gültigkeit der Propositionen 6.1-6.4 auch in dem Fall plausibel, wenn wir $\eta(X)$ und $C(X) \sim \frac{1}{\eta(X)}$ wie oben beschrieben in Abhängigkeit von $X$ wählen. Insbesondere können wir dann die $O$-Glieder der Propositionen 6.1-6.4 als $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ interpretieren, indem wir beachten, dass $A, C \geq 2$ und $X^\epsilon \gg (\log X)^2$ gilt sowie $S(\mathcal{R})$ unabhängig von $X$ ist.

Die Wahl von $\eta(X) = (\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$ ist dabei nicht obligatorisch. Der Kehrwert eines 1000-fach iteriertem Logarithmus würde der an $\eta = \eta(X)$ und $C = C(X) \sim \frac{1}{\eta(X)}$ oben gestellten Bedingung noch eher genügen. Wir haben uns der Einfachheit halber für diese Wahl entschieden, wobei sich diese Wahl später in Proposition 12.1 als geeignet erweist und sich auch in Eigenschaft (2) der Definition des logarithmischen Polytops wieder spiegelt, d.h. allgemein ist darin $\alpha_i = -\eta(X)$ im ersten Fall von (2) zu setzen. Mit dieser Definition ändert sich bei einer anderen Wahl von $\eta(X)$ auch nichts im Beweis zu Proposition 6.1 und den entsprechenden Hilfssätzen, sofern die oben gestellten Bedingungen an $\eta(X)$ und $C(X) \sim \frac{1}{\eta(X)}$ erfüllt bleiben.

Da der Beweis zu Proposition 6.1 einige Mehrarbeit im Vergleich zu [1, S.17] fordert und uns darüber hinaus auch entscheidende Ideen für weiterführende Hilfssätze liefert, widmen wir ihm und seinen begleitenden Hilfsätzen ein ganzes Teilkapitel von Kap.6.

## 6.1 Beweis zu Proposition 6.1

I. Wir erinnern uns an $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{A}(X) = X^c$ mit $c = \frac{\log(b-1)}{\log b}$ sowie die Definition

$$\mathcal{A}(x) := \{a \in \mathcal{A}(X) \mid a < x\} = \{a \in \mathcal{A} \mid a < x\}$$

und die Abschätzung $\#\mathcal{A}(x) \ll x^c$ aus Kapitel 4, für alle $x \in \mathbb{R}^+$, $b \leq x < X = b^k$. Wegen $\mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) \leq 1 \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}_0$ gilt daher für hinreichend große $X$ mit $b \leq X^{1-\delta} < X$ ($\Leftarrow$ Def. $\delta = \delta(X)$)

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ a<X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(a) \leq \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ a<X^{1-\delta}}} 1 = \#\mathcal{A}(X^{1-\delta}) \ll (X^{1-\delta})^c = (X^c)^{1-\delta} = \#\mathcal{A}(X)^{1-\delta} = \#\mathcal{A}^{\,1-\delta}.$$

Ferner ergibt sich für hinreichend große $X$ insbesondere $c \cdot \log X > 2 \cdot (\log(\log X))^2$ bzw. $c \cdot \log X \cdot \delta > 2 \cdot \log(\log X)$ und daher $(X^c)^\delta > (\log X)^2 \geq (\log\log X) \cdot \log X$, was schließlich

$$\#\mathcal{A}^{\,1-\delta} = \frac{\#\mathcal{A}}{\#\mathcal{A}^\delta} = \frac{\#\mathcal{A}}{(X^c)^\delta} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{\log(\log X) \cdot \log X} = \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}$$

liefert. Fassen wir beide Abschätzungen zusammen, so finden wir

$$(6.1.1) \qquad \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ a<X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(a) \ll \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}.$$

Setzen wir $\mathcal{B}(x) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq n < x\}$ für $x \in \mathbb{R}^+$, $x \geq 1$ und schreiben kürzer $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$, so gilt $\#\mathcal{B}(x) \asymp x^1 \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}^+$, $x \geq 1$ und $\#\mathcal{B} = X$. Aus der gleichen Idee wie oben mit $\mathcal{B}$ anstatt $\mathcal{A}$ sowie 1 anstatt $c$ kommt $\sum_{0\leq n<X^{1-\delta}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{\substack{n\in\mathcal{B} \\ n<X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) \ll \frac{\delta\cdot\#\mathcal{B}}{\log X} = \frac{\delta\cdot X}{\log X}$, sodass

$$(6.1.2) \quad \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0\leq n<X^{1-\delta}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) \ll \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}$$

ist. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &:= \mathcal{R} \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\} \\ &\subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[ \;\wedge\; \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25}+\epsilon, \frac{17}{40}-\epsilon]\}. \end{aligned}$$

Für $m = p_1 \cdot ... \cdot p_l$ ist insbesondere $X^{1-\delta} \leq m < X \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{l} \frac{\log p_i}{\log X} \in [1-\delta, 1[$, sodass wir

$$(6.1.3) \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(a) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a) + \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a < X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(a) \quad \text{und}$$

$$\sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n) + \sum_{0 \leq n < X^{1-\delta}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n)$$

mithilfe der Definition von $\mathcal{R}'$ sehen. Angenommen es gilt

$$(*) \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n) + O_{S(\mathcal{R}),\eta}\left(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}\right).$$

Aus (6.1.1)-(6.1.3) folgt dann

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(a) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a) + \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a < X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(a) = \\
&\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n) + O_{S(\mathcal{R}),\eta}\left(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}\right) + O\left(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}\right) = \\
&\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X^{1-\delta}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) + O_{S(\mathcal{R}),\eta}\left(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}\right) = \\
&\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) + O_{S(\mathcal{R}),\eta}\left(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}\right),
\end{aligned}$$

sodass der Nachweis von $(*)$ genügt. Dabei können wir $\mathcal{R}' \neq \emptyset$ annehmen, denn ansonsten ist $(*)$ trivialerweise erfüllt, womit auch der Fall $l_1 = l$ für hinreichend große $X$ ausscheidet ($\Leftarrow 1 - \delta > \frac{17}{40} - \epsilon$), also $l_1 < l$ ist. Weiter erklären wir

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{R}} &:= \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid \exists\, e_l \in \mathbb{R} : \{\vec{e}\} \times \{e_l\} \in \mathcal{R}'\} \\
&= \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid \exists\, e_l \in [1 - \delta - \sum_{i=1}^{l-1} e_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} e_i[ : \{\vec{e}\} \times \{e_l\} \in \mathcal{R}\} \\
&\subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^{l-1} \mid \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon] \ \wedge \ \sum_{i=1}^{l-1} e_i \leq 1 - \eta\}
\end{aligned}$$

als die Projektion von $\mathcal{R}'$ auf die ersten $l-1$ Koordinaten und

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{R}}(\delta) &:= \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid \{\vec{e}\} \times [1 - \delta - \sum_{i=1}^{l-1} e_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} e_i[ \subseteq \mathcal{R}\} \\
&\subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^{l-1} \mid \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon] \ \wedge \ \sum_{i=1}^{l-1} e_i \leq 1 - \eta - \delta\},
\end{aligned}$$

wobei wir die Definitionen von $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R} \subseteq [\eta, 1]^l$ sowie $l_1 < l$ beachten und offenbar $\overline{\mathcal{R}}(\delta) \subseteq \overline{\mathcal{R}}$ ist. Aus $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \subseteq [\eta, 1]^l$ und den Definitionen von $\mathcal{R}'$ sowie $\overline{\mathcal{R}}$ folgt

$$\text{(6.1.4)} \quad \begin{aligned} \mathcal{R}' &\subseteq (\overline{\mathcal{R}} \times [\eta, 1]) \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\} \\ &\subseteq (\overline{\mathcal{R}} \times [0, 1]) \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}. \end{aligned}$$

Setze $m := \lfloor \frac{1-\eta/2}{\delta^2} \rfloor \in \mathbb{N}_0$, $m < \delta^{-2}$ und $Z := \{\frac{\eta}{2} + i \cdot \delta^2 \mid i = 0, ..., m\}$ sowie $S(z) := [z, z + \delta^2[$ für $z \in Z$. Dann sind die Intervalle $S(z)$ für verschiedene $z \in Z$ disjunkt und es gilt $\dot{\bigcup}_{z \in Z} S(z) \supseteq [\frac{\eta}{2}, 1]$ wegen $m + 1 > \frac{1-\eta/2}{\delta^2}$. Für jedes $(l-1)$-Tupel $(z_1, ..., z_{l-1}) \in Z^{l-1}$ definieren wir den Würfel $W$ mit der Seitenlänge $\delta^2$ als kartesisches Produkt in der Form

$$W = W(z_1, ..., z_{l-1}) := S(z_1) \times ... \times S(z_{l-1}),$$

sodass für verschiedene Tupel $(z_1, ..., z_{l-1}) \in Z^{l-1}$ aufgrund der paarweisen Disjunktheit der Intervalle $S(z)$ auch die induzierten Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ disjunkt sind. Sprechen wir folgend (vor allem in Kap. VI-VII) vom kartesischen Produkt von $W$, meinen wir damit stets obige Form. Bezeichnet $\dot{\bigcup}_W$ die disjunkte Vereinigung über alle Würfel $W$, so gilt

$$\dot{\bigcup_{(z_1,...,z_{l-1}) \in Z^{l-1}}} W(z_1, ..., z_{l-1}) \supseteq [\frac{\eta}{2}, 1]^{l-1} \text{ bzw. kürzer } \dot{\bigcup_{W}} W \supseteq [\frac{\eta}{2}, 1]^{l-1}.$$

Ferner gibt es genau $(m+1)^{l-1} = O_\eta(\delta^{-2l+2})$ solcher Würfel $W$ ($\Leftarrow m + 1 \ll \delta^{-2}$, $l \ll \frac{1}{\eta}$). Für jeden dieser Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) = S(z_1) \times ... \times S(z_{l-1})$ definieren wir

$$\begin{aligned} W^+ &:= W \times [0, 1] \ \cap \ \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\} \\ &= S(z_1) \times ... \times S(z_{l-1}) \times [0, 1] \ \cap \ \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}, \end{aligned}$$

womit die Mengen $W^+$ für verschiedene Würfel $W$ disjunkt sind. Nun ist $\overline{\mathcal{R}} \subseteq [\eta, 1]^{l-1} \subseteq \dot{\bigcup}_W W$ und daher $\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}} \cap \dot{\bigcup}_W W = \dot{\bigcup}_W (W \cap \overline{\mathcal{R}}) \subseteq \dot{\bigcup}_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} W$, sodass nach (6.1.4) insbesondere

$$\text{(6.1.5)} \quad \begin{aligned} \mathcal{R}' &\subseteq (\overline{\mathcal{R}} \times [0, 1]) \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\} \\ &\subseteq \dot{\bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset}} [W \times [0, 1] \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}] = \dot{\bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset}} W^+ \end{aligned}$$

gilt. Aus $W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ erhalten wir $W^+ \subseteq \mathcal{R}'$, was wir wie folgt sehen.

Für $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_l \end{pmatrix} \in W^+$ ist $\vec{e}\,' = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{l-1} \end{pmatrix} \in W$ und $\sum\limits_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[$, sodass

$e_l \in [1-\delta-\sum\limits_{i=1}^{l-1} e_i,\ 1-\sum\limits_{i=1}^{l-1} e_i[$ gilt. Wegen $\vec{e}\,' = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{l-1} \end{pmatrix} \in W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ ist

$\{\vec{e}\,'\} \times [1-\delta-\sum\limits_{i=1}^{l-1} e_i,\ 1-\sum\limits_{i=1}^{l-1} e_i[ \subseteq \mathcal{R}$ und folglich $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_l \end{pmatrix} = \{\vec{e}\,'\} \times \{e_l\} \in \mathcal{R}$, da

$e_l \in [1-\delta-\sum\limits_{i=1}^{l-1} e_i, 1-\sum\limits_{i=1}^{l-1} e_i[$ gilt, wobei letzteres direkt $\vec{e} \in \{\,\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum\limits_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\,\}$ impliziert. Somit ist $\vec{e} \in \mathcal{R}'$, also insgesamt $W^+ \subseteq \mathcal{R}'$ für $W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$. Dies liefert nach (6.1.5)

$$\text{(6.1.6)} \qquad \dot{\bigcup_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} W^+ \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \dot{\bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset}} W^+.$$

Wir wählen $X$ hinreichend groß, sodass $l_1\delta^2 \leq \delta + l\delta^2 \leq \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\eta}{2}\}$ gilt, wobei wir an $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ erinnern und beachten, dass $\eta \in ]0,1]$ und $\epsilon > 0$ von $X$ unabhängige Konstanten sind sowie $l_1 < l \ll \frac{1}{\eta}$ gilt. Dies ist auch bei Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 möglich, also z.B. für $\eta = \eta(X) = (\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$.

Aus $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ folgt die Existenz eines Vektors $\vec{v} \in W$ mit $\vec{v} \in \overline{\mathcal{R}}$, sodass insbesondere $\sum\limits_{i=1}^{l-1} v_i \leq 1-\eta$ und $\sum\limits_{i=1}^{l_1} v_i \in [\frac{9}{25}+\epsilon, \frac{17}{40}-\epsilon]$ gilt.
Wegen $v_i \in S(z_i) = [z_i, z_i+\delta^2[\ \forall\ 1 \leq i \leq l-1$ ist $\sum\limits_{i=1}^{l_1} z_i \leq \sum\limits_{i=1}^{l_1} v_i \leq \sum\limits_{i=1}^{l_1} z_i + l_1\delta^2$ und daher

$$\frac{9}{25} + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{9}{25} + \epsilon - l_1\delta^2 \leq \sum_{i=1}^{l_1} v_i - l_1\delta^2 \leq \sum_{i=1}^{l_1} z_i \leq \sum_{i=1}^{l_1} v_i < \frac{17}{40} - \frac{\epsilon}{2}.$$

Ferner ist $\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i \leq \sum\limits_{i=1}^{l-1} v_i \leq 1-\eta \leq 1-\frac{\eta}{2}-\delta-l\delta^2$, denn $\delta + l\delta^2 \leq \frac{\eta}{2}$. Insgesamt finden wir

$$\text{(6.1.7)} \qquad \frac{\eta}{2} \leq 1-\delta-l\delta^2-\sum_{i=1}^{l-1} z_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{l-1} z_i < 1-\frac{\eta}{2} \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{l_1} z_i \in [\frac{9}{25}+\frac{\epsilon}{2}, \frac{17}{40}-\frac{\epsilon}{2}]$$

für $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

Für $W(z_1, ..., z_{l-1}) \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ ist nach Definition insbesondere

$$W^+ = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid e_i \in [z_i, z_i + \delta^2[\ \forall\ 1 \le i \le l-1,\ e_l \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}.$$

Aus $e_i \in [z_i, z_i + \delta^2[\ \forall\ 1 \le i \le l-1$ und $\sum\limits_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[$ folgt
$e_l \in [1-\delta-\sum\limits_{i=1}^{l-1} e_i,\ 1-\sum\limits_{i=1}^{l-1} e_i[ \subseteq [1-\delta-(l-1)\delta^2-\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1-\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i[ \subseteq [\frac{\eta}{2}, 1] \subseteq [0,1]$ ($\Leftarrow$ (6.1.7)), woraus sich mithilfe von $W = [z_1, z_1+\delta^2[\times ... \times [z_{l-1}, z_{l-1}+\delta^2[$ und (6.1.7) die Gültigkeit von

(6.1.8) $\quad W^+ \subseteq W \times [\dfrac{\eta}{2}, 1]$ für $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ sowie

(6.1.9) $\quad W^+ = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid e_i \in [z_i, z_i+\delta^2[\ \forall\ 1 \le i \le l-1,\ \sum\limits_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}$

für $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, wobei dann

$\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i < 1 - \dfrac{\eta}{2},\ \sum\limits_{i=1}^{l_1} z_i \in [\dfrac{9}{25} + \dfrac{\epsilon}{2}, \dfrac{17}{40} - \dfrac{\epsilon}{2}]$ und $\min\limits_{1 \le i \le l-1} z_i \ge \dfrac{\eta}{2}$ ist,

ergibt. Weiter gilt für $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ insbesondere
$\frac{\eta}{2} \le 1-\delta-l\delta^2-\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i < 1-\delta^2-\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i < 1-\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i < 1$ ($\Leftarrow$ (6.1.7)), sodass es ein eindeutig bestimmtes Element $z \in [1-\delta^2-\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i, 1-\sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i[ \cap Z$ gibt, welches wir mit $g(W)$ bezeichnen. Die Eindeutigkeit /Existenz ergibt sich dabei aus der Definition von $Z$ sowie der Intervallbreite $\delta^2$.

II. Sei $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ gegeben. Wir zeigen $\sum\limits_{0 \le n < X} \mathbf{1}_{W \times [\frac{\eta}{2}, 1]}(n) \ll_\eta \frac{\delta^{2l-2} X}{\log X}$.

Es gilt

$$\sum_{0 \le n < X} \mathbf{1}_{W \times [\frac{\eta}{2},1]}(n) = \sum_{\substack{n = p_1 \cdot ... \cdot p_l < X \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W \times [\frac{\eta}{2},1]}} 1 \le \sum_{\substack{m = p_1 \cdot ... \cdot p_{l-1} < X \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_{l-1}}{\log X}) \in W}} \sum_{X^{\eta/2} \le p_l < \frac{X}{m}} 1 \le$$
$$\sum_{m < X^{1-\eta/2}} \mathbf{1}_W(m) \sum_{p < \frac{X}{m}} 1,$$

indem wir jedes $n = p_1 \cdot ... \cdot p_l < X$ mit $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W \times [\frac{\eta}{2}, 1]$ injektiv auf ein Paar $(m, p_l)$ mit $m = p_1 \cdot ... \cdot p_{l-1} < X$, $X^{\eta/2} \le p_l < \frac{X}{m}$ und $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_{l-1}}{\log X}) \in W$ abbilden. Für $m < X^{1-\eta/2}$ gilt nach [2, S.4 Satz 1.1.3] aber $\sum\limits_{p < \frac{X}{m}} 1 = \pi(\frac{X}{m}) \ll \frac{X/m}{\log(X/m)} < \frac{X/m}{\log(X^{\eta/2})} = \frac{2}{\eta} \cdot \frac{X}{m \cdot \log X}$, was

$$\sum_{0\le n<X} \mathbf{1}_{W\times[\frac{\eta}{2},1]}(n) \le \sum_{m<X^{1-\eta/2}} \mathbf{1}_W(m) \sum_{p<\frac{X}{m}} 1 \ll_\eta \frac{X}{\log X} \sum_{m<X^{1-\eta/2}} \frac{\mathbf{1}_W(m)}{m} \\ \ll_\eta \frac{X}{\log X} \cdot \sum_{m<X} \frac{\mathbf{1}_W(m)}{m} \tag{6.1.10}$$

liefert. Nun zur Abschätzung von $\sum\limits_{m<X} \frac{\mathbf{1}_W(m)}{m}$. Wir sehen, dass

$$\sum_{m<X} \frac{\mathbf{1}_W(m)}{m} = \sum_{\substack{m=p_1\cdot\ldots\cdot p_{l-1}<X \\ (\frac{\log p_1}{\log X},\ldots,\frac{\log p_{l-1}}{\log X})\in W}} \frac{1}{m} \le \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_{l-1} \\ \frac{\log p_i}{\log X}\in[z_i,z_i+\delta^2[\ \forall\ 1\le i\le l-1}} \frac{1}{p_1\cdot\ldots\cdot p_{l-1}} = \\ \prod_{i=1}^{l-1} \sum_{p\in[X^{z_i},\, X^{z_i+\delta^2}[} \frac{1}{p}$$

gilt, wobei die vorletzte Summe über alle $(l-1)$-Tupel von Primzahlen läuft.
Wir schätzen nun die Summe $\sum\limits_{p\in[X^{z_i},X^{z_i+\delta^2}[} \frac{1}{p}$ für festes $1\le i\le l-1$ bzw. festes $z=z_i\in Z$ ab.

Nach dem Satz von Mertens [2, S.8 Satz 1.1.5] gilt $\sum\limits_{p\le x} \frac{1}{p} = \log(\log x) + C + O(\frac{1}{\log x})$ mit einer geeigneten Konstanten $C\in\mathbb{R}^+$ und daher auch $\sum\limits_{p<x} \frac{1}{p} = \log(\log x) + C + O(\frac{1}{\log x})$ für alle $x\in\mathbb{R},\ x>1$, denn $\frac{1}{x} = O(\frac{1}{\log x})$ im Fall $p=x=$ Primzahl. Dies liefert

$$\sum_{p\in[X^z,\, X^{z+\delta^2}[} \frac{1}{p} = \sum_{p<X^{z+\delta^2}} \frac{1}{p} - \sum_{p<X^z} \frac{1}{p} = \\ \log(\log(X^{z+\delta^2})) + C + O(\frac{1}{\log(X^{z+\delta^2})}) - [\log(\log(X^z)) + C + O(\frac{1}{\log(X^z)})] = \\ \log(\frac{(z+\delta^2)\cdot\log X}{z\cdot\log X}) + O(\frac{1}{\log(X^z)}) = \log(\frac{z+\delta^2}{z}) + O(\frac{1}{\log(X^z)}).$$

Ferner gilt $\log x = \log x - \log 1 = \int\limits_1^x \frac{1}{t}\,dt \le \int\limits_1^x 1\,dt = x-1\ \ \forall\ x\in\mathbb{R},\ x\ge 1$, was wegen $\frac{z+\delta^2}{z} = 1+\frac{\delta^2}{z} \ge 1$ und $\frac{\delta^2}{z} \le \frac{\delta^2}{\eta/2}$ $(\Leftarrow z\ge\frac{\eta}{2} \Leftarrow z\in Z)$ die Abschätzung
$0 \le \log(\frac{z+\delta^2}{z}) \le \frac{z+\delta^2}{z} - 1 = \frac{\delta^2}{z} \le 2\cdot\frac{\delta^2}{\eta}$ liefert. Also gilt

$$\sum_{p\in[X^z,\, X^{z+\delta^2}[} \frac{1}{p} = \log(\frac{z+\delta^2}{z}) + O(\frac{1}{\log(X^z)}) = O(\frac{\delta^2}{\eta}) + O(\frac{1}{\log(X^z)}) = O(\frac{\delta^2}{\eta}), \text{ denn}$$
$$\frac{1}{\log(X^z)} \le \frac{1}{\log(X^{\eta/2})} = \frac{1}{\eta/2\cdot\log X} \ll \frac{1}{\eta\cdot(\log(\log X))^2} = \frac{\delta^2}{\eta}$$

wegen $X^z \geq X^{\eta/2}$ ($\Leftarrow z \in Z$). Damit haben wir ($z = z_i$)

$$(6.1.11) \qquad \sum_{p \in [X^{z_i},\, X^{z_i+\delta^2}[} \frac{1}{p} \leq c_0 \cdot \frac{\delta^2}{\eta} \quad \forall\ 1 \leq i \leq l-1$$

mit einer absoluten Konstanten $c_0 \in \mathbb{R}^+$ gezeigt und wir erhalten folglich die Abschätzung

$$\sum_{m<X} \frac{\mathbf{1}_W(m)}{m} \leq \prod_{i=1}^{l-1} \sum_{p \in [X^{z_i},\, X^{z_i+\delta^2}[} \frac{1}{p} \leq \prod_{i=1}^{l-1} c_0 \cdot \frac{\delta^2}{\eta} = (\frac{c_0}{\eta})^{l-1} \cdot \delta^{2l-2} \ll_\eta \delta^{2l-2},$$

weil $(\frac{c_0}{\eta})^{l-1} \leq \begin{cases} 1 & \text{, falls } \frac{c_0}{\eta} \leq 1 \\ (\frac{c_0}{\eta})^{c_1 \cdot \frac{1}{\eta}} & \text{, falls } \frac{c_0}{\eta} > 1 \end{cases} \ll_\eta 1$ gilt, wenn $c_1 \in \mathbb{R}^+$ die Konstante in $\ll$ aus $2 \leq l \ll \frac{1}{\eta}$ bezeichnet. Eingesetzt in (6.1.10) liefert dies

$$\sum_{0 \leq n<X} \mathbf{1}_{W \times [\frac{\eta}{2},1]}(n) \ll_\eta \frac{X}{\log X} \cdot \sum_{m<X} \frac{\mathbf{1}_W(m)}{m} \ll_\eta \frac{\delta^{2l-2} X}{\log X}.$$

Für $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ ist $W^+ \subseteq W \times [\frac{\eta}{2}, 1]$ ($\Leftarrow$ (6.1.8)), also $\sum\limits_{0 \leq n<X} \mathbf{1}_{W^+}(n) \leq \sum\limits_{0 \leq n<X} \mathbf{1}_{W \times [\frac{\eta}{2},1]}(n)$, was

$$(6.1.12) \qquad \sum_{0 \leq n<X} \mathbf{1}_{W^+}(n) \ll_\eta \frac{\delta^{2l-2} X}{\log X} \quad \forall\ W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$$

aufgrund der letzten Abschätzung impliziert.

III. Sei $B = \mathcal{A}$ oder $B = \mathcal{B}$. Für eine beliebige Menge $C \subseteq \mathbb{R}^l$ (später: $C = W^+$) definieren wir $M_B(C) := \{b \in B \mid b = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \ \wedge\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in C\}$, sodass insbesondere $\#M_B(C) = \sum\limits_{b \in B} \mathbf{1}_C(b)$ und $M_B(C_1 \cup C_2) = M_B(C_1) \cup M_B(C_2)$ für beliebige Mengen $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^l$ ist ($\Leftarrow$ Def. $M_B(C)$). Wir weisen darauf hin, dass folgend mit $b$ natürlich nicht die gegebene Basis gemeint ist, sondern ein Element von $B$.

Für einen Würfel $W_0 = W_0(z_1, \ldots, z_{l-1})$ und $b \in M_B(W_0^+)$ definieren wir durch $k_{B,\cap}(b) \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Mengen $M_B(W_1^+)$ mit $W_1 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, $W_1 \neq W_0$, die $b$ enthalten und ferner durch $k_{B,\subseteq}(b) \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Mengen $M_B(W_1^+)$ mit $W_1 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$, $W_1 \neq W_0$, die $b$ enthalten. Offenbar gilt $k_{B,\cap}(b) \geq k_{B,\subseteq}(b)\ \ \forall\ b \in M_B(W_0^+)$, $\forall\ W_0$, denn aus $W_1 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ folgt $W_1 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ wegen $\overline{\mathcal{R}}(\delta) \subseteq \overline{\mathcal{R}}$ :

$$(6.1.13) \quad k_{B,\subseteq}(b) \leq k_{B,\cap}(b) \quad \forall\ b \in M_B(W_0^+),\ \forall\ W_0.$$

Für $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ bzw. $W_0 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ und $b \in M_B(W_0^+)$ ist daher $b$ in insgesamt $k_{B,\cap}(b)+1$ bzw. $k_{B,\subseteq}(b)+1$ Mengen $M_B(W^+)$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ bzw. $W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ enthalten, woraus

$$\#M_B(\dot{\bigcup_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}} W^+) = \#\bigcup_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset} M_B(W^+) = \sum_{W_0\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}\ \sum_{b\in M_B(W_0^+)} \frac{1}{1+k_{B,\cap}(b)}$$

und analog dazu

$$\#M_B(\dot{\bigcup_{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)}} W^+) = \#\bigcup_{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)} M_B(W^+) = \sum_{W_0\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)}\ \sum_{b\in M_B(W_0^+)} \frac{1}{1+k_{B,\subseteq}(b)}$$

folgt. Damit haben wir

$$(6.1.14) \quad \#M_B(\dot{\bigcup_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}} W^+) = \sum_{W_0\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}\ \sum_{b\in M_B(W_0^+)} \frac{1}{1+k_{B,\cap}(b)} \quad \wedge$$
$$\#M_B(\dot{\bigcup_{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)}} W^+) = \sum_{W_0\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)}\ \sum_{b\in M_B(W_0^+)} \frac{1}{1+k_{B,\subseteq}(b)}$$

gezeigt. Für $b \in M_B(W_0^+)$ ist $b = p_1 \cdot ... \cdot p_l \in B$ und $b$ aufgrund seiner eindeutigen PFZ genau dann in der Menge $M_B(W^+)$ mit $W \neq W_0$ enthalten, wenn es eine Permutation (kurz P.) $(p_1^{'},...,p_l^{'})$ von $(p_1,...,p_l)$ gibt mit $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X},...,\frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in W^+$. Damit gilt

$$(6.1.15) \quad k_{B,\cap}(b) = k_\cap(b) = \#\{\, W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \mid W \neq W_0,\ \exists\, \text{P. } (p_1^{'},...,p_l^{'}) \text{ von } (p_1,...,p_l)\ :$$
$$(\frac{\log p_1^{'}}{\log X},...,\frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in W^+\} \quad \wedge$$
$$k_{B,\subseteq}(b) = k_\subseteq(b) = \#\{\, W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid W \neq W_0,\ \exists\, \text{P. } (p_1^{'},...,p_l^{'}) \text{ von } (p_1,...,p_l)\ :$$
$$(\frac{\log p_1^{'}}{\log X},...,\frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in W^+\}$$
$$\forall\ b = p_1 \cdot ... \cdot p_l \in M_B(W_0^+),\ \forall\ W_0,$$

sodass $k_{B,\cap}(b) = k_\cap(b)$ und $k_{B,\subseteq}(b) = k_\subseteq(b)$ insbesondere unabhängig von der Menge $B$ sind. Schreiben wir dabei oben und im Folgenden allgemein „$(\beta_1,...,\beta_s)$ ist P. von $(\alpha_1,...,\alpha_s)$" mit $s \in \mathbb{N}$, so meinen wir mit $(\beta_1,...,\beta_s)$ stets ein $s$-Tupel, für das eine bijektive Abbildung $h:\ \{1,...,s\} \longrightarrow \{1,...,s\}$ mit $(\beta_1,...,\beta_s) = (\alpha_{h(1)},...,\alpha_{h(s)})$ existiert.

Nun bestimmen wir $k_{B,\subseteq}(b) = k_{\subseteq}(b)$ für $b \in M_B(W_0^+)$ und $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. Dann ist $b = p_1 \cdot ... \cdot p_l$ mit $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+$, also $\frac{\log p_i}{\log X} \in S(z_i) = [z_i, z_i + \delta^2[$ für alle $1 \leq i \leq l-1$ und $\frac{\log p_l}{\log X} \in [0,1] \cap [1 - \delta - \sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X}, 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X}[$ ($\Leftarrow$ Def. $W_0^+$, $W_0$).
Aus $0 \leq b = p_1 \cdot ... \cdot p_l < X$ kommt $\frac{\log p_i}{\log X} \in [0,1] \ \forall \ 1 \leq i \leq l$, denn $b \in B \subseteq [0, X[$.
Nach (6.1.7) ist $\frac{\eta}{2} \leq 1 - \delta - l\delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i$ und folglich

$$\frac{\log p_l}{\log X} \in [1 - \delta - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X},\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X}[ \subseteq [1 - \delta - (l-1)\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \subseteq [\frac{\eta}{2}, 1],$$

wenn wir $z_i \leq \frac{\log p_i}{\log X} < z_i + \delta^2 \ \forall \ 1 \leq i \leq l-1$ nutzen. Wegen $[\frac{\eta}{2}, 1] \subseteq \dot{\bigcup\limits_{z \in Z}} S(z)$ ist daher $\frac{\log p_l}{\log X}$ in genau einem Intervall $S(z_l) = [z_l, z_l + \delta^2[$ für eindeutiges $z_l \in Z$ enthalten.
Dabei ist offenbar $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i] \cap\ Z$, was wir aus $\frac{\log p_l}{\log X} \in [1 - \delta - (l-1)\delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i] \cap [z_l, z_l + \delta^2[ \neq \emptyset$ schließen, und $z_l$ hängt ferner eindeutig nur von $\frac{\log p_l}{\log X}$ bzw. $b$ ab, denn $p_l$ teilt $b$. Zusammenfassend gilt also

$$(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in S(z_1) \times ... \times S(z_l) \quad \wedge \quad \frac{\log p_i}{\log X} \in [0,1] \ \forall \ 1 \leq i \leq l \quad \wedge$$
$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\log p_i}{\log X} \in [1 - \delta, 1[.$$

Die beiden letzten Eigenschaften implizieren, dass für jede P. $(p_1^{'}, ..., p_l^{'})$ von $(p_1, ..., p_l)$ insbesondere $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_l^{'}}{\log X})$ in $(\mathbb{R}^{l-1} \times [0,1]) \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum\limits_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}$ enthalten ist, sodass nach Definition von $W^+$ genau dann $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in W^+$ ist, wenn $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_{l-1}^{'}}{\log X}) \in W$ gilt. Dies liefert nach (6.1.15) die Gültigkeit von

$$k_{B,\subseteq}(b) = k_{\subseteq}(b) = \#\{\, W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid W \neq W_0,$$
$$\exists \text{ P. } (p_1^{'}, ..., p_l^{'}) \text{ von } \ (p_1, ..., p_l) : (\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_{l-1}^{'}}{\log X}) \in W\}.$$

Aus $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in S(z_1) \times ... \times S(z_l)$ folgt, dass eine feste P. $(p_1^{'}, ..., p_l^{'})$ von $(p_1, ..., p_l)$ mit $p_i^{'} = p_{h(i)} \ \forall \ 1 \leq i \leq l$, wobei hier $h : \{1, ..., l\} \longrightarrow \{1, ..., l\}$ eine bijektive Abbildung ist, gerade $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in S(z_{h(1)}) \times ... \times S(z_{h(l)})$ erfüllt, also $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_{l-1}^{'}}{\log X}) \in S(z_{h(1)}) \times ... \times S(z_{h(l-1)}) = W_1(z_{h(1)}, ..., z_{h(l-1)})$ gilt. Dabei ist offenbar $(z_{h(1)}, ..., z_{h(l)})$ eine P. von $(z_1, ..., z_l)$ und es gilt $W_1(z_{h(1)}, ..., z_{h(l-1)}) \neq W_0 \ \Leftrightarrow \ (z_{h(1)}, ..., z_{h(l-1)}) \neq (z_1, ..., z_{l-1})$, denn letzteres ergibt sich wegen Disjunktheit der Würfel $W$ für verschiedene $W$ induzierende $(l-1)$-Tupel aus $Z^{l-1}$. Beachten wir erneut diese Disjunktheit der Würfel, womit sich aus $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_{l-1}^{'}}{\log X}) \in W$ direkt $W = W_1$ für die feste P. $(p_1^{'}, ..., p_l^{'})$ von $(p_1, ..., p_l)$ mit obigem Würfel $W_1$ ergibt, so haben wir insgesamt

$$(6.1.16) \quad k_{B,\subseteq}(b) = k_{\subseteq}(b) = \#\{\, W_1 = W_1(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit } (z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \neq (z_1, ..., z_{l-1})\}$$

$$\text{für } b \in M_B(W_0^+) \text{ mit } b = p_1 \cdot ... \cdot p_l,\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+ \text{ sowie}$$

$$W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \text{ mit } W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset, \text{ wobei } \frac{\log p_l}{\log X} \in S(z_l) \text{ für ein}$$

$$\text{eindeutiges, nur von } b \text{ abhängiges } z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z \text{ gilt,}$$

gezeigt. Für $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}}$ und gegebenes $b \in M_B(W_0^+)$ liegt demnach das Tupel $(z_1, ..., z_l)$ fest und es gibt höchstens $l! - 1$ verschiedene P. $(z_1^{'}, ..., z_l^{'})$ von $(z_1, ..., z_l)$ mit $(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \neq (z_1, ..., z_{l-1})$, denn der Fall $(z_1^{'}, ..., z_l^{'}) = (z_1, ..., z_l)$ scheidet aus. Daher gilt

$$(6.1.17) \quad 1 \leq 1 + k_{\subseteq}(b) \leq l! \quad \forall\ b \in M_B(W_0^+),\ \forall\ W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$$

sowohl für $B = \mathcal{A}$ als auch $B = \mathcal{B}$. Aus der Definition von $M_B(C)$ folgt

$$M_B(C_1) \subseteq M_B(C_2) \subseteq M_B(C_3) \quad \text{für } C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3,$$

was nach (6.1.6) $\dot{\bigcup}_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)} W^+ \subseteq \mathcal{R}^{'} \subseteq \dot{\bigcup}_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} W^+$ insbesondere

$$\#M_B(\dot{\bigcup_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} W^+) \leq \#M_B(\mathcal{R}^{'}) = \sum_{b \in B} \mathbf{1}_{\mathcal{R}^{'}}(b) \leq \#M_B(\dot{\bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset}} W^+)$$

liefert. Verwenden wir (6.1.13)-(6.1.15), so schließen wir daraus

$$(6.1.18) \quad \sum_{W_0 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)} \sum_{b \in M_B(W_0^+)} \frac{1}{1 + k_{\subseteq}(b)} \leq \sum_{b \in B} \mathbf{1}_{\mathcal{R}^{'}}(b) \leq \sum_{W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} \sum_{b \in M_B(W_0^+)} \frac{1}{1 + k_{\cap}(b)} \leq \sum_{W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} \sum_{b \in M_B(W_0^+)} \frac{1}{1 + k_{\subseteq}(b)},$$

wobei wir darauf hinweisen, dass (6.1.18) sowohl für $B = \mathcal{A}$ als auch für $B = \mathcal{B}$ korrekt ist.

IV. Für einen Würfel $W = W(z_1, ...z_{l-1})$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$, die nur von $z_1, ..., z_{l-1}$ abhängt, schreiben wir ab sofort kürzer $c = c(W)$ anstatt $c = c(z_1, ..., z_{l-1})$.

Sei $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ gegeben. Wir zeigen zunächst

$$\Lambda_{W^+}(n) = (\log X)^l \cdot c_0(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta)) \cdot \sum_{\substack{n=p_1\cdot...\cdot p_l \\ (\frac{\log p_1}{\log X},...,\frac{\log p_l}{\log X})\in W^+}} 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$$

mit einer Konstanten $c_0 = c_0(W) \in \mathbb{R}^+$, $c_0 \asymp_\eta 1$, die nicht von $n$ abhängt. Nach Definition gilt

$$\Lambda_{W^+}(n) = \sum_{\substack{n=p_1\cdot...\cdot p_l \\ (\frac{\log p_1}{\log X},...,\frac{\log p_l}{\log X})\in W^+}} \prod_{i=1}^{l} \log p_i = (\log X)^l \cdot \sum_{\substack{n=p_1\cdot...\cdot p_l \\ (\frac{\log p_1}{\log X},...,\frac{\log p_l}{\log X})\in W^+}} \prod_{i=1}^{l} \frac{\log p_i}{\log X} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Sei folgend $(\frac{\log p_1}{\log X}, \dots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+$. Dann ist $\frac{\log p_i}{\log X} \in [z_i, z_i + \delta^2[\ \ \forall\ 1 \leq i \leq l-1$ und für hinreichend große $X$ mit $0 \leq \delta = (\log(\log X))^{-1} < 1$ erhalten wir insbesondere

$$\frac{\log p_l}{\log X} \in [1 - \delta - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X},\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X}[ \subseteq [1 - \delta - (l-1)\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \subseteq$$
$$[1 - l\delta - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] := [c_1(W) - l\delta,\ c_1(W)],$$

indem wir $c_1 = c_1(W) := 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i$ setzen, wobei nach (6.1.7) auch $\frac{1}{\eta} \geq 1 \geq c_1(W) \geq \frac{\eta}{2}$, also $c_1(W) \in \mathbb{R}^+$, $c_1(W) \asymp_\eta 1$ gilt. Ferner ist $\prod\limits_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X} = \prod\limits_{i=1}^{l-1} z_i \cdot (1 + O_\eta(\delta^2))$, was wir wie folgt sehen.

Offenbar ist

$$\prod_{i=1}^{l-1} z_i \leq \prod_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X} \leq \prod_{i=1}^{l-1} (z_i + \delta^2) = \sum_{k=0}^{l-1} \sum\nolimits_k z_{i_1} \cdot ... \cdot z_{i_k} \cdot (\delta^2)^{l-1-k},$$

wobei die Summation in $\sum_k$ über alle kanonisch geordneten $k$-Tupel $(i_1, ..., i_k) \in (\mathbb{N} \cap [1,\ l-1])^k$ erfolgt, d.h. es gilt $i_1 < ... < i_k$. Wegen $1 \geq z_i \geq \frac{\eta}{2}\ \ \forall\ 1 \leq i \leq l-1$ ($\Leftarrow z_i \in Z$) und $0 \leq (\delta^2)^{l-1-k} \leq \delta^2\ \ \forall\ 0 \leq k \leq l-2$ ($\Leftarrow 0 \leq \delta = (\log(\log X))^{-1} < 1$) schließen wir auf

$$\sum_{k=0}^{l-2} \sum\nolimits_k z_{i_1} \cdot ... \cdot z_{i_k} \cdot (\delta^2)^{l-1-k} \leq \delta^2 \cdot \sum_{k=0}^{l-2} \sum\nolimits_k 1 \leq \delta^2 \cdot \sum_{k=0}^{l-2} (l-1)^k \leq \delta^2 \cdot (l-1)^{l-1} \ll_\eta \delta^2,$$

wenn wir zusätzlich beachten, dass für fixiertes $0 \leq k \leq l-2$ in $\sum_k$ über höchstens $(l-1)^k$ (geordnete) $k$-Tupel summiert wird. Damit ist $\sum\limits_{k=0}^{l-2} \sum_k z_{i_1} \cdot ... \cdot z_{i_k} \cdot (\delta^2)^{l-1-k} = O_\eta(\delta^2)$ und

$$\prod_{i=1}^{l-1} (z_i + \delta^2) = \prod_{i=1}^{l-1} z_i + O_\eta(\delta^2).$$

Nutzen wir erneut $1 \geq z_i \geq \frac{\eta}{2} \ \forall \ 1 \leq i \leq l-1$, so erhalten wir $\prod_{i=1}^{l-1} z_i =: c_2(W) \in \mathbb{R}^+$ mit $c_2(W) \asymp_\eta 1$ und daraus $\prod_{i=1}^{l-1}(z_i + \delta^2) = \prod_{i=1}^{l-1} z_i + O_\eta(\delta^2) = \prod_{i=1}^{l-1} z_i \cdot (1 + O_\eta(\delta^2))$, was insgesamt

$$\prod_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X} = \prod_{i=1}^{l-1} z_i \cdot (1 + O_\eta(\delta^2)) = \prod_{i=1}^{l-1} z_i \cdot (1 + O_\eta(\delta)) = c_2(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta)) \tag{6.1.19}$$

impliziert.

Nach $\frac{\log p_l}{\log X} \in [c_1(W) - l\delta, c_1(W)]$ und $l \ll_\eta 1$ ist $\frac{\log p_l}{\log X} = c_1(W) + O_\eta(\delta) = c_1(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta))$ ($\Leftarrow c_1(W) \asymp_\eta 1$), sodass mit $c_0(W) := c_1(W) \cdot c_2(W) \asymp_\eta 1, c_0(W) \in \mathbb{R}^+$ insbesondere

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{l} \frac{\log p_i}{\log X} &= \frac{\log p_l}{\log X} \cdot \prod_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X} = c_1(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta)) \cdot c_2(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta)) \\ &= c_0(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta))\end{aligned}$$

gilt. Dies in die Gleichung von $\Lambda_{W^+}(n)$ eingesetzt liefert

$$\Lambda_{W^+}(n) = (\log X)^l \cdot c_0(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta)) \cdot \sum_{\substack{n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+}} 1 \tag{6.1.20}$$

$$\forall \ n \in \mathbb{N}_0, \ \forall \ W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \ \text{mit} \ c_0(W) \in \mathbb{R}^+, \ c_0(W) \asymp_\eta 1.$$

Nun berechnen wir $\sum_{\substack{n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+}} 1$ für einen gegebenen Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ und festes $n \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $\mathbf{1}_{W^+}(n) = 0$ ist $\sum_{\substack{n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+}} 1 = 0$ und wir definieren

$$\gamma(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{1}_{W^+}(n) = 0 \\ \sum\limits_{\substack{n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+}} 1, & \text{falls } \mathbf{1}_{W^+}(n) = 1 \end{cases} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}_0, \text{ sodass insbesondere}$$

$$\sum_{\substack{n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+}} 1 = \mathbf{1}_{W^+}(n) \cdot \gamma(n) \quad \forall \ n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ ist.}$$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbf{1}_{W^+}(n) = 1$, also $n = p_1 \cdot ... \cdot p_l \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+$.
Aufgrund der eindeutigen PFZ von $n$ ist

$$\gamma(n) = \#\{(p_1^{'}, ..., p_l^{'}) \mid (p_1^{'}, ..., p_l^{'}) \text{ ist P. von } (p_1, ..., p_l) \ \wedge \ (\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in W^+\}$$

und daher $1 \leq \gamma(n) \leq l!$ ($\Leftarrow \gamma(n) \geq 1 \Leftarrow \mathbf{1}_{W^+}(n) = 1$). Hier erinnern wir an die Abkürzung P. für Permutation. Ebenso gilt $1 = \gamma(n) \leq l!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathbf{1}_{W^+}(n) = 0$, was insgesamt

$$(6.1.21) \quad 1 \leq \gamma(n) \leq l! \quad \forall \ n \in \mathbb{N}_0$$

liefert. Gemäß *HS2 Prop.6.1* auf S.116-117 definieren wir

$$Q := \{ \ W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \mid \forall \ 1 \leq i < j \leq l-1 \ : \ z_i \neq z_j \quad \wedge$$
$$\forall \ z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, \ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z, \ \forall \ 1 \leq i \leq l-1 \ : \ z_i \neq z_l\}$$

und zeigen $\gamma(n) = 1 \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0, \ \mathbf{1}_{W^+}(n) = 1$, falls $W \in Q$ ist.

Sei also zusätzlich $W \in Q$ und $n \in \mathbb{N}_0, \ \mathbf{1}_{W^+}(n) = 1$ bzw. $n = p_1 \cdot ... \cdot p_l \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+$. Analog zur Herleitung von (6.1.16) in Kap.III gilt $(\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in S(z_1) \times ... \times S(z_l)$ mit einem eindeutigen, nur von $n$ abhängigen $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i, \ 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z$. Wegen $W \in Q$ sind die $z_i$ paarweise verschieden und folglich die Intervalle $S(z_i)$ paarweise disjunkt, für $1 \leq i \leq l$.

Wäre $(p_1^{'}, ..., p_l^{'}) \neq (p_1, ..., p_l)$ eine P. von $(p_1, ..., p_l)$ mit $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in W^+$, so gibt es ein Paar $(i, j)$ mit $i \neq j, \ 1 \leq i, j \leq l$ sowie $p_i^{'} = p_j$ und es gilt insbesondere $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_{l-1}^{'}}{\log X}) \in W = S(z_1) \times ... \times S(z_{l-1})$.

Für $i \neq l$ ist daher $\frac{\log p_i^{'}}{\log X} \in S(z_i)$ und $\frac{\log p_i^{'}}{\log X} = \frac{\log p_j}{\log X} \in S(z_j)$, was der Disjunktheit von $S(z_i)$ und $S(z_j)$ widerspricht (beachte: $z_i \neq z_j \Leftarrow i \neq j$). Also ist $i = l$ und $j \neq l$, sodass $p_l^{'} = p_j$ für ein $1 \leq j \leq l-1$ gilt. Nun gibt es ferner einen Index $1 \leq s \leq l$ mit $p_s^{'} = p_l$, wobei für $s = l$ direkt $p_j = p_l^{'} = p_l$ und daraus $\frac{\log p_j}{\log X} = \frac{\log p_l}{\log X} \in S(z_j) \cap S(z_l)$ folgt, was der Disjunktheit von $S(z_j)$ und $S(z_l)$ widerspricht (beachte: $z_j \neq z_l \Leftarrow j \neq l$).
Also ist $1 \leq s \leq l-1$ mit $p_s^{'} = p_l$, sodass $\frac{\log p_s^{'}}{\log X} \in S(z_s)$ und $\frac{\log p_s^{'}}{\log X} = \frac{\log p_l}{\log X} \in S(z_l)$ gilt, womit sich erneut ein Widerspruch zur Disjunktheit von $S(z_s)$ und $S(z_l)$ ergibt (beachte: $z_s \neq z_l \Leftarrow s \neq l$).

Folglich gibt es keine P. $(p_1^{'}, ..., p_l^{'}) \neq (p_1, ..., p_l)$ von $(p_1, ..., p_l)$ mit $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in W^+$, was $\gamma(n) = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0,\ \mathbf{1}_{W^+}(n) = 1$ im Fall $W \in Q$ liefert. Wegen $\gamma(n) = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0,\ \mathbf{1}_{W^+}(n) = 0$ gilt insgesamt

$$(6.1.22) \quad \gamma(n) = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0, \text{ falls } W \in Q.$$

Aus (6.1.20) erhalten wir $\Lambda_{W^+}(n) = (\log X)^l \cdot c_0(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta)) \cdot \mathbf{1}_{W^+}(n) \cdot \gamma(n)$ bzw. $\mathbf{1}_{W^+}(n) = \frac{c_1(W)\cdot(1+O_\eta(\delta))}{(\log X)^l \cdot \gamma(n)} \cdot \Lambda_{W^+}(n) \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$ mit $c_1(W) := \frac{1}{c_0(W)} \asymp_\eta 1,\ c_1(W) \in \mathbb{R}^+$ (beachte: $\frac{1}{1+O_\eta(\delta)} = 1 + O_\eta(\delta)$), sodass nach (6.1.21) und (6.1.22) zusammenfassend gilt

$$(6.1.23) \quad \mathbf{1}_{W^+}(n) = \frac{c_1(W) \cdot (1 + O_\eta(\delta))}{(\log X)^l \cdot \gamma(n)} \cdot \Lambda_{W^+}(n) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0, \forall\ W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$$

$$\text{mit } c_1(W) \in \mathbb{R}^+,\ c_1(W) \asymp_\eta 1 \text{ und } 1 \leq \gamma(n) \leq l! \text{ sowie } \gamma(n) = 1, \text{ falls } W \in Q.$$

Dabei bezeichnen wir die implizite Konstante im $O_\eta(\delta)$ mit $c_2 = c_2(\eta) \in \mathbb{R}^+$.

V. Im Folgenden verwenden wir die Propositionen 6.2-6.4, um für Würfel $W$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ die Abschätzung $|\sum\limits_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_{W^+}(a) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum\limits_{0 \leq n < X} \Lambda_{W^+}(n)| \ll_\eta \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5}$ nachzuweisen.

Sei $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ gegeben, sodass nach (6.1.9) alle Voraussetzungen der Prop. 6.2-6.4 erfüllt sind, wobei $a_i := z_i \ \forall\ 1 \leq i \leq l-1$ und $W^+ := \mathcal{R}(a_1, ..., a_{l-1})$ zu setzen ist. Ferner wählen wir $A = 5$ und $C = C(A, \eta) = C(\eta) \sim \frac{1}{\eta}$ in Prop.6.2 und 6.4 derart, dass $C > A = 5$ ist. Wir erinnern daran, dass $C \sim \frac{1}{\eta}$ aus Prop. 6.4 kommt, also $C = C(\eta)$ gilt, sodass bei Wahl einer Konstanten $> 5$ in $C \sim \frac{1}{\eta}$ insbesondere $C > A = 5$ erfüllt ist ($\Leftarrow \frac{1}{\eta} \geq 1$). Damit gilt

$$(6.1.24) \quad \frac{1}{X} \cdot \sum_{d \in \mathcal{M}} S_\mathcal{A}(\frac{d}{X}) S_{W^+}(-\frac{d}{X}) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{n < X} \Lambda_{W^+}(n) + O_{\eta, C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^C}),$$

$$(6.1.25) \quad \frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq d < X \\ d \notin \mathcal{E}}} |S_\mathcal{A}(\frac{d}{X}) S_{W^+}(\frac{-d}{X})| \ll_\eta \frac{\#\mathcal{A}}{X^\varepsilon} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5},$$

$$(6.1.26) \quad \frac{1}{X} \cdot |\sum_{\substack{d \in \mathcal{E} \\ d \notin \mathcal{M}}} S_\mathcal{A}(\frac{d}{X}) S_{W^+}(\frac{-d}{X})| \ll_\eta \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^A} = \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5},$$

wobei $\mathcal{M},\ \mathcal{E} \subseteq \{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, 0 \leq n < X\}$ nach Definition in Prop.6.2 bzw. Lemma 8.2 ist. Mithilfe der Definitionen von $S_\mathcal{A}$ in Kap. 4 sowie $S_\mathcal{R}(\theta) = \sum\limits_{0 \leq n < X} \Lambda_\mathcal{R}(n) \cdot e(n\theta) \ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$ schließen wir

$$\sum_{0\le d<X} S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(-\frac{d}{X}) = \sum_{0\le d<X}[\sum_{a\in\mathcal{A}} e(\frac{ad}{X})\cdot \sum_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n)\cdot e(\frac{-nd}{X})] =$$

$$\sum_{a\in\mathcal{A}}[\sum_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n)\cdot \sum_{0\le d<X} e(\frac{(a-n)d}{X})] =$$

$$\sum_{a\in\mathcal{A}}[\sum_{\substack{0\le n<X\\ n=a}}\Lambda_{W^+}(n)\cdot \sum_{0\le d<X} e(\frac{(a-n)d}{X})] + \sum_{a\in\mathcal{A}}[\sum_{\substack{0\le n<X\\ n\neq a}}\Lambda_{W^+}(n)\cdot \sum_{0\le d<X} e(\frac{(a-n)d}{X})] =$$

$$\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)\cdot X + \sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{\substack{0\le n<X\\ n\neq a}}\Lambda_{W^+}(n)\cdot\frac{e(a-n)-1}{e(\frac{a-n}{X})-1} = \sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)\cdot X,$$

wenn wir beachten, dass aus $0\le n<X$, $a\in\mathcal{A}$, $n\neq a$ stets $0<|a-n|<X$, also $\frac{a-n}{X}\notin\mathbb{Z}$ folgt und wir die geometrische Summenformel

$$\sum_{0\le d<X} e(\frac{(a-n)d}{X}) = \begin{cases} \frac{e(a-n)-1}{e(\frac{a-n}{X})-1} = 0, \text{ falls } 0\le n<X,\ a\in\mathcal{A},\ n\neq a \\ X, \text{ falls } 0\le n<X,\ a\in\mathcal{A},\ n=a \end{cases}$$

verwenden. Dies liefert

$$\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a) = \frac{1}{X}\cdot\sum_{0\le d<X} S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(-\frac{d}{X}) =$$

$$\frac{1}{X}\cdot\sum_{d\in\mathcal{M}} S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(-\frac{d}{X}) + \frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{0\le d<X\\ d\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(\frac{-d}{X}) =$$

$$\frac{1}{X}\cdot\sum_{d\in\mathcal{M}} S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(-\frac{d}{X}) + \frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{d\in\mathcal{E}\\ d\notin\mathcal{M}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(\frac{-d}{X}) + \frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{0\le d<X\\ d\notin\mathcal{M},\, d\notin\mathcal{E}}} S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(\frac{-d}{X}) =:$$

$$\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3.$$

Aus (6.1.25) folgt

$$|\sum\nolimits_3| \le \frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{0\le d<X\\ d\notin\mathcal{M},\, d\notin\mathcal{E}}} |S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(\frac{-d}{X})| \le \frac{1}{X}\cdot\sum_{\substack{0\le d<X\\ d\notin\mathcal{E}}} |S_{\mathcal{A}}(\frac{d}{X})S_{W^+}(\frac{-d}{X})| \ll_\eta \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5}.$$

Nach (6.1.24) ist $\sum_1 = \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum\limits_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n) + O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^C})$, weil $\Lambda_{W^+}(0)=0$ ist und (6.1.26) liefert $\sum_2 = O_\eta(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5})$, was insgesamt wegen $C=C(\eta)>5$ die Gültigkeit von

$$\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 = \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n) + O_\eta(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5})$$

impliziert. Damit haben wir

$$(6.1.27)\quad |\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\leq n<X}\Lambda_{W^+}(n)|\ll_\eta\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5}\quad\forall\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset$$

gezeigt.

VI. Im Folgenden schätzen wir $\sum_{a\in\mathcal{A}}\mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n)$ nach oben ab.

Einsetzen von $B=\mathcal{A}$ bzw. $B=\mathcal{B}$ in (6.1.18) liefert

$$(6.1.28)\quad \sum_{a\in\mathcal{A}}\mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a)\leq\sum_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}\ \sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)}\quad\wedge$$
$$\sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n)\geq\sum_{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)}\ \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}$$

Beachten wir die Implikation $W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\ \Rightarrow\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset$, so gilt

$$\sum_{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)}\ \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}=\sum_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}\ \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}-\sum_{\substack{W\not\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}}\ \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}=$$
$$\sum_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}\ \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}+O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot X}{\log X}),$$

denn aus (6.1.12) und *HS1 Prop.6.1* ergibt sich

$$0\leq\sum_{\substack{W\not\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}}\ \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}\leq\sum_{\substack{W\not\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}}\ \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}1=\sum_{\substack{W\not\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}}\#M_{\mathcal{B}}(W^+)=$$
$$\sum_{\substack{W\not\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}}\ \sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{W^+}(n)\ll_\eta\frac{\delta^{2l-2}X}{\log X}\cdot\sum_{\substack{W\not\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}}1\ll_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\frac{\delta^{2l-2}X}{\log X}\cdot\delta^{-2l+3}=\frac{\delta\cdot X}{\log X}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$(6.1.29)\quad \sum_{a\in\mathcal{A}}\mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n)\leq$$
$$\sum_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}[\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)}-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}]+O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Ferner ist

$$\text{(6.1.30)} \quad \sum_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset}[\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)}-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}] =$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}}[\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)}-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}]+$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}[\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)}-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}] =: \sum\nolimits_4+\sum\nolimits_5$$

und wir schätzen zunächst $\sum_5$ nach oben ab.

Nach (6.1.23) ist insbesondere

$$\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot l!}\cdot\Lambda_{W^+}(n)\leq \mathbf{1}_{W^+}(n)\leq\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(n)$$
$$\forall\ n\in\mathbb{N}_0,\ \forall\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset$$

mit positiven Konstanten $c_1 = c_1(W) \asymp_\eta 1$ und $c_2 = c_2(\eta)$. Wegen $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ kommt $c_1(W)\cdot(1\pm c_2(\eta)\cdot\delta)\asymp_\eta 1$ für hinreichend große $X$ in Abhängigkeit von $\eta$. Dies ist auch dann für hinreichend große $X$ erfüllt, falls $\eta=\eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt wird, weil wir so $c_2(\eta)$ als konstant ansehen können und daher $c_2(\eta)\cdot\delta\longrightarrow 0$ für $X\longrightarrow\infty$ gilt. Nach (6.1.17) ist

$$\sum\nolimits_5 = \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}[\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)}-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}]\leq$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}[\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}1-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{l!}] =$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}[\sum_{a\in\mathcal{A}}\mathbf{1}_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\frac{1}{l!}\cdot\sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{W^+}(n)]\leq$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}[\sum_{a\in\mathcal{A}}\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\frac{1}{l!}\cdot\sum_{0\leq n<X}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot l!}\cdot\Lambda_{W^+}(n)] =$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}[\sum_{a\in\mathcal{A}}\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\leq n<X}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(n)]+$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot(1-(\frac{1}{l!})^2)\cdot\sum_{0\leq n<X}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(n),$$

wobei der zweite Summand ein $O_\eta(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})$ ist, was wir wie folgt finden. Es gilt nämlich

$$0 \leq \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}} \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot(1-(\frac{1}{l!})^2)\cdot\sum_{0\leq n<X}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(n) \ll_\eta$$

$$\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}\sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{W^+}(n) \ll_\eta \frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\frac{\delta^{2l-2}X}{\log X}\cdot\sum_{W\notin Q}1 \ll_\eta$$

$$\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\frac{\delta^{2l-2}X}{\log X}\cdot\delta^{-2l+3} = \frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}$$

nach *HS2 Prop.6.1 c)* und (6.1.12), wobei wir $\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot l!}\cdot\Lambda_{W^+}(n)\leq\mathbf{1}_{W^+}(n)$ (s.o.) bzw. $\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(n)\ll_\eta\mathbf{1}_{W^+}(n)$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und $W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset$ benutzen sowie $c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)>0$ und $1\leq l!\ll_\eta 1$ verwenden.

Für den ersten Summanden in der Abschätzung von $\sum_5$ sehen wir

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}[\sum_{a\in\mathcal{A}}\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\leq n<X}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(n)] =$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}[\sum_{a\in\mathcal{A}}\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\leq n<X}\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Lambda_{W^+}(n)]+$$

$$2\cdot c_2\cdot\delta\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}\sum_{0\leq n<X}\frac{c_1(W)\cdot\Lambda_{W^+}(n)}{(\log X)^l} =$$

$$\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot[\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\leq n<X}\Lambda_{W^+}(n)]+O_\eta(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

denn nutzen wir erneut $\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot l!}\cdot\Lambda_{W^+}(n)\leq\mathbf{1}_{W^+}(n)$ (s.o.) bzw. $\frac{c_1(W)\cdot\Lambda_{W^+}(n)}{(\log X)^l}\ll_\eta\mathbf{1}_{W^+}(n)$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und $W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset$ ($\Leftarrow c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)\asymp_\eta 1\wedge c_1(W)\asymp_\eta 1\wedge 1\leq l!\ll_\eta 1$), so kommt

$$0\leq 2\cdot c_2\cdot\delta\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}\sum_{0\leq n<X}\frac{c_1(W)\cdot\Lambda_{W^+}(n)}{(\log X)^l}\ll_\eta\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\delta\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}\sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{W^+}(n)\ll_\eta$$

$$\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\delta\cdot\frac{\delta^{2l-2}X}{\log X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}1\ll_\eta\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\delta\cdot\frac{\delta^{2l-2}X}{\log X}\cdot\sum_W 1\ll_\eta\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X},$$

wenn wir zudem (6.1.12), $c_2=c_2(\eta)\in\mathbb{R}^+$ und $\sum_W 1\ll_\eta\delta^{-2l+2}$ gebrauchen.

Zusammenfassend erhalten wir mithilfe (6.1.27) und $c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)\asymp_\eta 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_5 &\le \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}} \frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Big[\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n)\Big]+O_\eta\Big(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\Big)\\
&\le \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}} \frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\Big|\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n)\Big|+O_\eta\Big(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\Big)\\
&\ll_\eta \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}} \frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l}\cdot\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5}+O_\eta\Big(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\Big)\\
&\ll_\eta \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{l+5}}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin Q}}1+O_\eta\Big(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\Big)\le\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{l+5}}\cdot\sum_W 1+O_\eta\Big(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\Big),
\end{aligned}$$

wobei die Funktionen hinter den $O$-Gliedern reellwertig sind. Wegen $\sum\limits_W 1\ll_\eta\delta^{-2l+2}$ erhalten wir für hinreichend große $X$ mit $0\le\delta=(\log(\log X))^{-1}\in[0,1]$ und $\frac{\log(\log X)^2}{\log X}\le 1$ insbesondere

$$\begin{aligned}
\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{l+5}}\cdot\sum_W 1\ll_\eta\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{l+5}}\cdot\delta^{-2l+2}=\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot\frac{\delta^{-2l+1}}{(\log X)^{l+4}}=\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot\frac{(\log(\log X))^{2l-1}}{(\log X)^{l+4}}\\
\ll\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot\Big(\frac{\log(\log X)^2}{\log X}\Big)^{l+4}\ll\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\text{(6.1.31)}\qquad \sum\nolimits_5\ll_\eta\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}.$$

Nun zur Abschätzung von $\sum_4=\sum\limits_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}}\Big[\sum\limits_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)}-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum\limits_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}\Big]$ nach oben.

Wir definieren gemäß *HS2 Prop.6.1* auf S.116-117 die Menge

$$\begin{aligned}
K:=\{\,W_0=W_0(z_1,...,z_{l-1})\mid\forall\ 1\le i\le n:\\
\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i}-s_{l,i})z_j+r_i\cdot(\delta+l\delta^2)\le\alpha_i-s_{l,i}-\delta^2\cdot c_i+\delta\cdot d_i\}
\end{aligned}$$

mit $r_i:=\max\limits_{1\le j\le l}|s_{j,i}-s_{l,i}|$, $c_i:=\sum\limits_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1}s_{j,i}-s_{l,i}$, $d_i:=\min\{s_{l,i}\,,0\}$ für alle $1\le i\le n$, indem die $\alpha_i$ und $s_{j,i}$ aus dem gegebenen logarithmischen Polytop $\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R}^l$ stammen (vgl. Einführung in Kap. 6), sowie die Menge

$$
\begin{aligned}
T_1 := \{\, & W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \,|\, \forall\ z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z, \\
& \forall\ \text{P. } (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit } z_t^{'} = z_l \text{ für ein } 1 \leq t \leq l\ : \\
& W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \Leftrightarrow\ W(z_1^{'}, .., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \in K\},
\end{aligned}
$$

wobei wir uns daran erinnern, dass das Element $g(W_0) \in [1 - \delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i[ \cap Z$ eindeutig für den Würfel $W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ definiert ist (siehe Kap.I). Dabei bedeutet „mit $z_t^{'} = z_l$ für ein $1 \leq t \leq l$", dass $z_l$ an die (nicht zuvor fixierte) Stelle $t$ permutiert wird.

Sei nun $B = \mathcal{A}$ oder $B = \mathcal{B}$ sowie $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, $W_0 \in Q$ gegeben und $b \in M_B(W_0^+)$ fixiert. Nach (6.1.16) existiert ein eindeutiges, nur von $b$ abhängiges $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z$, sodass

$$
\begin{aligned}
k_{\subseteq}(b) &= \#\{\, W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \,|\, (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \\
&\qquad \text{mit } (z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \neq (z_1, ..., z_{l-1})\} \\
&= \#\{\, W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \,|\, (z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_{l-1}) \\
&\qquad \text{mit } (z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \neq (z_1, ..., z_{l-1})\} \\
&\quad \dot\cup \{\, W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \,|\, (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \\
&\qquad \text{mit } \ z_t^{'} = z_l \text{ für ein } 1 \leq t \leq l - 1\} \\
&:= \#R_1 \,\dot\cup\, R_2 = \#R_1 + \#R_2
\end{aligned}
$$

gilt, denn wegen $W_0 \in Q$ sind die $z_i$ für $1 \leq i \leq l$ paarweise verschieden, woraus sich insbesondere $(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \neq (z_1, ..., z_{l-1})$ für alle P. $(z_1^{'}, ..., z_l^{'})$ von $(z_1, ..., z_l)$ mit $z_t^{'} = z_l$ für ein $1 \leq t \leq l - 1$ ergibt sowie auf die Disjunktheit der beiden Mengen $R_1$ und $R_2$ geschlossen werden kann, da für $W \in R_2$ im kartesischen Produkt von $W$ mit dem Intervall $S(z_l)$ multipliziert wird, für $W \in R_1$ jedoch nicht. Nun ist

$$
\begin{aligned}
R_1 = \{\, & W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \,|\, (z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_{l-1}) \\
& \text{mit } (z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \neq (z_1, ..., z_{l-1})\}
\end{aligned}
$$

offensichtlich nur von $z_1, ..., z_{l-1}$ bzw. $W_0$ abhängig, sodass $\#R_1 = c_3(W_0) \in \mathbb{N}_0$ mit $c_3(W_0) \leq (l - 1)! \ll_\eta 1$ gilt. Ferner liefert *HS2 Prop.6.1 a)* die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}\#R_2 = \#\{\, & W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \\ & \text{mit } \; z_t^{'} = z_l \; \text{ für ein } 1 \le t \le l-1\} \\ \geq \#\{\, & W = W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \in K \mid \\ & (z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_{l-1}, g(W_0)) \\ & \text{mit } \; z_t^{'} = g(W_0) \; \text{ für ein } 1 \le t \le l-1\} := c_4(W_0) \in \mathbb{N}_0\end{aligned}$$

mit Gleichheit für $W_0 \in T_1$, denn $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z$ liegt fest und die letzte Menge ist nur von $z_1, ..., z_{l-1}, g(W_0)$, also $W_0$ abhängig. Diese Aussage ergibt sich, indem wir uns die Existenz einer injektiven (bijektiven, falls $W_0 \in T_1$) Abbildung

$$\begin{aligned} f : \{\, & W = W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \in K \mid \; (z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P.} \\ & \text{von } (z_1, ..., z_{l-1}, g(W_0)) \; \text{ mit } \; z_t^{'} = g(W_0) \; \text{ für ein } 1 \le t \le l-1\} := S(K) \longrightarrow \\ \{\, & W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \; \text{ mit } \; z_t^{'} = z_l \; \text{ für ein} \\ & 1 \le t \le l-1\} := S(\overline{\mathcal{R}}(\delta))\end{aligned}$$

wie folgt klar machen. Wegen $W_0 \in Q$ und der Def. von $g(W_0)$ sind sowohl $z_1, ..., z_l$ als auch $z_1, ..., z_{l-1}, g(W_0)$ paarweise verschieden. Für verschiedene Würfel $W_1(x_1, ..., x_{l-1}) \in S(K)$ und $W_2(y_1, ..., y_{l-1}) \in S(K)$ sind $(x_1, ..., x_l)$ und $(y_1, ..., y_l)$ Permutationen von $(z_1, ..., z_{l-1}, g(W_0))$ mit $x_{t_1} = y_{t_2} = g(W_0)$ für $1 \le t_1, t_2 \le l-1$ und $(x_1, ..., x_{l-1}) \neq (y_1, ..., y_{l-1})$ ($\Leftarrow W_1 \neq W_2$). Insbesondere gibt es einen Index $1 \le s \le l-1$ mit $x_s \neq y_s$.

Nach *HS2 Prop.6.1 a)* (ii) erhalten wir den Würfel $W_1^{'} \in S(\overline{\mathcal{R}}(\delta))$ bzw. $W_2^{'} \in S(\overline{\mathcal{R}}(\delta))$, indem wir das Intervall $[x_{t_1}, x_{t_1} + \delta^2[ = [g(W_0), g(W_0) + \delta^2[$ bzw. $[y_{t_2}, y_{t_2} + \delta^2[ = [g(W_0), g(W_0) + \delta^2[$ im kartesischen Produkt von $W_1$ bzw. $W_2$ durch $[z_l, z_l + \delta^2[$ ersetzen.

Im Fall $s \neq t_1$ und $s \neq t_2$ sind damit auch $W_1^{'}$ und $W_2^{'}$ verschieden, denn $[x_s, x_s + \delta^2[ \neq [y_s, y_s + \delta^2[$ und beide Intervalle bleiben bei der oben beschriebenen Bildung von $W_1^{'}$ aus $W_1$ bzw. $W_2^{'}$ aus $W_2$ als $s$.-Faktor im kartesischen Produkt erhalten.
Im Fall $s = t_1$ und $s \neq t_2$ steht im kartesischen Produkt von $W_1^{'}$ bzw. $W_2^{'}$ als $s$.-Faktor das Intervall $[z_l, z_l + \delta^2[$ bzw. $[y_s, y_s + \delta^2[$ und wegen $y_s \neq y_{t_2} = g(W_0)$ $(1 \le s \le l-1)$ ist $y_s \in \{z_1, ..., z_{l-1}\}$ und daher $y_s \neq z_l$, sodass auch $[z_l, z_l + \delta^2[ \neq [y_s, y_s + \delta^2[$ gilt und folglich

$W_1^{'}$ sowie $W_2^{'}$ verschieden sind (beachte: 4. Absatz auf der vorigen Seite).
Im Fall $s \neq t_1$ und $s = t_2$ steht im kartesischen Produkt von $W_1^{'}$ bzw. $W_2^{'}$ als $s$.-Faktor das Intervall $[x_s, x_s + \delta^2[$ bzw. $[z_l, z_l + \delta^2[$ und wir ersetzen im vorigen Fall nur $y$ durch $x$ sowie $t_2$ durch $t_1$, woraus analog $W_1^{'} \neq W_2^{'}$ folgt.
Der Fall $s = t_1$ und $s = t_2$ kann nicht eintreten, da sich sonst mit $x_s = x_{t_1} = g(W_0) = y_{t_2} = y_s$ ein Widerspruch zu $x_s \neq y_s$ ergibt. In allen Fällen gilt somit $W_1' \neq W_2'$.

Damit wird eine injektive Abbildung $f : S(K) \longrightarrow S(\overline{\mathcal{R}}(\delta))$ gemäß der oben beschriebenen Bildung von $W_1^{'} \in S(\overline{\mathcal{R}}(\delta))$ aus $W_1 \in S(K)$ definiert, die im Fall $W_0 \in T_1$ sogar bijektiv ist, da wir dann gemäß Def. von $T_1$ (beachte: $\Leftrightarrow$-Zeichen) aus dem Würfel $W_1^{'} \in S(\overline{\mathcal{R}}(\delta))$ wieder den Würfel $W_1 \in S(K)$ konstruieren, indem wir im kartesischen Produkt von $W_1^{'}$ den Faktor $[z_l, z_l + \delta^2[$ durch den Faktor $[g(W_0), g(W_0) + \delta^2[$ ersetzen (beachte: $1 \leq t \leq l-1$).

Offenbar ist $c_4(W_0) \leq l! \ll_\eta 1$ und wegen $\eta \in ]0,1]$ sowie $c_3(W_0) \ll_\eta 1$ gilt insgesamt $1 + k_\subseteq(b) = 1 + \#R_1 + \#R_2 \geq 1 + c_3(W_0) + c_4(W_0) =: c_5(W_0) \in \mathbb{N}$ mit $c_5(W_0) \asymp_\eta 1$ und Gleichheit für $W_0 \in T_1$. Fassen wir dies zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(6.1.32)\quad & 1 + k_\subseteq(b) \geq c_5(W_0) \quad \forall\ b \in M_B(W_0^+),\ \forall\ W_0 \cap \overline{\mathcal{R}}(\delta) \neq \emptyset,\ W_0 \in Q \\ & \text{mit einer Konstanten } c_5(W_0) \in \mathbb{N},\ c_5(W_0) \asymp_\eta 1 \text{ und Gleichheit, falls } W_0 \in T_1,\end{aligned}$$

wobei wir darauf hinweisen, dass (6.1.32) sowohl für $B = \mathcal{A}$ als auch für $B = \mathcal{B}$ korrekt ist.

Dies liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_4 &= \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}} [\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)} - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}] \\
&\leq \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}} [\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)} \frac{1}{c_5(W)} - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}] \\
&= \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}} \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{1}_{W^+}(a)\cdot\frac{1}{c_5(W)} - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q,\, W\in T_1}}\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{c_5(W)} \\
&\quad -\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q,\, W\notin T_1}}\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)} \\
&= \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}} \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{1}_{W^+}(a)\cdot\frac{1}{c_5(W)} - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}}\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{c_5(W)} \\
&\quad -\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q,\, W\notin T_1}}\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}[\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}-\frac{1}{c_5(W)}] \\
&= \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}} \frac{1}{c_5(W)}\cdot[\sum_{a\in\mathcal{A}}\mathbf{1}_{W^+}(a) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{W^+}(n)] + O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}) \\
&=: \sum\nolimits_5' + O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}),
\end{aligned}$$

denn wegen $c_5(W),\ 1+k_{\subseteq}(b)\geq 1$ gilt nach (6.1.12) sowie *HS2 Prop.6.1 a)* (i) insbesondere

$$\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot|\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q,\, W\notin T_1}}\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}[\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}-\frac{1}{c_5(W)}]|\leq\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q,\, W\notin T_1}}\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}2\ll$$
$$\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q,\, W\notin T_1}}\sum_{0\leq n<X}\mathbf{1}_{W^+}(n)\ll_\eta\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\frac{\delta^{2l-2}X}{\log X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q,\, W\notin T_1}}1\leq$$
$$\frac{\delta^{2l-2}\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot\sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\notin T_1}}1\ll_{S(\mathcal{R}),\eta}\frac{\delta^{2l-2}\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot\delta^{-2l+3}=\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}.$$

Aus (6.1.23) folgt wegen $\gamma(n)=1\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, falls $W\in Q$, die Abschätzung

$$\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(n)\leq\mathbf{1}_{W^+}(n)\leq\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(n)$$
$$\forall\ n\in\mathbb{N}_0,\ \forall\ W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset,\ W\in Q$$

mit positiven Konstanten $c_1=c_1(W)\asymp_\eta 1$ und $c_2=c_2(\eta)$.

Wir erinnern uns an $c_1(W) \cdot (1 \pm c_2(\eta) \cdot \delta) \asymp_\eta 1$. Dies impliziert

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_5' &= \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \in Q}} \frac{1}{c_5(W)} \cdot [\sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{W^+}(a) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{W^+}(n)] \\
&\leq \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \in Q}} \frac{1}{c_5(W)} \cdot [\sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{c_1(W) \cdot (1 + c_2 \cdot \delta)}{(\log X)^l \cdot 1} \cdot \Lambda_{W^+}(a) \\
&\qquad\qquad - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \frac{c_1(W) \cdot (1 - c_2 \cdot \delta)}{(\log X)^l \cdot 1} \cdot \Lambda_{W^+}(n)] \\
&= \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \in Q}} \frac{c_1(W) \cdot (1 + c_2 \cdot \delta)}{c_5(W) \cdot (\log X)^l} \cdot [\sum_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_{W^+}(a) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \Lambda_{W^+}(n)] \\
&\quad + \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \in Q}} \frac{1}{c_5(W)} \cdot 2 \cdot c_1(W) \cdot c_2(\eta) \cdot \delta \cdot \sum_{0 \leq n < X} \frac{\Lambda_{W^+}(n)}{(\log X)^l} \\
&= \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \in Q}} \frac{c_1(W) \cdot (1 + c_2 \cdot \delta)}{c_5(W) \cdot (\log X)^l} \cdot [\sum_{a \in \mathcal{A}} \Lambda_{W^+}(a) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \Lambda_{W^+}(n)] + O_\eta(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}),
\end{aligned}$$

weil wir analog zur Behandlung von $\sum_5$ auf S.100 (ab „so kommt...") mithilfe $\frac{c_1(W) \cdot (1 - c_2 \cdot \delta)}{(\log X)^l \cdot 1} \cdot \Lambda_{W^+}(n) \leq \mathbf{1}_{W^+}(n)$ (s.o.) bzw. $\frac{\Lambda_{W^+}(n)}{(\log X)^l} \ll_\eta \mathbf{1}_{W^+}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, $W \in Q$ (beachte: $c_1(W) \cdot (1 - c_2 \cdot \delta) \asymp_\eta 1$) den zweiten Summanden im vorletzten Schritt als $O_\eta(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$ abschätzen können.
Dazu verwenden wir noch $\frac{c_1(W)}{c_5(W)} \asymp_\eta 1$, $\sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \in Q}} 1 \leq \sum_W 1 \ll \delta^{-2l+2}$ als auch (6.1.12).

Analog zur Herleitung von (6.1.31) auf S.101 (ab „Zusammenfassend...") schließen wir aus (6.1.27) und der letzten Zeile in der Abschätzung für $\sum_5'$ auf die Gültigkeit von $\sum_5' \ll_\eta \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}$, wenn wir zusätzlich $\frac{c_1(W) \cdot (1 + c_2 \cdot \delta)}{c_5(W)} \asymp_\eta 1$ und $\sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \in Q}} 1 \leq \sum_W 1 \ll_\eta \delta^{-2l+2}$ benutzen.

Folglich ist $\sum_4 \leq \sum_5' + O_{S(\mathcal{R}), \eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}) \ll_{S(\mathcal{R}), \eta} \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}$, sodass nach (6.1.29)-(6.1.31)

$$\begin{aligned}
\text{(6.1.33)} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n) &\leq \sum\nolimits_4 + \sum\nolimits_5 + O_{S(\mathcal{R}), \eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}) \\
&\leq c_6(S(\mathcal{R}), \eta) \cdot \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c_6(S(\mathcal{R}), \eta) \in \mathbb{R}^+$ kommt, denn alle bisherigen $O$-Glieder schätzen reellwertige Funktionen ab.

VII. Im Folgenden schätzen wir $\sum\limits_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum\limits_{0\le n<X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n)$ nach unten ab.

Einsetzen von $B = \mathcal{A}$ bzw. $B = \mathcal{B}$ in (6.1.18) liefert

$$(6.1.34) \quad \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a) \ge \sum_{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)} \sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)} \quad \wedge$$
$$\sum_{0\le n<X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n) \le \sum_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset} \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}.$$

Wir definieren gemäß *HS2 Prop.6.1* auf S.116-117 die Menge

$$T_2 = \{\, W_0(z_1,...,z_{l-1}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid \forall\, z_l \in [1-\delta-l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1-\sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z,$$
$$\forall \text{ P. } (z_1^{'},...,z_l^{'}) \text{ von } (z_1,...,z_l) \text{ mit } z_t^{'} = z_l \text{ für ein } 1\le t\le l \;:$$
$$W(z_1^{'},...,z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \Leftrightarrow W(z_1^{'},...,z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'},...,z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)\},$$

wobei wir beachten, dass für $W_0 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ insbesondere $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ gilt, also $1-\delta-l\delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i \ge \frac{\eta}{2}$ nach (6.1.7) folgt und $g(W_0)$ definiert ist. Wir bemerken, dass $W \in T_2 \cap Q$ stets $W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ liefert und schätzen mithilfe (6.1.35) wie folgt ab :

$$(6.1.35) \quad \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0\le n<X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n) \ge$$
$$\sum_{\substack{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\in T_2\cap Q}} \sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)} - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset} \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)} =$$
$$\sum_{W\in T_2\cap Q} \sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)} - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{W\in T_2\cap Q} \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}$$
$$-\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\notin T_2\cap Q}} \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)} - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\not\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)}} \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)} =$$
$$\sum_{W\in T_2\cap Q} [\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)} - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)} \frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}] + O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})$$
$$=: \sum\nolimits_6 + O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})$$

denn aus *HS1 Prop.6.1* und *HS2 Prop.6.1* b), c) sowie (6.1.12)
(beachte: $W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \Rightarrow W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$) und $\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)} \le 1$ erhalten wir für die beiden letzten zu subtrahierenden Summen

$$0 \le \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \\ W \notin T_2 \cap Q}} \sum_{b \in M_{\mathcal{B}}(W^+)} \frac{1}{1 + k_{\subseteq}(b)} + \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} \sum_{b \in M_{\mathcal{B}}(W^+)} \frac{1}{1 + k_{\subseteq}(b)} \ll$$

$$\frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot [\sum_{\substack{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \\ W \notin T_2 \cap Q}} \sum_{0 \le n < X} \mathbf{1}_{W^+}(n) + \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} \sum_{0 \le n < X} \mathbf{1}_{W^+}(n)] \le$$

$$\frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot [\sum_{\substack{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \\ W \notin T_2}} \sum_{0 \le n < X} \mathbf{1}_{W^+}(n) + \sum_{\substack{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \\ W \notin Q}} \sum_{0 \le n < X} \mathbf{1}_{W^+}(n) + \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} \sum_{0 \le n < X} \mathbf{1}_{W^+}(n)] \ll_\eta$$

$$\frac{\delta^{2l-2} X}{\log X} \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot [\sum_{\substack{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \\ W \notin T_2}} 1 + \sum_{W \notin Q} 1 + \sum_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} 1] \ll_{S(\mathcal{R}),\eta} \frac{\delta^{2l-2} \#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \delta^{-2l+3} = \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}.$$

Wir konstruieren nun eine untere Schranke für $\sum_6$.

Sei $B = \mathcal{A}$ oder $B = \mathcal{B}$ sowie $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \in T_2 \cap Q$ ($\Rightarrow W_0 \in \overline{\mathcal{R}}(\delta) \Rightarrow W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$) gegeben und $b \in M_B(W_0^+)$ fixiert. Nach (6.1.16) existiert ein eindeutiges, nur von $b$ abhängiges $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z$, sodass wir analog zur Herleitung von (6.1.32) auf S.101-104 die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
k_{\subseteq}(b) &= \#\{ W = W(z_1', ..., z_{l-1}') \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid (z_1', ..., z_l') \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \\
&\qquad \text{mit } (z_1', ..., z_{l-1}') \neq (z_1, ..., z_{l-1})\} \\
&= \#\{ W = W(z_1', ..., z_{l-1}') \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid (z_1', ..., z_{l-1}') \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_{l-1}) \\
&\qquad \text{mit } (z_1', ..., z_{l-1}') \neq (z_1, ..., z_{l-1})\} \\
&\quad \dot\cup \{ W = W(z_1', ..., z_{l-1}') \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid (z_1', ..., z_l') \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \\
&\qquad \text{mit } z_t' = z_l \text{ für ein } 1 \le t \le l-1\} \\
&:= \#R_1 \dot\cup R_2 = \#R_1 + \#R_2
\end{aligned}$$

erhalten, wobei wir daran erinnern, dass $\#R_1 = c_3(W_0) \in \mathbb{N}_0$ mit $c_3(W_0) \le (l-1)! \ll_\eta 1$ ist. Ferner impliziert $W_0 \in T_2$ nach Definition von $T_2$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\#R_2 = \#\{\, W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \\ \text{mit } \ z_t^{'} = z_l \ \text{ für ein } 1 \le t \le l-1\} \\ = \#\{\, W = W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid \\ (z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_{l-1}, g(W_0)) \\ \text{mit } \ z_t^{'} = g(W_0) \ \text{ für ein } 1 \le t \le l-1\} := c_4(W_0) \in \mathbb{N}_0,\end{aligned}$$

denn $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z$ liegt fest und die letzte Menge ist nur von $z_1, ..., z_{l-1}, g(W_0)$, also $W_0$ abhängig. Dies sehen wir, indem wir uns die Existenz einer bijektiven Abbildung

$$\begin{aligned}h : \{\, W = W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid \ (z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist} \\ \text{P. von } (z_1, ..., z_{l-1}, g(W_0)) \text{ mit } \ z_t^{'} = g(W_0) \ \text{ für ein } 1 \le t \le l-1\} := S_0(\overline{\mathcal{R}}(\delta)) \longrightarrow \\ \{\, W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit } \ z_t^{'} = z_l \ \text{ für ein} \\ 1 \le t \le l-1\} := S(\overline{\mathcal{R}}(\delta))\end{aligned}$$

mithilfe $W_0 \in T_2 \cap Q$, der Definition von $T_2$ (beachte: $\Leftrightarrow$-Zeichen) und dem gleichen Vorgehen wie bei der Herleitung von (6.1.32) bzw. auf S.103-104 klar machen. In der Argumentation dort ist nämlich nur $f$ durch $h$, $T_1$ durch $T_2$, $S(K)$ durch $S_0(\overline{\mathcal{R}}(\delta))$ sowie *HS2 Prop.6.1 a)* (ii) durch $W_0 \in T_2$ zu ersetzen.

Offenbar ist $c_4(W_0) \le l! \ll_\eta 1$ und wegen $\eta \in ]0,1]$ sowie $c_3(W_0) \ll_\eta 1$ gilt insgesamt
$1 + k_{\subseteq}(b) = 1 + \#R_1 + \#R_2 = 1 + c_3(W_0) + c_4(W_0) := c_5(W_0) \in \mathbb{N}$ mit $c_5(W_0) \asymp_\eta 1$.
Fassen wir die Resultate zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(6.1.36) \quad 1 + k_{\subseteq}(b) = c_5(W_0) \quad \forall\ b \in M_B(W_0^+),\ \forall\ W_0 \in T_2 \cap Q \\ \text{mit einer Konstanten } c_5(W_0) \in \mathbb{N},\ c_5(W_0) \asymp_\eta 1,\end{aligned}$$

wobei wir darauf hinweisen, dass (6.1.36) sowohl für $B = \mathcal{A}$ als auch für $B = \mathcal{B}$ korrekt ist.

Aus (6.1.23) folgt wegen $\gamma(n) = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$, falls $W \in T_2 \cap Q$ ($\Rightarrow W \in \overline{\mathcal{R}}(\delta) \Rightarrow W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$), die Abschätzung

$$\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(n)\le \mathbf{1}_{W^+}(n)\le\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(n)$$
$$\forall\ n\in\mathbb{N}_0,\ \forall\ W\in T_2\cap Q$$

mit positiven Konstanten $c_1=c_1(W)\asymp_\eta 1$ und $c_2=c_2(\eta)$. Erinnern wir uns an $c_1(W)\cdot(1\pm c_2(\eta)\cdot\delta)\asymp_\eta 1$, so können wir zusammen mit (6.1.36) auf

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_6 &= \sum_{W\in T_2\cap Q}\Big[\sum_{a\in M_{\mathcal{A}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(a)}-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{b\in M_{\mathcal{B}}(W^+)}\frac{1}{1+k_{\subseteq}(b)}\Big]\\
&=\sum_{W\in T_2\cap Q}\frac{1}{c_5(W)}\cdot\Big[\sum_{a\in\mathcal{A}}\mathbf{1}_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\le n<X}\mathbf{1}_{W^+}(n)\Big]\\
&\ge\sum_{W\in T_2\cap Q}\frac{1}{c_5(W)}\cdot\Big[\sum_{a\in\mathcal{A}}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(a)\\
&\qquad\qquad -\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\le n<X}\frac{c_1(W)\cdot(1+c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(n)\Big]\\
&=\sum_{W\in T_2\cap Q}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{c_5(W)\cdot(\log X)^l}\cdot\Big[\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n)\Big]\\
&\quad-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{W\in T_2\cap Q}\frac{1}{c_5(W)}\cdot 2\cdot c_1(W)\cdot c_2(\eta)\cdot\delta\cdot\sum_{0\le n<X}\frac{\Lambda_{W^+}(n)}{(\log X)^l}\\
&=:\sum\nolimits_7+O_\eta\Big(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}\Big)
\end{aligned}$$

schließen, weil wir analog zur Behandlung von $\sum_5$ auf S.100 (ab „so kommt...") mithilfe $\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{(\log X)^l\cdot 1}\cdot\Lambda_{W^+}(n)\le\mathbf{1}_{W^+}(n)$ (s.o.) bzw. $\frac{\Lambda_{W^+}(n)}{(\log X)^l}\ll_\eta\mathbf{1}_{W^+}(n)$ (beachte: $c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)\asymp_\eta 1$) für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und $W\in T_2\cap Q$ die zu subtrahierende Summe im vorletzten Schritt als $O_\eta(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})$ abschätzen können. Dazu verwenden wir noch $\frac{c_1(W)}{c_5(W)}\asymp_\eta 1$, $\sum\limits_{W\in T_2\cap Q}1\le\sum\limits_W 1\ll\delta^{-2l+2}$ und (6.1.12).

Aus (6.1.27) (beachte: $W\in T_2\cap Q\Rightarrow W\cap\overline{\mathcal{R}}\ne\emptyset$) und $\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{c_5(W)}\asymp_\eta 1$ ($\Leftarrow c_5(W)\asymp_\eta 1$) folgt

$$\begin{aligned}
&|\sum\nolimits_7|=|\sum_{W\in T_2\cap Q}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{c_5(W)\cdot(\log X)^l}\cdot\Big[\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n)\Big]|\le\\
&\sum_{W\in T_2\cap Q}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{c_5(W)\cdot(\log X)^l}\cdot|\sum_{a\in\mathcal{A}}\Lambda_{W^+}(a)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{0\le n<X}\Lambda_{W^+}(n)|\ll_\eta\\
&\sum_{W\in T_2\cap Q}\frac{c_1(W)\cdot(1-c_2\cdot\delta)}{c_5(W)\cdot(\log X)^l}\cdot\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5}\ll_\eta\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{l+5}}\cdot\sum_{W\in T_2\cap Q}1\ll_\eta\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{l+5}}\cdot\sum_W 1
\end{aligned}$$

Wegen $\sum\limits_W 1\ll_\eta\delta^{-2l+2}$ erhalten wir für hinreichend große $X$ mit $0\le\delta=(\log(\log X))^{-1}\in[0,1]$ und $\frac{\log(\log X)^2}{\log X}\le 1$ insbesondere

$$\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{l+5}} \cdot \sum_{W} 1 \ll_\eta \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{l+5}} \cdot \delta^{-2l+2} = \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \frac{\delta^{-2l+1}}{(\log X)^{l+4}} = \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \frac{(\log(\log X))^{2l-1}}{(\log X)^{l+4}}$$
$$\ll \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X} \cdot (\frac{\log(\log X)^2}{\log X})^{l+4} \ll \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X},$$

Folglich ist $\sum_7 = O_\eta(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$, was eingesetzt die untere Schranke $\sum_6 \geq O_\eta(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$ liefert.
Somit gilt nach (6.1.35) die Abschätzung

$$\text{(6.1.37)} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(a) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{0 \leq n < X} \mathbf{1}_{\mathcal{R}'}(n) \geq \sum\nolimits_6 + O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}) \geq O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$$
$$\geq -c_7(S(\mathcal{R}),\eta) \cdot \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X},$$

mit einer Konstanten $c_7(S(\mathcal{R}),\eta) \in \mathbb{R}^+$, indem wir bemerken, dass alle Funktionen hinter den $O$-Gliedern in diesem Nachweis reellwertig sind, also insbesondere die Funktion, die sich im letzten $O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$-Glied verbirgt, durch $-c_7(S(\mathcal{R}),\eta) \cdot \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}$ nach unten abgeschätzt werden kann (beachte $|x| \leq S \Leftrightarrow -S \leq x \leq S \;\forall\; x \in \mathbb{R}$).

Nach (6.1.33) und (6.1.37) erhalten wir das gewünschte Resultat.

□

*HS1 Prop.6.1*:
Sei $\eta \in ]0,1]$ eine von $X$ unabhängige Konstante oder $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt sowie $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ und $l \in \mathbb{N}$, $2 \leq l \ll \frac{1}{\eta}$ gegeben. Ferner seien $m = \lfloor \frac{1-\eta/2}{\delta^2} \rfloor \in \mathbb{N}_0$ und $Z = \{\frac{\eta}{2} + i \cdot \delta^2 \mid i = 0,...,m\}$ sowie die Würfel $W = W(z_1,...,z_{l-1})$ für $z_1,...,z_{l-1} \in Z$ gemäß dem Nachweis von Proposition 6.1 erklärt. Analog zu Letzterem sei für das in Proposition 6.1 genannte logarithmische Polytop $\mathcal{R} \subseteq [\eta,1]^l$ ebenso

$$\overline{\mathcal{R}} = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid \exists\, e_l \in [1 - \delta - \sum_{i=1}^{l-1} e_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} e_i[ : \{\vec{e}\} \times \{e_l\} \in \mathcal{R}\} \quad \text{und}$$
$$\overline{\mathcal{R}}(\delta) = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{l-1} \mid \{\vec{e}\} \times [1 - \delta - \sum_{i=1}^{l-1} e_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} e_i[ \subseteq \mathcal{R}\}$$

definiert (vgl. S.84). Dann gilt $\sum\limits_{\substack{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \\ W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} 1 = O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\delta^{-2l+3})$.

*Beweis*:

Wir erinnern uns an die Definition des (logarithmischen) Polytops $\mathcal{R} \subseteq [\eta, 1]^l$ zu Beginn von Kapitel 6 als Durchschnitt $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} H^{-}_{f_i,\,\alpha_i}$ endlich vieler ($n \in \mathbb{N}$) abgeschlossener Halbräume $H^{-}_{f_i,\,\alpha_i} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^l \,|\, f_i(\vec{v}) \leq \alpha_i\}$, wobei $f_i$ eine lineare Abbildung und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ist, für alle $1 \leq i \leq n$.

Dabei ist $f_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{l} s_{j,i} \cdot x_j$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$ mit $s_{j,i} \in \mathbb{R} \;\; \forall\; 1 \leq j \leq l,\; 1 \leq i \leq n$

und es gilt $S(\mathcal{R}) = \{s_{j,i} \mid\; 1 \leq j \leq l,\; 1 \leq i \leq n\} \cup \{0\}$.

Sei zunächst $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \nsubseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ und $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ fixiert.

Dann gibt es wegen $W \nsubseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ einen Vektor $\vec{v} \in W$ mit $\vec{v} \notin \overline{\mathcal{R}}(\delta)$.
Wäre $\{\vec{v}\} \times \{v_l\} \in \mathcal{R}$ für alle $v_l \in [1 - \delta - \sum_{j=1}^{l-1} v_j,\; 1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j[$, so folgt direkt $\{\vec{v}\} \times [1 - \delta - \sum_{j=1}^{l-1} v_j,\; 1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j[ \;\subseteq \mathcal{R}$, also der Widerspruch $\vec{v} \in \overline{\mathcal{R}}(\delta)$.
Damit gibt es insbesondere ein $v_l \in [1 - \delta - \sum_{j=1}^{l-1} v_j,\; 1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j[$ mit $\{\vec{v}\} \times \{v_l\} \notin \mathcal{R}$, wobei dies nach $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} H^{-}_{f_i,\,\alpha_i}$ die Existenz eines Indexes $1 \leq i_0 \leq n$ mit $\{\vec{v}\} \times \{v_l\} \notin H^{-}_{f_{i_0},\,\alpha_{i_0}}$ impliziert.
Letzteres ist wiederum äquivalent zu $f_{i_0}(\{\vec{v}\} \times \{v_l\}) > \alpha_{i_0}$, was insbesondere $\alpha_{i_0} < \sum_{j=1}^{l} s_{j,i_0} v_j = \sum_{j=1}^{l-1} s_{j,i_0} v_j + s_{l,i_0} v_l = \sum_{j=1}^{l-1} s_{j,i_0} v_j + s_{l,i_0} \cdot (1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j) + s_{l,i_0} \cdot (v_l - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j))$, also

$$(1) \quad \exists\, 1 \leq i_0 \leq n \;:\; \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} < \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) v_j + s_{l,i_0} \cdot (v_l - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j))$$

liefert. Folgend genüge $i_0$ stets der Eigenschaft (1). Ferner gibt es wegen $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ einen Vektor $\vec{w} \in W$ mit $\vec{w} \in \overline{\mathcal{R}}$, d.h. es gibt ein $w_l \in [1 - \delta - \sum_{j=1}^{l-1} w_j,\; 1 - \sum_{j=1}^{l-1} w_j[$ mit $\{\vec{w}\} \times \{w_l\} \in \mathcal{R}$, was nach $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} H^{-}_{f_i,\,\alpha_i}$ die Gültigkeit von $\{\vec{w}\} \times \{w_l\} \in H^{-}_{f_i,\,\alpha_i}$ und damit jene von $f_i(\{\vec{w}\} \times \{w_l\}) \leq \alpha_i \;\; \forall\; 1 \leq i \leq n$ liefert. Analog zu oben mit $\geq$ und $i$ anstatt $<$ und $i_0$ folgt

$$(2) \quad \alpha_i - s_{l,i} \geq \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) w_j + s_{l,i} \cdot (w_l - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} w_j)) \quad \forall\; 1 \leq i \leq n.$$

Angenommen es gäbe ein $c \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha_{i_0}, s_{1,i_0}, ..., s_{l,i_0}) = (c, ..., c)$.
Dann ist $\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} = 0 = s_{j,i_0} - s_{l,i_0} \;\; \forall\; 1 \leq j \leq l-1$ und daher $0 < s_{l,i_0} \cdot (v_l - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j))$ nach (1), was wegen $v_l < 1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j$ insbesondere $s_{l,i_0} < 0$ impliziert. Aus (2) erhalten wir für $i = i_0$

jedoch $0 \geq s_{l,i_0} \cdot (w_l - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} w_j))$ und wegen $w_l < 1 - \sum_{j=1}^{l-1} w_j$ auch $s_{l,i_0} \geq 0$ im Widerspruch zu $s_{l,i_0} < 0$. Damit haben wir

$$(3) \quad (\alpha_{i_0}, s_{1,i_0}, ..., s_{l,i_0}) \neq (c, ..., c) \quad \forall\ c \in \mathbb{R},$$

gezeigt. Wegen $\vec{v} \in W$ ist $v_j \in [z_j, z_j + \delta^2[\ \ \forall\ 1 \leq j \leq l-1$ und mithilfe $v_l \in [1 - \delta - \sum_{j=1}^{l-1} v_j,\ 1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j[$ sowie (1) finden wir

$$\begin{aligned}
(4) \quad \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} &< \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) v_j + s_{l,i_0} \cdot (v_l - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} v_j)) \\
&\leq \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j + \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (v_j - z_j) + |s_{l,i_0}| \cdot \delta \\
&\leq \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j + \sum_{j=1}^{l-1} |s_{j,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot \delta^2 + |s_{l,i_0}| \cdot \delta \\
&\leq \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j + O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta),
\end{aligned}$$

denn die $s_{j,i}$ liegen allesamt in $S(\mathcal{R})$ und für hinreichend große $X$ mit $0 \leq \delta^2 \leq \delta \leq 1$ kommt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{j=1}^{l-1} |s_{j,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot \delta^2 + |s_{l,i_0}| \cdot \delta \leq \sum_{j=1}^{l-1} |s_{j,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot \delta + |s_{l,i_0}| \cdot \delta \\
&\leq \delta \cdot (\sum_{j=1}^{l-1} [|s_{j,i_0}| + |s_{l,i_0}|] + |s_{l,i_0}|) \leq \delta \cdot (2l-1) \cdot \max\{|s_{j,i}| \mid s_{j,i} \in S(\mathcal{R})\} \ll_{S(\mathcal{R}),\eta} \delta.
\end{aligned}$$

Aus (2) folgt für $i = i_0$ wegen $\vec{w} \in W$ bzw. $w_j \in [z_j, z_j + \delta^2[\ \ \forall\ 1 \leq j \leq l-1$ sowie $w_l \in [1 - \delta - \sum_{j=1}^{l-1} w_j,\ 1 - \sum_{j=1}^{l-1} w_j[$ analog zu oben die Abschätzung

$$\begin{aligned}
(5) \quad \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} &\geq \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) w_j + s_{l,i_0} \cdot (w_l - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} w_j)) \\
&\geq \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j + \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (w_j - z_j) - |s_{l,i_0}| \cdot \delta \\
&\geq \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j - \sum_{j=1}^{l-1} |s_{j,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot \delta^2 - |s_{l,i_0}| \cdot \delta \\
&\geq \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j + O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta),
\end{aligned}$$

was aufgrund der reellwertigen Funktionen in den $O_{S(\mathcal{R}),\eta}$-Gliedern aus (4) und (5) insgesamt

$$(6) \quad \exists\, 1 \leq i_0 \leq n \;:\; \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} = \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j + O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta)$$

impliziert. Angenommen es wäre $s_{j,i_0} - s_{l,i_0} = 0$ für alle $1 \leq j \leq l-1$ und das (6) genügende $1 \leq i_0 \leq n$. Dann ist $a_{i_0} - s_{l,i_0} = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta)$, denn die Summe in (6) verschwindet. Also gibt es eine (im Wesentlichen) von $X$ unabhängige Konstante $k = k(S(\mathcal{R}), \eta) \in \mathbb{R}^+$ (s.u.), sodass

$$(7) \quad |\alpha_{i_0} - s_{l,i_0}| \leq k \cdot \delta = \; k \cdot \frac{1}{\log(\log(X))} \quad \text{für } X \longrightarrow \infty$$

gilt. Nach Erklärung unserer $O$-Schreibweise in Kap. 2 erhalten wir dies sogar für alle $X$.
Die Menge $S(\mathcal{R})$ ist von $X$ unabhängig ($\Leftarrow \mathcal{R}$ ist logarithmisch) und daher ist auch $k$ von $X$ unabhängig, falls wir $\eta \in ]0,1]$ als eine von $X$ unabhängige Konstante wählen. Im Falle der Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 verändern sich $\eta = \eta(X)$ und damit auch $k = k(S(\mathcal{R}), \eta)$ hinreichend langsam für $X \longrightarrow \infty$ und können damit wieder als konstant gegenüber $(\log(\log X))^{-1}$ angesehen werden (beachte: $k$ hängt stetig von $\eta$ ab und ist effektiv (s.o.)), d.h. insbesondere hängt $k$ dann nur unwesentlich von $X$ ab.

In beiden Fällen der Wahl von $\eta$ erkennen wir, dass die rechte Seite von (7) für $X \longrightarrow \infty$ gegen 0 geht und erinnern den Leser nochmal an die Definition des logarithmischen Polytops $\mathcal{R}$.

Ist $\alpha_{i_0}$ von $X$ unabhängig, so auch $|\alpha_{i_0} - s_{l,i_0}|$ und daher muss $\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} = 0$ sein aufgrund der Nullfolge auf der rechten Seite von (7). Damit wäre $(\alpha_{i_0}, s_{1,i_0}, ..., s_{l,i_0}) = (c, ..., c)$ für ein $c \in \mathbb{R}$ im Widerspruch zu (3).

Für $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_0}(X) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log X)^{1/2}}$ ist insbesondere $s_{l,i_0} \neq -\frac{1}{2}$ nach (1) in der Def. des log. Polytops $\mathcal{R}$, womit $|\alpha_{i_0}(X) - s_{l,i_0}|$ dann für $X \longrightarrow \infty$ gegen eine Konstante $\neq 0$ konvergiert, nach (7) jedoch Nullfolge sein muss. Somit entsteht auch in diesem Fall ein Widerspruch.

Für $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_0}(X) = -(\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$ ist $|\alpha_{i_0}(X) - s_{l,i_0}|$ aufgrund der rechten Seite von (7) wieder Nullfolge für $X \longrightarrow \infty$. Jedoch konvergiert $|\alpha_{i_0}(X) - s_{l,i_0}| = |-\frac{1}{\log(\log(\log(\log X)))} - s_{l,i_0}|$ für $X \longrightarrow \infty$ gegen $|s_{l,i_0}|$, sodass $s_{l,i_0} = 0$ ist. Daraus folgt nach (7) insbesondere

$$\frac{1}{\log(\log(\log(\log X)))} = |\alpha_{i_0}(X)| = |\alpha_{i_0}(X) - s_{l,i_0}| \leq k \cdot \frac{1}{\log(\log(X))} \quad \text{für } X \longrightarrow \infty,$$

was jedoch ausgeschlossen ist, denn $k$ ist eine (im Wesentlichen) von $X$ unabhängige Konstante.

Wir erkennen zudem, dass auch bei einer allgemeinen Wahl von $\eta = \eta(X)$ als Nullfolge gemäß Bemerkung 1, wobei in Eigenschaft (3) des log. Polytops ja stets $\alpha_i = -\eta(X)$ zu wählen ist, der Fall $\alpha_{i_0} = -\eta(X)$ mit obiger Idee zum Widerspruch gebracht werden kann. Dann muss aufgrund der Nullfolge $\eta = \eta(X) > 0$ wieder $s_{l,i_0} = 0$ sein und die letzte Ungleichung wird zu

$$\eta(X) \leq k \cdot \frac{1}{\log(\log X)} \quad \text{für } X \longrightarrow \infty,$$

was nicht sein kann, denn $\eta(X) > 0$ sowie $k$ sind konstant gegenüber $\delta = \frac{1}{\log(\log X)}$ für $X \longrightarrow \infty$.

Nach Definition des log. Polytops $\mathcal{R}$ ist damit die Fallunterscheidung abgeschlossen und die Annahme zum Widerspruch gebracht. Folglich gilt

$$(8) \quad \exists\, 1 \leq j_0 \leq l-1 \,:\, s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0} \neq 0.$$

Fassen wir unsere Ergebnisse (6) und (8) zusammen, so liefert dies die Aussage

(9) Jeder Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ und $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ induziert ein Paar $(i_0, j_0)$ mit $1 \leq i_0 \leq n,\ 1 \leq j_0 \leq l-1$, für das $\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} = \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j + O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta)$ und $s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0} \neq 0$ gilt.

Sei $(i_0, j_0)$ mit $1 \leq i_0 \leq n,\ 1 \leq j_0 \leq l-1$ gegeben. Wir zählen die Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ und $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, die dieses Paar induzieren.

Dazu seien zunächst $z_1, ..., z_{j_0-1}, z_{j_0+1}, ..., z_{l-1} \in Z$ fixiert. Dann liegt auch $S := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{l-1} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) z_j$ fest und nach (9) gilt $\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - S = (s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_{j_0} + O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta)$, falls der Würfel $W(z_1, ..., z_{l-1})$ das gegebene Paar induziert. Ist $k = k(S(\mathcal{R}), \eta) \in \mathbb{R}^+$ die Konstante im $O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta)$, so gilt

$$\frac{\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - S}{s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}} - \left|\frac{k}{s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}}\right| \cdot \delta \leq z_{j_0} \leq \frac{\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - S}{s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}} + \left|\frac{k}{s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}}\right| \cdot \delta,$$

denn der Nenner $s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}$ verschwindet nicht.
Nun ist offenbar $|s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}| \geq \min\{|s_{j,i} - s_{h,i}| \neq 0 \mid s_{j,i},\ s_{h,i} \in S(\mathcal{R})\ \} := c(S(\mathcal{R})) = c \in \mathbb{R}^+$, wobei wir bemerken, dass die Menge, über die wir das Minimum bilden, wegen $s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0} \neq 0$

nicht-leer ist. Somit gilt für $\gamma = \gamma(S(\mathcal{R}), \eta) := \frac{k}{c} \in \mathbb{R}^+$ insbesondere $\gamma \geq |\frac{k}{s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}}|$ und daher

$$\frac{\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - S}{s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}} - \gamma \cdot \delta \leq z_{j_0} \leq \frac{\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - S}{s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}} + \gamma \cdot \delta.$$

Der Bruch $\frac{\alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - S}{s_{j_0,i_0} - s_{l,i_0}}$ liegt fest und $z_{j_0}$ liegt in einem Intervall der Breite $2\gamma \cdot \delta$, sodass wegen $z_{j_0} = \frac{\eta}{2} + i_{j_0} \cdot \delta^2 \in Z$ für dieses $z_{j_0} \in Z$ bzw. $i_{j_0} \in \mathbb{N}_0$ höchstens $\lfloor \frac{2\gamma \cdot \delta}{\delta^2} \rfloor + 1 = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-1})$ (aufeinanderfolgende) Werte in Frage kommen (beachte: $\delta^{-1} \gg 1$). Folglich gibt es auch nur $(m+1)^{l-2} \cdot (\lfloor \frac{2\gamma \cdot \delta}{\delta^2} \rfloor + 1) = O_\eta((\delta^{-2})^{l-2}) \cdot O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-1}) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3})$ Tupel $(z_1, ..., z_{l-1}) \in Z$, für die der Würfel $W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ und $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ das gegebene Paar $(i_0, j_0)$ induziert.

Da es nur $n \cdot (l-1) = O_\eta(1)$ dieser Paare gibt, wobei $n$ eine absolute Konstante des Polytops $\mathcal{R}$ ist, die nicht von $X$ abhängt, existieren nach (9) höchstens $n \cdot (l-1) \cdot O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3}) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3})$ Würfel $W$ mit $W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ und $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

$\square$

*HS2 Prop.6.1*:

Die Voraussetzungen von *HS1 Prop.6.1* übernehmen wir und erinnern daran, dass $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} H^-_{f_i,\, \alpha_i}$ beschränkter Durchschnitt endlich vieler ($n \in \mathbb{N}$) abgeschlossener Halbräume

$$H^-_{f_i,\, \alpha_i} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^l \mid f_i(\vec{v}) \leq \alpha_i\} \text{ ist, wobei } f_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{l} s_{j,i} \cdot x_j \text{ für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$$

eine lineare Abbildung definiert und $S(\mathcal{R}) = \{s_{j,i} \mid 1 \leq j \leq l,\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{0\}$ gilt.
Analog zum Nachweis von Prop. 6.1 definieren wir für $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ durch $g(W)$ das eindeutig bestimmte Element $z \in [1 - \delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i[ \cap Z$ (vgl. S.87), wobei $Z$ wieder unsere bekannte Menge $Z = \{\frac{\eta}{2} + i \cdot \delta^2 \mid i = 0, ..., m\}$ aus dem Beweis von Prop. 6.1 (vgl. S.85) sei. Es ergeben sich die folgenden Aussagen in den Teilen a)-c):

a) Wir definieren die Mengen

$$K := \{\, W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \mid \forall\ 1 \le i \le n : \sum_{j=1}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) z_j + r_i \cdot (\delta + l\delta^2) \le \alpha_i - s_{l,i} - \delta^2 \cdot c_i + \delta \cdot d_i \} \text{ mit}$$

$$r_i := \max_{1 \le j \le l} |s_{j,i} - s_{l,i}|,\ c_i := \sum_{\substack{j=1 \\ s_{j,i} - s_{l,i} > 0}}^{l-1} s_{j,i} - s_{l,i},\ d_i := \min\{s_{l,i}\ , 0\}\ \forall\ 1 \le i \le n \text{ sowie}$$

$$T_1 := \{\, W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \cap \overline{\mathcal{R}} \ne \emptyset \mid \forall\ z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z,$$
$$\forall\ \text{P.}\ (z_1', ..., z_l') \text{ von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit } z_t' = z_l \text{ für ein } 1 \le t \le l\ :$$
$$W(z_1', ..., z_{l-1}') \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \Leftrightarrow\ W(z_1', .., z_{t-1}', g(W_0), z_{t+1}', ..., z_{l-1}') \in K \}.$$

(i) Dann ist $\#\{\, W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \ne \emptyset \mid W_0 \notin T_1\} \ll_{S(\mathcal{R}),\eta} \delta^{-2l+3}$.

(ii) Für $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \ne \emptyset$ gilt :

$$\forall\ z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z,\ \forall\ \text{P.}\ (z_1', ..., z_l') \text{ von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit}$$
$$z_t' = z_l \text{ für ein } 1 \le t \le l\ :$$
$$W(z_1', ..., z_{t-1}', g(W_0), z_{t+1}', ..., z_{l-1}') \in K \ \Rightarrow\ W(z_1', ..., z_{l-1}') \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta).$$

b) Wir setzen

$$T_2 := \{\, W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid \forall\, z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z,$$
$$\forall\ \text{P.}\ (z_1', ..., z_l') \text{ von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit } z_t' = z_l \text{ für ein } 1 \le t \le l\ :$$
$$W(z_1', ..., z_{l-1}') \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \Leftrightarrow\ W(z_1', ..., z_{t-1}', g(W_0), z_{t+1}', ..., z_{l-1}') \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)\}.$$

Dann gilt $\#\{\, W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid W \notin T_2\,\} \ll_{S(\mathcal{R}),\eta} \delta^{-2l+3}$.

c) Ferner erklären wir

$$Q := \{\, W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \mid \forall\ 1 \le i < j \le l-1\ :\ z_i \ne z_j \quad \wedge$$
$$\forall\ z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z,\ \forall\ 1 \le i \le l-1\ :\ z_i \ne z_l\}.$$

Dann gilt $\#\{\, W \notin Q\} \ll_{S(\mathcal{R}),\eta} \delta^{-2l+3}$.

*Beweis*:

Wir verwenden im Nachweis zu a) und b) die Äquivalenz

$$(*) \quad W(z_1,...,z_{l-1}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \;\Leftrightarrow\; \forall\ 1 \leq i \leq n \ :\ \sum_{j=1}^{l}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j \leq \alpha_i - s_{l,i} - \delta^2 \cdot c_i + \delta \cdot d_i$$

mit $c_i := \sum\limits_{\substack{j=1 \\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} s_{j,i} - s_{l,i}$ und $d_i := \min\{s_{l,i}\ ,0\}\ \ \forall\ 1 \leq i \leq n$, welche für alle Würfel $W = W(z_1,...,z_{l-1})$ gilt. Darin ist $z_l \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar, denn der Summand für $j = l$ verschwindet. Diese Gleichwertigkeit weisen wir nun nach.

Nach Definition von $\overline{\mathcal{R}}(\delta)$ (vgl. S.111 oder S.84) gilt

$$\begin{aligned}
&\vec{e} \in \overline{\mathcal{R}}(\delta) \;\Leftrightarrow\; \{\vec{e}\} \times [1-\delta-\sum_{j=1}^{l-1} e_j, 1-\sum_{j=1}^{l-1} e_j[ \;\subseteq \mathcal{R} \;\Leftrightarrow \\
&\forall\ \delta > \epsilon > 0\ :\ \{\vec{e}\} \times [1-\delta-\sum_{j=1}^{l-1} e_j, 1-\sum_{j=1}^{l-1} e_j - \epsilon]\ \subseteq \mathcal{R} \;\Leftrightarrow \\
&\forall\ \delta > \epsilon > 0\ :\ \{\vec{e}\} \times \{1-\delta-\sum_{j=1}^{l-1} e_j\} \in \mathcal{R} \;\wedge\; \{\vec{e}\} \times \{1-\sum_{j=1}^{l-1} e_j - \epsilon\} \in \mathcal{R},
\end{aligned}$$

wobei dieses $\epsilon$ nichts mit dem festgelegten $\epsilon = 10^{-1000}$ zu tun hat und wir im letzten Schritt die Konvexität von $\mathcal{R}$ benutzen. Die letzte Aussage ist wegen $\mathcal{R} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} H^-_{f_i,\,\alpha_i}$ gleichwertig zu

$$\begin{aligned}
\forall\ \delta > \epsilon > 0\ \ \forall\ 1 \leq i \leq n :\ &\sum_{j=1}^{l-1} s_{j,i} \cdot e_j + s_{l,i} \cdot (1-\delta-\sum_{j=1}^{l-1} e_j) \leq \alpha_i \quad \wedge \\
&\sum_{j=1}^{l-1} s_{j,i} \cdot e_j + s_{l,i} \cdot (1-\sum_{j=1}^{l-1} e_j - \epsilon) \leq \alpha_i \qquad \Leftrightarrow \\
\forall\ \delta > \epsilon > 0\ \ \forall\ 1 \leq i \leq n :\ &\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \leq \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot s_{l,i} \quad \wedge \\
&\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \leq \alpha_i - s_{l,i} + \epsilon \cdot s_{l,i} \qquad \Leftrightarrow \\
\forall\ 1 \leq i \leq n :\ &\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \leq \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i
\end{aligned}$$

mit $d_i := \min\{s_{l,i}\ ,0\}\ \ \forall\ 1 \leq i \leq n$, denn die letzte Äquivalenz ergibt sich wie folgt.

Sei $1 \leq i \leq n$ fixiert. Für $d_i = s_{l,i} \leq 0$ ist $\delta \cdot s_{l,i} \leq \epsilon \cdot s_{l,i}\ \ \forall\ \delta > \epsilon > 0$, womit die zweite Ungleichung vor dem $\Leftrightarrow$-Zeichen erfüllt ist, wenn die erste gilt. Diese wird aber wegen $d_i = s_{l,i}$

gerade zur Ungleichung hinter dem $\Leftrightarrow$-Zeichen. Für $s_{l,i} > 0$ bzw. $d_i = 0$ ist $\delta \cdot s_{l,i} > \epsilon \cdot s_{l,i} > 0$ $\forall\ \delta > \epsilon > 0$, womit die erste Ungleichung vor dem $\Leftrightarrow$-Zeichen erfüllt ist, wenn die zweite gilt. Aus $\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \leq \alpha_i - s_{l,i} + \epsilon \cdot s_{l,i}\ \ \forall\ \delta > \epsilon > 0 \ \Leftrightarrow\ \sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \leq \alpha_i - s_{l,i}$ erhalten wir dann die gewünschte Gleichwertigkeit zur Ungleichung hinter dem $\Leftrightarrow$-Zeichen ($\delta \cdot d_i = 0$), denn $\epsilon \cdot s_{l,i} > 0$ kann beliebig nahe an Null liegen. Damit folgt insgesamt

$$(1) \quad \vec{e} \in \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \Leftrightarrow\ \forall\ 1 \leq i \leq n : \sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \leq \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i.$$

Sei nun $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ gegeben. Nach (1) gilt

$$\begin{aligned}
&W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \Leftrightarrow\ \forall\ \vec{e} \in W\ :\ \vec{e} \in \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \Leftrightarrow \\
&\forall\ \vec{e} \in W\ :\ \sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \leq \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i\ \forall\ 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Angenommen es gäbe einen Index $1 \leq i \leq n$ mit

$$S := \sum_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}\leq 0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j + \sum_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot (z_j + \delta^2) > \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i.$$

Wir setzen $s := \begin{cases} \max\{s_{j,i} - s_{l,i} > 0 \mid 1 \leq j \leq l-1\} & \text{, falls diese Menge nicht-leer ist} \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases} \in \mathbb{R}^+$

sowie $\gamma := \frac{1}{(s+1)\cdot(l-1)} \cdot (S - (\alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i)) \in \mathbb{R}^+$, sodass wegen $l \geq 2$ insbesondere $(s+1) \cdot (l-1) > s \cdot (l-1) \geq \sum_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \geq 0$ ist.

Ferner ist der Vektor $\vec{e} \in \mathbb{R}^{l-1}$ mit $e_j \begin{cases} = z_j & \text{, falls } s_{j,i} - s_{l,i} \leq 0 \\ \in\, ]z_j + \delta^2 - \gamma, z_j + \delta^2[\, \cap\, [z_j, z_j + \delta^2[ & \text{, falls } s_{j,i} - s_{l,i} > 0 \end{cases}$

für alle $1 \leq j \leq l-1$ nach Definition in $W$ enthalten und es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j &= \sum_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}\leq 0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j + \sum_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \\
&\geq \sum_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}\leq 0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j + \sum_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot (z_j + \delta^2 - \gamma) \\
&= S - \gamma \cdot \sum_{\substack{j=1\\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) > S - \gamma \cdot (s+1) \cdot (l-1) = \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i,
\end{aligned}$$

was $\vec{e} \notin \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ nach (1) bzw. $W \not\subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ impliziert ($\Leftarrow \vec{e} \in W$). Daraus kommt

$$(2) \quad W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \;\Leftrightarrow\; \forall\; \vec{e} \in W \;:\; \sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \leq \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i \;\forall\; 1 \leq i \leq n \;\Rightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j \leq \alpha_i - s_{l,i} - \delta^2 \cdot c_i + \delta \cdot d_i \quad \forall\; 1 \leq i \leq n,$$

wenn wir die einzelnen Summen in $S$ geeignet zusammenfassen und $c_i := \sum\limits_{\substack{j=1 \\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} s_{j,i} - s_{l,i}$ $\forall\; 1 \leq i \leq n$ definieren. Umgekehrt liefert

$$\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j \leq \alpha_i - s_{l,i} - \delta^2 \cdot c_i + \delta \cdot d_i \quad \text{bzw.}$$
$$\sum_{\substack{j=1 \\ s_{j,i}-s_{l,i}\leq 0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j + \sum_{\substack{j=1 \\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot (z_j + \delta^2) \leq \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i \quad \forall\; 1 \leq i \leq n$$

für alle $\vec{e} \in W$ wegen $e_j \in [z_j, z_j + \delta^2[ \;\subseteq [0,1] \;\; \forall\; 1 \leq j \leq l-1$ die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j &= \sum_{\substack{j=1 \\ s_{j,i}-s_{l,i}\leq 0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j + \sum_{\substack{j=1 \\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot e_j \\
&\leq \sum_{\substack{j=1 \\ s_{j,i}-s_{l,i}\leq 0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j + \sum_{\substack{j=1 \\ s_{j,i}-s_{l,i}>0}}^{l-1} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot (z_j + \delta^2) \\
&\leq \alpha_i - s_{l,i} + \delta \cdot d_i \quad \forall\; 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

und damit nach (2) auch $W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$, sodass wir in (2) das $\Rightarrow$-Zeichen durch $\Leftrightarrow$ ersetzen können und folglich $(*)$ gezeigt haben. Hier nochmal der Hinweis, dass $\sum\limits_{j=1}^{l-1}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j = \sum\limits_{j=1}^{l}(s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j$ für beliebige $z_l \in \mathbb{R}$ gilt und wir demnach auch die Summe in $K$ sorglos bis $j = l$ laufen lassen dürfen. Mithilfe $(*)$ erfolgt nun der Nachweis

zu a): Wir zeigen zunächst (ii). Sei $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ gegeben, $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i,\; 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z$ fixiert und $(z_1', ..., z_l')$ P. von $(z_1, ..., z_l)$ mit $z_t' = z_l$ für ein $1 \leq t \leq l$.

Wegen $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ ist $g(W_0)$ definiert und das eindeutig bestimmte Element aus $[1 - \delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i,\; 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i[ \;\cap Z$. Aus $W(z_1', ..., z_{t-1}', g(W_0), z_{t+1}', ..., z_{l-1}') \in K$ folgt

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{l}(s_{j,i}-s_{l,i})\cdot z_j^{'}+(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot g(W_0)+r_i\cdot(\delta+l\delta^2)\leq\alpha_i-s_{l,i}-\delta^2\cdot c_i+\delta\cdot d_i$$

für alle $1\leq i\leq n$. Wegen $|z_t^{'}-g(W_0)|=|z_l-g(W_0)|\leq\delta+l\delta^2$ sowie $|s_{t,i}-s_{l,i}|\leq r_i$ kommt

$$(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot z_t^{'}=(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot z_l=(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot(z_l-g(W_0))+(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot g(W_0)\leq$$
$$(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot g(W_0)+|s_{t,i}-s_{l,i}|\cdot(\delta+l\delta^2)\leq(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot g(W_0)+r_i\cdot(\delta+l\delta^2)$$

für alle $1\leq i\leq n$, sodass auch

$$\sum_{j=1}^{l}(s_{j,i}-s_{l,i})\cdot z_j^{'}\leq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{l}(s_{j,i}-s_{l,i})\cdot z_j^{'}+(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot z_t^{'}\leq$$
$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{l}(s_{j,i}-s_{l,i})\cdot z_j^{'}+(s_{t,i}-s_{l,i})\cdot g(W_0)+r_i\cdot(\delta+l\delta^2)\leq\alpha_i-s_{l,i}-\delta^2\cdot c_i+\delta\cdot d_i$$

für alle $1\leq i\leq n$ gilt, was nach $(*)$ gleichwertig ist zu $W(z_1^{'},...,z_{l-1}^{'})\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)$.
Damit ist (ii) nachgewiesen.

Nun zeigen wir (i). Es gilt

$$\begin{aligned}
&\{\,W_0\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\mid W_0\notin T_1\,\}=\\
&\{\,W_0(z_1,...,z_{l-1})\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\mid\exists\, z_l\in[1-\delta-l\delta^2-\sum_{i=1}^{l-1}z_i,\ 1-\sum_{i=1}^{l-1}z_i]\ \cap\ Z,\\
&\quad\exists\,\text{P.}\ (z_1^{'},...,z_l^{'})\ \text{von}\ (z_1,...,z_l)\ \text{mit}\ z_t^{'}=z_l\ \text{ für ein }\ 1\leq t\leq l\ :\\
&\quad W(z_1^{'},...,z_{l-1}^{'})\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\ \ \wedge\ \ W(z_1^{'},...,z_{t-1}^{'},g(W_0),z_{t+1}^{'},...,z_{l-1}^{'})\notin K\ \text{ oder}\\
&\quad W(z_1^{'},...,z_{l-1}^{'})\nsubseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\ \ \wedge\ \ W(z_1^{'},...,z_{t-1}^{'},g(W_0),z_{t+1}^{'},...,z_{l-1}^{'})\in K\}=\\
&\{\,W_0(z_1,...,z_{l-1})\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\mid\exists\, z_l\in[1-\delta-l\delta^2-\sum_{i=1}^{l-1}z_i,\ 1-\sum_{i=1}^{l-1}z_i]\ \cap\ Z,\\
&\quad\exists\,\text{P.}\ (z_1^{'},...,z_l^{'})\ \text{von}\ (z_1,...,z_l)\ \text{mit}\ z_t^{'}=z_l\ \text{ für ein }\ 1\leq t\leq l\ :\\
&\quad W(z_1^{'},...,z_{l-1}^{'})\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\ \ \wedge\ \ W(z_1^{'},...,z_{t-1}^{'},g(W_0),z_{t+1}^{'},...,z_{l-1}^{'})\notin K\}:=S_1,
\end{aligned}$$

denn der zweite Fall in der zweiten Menge kann nach (ii) nicht eintreten. Wir verwenden eine ähnliche Idee wie im Nachweis von *HS1 Prop.6.1.*

Sei $W_0 = W_0(z_1, .., z_{l-1}) \in S_1$ sowie $z_l \in Z$ und die P. $(z_1^{'}, ..., z_l^{'})$ von $(z_1, ..., z_l)$ mit $z_t^{'} = z_l$ für ein $1 \leq t \leq l$ gemäß der Definition von $S_1$ gegeben. Aus $(*)$ und $W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ folgt

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{l} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j^{'} \leq \alpha_i - s_{l,i} - \delta^2 \cdot c_i + \delta \cdot d_i \quad \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

Ferner gibt es einen Index $1 \leq i_0 \leq n$ mit

$$(4) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_j^{'} + (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) + r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2) > \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0},$$

denn $W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \notin K$. Nach $g(W_0), z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i]$ ist $|z_t^{'} - g(W_0)| = |z_l - g(W_0)| \leq \delta + l\delta^2$ und zudem gilt $|s_{t,i_0} - s_{l,i_0}| \leq r_{i_0}$, woraus wir

$$\begin{aligned}(5) \quad (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_t^{'} = (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_l &= (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) + (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (z_l - g(W_0)) \\ &\geq (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) - |s_{t,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot (\delta + l\delta^2) \\ &\geq (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) - r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2)\end{aligned}$$

schließen. Setzen wir $i = i_0$ in (3) ein, so erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}(6) \quad \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} &\geq \sum_{j=1}^{l} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_j^{'} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_j^{'} + (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_t^{'} \\ &\geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_j^{'} + (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) - r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2) \\ &> \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} - 2 \cdot r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2),\end{aligned}$$

wobei wir zuletzt (4) verwenden und bemerken, dass $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'})$ eine P. von $(z_1, ..., z_{l-1})$ ist, weil $(z_1^{'}, ..., z_l^{'})$ P. von $(z_1, ..., z_l)$ ist mit $z_t^{'} = z_l$ für ein $1 \leq t \leq l$. Damit haben wir

$$(7) \quad \exists\, 1 \leq i_0 \leq n \ :\ \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} + r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2) \geq$$
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_j^{'} + (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) > \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} - r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2),$$

wobei $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'})$ P. von $(z_1, ..., z_{l-1})$ ist, gezeigt. Ferner ist $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{l} z_j^{'} = \sum\limits_{j=1}^{l-1} z_j$ und daher

$$(8) \quad (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) = (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (1 - \sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{l} z_j^{'}) + (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j))$$

$$= s_{t,i_0} - s_{l,i_0} - (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot \sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{l} z_j^{'} + (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)),$$

was eingesetzt in (7) und leichter Umformung die Gültigkeit von

$$(9) \quad \exists\, 1 \leq i_0 \leq n \ :$$

$$\alpha_{i_0} - s_{t,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} + r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2) - (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)) \geq$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{t,i_0}) \cdot z_j^{'} >$$

$$\alpha_{i_0} - s_{t,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} - r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2) - (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)),$$

wobei $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'})$ P. von $(z_1, ..., z_{l-1})$ ist,

liefert. Angenommen es gilt $s_{j,i_0} - s_{t,i_0} = 0 \ \forall \ 1 \leq j \leq l,\ j \neq t$.
Dann ist $s_{1,i_0} = ... = s_{l,i_0}$ und $r_{i_0} := \max\limits_{1\leq j\leq l} |s_{j,i_0} - s_{l,i_0}| = 0$ sowie $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{t,i_0}) \cdot z_j^{'} = 0$, sodass aus (9) die Gültigkeit von $\alpha_{i_0} - s_{t,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} \geq 0 > \alpha_{i_0} - s_{t,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0}$ (beachte: $s_{t,i_0} - s_{l,i_0} = 0$) und damit ein Widerspruch folgt. Somit kommt

$$(10) \quad \exists\, 1 \leq j_0 \leq l,\ j_0 \neq t \ :\ s_{j_0,i_0} - s_{t,i_0} \neq 0.$$

Setze $c(S(\mathcal{R})) := \max\{|s_{j,i}| \mid s_{j,i} \in S(\mathcal{R})\} \in \mathbb{R}_0^{+}$. Wegen $g(W_0) \in [1 - \delta^2 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{l-1} z_i[ \cap Z$ gilt $|(s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum\limits_{j=1}^{l-1} z_j))| \leq |s_{t,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot \delta^2 \leq 2 \cdot c(S(\mathcal{R})) \cdot \delta^2$, also

$$(s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)) = O_{S(\mathcal{R})}(\delta^2).$$

Ferner liegen die $s_{j,i}$ allesamt in $S(\mathcal{R})$ und nach Definition sind $r_{i_0}, c_{i_0}$ sowie $d_{i_0}$ nur von diesen $s_{j,i}$ abhängig, sodass im Speziellen $|r_{i_0}|, |c_{i_0}|, |d_{i_0}| \ll_\eta c(S(\mathcal{R}))$ folgt und wir somit $r_{i_0}, c_{i_0}, d_{i_0}$ als $O_{S(\mathcal{R}),\eta}(1)$ schreiben können. Dies liefert insgesamt

$$-\delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} + r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2) - (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)) = O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}(\delta) \quad \wedge$$
$$-\delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} - r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2) - (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)) = O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}(\delta)$$

wegen $0 \leq \delta^2 \leq \delta \leq 1$ für hinreichend große $X$, sodass wir

(11) $\quad \exists\, 1 \leq i_0 \leq n \;:\; \alpha_{i_0} - s_{t,i_0} + O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{t,i_0}) \cdot z_j^{'},$

wobei $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'})$ P. von $(z_1, ..., z_{l-1})$ ist,

nach (9) erhalten. Fassen wir unsere Resultate (10) und (11) zusammen, so liefert dies

(12) Jeder Würfel $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_1$ induziert ein Tripel $(i_0, j_0, t)$

mit $1 \leq i_0 \leq n,\ 1 \leq j_0, t \leq l,\ j_0 \neq t$, sodass eine P. $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'})$

von $(z_1, ..., z_{l-1})$ mit der folgenden Eigenschaft existiert :

$(**)\quad \alpha_{i_0} - s_{t,i_0} + O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{t,i_0}) \cdot z_j^{'} \quad \wedge \quad s_{j_0,i_0} - s_{t,i_0} \neq 0\,.$

Nun fixieren wir ein gemäß (12) erklärtes Tripel $(i_0, j_0, t)$ und zählen die Anzahl der Würfel $W_0 = W_0(z_1, ...z_{l-1}) \in S_1$, die dieses Tripel induzieren.

Für jeden dieser Würfel finden wir nach (12) eine Permutation $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'})$ von $(z_1, ..., z_{l-1})$ mit Eigenschaft $(**)$ $\alpha_{i_0} - s_{t,i_0} + O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{t,i_0}) \cdot z_j^{'}$ und $s_{j_0,i_0} - s_{t,i_0} \neq 0$. Dabei gibt es analog zur Idee im Nachweis von *HS1 Prop.6.1* (vgl. S.115, $j_0 \neq t$) genau $O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3})$ mögliche $(l-1)$-Tupel $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'}) \in Z^{l-1}$ mit dieser Eigenschaft $(**)$. Da $(z_1, ..., z_{l-1})$ stets P. von einem dieser $(l-1)$-Tupel $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'}) \in Z^{l-1}$ sein soll, kommen auch nur $O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3})$ Würfel $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_1$ in Frage, die das fixierte Tripel $(i_0, j_0, t)$ induzieren, wenn wir die zusätzlichen $(l-1)! = O_\eta(1)$ Multiplizitäten aufgrund der Permutationseigenschaft berücksichtigen.

Nun gibt es insgesamt $n \cdot l \cdot (l-1) = O_\eta(1)$ solcher Tripel $(i_0, j_0, t)$, womit nach (12) insgesamt $O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3})$ Würfel in $S_1$ existieren. Damit haben wir (i) bewiesen.

zu b): Der Beweis hierzu geschieht mit den gleichen Ideen wie obiger Nachweis zu a) (i), weshalb wir nur die wesentlichen Punkte aufführen. Wir zerlegen in der Form

$$
\begin{aligned}
&\{\, W_0 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid W_0 \notin T_2 \,\} = \\
&\{\, W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid \exists\, z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z, \\
&\quad \exists\, \text{P. } (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit } z_t^{'} = z_l \text{ für ein } 1 \le t \le l \ : \\
&\quad W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \wedge\ W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \nsubseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \text{ oder} \\
&\quad W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \nsubseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \wedge\ W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)\} = \\
&\{\, W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid \exists\, z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z, \\
&\quad \exists\, \text{P. } (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit } z_t^{'} = z_l \text{ für ein } 1 \le t \le l \ : \\
&\quad W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \wedge\ W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \nsubseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)\} \cup \\
&\{\, W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid \exists\, z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z, \\
&\quad \exists\, \text{P. } (z_1^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ von } (z_1, ..., z_l) \text{ mit } z_t^{'} = z_l \text{ für ein } 1 \le t \le l \ : \\
&\quad W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \nsubseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \ \wedge\ W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)\} := S_1 \cup S_2
\end{aligned}
$$

und schätzen zunächst $\# S_1$ ab. Sei $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_1$ sowie $z_l \in Z$ und die P. $(z_1^{'}, ..., z_l^{'})$ von $(z_1, ..., z_l)$ mit $z_t^{'} = z_l$ für ein $1 \le t \le l$ gemäß der Definition von $S_1$ gegeben.
Aus $(*)$ und $W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ erhalten wieder (3), während $(*)$ sowie $W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \nsubseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ die zu (4) analoge Aussage ohne den Summanden $r_{i_0} \cdot (\delta + l\delta^2)$ impliziert. Verwenden wir ferner die vorletzte Zeile in (5), so folgt daraus insgesamt

$$
\begin{aligned}
(13) \quad & \exists\, 1 \le i_0 \le n \ : \ \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} + |s_{t,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot (\delta + l\delta^2) \ge \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_j^{'} + (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) > \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0}, \\
& \text{wobei } (z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'}) \text{ P. von } (z_1, ..., z_{l-1}) \text{ ist,}
\end{aligned}
$$

welches (7) entspricht. Einsetzen von (8) liefert schließlich

(14) $\exists\, 1 \leq i_0 \leq n \ :$

$$\alpha_{i_0} - s_{t,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} + |s_{t,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot (\delta + l\delta^2)$$

$$-(s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{t,i_0}) \cdot z_j^{'} >$$

$$\alpha_{i_0} - s_{t,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} - (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)),$$

wobei $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'})$ P. von $(z_1, ..., z_{l-1})$ ist,

welches (9) entspricht. Im Fall $s_{j,i_0} - s_{t,i_0} = 0 \; \forall 1 \leq j \leq l, j \neq t$ ergibt sich mithilfe $s_{1,i_0} = ... = s_{l,i_0}$ erneut ein Widerspruch (beachte: $s_{t,i_0} - s_{l,i_0} = 0$), sodass (10) gilt. Analog zum Nachweis von a) (i) erhalten wir aus (14) auch die Gültigkeit von (11), indem wir in der Herleitung dazu $r_{i_0}$ durch $|s_{t,i_0} - s_{l,i_0}|$ ersetzen und beachten, dass letzteres ebenfalls ein $O_{S(\mathcal{R}),\eta}(1)$ ist (vgl. S.123). Den Rest aus dem Nachweis von a) (i) können wir exakt so übernehmen und erhalten $\#S_1 = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3})$.

Die Abschätzung von $\#S_2$ geschieht auf ähnlichem Wege. Aus $(*)$ und $W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \nsubseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ sowie $W(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, g(W_0), z_{t+1}^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ erhalten wir jedoch

(15) $\exists\, 1 \leq i_0 \leq n \ : \ \sum_{j=1}^{l} (s_{j,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_j^{'} > \alpha_{i_0} - s_{l,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0}$ und

(16) $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{l} (s_{j,i} - s_{l,i}) \cdot z_j^{'} + (s_{t,i} - s_{l,i}) \cdot g(W_0) \leq \alpha_i - s_{l,i} - \delta^2 \cdot c_i + \delta \cdot d_i \quad \forall \ 1 \leq i \leq n,$

woraus wir mithilfe $(s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot z_t^{'} \leq (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot g(W_0) + |s_{t,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot (\delta + l\delta^2)$, welches wir analog zu (5) erhalten, sowie den gleichen Ideen wie oben

(17) $\exists\, 1 \leq i_0 \leq n \ : \ \alpha_{i_0} - s_{t,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} - (s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j))$

$$\geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{l} (s_{j,i_0} - s_{t,i_0}) \cdot z_j^{'} > \alpha_{i_0} - s_{t,i_0} - \delta^2 \cdot c_{i_0} + \delta \cdot d_{i_0} - |s_{t,i_0} - s_{l,i_0}| \cdot (\delta + l\delta^2)$$

$$-(s_{t,i_0} - s_{l,i_0}) \cdot (g(W_0) - (1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j)),$$

wobei $(z_1^{'}, ..., z_{t-1}^{'}, z_{t+1}^{'}, ..., z_l^{'})$ P. von $(z_1, ..., z_{l-1})$ ist, folgern können. Dies liefert wieder (10) sowie (11) und schließlich $\#S_2 = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3})$. Somit ist $\#\{\, W_0 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \mid W_0 \notin T_2 \,\} \leq \#S_1 + \#S_2 = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\delta^{-2l+3})$ und daher b) bewiesen.

zu c): Wir finden

$$\begin{aligned}
&\{\, W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \notin Q\} = \\
&\{\, W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \mid \exists\, 1 \leq i < j \leq l-1 \;:\; z_i = z_j\} \cup \\
&\{\, W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \mid \exists\, z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z,\ \exists\, 1 \leq i \leq l-1 \;:\; z_i = z_l\} \\
&:=\ S_1 \cup S_2
\end{aligned}$$

und schätzen zunächst $\#S_1$ ab.

Jeder Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_1$ induziert ein Paar $(i, j)$ mit $1 \leq i < j \leq l-1$ und $z_i = z_j$. Für ein gegebenes Paar $(i, j)$ mit $1 \leq i < j \leq l-1$ zählen wir die Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_1$, die dieses Paar induzieren. Für solche Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_1$ gilt $z_i = z_j = z \in Z$, wobei es für die $(l-3)$-Tupel $(z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, ..., z_{j-1}, z_{j+1}, ..., z_{l-1}) \in Z^{l-3}$ genau $(m+1)^{l-3} \ll_\eta (\delta^{-2})^{l-3} = \delta^{-2l+6}$ Möglichkeiten gibt und für $z_i = z_j = z \in Z$ genau $m + 1 \ll \delta^{-2}$ Werte in Frage kommen. Also gibt es höchstens $O_\eta(\delta^{-2l+4})$ Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_1$, die das gegebene Paar induzieren.
Da es nur $\frac{(l-1)\cdot(l-2)}{2} = O_\eta(1)$ solcher Paare gibt, gilt

$$(18) \quad \#S_1 = O_\eta(\delta^{-2l+4}).$$

Nun zur Abschätzung von $\#S_2$. Es ist

$$S_2 = \{\, W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \mid \exists\, 1 \leq j \leq l-1 \;:\; z_j \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i]\}.$$

Jeder Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_2$ induziert ein $1 \leq j \leq l-1$ mit $z_j \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i]$. Für gegebenes $1 \leq j \leq l-1$ zählen wir die Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_2$, die dieses $j$ induzieren. Dann ist nämlich $z_j \in Z$ und

$$z_j \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i], \text{ also } 2 \cdot z_j \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l-1} z_i,\ 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l-1} z_i].$$

Sind nun $z_1, ..., z_{j-1}, z_{j+1}, ..., z_{l-1} \in Z$ gegeben, so liegt auch $S := \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l-1} z_i$ fest und es gilt $z_j \in [\frac{1-S}{2} - \frac{\delta+l\delta^2}{2}, \frac{1-S}{2}] \cap Z$. Also liegt $z_j \in Z$ in einem Intervall der Breite $\frac{\delta+l\delta^2}{2} = O_\eta(\delta)$ ($\Leftarrow 0 \leq \delta^2 \leq \delta \leq 1$), sodass wegen $z_j = \frac{\eta}{2} + i_j \cdot \delta^2 \in Z$ für dieses $z_j \in Z$ bzw. $i_j \in \mathbb{N}_0$ höchstens $O_\eta(\frac{\delta}{\delta^2}) + 1 = O_\eta(\delta^{-1})$ (aufeinanderfolgende) Werte in Frage kommen (beachte: $\delta^{-1} \gg 1$).
Daher gibt es höchstens $(m+1)^{l-2} \cdot O_\eta(\delta^{-1}) = O_\eta(\delta^{-2l+3})$ Tupel $(z_1, ..., z_{l-1}) \in Z^{l-1}$ mit $z_j \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i]$, sodass auch nur $O_\eta(\delta^{-2l+3})$ Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \in S_2$ existieren, die das gegebene $1 \leq j \leq l-1$ induzieren.
Da für $1 \leq j \leq l-1$ genau $l - 1 = O_\eta(1)$ Werte in Frage kommen, erhalten wir

$$(19) \quad \#S_2 = O_\eta(\delta^{-2l+3}).$$

Dies liefert $\#\{ W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \notin Q\} \leq \#S_1 + \#S_2 = O_\eta(\delta^{-2l+3})$ und damit c).

Somit ist *HS2 Prop.6.1* bewiesen.

□

Um dem Leser später ein erneutes Hineindenken in die vorgestellten Methoden im Beweis von Proposition 6.1 zu ersparen, fügen wir ein weiteres Teilkapitel 6.2 an, welches leichte Folgerungen aus unseren bisherigen Ideen umfasst. Spezieller sind dies zwei Hilfssätze für die Propositionen 12.1 und 13.2, deren Beweis mit ähnlichen Mitteln wie jener von Proposition 6.1 erfolgt.

## 6.2 Einfache Folgerungen

*HS1 Proposition 12.1*:

Sei $\eta \in ]0,1]$ eine von $X$ unabhängige Konstante oder $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt sowie $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ und $k, m \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N}_0$ mit $k + m + s \ll \frac{1}{\eta}$ gegeben. Ferner sei

$$\mathcal{R} \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^{k+m+s} \mid \sum_{i=1}^{k+m} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$$

ein logarithmisches Polytop und für $D \subseteq \mathbb{R}^{k+m+s}$ definieren wir

$$T(D) := \{(d, p_{k+1}, ..., p_{k+m+s}) \mid d = p_1 \cdot ... \cdot p_k \ \wedge \ p_i \neq p_j \ \forall \ k+1 \leq i < j \leq k+m \ \wedge \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_{k+m+s}}{\log X}) \in D\}.$$

Wir erinnern an $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < X\}$ sowie die Definition von $\mathbf{1}_C$ für $C \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum(T(\mathcal{R})) &:= \sum_{(d,p_{k+1},...,p_{k+m+s}) \in T(\mathcal{R})} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_{k+m+s}) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_{k+m+s}) \\ &= O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}), \end{aligned}$$

wobei die von $\eta$ abhängige implizite Konstante/Funktion im $O_{S(\mathcal{R}),\eta}$-Glied effektiv ist und stetig von $\eta$ abhängt. Zudem bleibt die Aussage des Hilfssatzes auch im Fall $k = 0$ richtig.

*Beweis*:

Wir setzen $l = k + m + s \in \mathbb{N}$ und $l_1 = k + m \in \mathbb{N}$, sodass $l_1 \leq l \ll \frac{1}{\eta}$ gilt. Daher ist auch $\mathcal{R} \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^l \mid \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$ und wir definieren $\mathcal{R}'$, $\overline{\mathcal{R}}$, $\overline{\mathcal{R}}(\delta)$ wie im Nachweis zu Proposition 6.1 auf S.83-84. Aus Letzterem (S.83) entnehmen wir $\#\mathcal{A}(X^{1-\delta}) \ll \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}$, was

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{\substack{(d,p_{k+1},...,p_l) \in T(\mathcal{R}) \\ dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l < X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) &\leq \sum_{\substack{(p_1,...,p_l) \\ p_1 \cdot ... \cdot p_l < X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(p_1 \cdot ... \cdot p_l) \leq \sum_{0 \leq n < X^{1-\delta}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(n) \cdot l! \\ &\ll_\eta \sum_{\substack{n \in \mathcal{A} \\ n < X^{1-\delta}}} 1 = \#\mathcal{A}(X^{1-\delta}) \ll \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X} \end{aligned}$$

liefert, denn jedes Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T(\mathcal{R})$, $dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l < X^{1-\delta}$ induziert über $d = p_1 \cdot ... \cdot p_k$ ein Tupel $(p_1, ..., p_l)$ mit $p_1 \cdot ... \cdot p_l < X^{1-\delta}$, wobei die so induzierten Tupel für verschiedene Tupel aus $T(\mathcal{R})$ verschieden sind, und für jedes $n \in \mathbb{N}_0,\ n < X^{1-\delta}$ gibt es aufgrund der Eindeutigkeit der PFZ höchstens $l!$ Tupel $(p_1, ..., p_l)$ mit $n = p_1 \cdot ... \cdot p_l < X^{1-\delta}$. Tauschen wir nur $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{B}$ aus und beachten $\#\mathcal{B}(X^{1-\delta}) \ll X^{1-\delta} \ll \frac{\delta \cdot X}{\log X}$ mit $\mathcal{B}(x) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < x\} \ \forall \ x \in \mathbb{R}^+, \ x \geq 1$, so gilt analog zu (1) auch

$$\sum_{\substack{(d,p_{k+1},...,p_l)\in T(\mathcal{R}) \\ dp_{k+1}\cdot...\cdot p_l < X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) \leq \sum_{0 \leq n < X^{1-\delta}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(n) \cdot l! \ll_\eta \#\mathcal{B}(X^{1-\delta}) \ll \frac{\delta \cdot X}{\log X}$$

und daher

$$(2) \quad \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{(d,p_{k+1},...,p_l)\in T(\mathcal{R}) \\ dp_{k+1}\cdot...\cdot p_l < X^{1-\delta}}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) \ll_\eta \frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}.$$

Damit liefern in $\sum(T(\mathcal{R}))$ die Summanden mit $dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l < X^{1-\delta}$ einen Beitrag der Größenordnung $O_\eta(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$ und Summanden mit $dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l \geq X$ verschwinden wegen $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(n) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(n) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0, \ n \geq X$ völlig ($\Leftarrow \mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq [0, X[$), sodass es genügt,

$$\begin{aligned}
\sum(T(\mathcal{R}')) &:= \sum_{(d,p_{k+1},...,p_l)\in T(\mathcal{R}')} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) \\
&= \sum_{\substack{(d,p_{k+1},...,p_l)\in T(\mathcal{R}) \\ X^{1-\delta} \leq dp_{k+1}\cdot...\cdot p_l < X}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) \\
&= O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})
\end{aligned}$$

nachzuweisen, denn $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}$.
Wir erklären analog zum Nachweis von Proposition 6.1 Kap.I die Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ und können von S.83 ab „Wir definieren..." bis einschließlich Kap.II alles übernehmen.
Ferner dürfen wir $T(\mathcal{R}') \neq \emptyset$ annehmen, sodass auch $\mathcal{R}' \neq \emptyset$ und daher $l_1 < l$ sowie $s \in \mathbb{N}$ ist (beachte: $\frac{17}{40} - \epsilon < 1 - \delta$). Definieren wir die Menge $Q$ gemäß *HS2 Prop.6.1*, so gilt

$$\begin{aligned}
Q := \{ \, W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \mid \forall \ 1 \leq i < j \leq l-1 \ : \ z_i \neq z_j \ \wedge \\
\forall \ 1 \leq i \leq l-1 \ : \ z_i \notin [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, \ 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i]\}
\end{aligned}$$

und wir erklären weiter

$$T'(D) := \{(d, p_{k+1}, ..., p_l) \mid d = p_1 \cdot ... \cdot p_k \ \wedge \ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in D\} \supseteq T(D)$$

für $D \subseteq \mathbb{R}^l$ (beachte: $l = k + m + s$). Wir finden leicht $T^{'}(D_1 \cup D_2) = T^{'}(D_1) \cup T^{'}(D_2)$ und $T(D_1 \cup D_2) = T(D_1) \cup T(D_2)$ für $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^l$ sowie $T(D_1) \subseteq T(D_2)$ und $T^{'}(D_1) \subseteq T^{'}(D_2)$, falls $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \mathbb{R}^l$ ist, sodass nach (6.1.6) $\dot{\bigcup}_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)} W^+ \subseteq \mathcal{R}^{'} \subseteq \dot{\bigcup}_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} W^+$ auf S.85 auch

$$(3) \qquad \bigcup_{\substack{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \\ W \in Q}} T(W^+) \subseteq T(\mathcal{R}^{'}) \subseteq T^{'}(\mathcal{R}^{'}) \subseteq \bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} T^{'}(W^+)$$

gilt. Für $W = W(z_1, ..., z_{l-1}) \in Q$ ist insbesondere $z_i \neq z_j$ für alle $k + 1 \leq i < j \leq k + m$ ($\Leftarrow k + m = l_1 \leq l - 1$), sodass aus $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W^+)$, d.h. es gilt $\frac{\log p_i}{\log X} \in S(z_i)$ für alle $k+1 \leq i \leq k+m$, auch $p_i \neq p_j \;\; \forall\; k+1 \leq i < j \leq k+m$ folgt, denn wäre $p_i = p_j$, so ergibt sich der Widerspruch $\frac{\log p_i}{\log X} = \frac{\log p_j}{\log X} \in S(z_i) \cap S(z_j)$ zur Disjunktheit von $S(z_i)$ und $S(z_j)$ ($\Leftarrow z_i \neq z_j$). Folglich ist $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T(W^+)$ und daher $T^{'}(W^+) \subseteq T(W^+)$ bzw. $T^{'}(W^+) = T(W^+)$ für $W \in Q$ (beachte: $T(W^+) \subseteq T^{'}(W^+)$). Dies liefert nach (3) die Gültigkeit von

$$(4) \quad T^{'}(W^+) = T(W^+) \text{ für } W \in Q \quad \wedge \quad \bigcup_{\substack{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \\ W \in Q}} T^{'}(W^+) \subseteq T(\mathcal{R}^{'}) \subseteq \bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} T^{'}(W^+).$$

Für einen Würfel $W_0 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ und ein Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ sei $\alpha_{\subseteq, W_0}(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Mengen $T^{'}(W^+)$ mit $W \neq W_0$ und $W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$, die $(d, p_{k+1}, ..., p_l)$ enthalten.
Analog dazu sei $\alpha_{\cap, W_0}(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in \mathbb{N}_0$ für einen Würfel $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ und ein Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ gerade die Anzahl der Mengen $T^{'}(W^+)$ mit $W \neq W_0$ und $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, die $(d, p_{k+1}, ..., p_l)$ enthalten.

Der Würfel $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ und das Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ sei zunächst fixiert und wir bestimmen $\alpha_{\cap, W_0}(d, p_{k+1}, ..., p_l)$.

Wegen $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ gilt insbesondere $d = p_1 \cdot ... \cdot p_k$ und $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+$, sodass $\frac{\log p_i}{\log X} \in S(z_i) = [z_i, z_i + \delta^2[ \;\; \forall\; 1 \leq i \leq l-1$ und nach (6.1.7) (vgl. S. 85) auch

$$\begin{aligned} \frac{\log p_l}{\log X} &\in [1 - \delta - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X},\, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\log p_i}{\log X}[ \subseteq [1 - \delta - (l-1)\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \\ &\subseteq [\frac{\eta}{2}, 1] \subseteq [0, 1] \end{aligned}$$

aufgrund $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ gilt. Analog zu S.91 ist $\frac{\log p_l}{\log X}$ in genau einem Intervall $S(z_l) = [z_l, z_l + \delta^2[$ mit $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i, 1 - \sum_{i=1}^{l-1} z_i] \cap Z$ enthalten, wobei $z_l$ nur von $\frac{\log p_l}{\log X}$ bzw. dem fixierten Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ abhängt. Zusammenfassend gilt also

$$(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in S(z_1) \times ... \times S(z_l) \quad \wedge \quad \frac{\log p_l}{\log X} \in [0,1] \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{l} \frac{\log p_i}{\log X} \in [1-\delta, 1[.$$

Für $W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'})$ gilt genau dann $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W^+)$, wenn $d = p_1^{'} \cdot ... \cdot p_k^{'}$ und $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}, \frac{\log p_{k+1}}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+$ ist. Sei $d = p_1^{'} \cdot ... \cdot p_k^{'}$. Aufgrund der Eindeutigkeit der PFZ von $d = p_1 \cdot ... \cdot p_k$ ist dann $(p_1^{'}, ..., p_k^{'})$ eine P. von $(p_1, ..., p_k)$. Damit gilt bereits $\sum_{i=1}^{k} \frac{\log p_i^{'}}{\log X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\log p_i}{\log X}$, was weiter $\sum_{i=1}^{k} \frac{\log p_i^{'}}{\log X} + \sum_{i=k+1}^{l} \frac{\log p_i}{\log X} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\log p_i}{\log X} \in [1-\delta, 1[$ und folglich

$$(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}, \frac{\log p_{k+1}}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in (\mathbb{R}^{l-1} \times [0,1]) \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}$$

liefert. Nach Definition von $W^+$ auf S.84 gilt für $W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) = S(z_1^{'}) \times ... \times S(z_{l-1}^{'})$

$$(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}, \frac{\log p_{k+1}}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W^+ \;\Leftrightarrow\; (\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}, \frac{\log p_{k+1}}{\log X}, ..., \frac{\log p_{l-1}}{\log X}) \in W$$
$$\Leftrightarrow (\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in S(z_1^{'}) \times ... \times S(z_k^{'}) \;\wedge\; z_i^{'} = z_i \;\forall\; k+1 \leq i \leq l-1,$$

wobei wir im letzten Schritt $(\frac{\log p_{k+1}}{\log X}, ..., \frac{\log p_{l-1}}{\log X}) \in S(z_{k+1}) \times ... \times S(z_{l-1})$ sowie die Disjunktheit der Intervalle $S(z)$ für verschiedene $z \in Z$ verwenden. Insgesamt haben wir

$$(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W^+) \Leftrightarrow$$
$$d = p_1^{'} \cdot ... \cdot p_k^{'} \;\wedge\; (\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in S(z_1^{'}) \times ... \times S(z_k^{'}) \;\wedge\; z_i^{'} = z_i \;\forall\; k+1 \leq i \leq l-1$$

für $W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'})$ gezeigt. Wir wissen, dass aufgrund der eindeutigen PFZ von $d$ insbesondere $(p_1^{'}, ..., p_k^{'})$ eine P. von $(p_1, ..., p_k)$ ist und dass $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in S(z_1) \times ... \times S(z_k)$ ist, sodass wegen der Disjunktheit der Intervalle $S(z)$ für verschiedene $z \in Z$ insbesondere $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in S(z_1^{'}) \times ... \times S(z_k^{'})$ genau dann gilt, wenn $(z_1^{'}, ..., z_k^{'})$ eine P. von $(z_1, ..., z_k)$ ist und zwar eine solche mit $p_i^{'} = p_j \;\Rightarrow\; z_i^{'} = z_j \;\forall\; 1 \leq i, j \leq k$. Dies liefert

(5) $\quad (d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W^+)$ für $W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \;\Leftrightarrow$

$(z_1^{'}, ..., z_k^{'})$ ist P. von $(z_1, ..., z_k) \;\wedge\; z_i^{'} = z_i \;\forall\; k+1 \leq i \leq l-1,$

wobei $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ mit $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$, $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ gegeben ist.

Wir halten wieder den Würfel $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ und das Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ fest. Nach (5) ist

$$\begin{aligned}\alpha_{\cap, W_0}(d, p_{k+1}, ..., p_l) &= \#\{ W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \mid W \neq W_0,\ (z_1^{'}, ..., z_k^{'}) \text{ ist P. von} \\ &\qquad (z_1, ..., z_k),\ z_i^{'} = z_i \ \forall\ k+1 \leq i \leq l-1\} \\ &= \#\{ W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'}) \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset \mid (z_1^{'}, ..., z_k^{'}) \text{ ist P. von } (z_1, ..., z_k), \\ &\qquad (z_1^{'}, ..., z_k^{'}) \neq (z_1, ..., z_k),\ z_i^{'} = z_i \ \forall\ k+1 \leq i \leq l-1\} \\ &=: \beta_\cap(z_1, ..., z_{l-1}) = \beta_\cap(W_0)\end{aligned}$$

nur von $z_1, ..., z_{l-1}$ bzw. $W_0$ abhängig, wobei offenbar $\beta_\cap(W_0) \leq k! - 1$ ist. Also ist das Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ in insgesamt $1 + \beta_\cap(W_0)$ Mengen $T^{'}(W^+)$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ enthalten. Gilt sogar $W_0 \in Q$, so liegen auch alle Würfel $W = W(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'})$ mit $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W^+)$ in $Q$, denn nach (5) ist dann $(z_1^{'}, ..., z_{l-1}^{'})$ eine P. von $(z_1, ..., z_{l-1})$, sodass insbesondere $\sum_{j=1}^{l-1} z_j^{'} = \sum_{j=1}^{l-1} z_j$ gilt, die $z_i^{'}$ paarweise verschieden sind und $z_i^{'} \notin [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j^{'}, 1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j^{'}]$ für alle $1 \leq i \leq l-1$ erfüllen, womit nach obiger Schreibweise von $Q$ auch $W \in Q$ ist.
Also ist das Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ mit $W_0 \in Q$ auch in insgesamt $1 + \beta_\cap(W_0)$ Mengen $T^{'}(W^+)$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ und $W \in Q$ enthalten. Dies liefert insgesamt

(6) Jedes Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ $(W_0 \in Q)$ ist in insgesamt $1 + \beta_\cap(W_0) \leq k!$ Mengen $T^{'}(W^+)$ mit $W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ $(W \in Q)$ enthalten.

Analog zur Herleitung von (6) erhalten wir (beachte: $W_0 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta) \Rightarrow W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$)

(7) Jedes Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T^{'}(W_0^+)$ mit $W_0 \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ $(W_0 \in Q)$ ist in insgesamt $1 + \beta_\subseteq(W_0) \leq k!$ Mengen $T^{'}(W^+)$ mit $W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)$ $(W \in Q)$ enthalten.

Sei nun $B = \mathcal{A}$ oder $B = \mathcal{B}$ gegeben. Wir bestimmen zunächst $\sum_{(d,p_{k+1},...,p_l) \in T^{'}(W_0^+)} \mathbf{1}_B(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l)$ für festen Würfel $W_0 = W_0(z_1, ..., z_{l-1})$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. Dabei sei mit $b$ stets ein Element von $B$ und nicht die gegebene Basis gemeint. Nach Defintion von $T^{'}(W_0^+)$ gilt

$$\sum_{(d,p_{k+1},...,p_l) \in T^{'}(W_0^+)} \mathbf{1}_B(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) =$$
$$\#\{(d, p_{k+1}, ..., p_l) \mid d = p_1 \cdot ... \cdot p_k \ \wedge\ b = p_1 \cdot ... \cdot p_l \in B \text{ mit } (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+\},$$

wobei wir die letzte Menge mit $N_B(W_0^+)$ bezeichnen. Für jedes Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in N_B(W_0^+)$ gilt offenbar $b = dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l = p_1 \cdot ... \cdot p_l \in B$ und $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+$, also $\mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1$, und wir nennen dieses $b \in B$ mit $\mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1$ von $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in N_B(W_0^+)$ induziert.

Wir zeigen, dass es für fixiertes $b \in B$ mit $\mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1$, d.h. es gilt $b = p_1 \cdot ... \cdot p_l$ und $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+$, höchstens $l!$ Tupel $(d', p'_{k+1}, ..., p'_l) \in N_B(W_0^+)$ gibt, die dieses $b$ induzieren, für die also $b = d' p'_{k+1} \cdot ... \cdot p'_l$ gilt.

Jedes ($b$ induzierende) Tupel $(d', p'_{k+1}, ..., p'_l) \in N_B(W_0^+)$ mit $b = d' p'_{k+1} \cdot ... \cdot p'_l$ induziert zunächst über $d' = p'_1 \cdot ... \cdot p'_k$ ein Tupel $(p'_1, ..., p'_l)$ mit $b = p'_1 \cdot ... \cdot p'_l$, wobei diese induzierten Tupel $(p'_1, ..., p'_l)$ für verschiedene Grundtupel $(d', p'_{k+1}, ..., p'_l) \in N_B(W_0^+)$ stets verschieden sind. Ferner gibt es höchstens $l!$ verschiedene Tupel $(p'_1, ..., p'_l)$ mit $b = p'_1 \cdot ... \cdot p'_l$, denn aufgrund der Eindeutigkeit der PFZ von $b = p_1 \cdot ... \cdot p_l$ ist für jedes solche Tupel $(p'_1, ..., p'_l)$ stets Permutation von $(p_1, ..., p_l)$. Also gibt es auch nur höchstens $l!$ Tupel $(d', p'_{k+1}, ..., p'_l) \in N_B(W_0^+)$, die das oben fixierte $b$ induzieren. Zusammenfassend gilt bereits

$$(8) \qquad \sum_{(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in T'(W_0^+)} \mathbf{1}_B(dp_{k+1} \cdot ... \cdot p_l) = \# N_B(W_0^+) \leq l! \cdot \#\{\, b \in B \mid \mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1\}$$

$$= l! \cdot \sum_{b \in B} \mathbf{1}_{W_0^+}(b) \quad \forall\ W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset.$$

Nehmen wir zusätzlich $W_0 \in Q$ an, so gibt es für fixiertes $b \in B$ mit $\mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1$ genau ein ($b$ induzierendes) Tupel $(d', p'_{k+1}, ..., p'_l) \in N_B(W_0^+)$ mit $b = d' p'_{k+1} \cdot ... \cdot p'_l$, was wir wie folgt sehen.

Aus $b \in B$ mit $\mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1$ folgt $b = p_1 \cdot ... \cdot p_l$ und $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+$ bzw. analog zur Herleitung von (6.1.16) im Beweis von Prop.6.1 insbesondere $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in S(z_1) \times ... \times S(z_l)$ mit einem eindeutigen, nur von $b$ abhängigen $z_l \in [1 - \delta - l\delta^2 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j, 1 - \sum_{j=1}^{l-1} z_j] \cap Z$ (vgl. S.91).

Wegen $W_0 \in Q$ sind die $z_i$ paarweise verschieden und die Intervalle $S(z_i)$ paarweise disjunkt für $1 \leq i \leq l$. Für ein ($b$ induzierendes) Tupel $(d', p'_{k+1}, ..., p'_l) \in N_B(W_0^+)$ mit $b = d' p'_{k+1} \cdot ... \cdot p'_l$ gilt $d' = p'_1 \cdot ... \cdot p'_k$ bzw. $b = p'_1 \cdot ... \cdot p'_l$ und $(\frac{\log p'_1}{\log X}, ..., \frac{\log p'_l}{\log X}) \in W_0^+$, sodass aufgrund der Eindeutigkeit der PFZ von $b = p_1 \cdot ... \cdot p_l$ insbesondere $(p'_1, ..., p'_l)$ eine P. von $(p_1, ..., p_l)$ ist.
Analog zur Herleitung von (6.1.22) im Beweis zu Prop.6.1 beginnend bei „Wäre..“ auf S.95 erhalten wir im Fall $(p'_1, ..., p'_l) \neq (p_1, ..., p_l)$ einen Widerspruch, sodass $(p'_1, ..., p'_l) = (p_1, ..., p_l)$ und folglich $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in N_B(W_0^+)$ mit $d = p_1 \cdot ... \cdot p_k$ das eindeutige, $b$ induzierende Tupel

$(d', p'_{k+1}, ..., p'_l) \in N_B(W_0^+)$ ist (vgl. auch folgenden Absatz unter (9)). Dies liefert

$$(9) \qquad \sum_{(d,p_{k+1},...,p_l)\in T'(W_0^+)} \mathbf{1}_B(dp_{k+1}\cdot ...\cdot p_l) = \#N_B(W_0^+) = \#\{\, b\in B \mid \mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1\}$$

$$= \sum_{b\in B} \mathbf{1}_{W_0^+}(b) \quad \forall\ W_0\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset,\ W_0\in Q.$$

Ferner induziert jedes $b\in B$ mit $\mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1$, d.h. es gilt $b = p_1\cdot ...\cdot p_l$ und $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+$, über $d = p_1\cdot ...\cdot p_k$ ein Tupel $(d, p_{k+1}, ..., p_l) \in N_B(W_0^+)$, wobei die so induzierten Tupel für verschiedene $b\in B$ mit $\mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1$ stets verschieden sind. Also gilt

$$(10) \qquad \sum_{(d,p_{k+1},...,p_l)\in T'(W_0^+)} \mathbf{1}_B(dp_{k+1}\cdot ...\cdot p_l) = \#N_B(W_0^+) \geq \#\{\, b\in B \mid \mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1\}$$

$$= \sum_{b\in B} \mathbf{1}_{W_0^+}(b) \quad \forall\ W_0\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset.$$

Aus (6) und (9) erhalten wir

$$(11) \qquad \sum_{(d,p_{k+1},...,p_l)\in \bigcup\limits_{\substack{W\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W\in Q}} T'(W^+)} \mathbf{1}_B(dp_{k+1}\cdot ...\cdot p_l) =$$

$$\sum_{\substack{W_0\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W_0\in Q}} \ \sum_{(d,p_{k+1},...,p_l)\in T'(W_0^+)} \mathbf{1}_B(dp_{k+1}\cdot ...\cdot p_l)\cdot \frac{1}{1+\beta_\cap(W_0)} =$$

$$\sum_{\substack{W_0\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset\\ W_0\in Q}} \frac{1}{1+\beta_\cap(W_0)}\cdot \sum_{b\in B} \mathbf{1}_{W_0^+}(b)$$

und analog dazu schließen wir mithilfe (7) sowie (9) (beachte: $W_0\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta) \Rightarrow W_0\cap\overline{\mathcal{R}}\neq\emptyset$) auf

$$(12) \qquad \sum_{(d,p_{k+1},...,p_l)\in \bigcup\limits_{\substack{W\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W\in Q}} T'(W^+)} \mathbf{1}_B(dp_{k+1}\cdot ...\cdot p_l) =$$

$$\sum_{\substack{W_0\subseteq\overline{\mathcal{R}}(\delta)\\ W_0\in Q}} \frac{1}{1+\beta_\subseteq(W_0)}\cdot \sum_{b\in B} \mathbf{1}_{W_0^+}(b).$$

Dabei weisen wir darauf hin, dass (8)-(12) sowohl für $B = \mathcal{A}$ als auch $B = \mathcal{B}$ gilt. Mithilfe von (4), (6)-(12) sowie *HS1 Prop.6.1*, *HS2 Prop.6.1* c) und (6.1.12) im Nachweis von Prop. 6.1 (vgl. S.89) können wir die Summe $\sum(T(\mathcal{R}'))$ mit ähnlichen Mitteln wie im Beweis von Proposition 6.1 nach oben und unten kontrollieren. Auf eine detaillierte Abschätzung wird an dieser Stelle verzichtet, da sie recht langwierig ist und die Ideen dazu bereits vorgeführt wurden.

Wir erhalten schließlich $\sum(T(\mathcal{R}')) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$. Da alle von $\eta$ abhängigen Konstanten bzw. Funktionen, die in diesen Nachweis und in jenen von Proposition 6.1 einfließen, stetig von $\eta$ abhängen und effektiv berechenbar sind, ergibt sich die zusätzliche Aussage über die implizite Konstante/Funktion im $O_{S(\mathcal{R}),\eta}$-Glied ebenfalls. Im Fall $k = 0$ ist $d = 1$ und die entsprechende Aussage erhalten wir mit den gleichen Ideen wie im Fall $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

*HS1 Proposition 13.2*:

Sei $\eta \in ]0,1]$ eine von $X$ unabhängige Konstante oder $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt sowie $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ und $l_1, l \in \mathbb{N}$ mit $l_1 \leq l \ll \frac{1}{\eta}$ gegeben. Ferner sei

$$\mathcal{R} \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^l \mid \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$$

ein logarithmisches Polytop. Dann gilt

$$\sum := \sum_{\substack{(p_1,\dots,p_l) \\ (\frac{\log p_1}{\log X},\dots,\frac{\log p_l}{\log X}) \in \mathcal{R}}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(p_1 \cdot \dots \cdot p_l) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(p_1 \cdot \dots \cdot p_l) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}),$$

wobei die von $\eta$ abhängige implizite Konstante/Funktion im $O_{S(\mathcal{R}),\eta}$-Glied effektiv ist sowie stetig von $\eta$ abhängt und die Summation in $\sum$ über alle $l$-Tupel von Primzahlen erfolgt.

*Beweis*:

Analog zu Kap.I im Beweis von Prop. 6.1 bzw. dem Nachweis von *HS1 Prop.12.1* genügt es, obige Aussage für $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta, 1[\}$ nachzuweisen. Weiter erklären wir analog zu Kap.I im Beweis von Prop. 6.1 die Würfel $W = W(z_1, ..., z_{l-1})$ sowie die Mengen $\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{R}}(\delta), Z, W^+$ und können ab „Wir definieren..." auf S.83 bis einschließlich Kap.II alles übernehmen. Dies liefert

$$(1) \quad \dot{\bigcup_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} W^+ \subseteq \mathcal{R}' \subseteq \dot{\bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset}} W^+.$$

Für eine beliebige Menge $C \subseteq \mathbb{R}^l$ sei $M(C) := \{(p_1, ..., p_l) \mid (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_l}{\log X}) \in C\}$, sodass insbesondere $M(C_1 \cup C_2) = M(C_1) \cup M(C_2)$ für $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^l$ gilt und $M(C_1) \cap M(C_2) = \emptyset$ ist, falls $C_1, C_2$ sogar disjunkt sind. Daraus folgt

$$(2) \quad M(\dot{\bigcup_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} W^+) = \dot{\bigcup_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)}} M(W^+) \quad \wedge \quad M(\dot{\bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset}} W^+) = \dot{\bigcup_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset}} M(W^+),$$

denn die Mengen $W^+$ sind paarweise disjunkt. Sei $B = \mathcal{A}$ oder $B = \mathcal{B}$. Aus (2) folgt leicht

$$(3) \qquad \sum_{\substack{(p_1,...,p_l) \\ (\frac{\log p_1}{\log X},...,\frac{\log p_l}{\log X}) \in \dot{\bigcup}_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)} W^+}} \mathbf{1}_B(p_1 \cdot ... \cdot p_l) = \sum_{W \subseteq \overline{\mathcal{R}}(\delta)} \sum_{(p_1,...,p_l) \in M(W^+)} \mathbf{1}_B(p_1 \cdot ... \cdot p_l) \quad \wedge$$

$$\sum_{\substack{(p_1,...,p_l) \\ (\frac{\log p_1}{\log X},...,\frac{\log p_l}{\log X}) \in \dot{\bigcup}_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} W^+}} \mathbf{1}_B(p_1 \cdot ... \cdot p_l) = \sum_{W \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset} \sum_{(p_1,...,p_l) \in M(W^+)} \mathbf{1}_B(p_1 \cdot ... \cdot p_l).$$

Wir definieren $Q$ analog zu *HS2 Prop.6.1* sowie für einen Würfel $W_0$ mit $W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ die Menge

$$\begin{aligned} N_B(W_0^+) &:= \{(p_1,...,p_l) \in M(W_0^+) \mid \mathbf{1}_B(p_1 \cdot ... \cdot p_l) = 1\} \\ &= \{(p_1,...,p_l) \mid b = p_1 \cdot ... \cdot p_l \in B \ \wedge \ (\frac{\log p_1}{\log X},...,\frac{\log p_l}{\log X}) \in W_0^+\}, \end{aligned}$$

sodass $\#N_B(W_0^+) = \sum_{(p_1,...,p_l) \in M(W_0^+)} \mathbf{1}_B(p_1 \cdot ... \cdot p_l)$ gilt und jedes Tupel $(p_1,...,p_l) \in N_B(W_0^+)$ über $b = p_1 \cdot ... \cdot p_l$ ein $b \in B$ mit $\mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1$ induziert. Argumentieren wir analog zur Herleitung von (8), (9) und (10) im Beweis von *HS1 Prop.12.1* (vgl. S.133-135), wobei wir darin $d = d' = 1$ und $k = 0$ wählen, so kommt

$$(4) \qquad \sum_{b \in B} \mathbf{1}_{W_0^+}(b) \leq \#N_B(W_0^+) = \sum_{(p_1,...,p_l) \in M(W_0^+)} \mathbf{1}_B(p_1 \cdot ... \cdot p_l) \leq l! \cdot \sum_{b \in B} \mathbf{1}_{W_0^+}(b)$$

$$\forall \ W_0 \cap \overline{\mathcal{R}} \neq \emptyset, \text{ wobei für } W_0 \in Q \text{ das erste Gleichheitszeichen steht,}$$

wenn wir $\sum_{b \in B} \mathbf{1}_{W_0^+}(b) = \#\{\, b \in B \mid \mathbf{1}_{W_0^+}(b) = 1\}$ beachten. Dabei gelten (3) und (4) sowohl für $B = \mathcal{A}$ als auch für $B = \mathcal{B}$.

Mithilfe von (1), (3), (4) sowie *HS1 Prop.6.1*, *HS2 Prop.6.1* c) und (6.1.12) im Nachweis von Prop. 6.1 (vgl. S.89) können wir die Summe $\sum$ mit ähnlichen Ideen wie im Beweis von Proposition 6.1 nach oben und unten abschätzen. Wir erhalten $\sum = O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$.
Der Zusatz über die von $\eta$ abhängige implizite Konstante/Funktion im $O_{S(\mathcal{R}),\eta}$-Glied ergibt sich aus demselben Grund wie bei *HS1 Prop.12.1*.

□

# 7. Major-Arcs

In Proposition 6.2, welche den Beitrag der Major-Arcs zur Hardy-Littlewoodschen Kreismethode kontrolliert, benötigen wir folgende Hilfssätze, um den Satz von Siegel-Walfisz, der nur eine ineffektive Konstante beeinhaltet, zu umgehen. Dabei verwenden wir die üblichen Definitionen $\psi(x,q,a) := \sum\limits_{\substack{n\le x \\ n\equiv a \bmod q}} \Lambda(n)$ [2, S.99] sowie eines Charakters $\chi$ mod $q$ [2, S.33-35].

*HS1 Proposition 6.2/ effektive Version von Siegel-Walfisz*:
Sei $C > 0$ beliebig. Dann gibt es eine stetig von $C$ abhängige effektive Konstante $C_1 = C_1(C) > 0$, sodass gleichmäßig für alle $q \in \mathbb{N}$, $q \le (\log x)^C$, $\mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$ und alle $a \in \mathbb{Z}$, $ggT(a,q) = 1$ gilt :

$$\psi(x,q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_C(x \cdot \exp(-C_1\sqrt{\log x})) \quad \forall\ x \ge 2.$$

Dabei ist auch die implizite Konstante im $O_C$-Glied effektiv in Abhängigkeit von $C$ berechenbar.

*Beweis*: Wir entnehmen [2, S.112-114], darin insbesondere (3.22) und Satz 3.3.2, die folgende

Variante von Satz 3.3.2: Sei $C > 0$ beliebig und $c > 0$ eine hinreichend kleine Konstante (d.h. $c > 0$ ist beliebig klein wählbar). Dann gibt es eine von $C$ stetig abhängige effektive Konstante $C_1 = C_1(C) \in \mathbb{R}^+$, sodass gleichmäßig für alle $q \in \mathbb{N}$, $q \le \exp(C\sqrt{\log x})$ und $a \in \mathbb{Z}$, $ggT(a,q) = 1$ gilt :

$$\psi(x,q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} - \frac{\bar{\chi}(a)x^\beta}{\varphi(q)\beta} + O_C(x \cdot \exp(-C_1\sqrt{\log x})) \quad \forall\ x \ge 2.$$

Dabei bezeichnet $\chi \ne \chi_0$ den reellen exzeptionellen Charakter mod $q$, sofern er existiert, und $\beta$ die reelle exzeptionelle Nullstelle von $L(s,\chi)$ mit $\beta > 1 - \frac{c}{\log q}$. Gibt es keinen solchen Charakter, so ist der Term $\frac{\bar{\chi}(a)x^\beta}{\varphi(q)\beta}$ fortzulassen. Ferner ist auch die implizite Konstante im $O_C$-Glied effektiv.

Im Beweis von Satz 3.3.2 in [2, S.112-114] sehen wir, dass die implizite Konstante im $O_C$-Glied unabhängig von $a$ und $q$ sowie effektiv berechenbar ist, d.h. insbesondere ergibt sich die Gleichmäßigkeit in obiger Variante. Ebenso kann nach diesem Beweis auch $C_1 = C_1(C)$ effektiv in Abhängigkeit von $C$ berechnet werden, wobei wir bei einer solchen Berechnung auch die Stetigkeit bzgl. $C$ erkennen. Dass wir $c > 0$ als beliebig kleine Konstante wählen dürfen, erhalten wir aus den Ideen in Kap. 3.1 [2, S.99-105]. Beachten wir zusätzlich

$(\log x)^C = \exp(C \cdot \log(\log x)) \leq \exp(C \cdot \sqrt{\log x})$ bzw. $\log(\log x) \leq \sqrt{\log x} \ \forall \ x \geq 2$, so genügt es zu zeigen, dass der reelle exzeptionelle Charakter $\chi \neq \chi_0 \bmod q$ in obiger Variante für $q \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$ nicht existiert. Dies werden wir nun tun.

Angenommen es gäbe einen reellen exzeptionellen Charakter $\chi \neq \chi_0 \bmod q$, sodass $L(s,\chi)$ eine reelle exzeptionelle Nullstelle $\beta > 1 - \frac{c}{\log q}$ hat. Dabei ist $q > 1$, weil für $q = 1$ insbesondere $1 = \chi(1) = \chi(n) \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ gilt und daher $L(s,\chi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ keine reelle Nullstelle hat. Nach Satz 2.3.1 [2, S.66-67] wird $\chi \bmod q$ von einem primitiven Charakter $\chi_1 \bmod q_1$ mit $q_1|q$ induziert, der nach Konstruktion im Beweis von Satz 2.3.1 insbesondere reell ist, weil $\chi \bmod q$ reell ist. Ferner erhalten wir gemäß (2.28) in [2, S.72] die Gültigkeit von

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1) \cdot \prod_{p|q} (1 - \chi_1(p) \cdot p^{-s}) \quad \forall \ s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 0.$$

Für $s = \beta \in \mathbb{R}^+$ ist jeder der Faktoren $1 - \chi_1(p) \cdot p^{-\beta} \neq 0$, denn aus $1 - \chi_1(p) \cdot p^{-\beta} = 0$ folgt

nach $|\chi_1(p)| = \begin{cases} 1, \text{ falls } ggT(p,q_1) = 1 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$ insbesondere $|\chi_1(p)| = 1$ sowie $1 = |\chi_1(p)| \cdot p^{-\beta} = p^{-\beta}$,

was wegen $\beta > 1 - \frac{c}{\log q} > 0$ ausgeschlossen ist. Daher ist $\prod\limits_{p|q}(1 - \chi_1(p) \cdot p^{-\beta}) \neq 0$, womit $L(s,\chi_1)$ ebenfalls die reelle (exzeptionelle) Nullstelle $\beta > 1 - \frac{c}{\log q} \geq 1 - \frac{c}{\log q_1}$ besitzt ($\Leftarrow q_1 \leq q \Leftarrow q_1|q$). Analog zu oben ist $q_1 > 1$, da sonst $L(s,\chi_1)$ keine reelle Nullstelle besitzen würde.

Aus [4, S.40 (9)] entnehmen wir, dass für einen reellen primitiven Charakter $\chi_1$ das Modul $q_1$ bis auf einen Faktor $\leq 4$ quadratfrei ist, d.h. es gilt wegen $q_1|q$ bzw. $\mathbb{P}(q_1) \subseteq \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$ insbesondere $q_1 = d^2 \cdot p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{s_r}$ mit $s_i \in \{0,1\} \ \forall \ 1 \leq i \leq r$ und $d^2 \leq 4$.
Somit ist $q_1 \leq 4 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \leq 4b$, denn $p_1, \ldots, p_r$ sind die verschiedenen Primteiler von $b$.
Nach der Klassenzahlformel in [2, S.115] gilt $\beta \leq 1 - c_1 \cdot q_1^{-1/2} (\log q_1)^{-2}$ mit einer absoluten Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}^+$. Dies liefert $1 - \frac{c}{\log q_1} < \beta \leq 1 - c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{q_1} \cdot (\log q_1)^2}$ und nach Umformung wegen $q_1 \leq 4b$ die Abschätzung

$$c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4b} \cdot \log 4b} \leq c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{q_1} \cdot \log q_1} < c,$$

die für hinreichend kleine $c > 0$ in Abhängigkeit von $b$, d.h. $c < c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4b} \cdot \log 4b}$, ausgeschlossen ist.

□

*HS2 Proposition 6.2/ effektive Variante von Lemma 6.4.2*:

Sei $A > 0$ gegeben. Dann gibt es eine stetig von $A$ abhängige effektive Konstante $c_2 = c_2(A) > 0$, sodass für $n_0 \in \mathbb{N}$ sowie gleichmäßig für alle $q \in \mathbb{N},\ q \leq (\log n_0)^A,\ \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$ und $a \in \mathbb{Z},\ ggT(a, q) = 1$ und $\beta \in \mathbb{R}$ mit $|\beta| \leq \frac{(\log n_0)^A}{n_0}$ gilt :

$$S(\frac{a}{q} + \beta) := \sum_{1 \leq n_1 \leq n_0} \Lambda(n_1) \cdot e(n_1(\frac{a}{q} + \beta)) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \cdot T(\beta) + O_A(n_0 \exp(-c_2\sqrt{\log n_0})).$$

Dabei ist $T(\beta) := \sum_{1 \leq n_1 \leq n_0} e(\beta n_1)\ \ \forall\ \beta \in \mathbb{R}$ und die implizite Konstante im $O_A$-Glied ist effektiv in Abhängigkeit von $A$ berechenbar.

*Beweisskizze*:

Wir skizzieren den Nachweis nur oberflächlich, da er in wesentlichen Teilen aus der Herleitung von Lemma 6.4.2 in [2, S.209-210] besteht. Darin verwenden wir obigen *HS1* anstatt des Satzes von Siegel-Walfisz an der entsprechenden Stelle auf S.209 unten. Folglich entspricht das $O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$-Glied aus [2, S.209 (6.31)] gerade einem $O_A(x \exp(-c_1(A)\sqrt{\log x}))$-Term, welcher aus *HS1* stammt und in dem sowohl die implizite Konstante als auch $c_1 = c_1(A)$ effektiv in Abhängigkeit von $A$ berechenbar sind (beachte: $\mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$) sowie $c_1(A)$ stetig von $A$ abhängt. Ferner ist die implizite Konstante in diesem $O_A$-Glied nach *HS1* unabhängig von $a, q$ und $\beta$, denn $\beta$ wird erst auf [2, S.210] eingeführt, woraus sich später die besagte Gleichmäßigkeit ergibt, wenn wir $|\beta| \leq \frac{(\log n_0)^A}{n_0}$ nutzen. Die Effektivität/Stetigkeit bzgl. $A$ von $c_1 = c_1(A)$ impliziert auch jene der Konstanten $c = c(A)$ in Lemma 6.4.1 [2, S.210] und daraus ergibt sich im Wesentlichen auch jene von $c_2 = c_2(A)$. Den Rest in [2, S.209-210] übernehmen wir und erhalten schließlich das gewünschte Resultat.

$\square$

**Proposition 6.2** (Major Arcs):

Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$, $\delta := (\log(\log X))^{-1}$ und $\eta \in ]0,1]$, $C \in \mathbb{R}^+$ von $X$ unabhängige Konstanten sowie $l \in \mathbb{N}$, $2 \leq l \ll \frac{1}{\eta}$. Ferner seien $a_1, ..., a_{l-1} \in \mathbb{R}^+$ mit $\min\limits_{1 \leq i \leq l-1} a_i \geq \frac{\eta}{2}$ und $S := \sum\limits_{i=1}^{l-1} a_i < 1 - \frac{\eta}{2}$ sowie

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(a_1, ..., a_{l-1}) := \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid e_i \in [a_i,\ a_i + \delta^2[\ \forall\ 1 \leq i \leq l-1\ \wedge\ \sum_{i=1}^{l} e_i \in [1-\delta,\ 1[\}$$

gegeben. Für hinreichend kleine Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$, die nur von $\eta$ und $C$ abhängen, setze

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(C, \eta) :=$$
$$\{0 \leq a < X \mid \exists\, q \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{Z},\ ggT(q,d) = 1,\ q \leq k_2 \cdot (\log X)^C\ :\ |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}\}.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{a \in \mathcal{M}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^C}),$$

wobei die von $\eta$ und $C$ abhängige implizite Konstante im $O$-Glied effektiv ist.

**Beweis**:

I. Wir wählen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ derart, dass $k_1 \leq \gamma_1(C) \cdot (\frac{\eta}{4})^C$ und $k_2 \leq \gamma_2(C) \cdot (\frac{\eta}{4})^C$ ist, wobei $\gamma_1(C), \gamma_2(C) \in \mathbb{R}^+$ in Kap.III des Beweises auftreten. Wir können eine Schranke $S_1(\eta, C) \in \mathbb{R}^+$ finden mit $k_2 \cdot (\log X)^C < \min\{X^{1/3}, 2^k\}$ und $k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X} < X^{-2/3}/2\ \ \forall\ X = b^k > S_1(\eta, C)$.
Wann immer wir in diesem Beweis eine Schranke $S(\eta, C)$ einführen, wählen wir stets $X > S(\eta, C)$. Dabei ist $X > S(\eta, C)$ auch im Fall der späteren Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 für hinreichend große $X$ erfüllt, denn $S(\eta, C)$ hängt stetig von $\eta$ und $C$ ab und ist damit auch näherungsweise konstant gegenüber $X$ bei Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1.

Wir erinnern an die PFZ von $b$ in der Form $b = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ mit $r = \omega(b) \in \mathbb{N}$ und $e_i \in \mathbb{N}$ $\forall\ 1 \leq i \leq r$. Jedes $q \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$ und $q \leq k_2 \cdot (\log X)^C < 2^k$ hat eine Primfaktorzerlegung der Form $q = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{s_i}$ mit $s_i \in \mathbb{N}_0$ $\forall\ 1 \leq i \leq r$, was wegen $2^{s_i} \leq p_i^{s_i} \leq q < 2^k$ bzw. $s_i \leq k$ auch $s_i \leq e_i \cdot k$ für alle $1 \leq i \leq r$ impliziert. Folglich gilt $p_i^{s_i} \mid p_i^{e_i \cdot k}$ $\forall\ 1 \leq i \leq r$ und daher auch $q | b^k$ bzw. $q | X$. Somit haben wir

$$(6.2.1)\quad q \leq k_2 \cdot (\log X)^C\ \wedge\ \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)\ \Rightarrow\ q | X$$

gezeigt. Mithilfe (6.2.1) zerlegen wir $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{N}_0 \cap [0, X[$ disjunkt in

$$\mathcal{M}_1 := \{a \in \mathcal{M} \mid \exists\, q \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{Z},\ ggT(q,d) = 1,\ q \leq k_2 \cdot (\log X)^C,\ \mathbb{P}(q) \not\subseteq \mathbb{P}(b) : \\ |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}\ \},$$

$$\mathcal{M}_2 := \{a \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_1 \mid \exists\, q \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{Z},\ ggT(q,d) = 1,\ q \leq k_2 \cdot (\log X)^C,\ \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)\ : \\ 0 < |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}\ \ \wedge\ \ q|X\}\ \text{und}$$

$$\mathcal{M}_3 := \{a \in \mathcal{M} \mid |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X},\ q \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{Z},\ ggT(q,d) = 1,\ q \leq k_2 \cdot (\log X)^C \\ \Rightarrow \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)\ \ \wedge\ \ \frac{a}{X} = \frac{d}{q}\ \ \wedge\ \ q|X\},$$

wobei wir bemerken, dass die Implikation „$\Rightarrow \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$..." in $\mathcal{M}_3$ den Fall $a \in \mathcal{M}_1$ ausschließt, sodass wir nur $a \in \mathcal{M}$ anstatt $a \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_1$ in $\mathcal{M}_3$ zu schreiben brauchen. Ferner gilt

$$(6.2.2) \quad \#\mathcal{M} = O_{\eta,C}((\log X)^{3C}),$$

was wir wie folgt erkennen.

Für jedes $a \in \mathcal{M}$ gibt es einen reduzierten Bruch $\frac{d}{q}$ mit $q \leq k_2 \cdot (\log X)^C$ sowie $|\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}$ und wir nennen diesen Bruch $\frac{d}{q}$ folgend einen $\frac{a}{X}$ approximierenden Bruch. Dies liefert

$$-k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X} \leq \frac{a}{X} - k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X} \leq \frac{d}{q} \leq \frac{a}{X} + k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X} \leq 1 + k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}$$

für alle $a \in \mathcal{M}$ und alle $\frac{a}{X}$ approximierenden Brüche $\frac{d}{q}$, sodass insbesondere

$$-k_1 k_2 \cdot \frac{(\log X)^{2C}}{X} \leq d \leq q + k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X} \cdot q \leq k_1 k_2 \cdot \frac{(\log X)^{2C}}{X} + k_2 \cdot (\log X)^C$$

nach Multiplikation mit $q \leq k_2 (\log X)^C$ ist. Damit kommen überhaupt nur $O_{\eta,C}((\log X)^{2C})$ Brüche $\frac{d}{q}$ mit $q \leq k_2 \cdot (\log X)^C$ als approximierende Brüche in Frage, denn für den Zähler $d$ und Nenner $q$ gibt es jeweils nur $O_{\eta,C}((\log X)^C)$ mögliche Werte. Nun fixieren wir einen dieser $O_{\eta,C}((\log X)^{2C})$ in Frage kommenden Brüche $\frac{d}{q}$ mit $q \leq k_2 \cdot (\log X)^C$. Dann gibt es nur $O_{\eta,C}((\log X)^C)$ Werte $a \in \mathcal{M}$, sodass $\frac{d}{q}$ den Bruch $\frac{a}{X}$ approximiert, denn letzteres impliziert

$$\frac{d}{q} \cdot X - k_1 \cdot (\log X)^C \leq a \leq \frac{d}{q} \cdot X + k_1 \cdot (\log X)^C.$$

Daraus folgt bereits (6.2.2).

Bezeichnet $\mathcal{C} := [a_1, a_1 + \delta^2[ \times ... \times [a_{l-1}, a_{l-1} + \delta^2[ \subseteq \mathbb{R}^{l-1}$ die senkrechte Projektion von $\mathcal{R}$ auf die ersten $l-1$ Koordinaten, so erhalten wir analog zu [1, S.19] durch einfache Umformungen

$$(6.2.3) \quad \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{\substack{pm=n \\ X^{1-\delta}/m \leq p < X/m}} \Lambda_{\mathcal{C}}(m) \cdot \log p \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1\ \dot\cup\ \mathcal{M}_2\ \dot\cup\ \mathcal{M}_3$ ist $\frac{1}{X} \sum\limits_{a \in \mathcal{M}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = \sum\limits_{i=1}^{3} \sum(i)$ mit
$\sum(i) := \frac{1}{X} \sum\limits_{a \in \mathcal{M}_i} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X})$ für $i = 1, 2, 3$ und wir schätzen nachfolgend $\sum(i)$ ab.

II. Nach (6.2.3) und den Definitionen von $\mathcal{R}$ sowie $S_{\mathcal{R}}(\theta) := \sum\limits_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot e(n\theta)$ kommt

$$|S_{\mathcal{R}}(\theta)| \leq \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{\substack{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l-1} < X \\ \frac{\log p_i}{\log X} \in [a_i, a_i + \delta^2[\ \forall\ 1 \leq i \leq l-1}} \prod_{i=1}^{l-1} \log p_i \cdot \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l-1}} \leq p_l < \frac{X}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l-1}}} \log p_l$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\sum\limits_{\frac{X^{1-\delta}}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l-1}} \leq p_l < \frac{X}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l-1}}} \log p_l \leq \sum\limits_{p_l < \frac{X}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l-1}}} \log p_l \ll X^{1-S}$ unter den Summationsbedingungen der ersten Summe, denn aus diesen ergibt sich $\frac{X}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l-1}} \leq X^{1-S}$ mit $S = \sum\limits_{i=1}^{l-1} a_i$ sowie unter Verwendung von $\sum\limits_{p \leq x} \log p =: \theta(x) \ll x\ \ \forall\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 1$
in [2, S.5-6 Satz 1.1.4] die obige Abschätzung. Daraus schließen wir mit $l - 1 \ll_\eta 1$ auf

$$|S_{\mathcal{R}}(\theta)| \ll X^{1-S} \cdot \sum_{\substack{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{l-1} < X \\ \frac{\log p_i}{\log X} \in [a_i, a_i + \delta^2[\ \forall\ 1 \leq i \leq l-1}} \prod_{i=1}^{l-1} \log p_i \leq X^{1-S} \cdot \prod_{i=1}^{l-1} \sum_{p_i \in [X^{a_i}, X^{a_i + \delta^2}[} \log p_i$$
$$\leq X^{1-S} \cdot \prod_{i=1}^{l-1} \sum_{p_i < X^{a_i + \delta^2}} \log p_i \ll_\eta X^{1-S} \cdot \prod_{i=1}^{l-1} X^{a_i + \delta^2} = X^{1+(l-1)\delta^2} \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R},$$

indem wir wieder Satz 1.1.4 aus [2, S.5-6] in der Form $\sum\limits_{p_i < X^{a_i + \delta^2}} \log p_i \ll X^{a_i + \delta^2}$ für alle $1 \leq i \leq l-1$ benutzen. Also ist $|S_{\mathcal{R}}(\theta)| \ll_\eta X^{1+(l-1)\delta^2}\ \ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$.

Wir finden leicht $\sup\limits_{a \in \mathcal{M}_1} |S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})| = \#\mathcal{A} \cdot \sup\limits_{a \in \mathcal{M}_1} F_X(\frac{a}{X})$ unter Beachtung der Definition von $F_X$ in Kap. 4. Für fixiertes $a \in \mathcal{M}_1$ können wir $F_X(\frac{a}{X})$ mithilfe Lemma 4.1 abschätzen.
Dazu leiten wir die Voraussetzungen des Lemmas aus $\frac{a}{X} = \frac{d}{q} + \eta$, den Abschätzungen $|\eta| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X} < X^{-2/3}/2$ und $q \leq k_2 \cdot (\log X)^C < X^{1/3}$ sowie der Tatsache her, dass $q$ einen zu $b$ teilerfremden Primteiler $q_1 \geq 2$ besitzt ($\Leftarrow \mathbb{P}(q) \nsubseteq \mathbb{P}(b)$). Daraus folgt nach einigen technischen

Umformungen, die wir hier nicht weiter ausführen wollen, und Lemma 4.1

$$\sup_{a\in\mathcal{M}_1} |S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})| = \#\mathcal{A}\cdot \sup_{a\in\mathcal{M}_1} F_X(\frac{a}{X}) \ll_{\eta,C} \#\mathcal{A}\cdot(\log X)^{-4C}\cdot X^{-(l-1)\delta^2}.$$

Mithilfe der letzten Abschätzung sowie $|S_{\mathcal{R}}(\theta)| \ll_\eta X^{1+(l-1)\delta^2}\ \forall\theta\in\mathbb{R}$ können wir die Summanden in $\sum(1)$ kontrollieren und erhalten wegen (6.2.2) $\#\mathcal{M}_1 \leq \#\mathcal{M} \ll_{\eta,C} (\log X)^{3C}$ insgesamt

$$(6.2.4)\qquad \sum(1) = O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^C}).$$

Die folgenden Abschnitte III und IV dienen der Abschätzung von $\sum(2)$.

III. Wir skizzieren den Nachweis von $\sum\limits_{\frac{X^{1-\delta}}{m}\leq n<\frac{X}{m}} \Lambda(n)e(-\frac{amn}{X}) = O_{\eta,C}(\frac{X}{m}\cdot\exp(-c_3\cdot\sqrt{\eta}\cdot\sqrt{\log X}))$ für $a\in\mathcal{M}_2$, $m\in\mathbb{N}$, $X^S\leq m<X^{S+(l-1)\delta^2}$ mit $S=\sum\limits_{i=1}^{l-1} a_i < 1-\frac{\eta}{2}$ und einer effektiven Konstanten $c_3 = c_3(C)\in\mathbb{R}^+$, wobei $\Lambda$ die Mangoldt-Funktion ist. Dabei stellen wir bewusst die langwierige Konstruktion geeigneter Schranken nur oberflächlich dar, um das Verstehen der grundsätzlichen Vorgehensweise zu erleichtern.

Wir wählen $X$ hinreichend groß, sodass $\frac{X}{m} \geq X^{\eta/2-(l-1)\delta^2} \geq X^{\eta/4} \geq 2\ \ \forall\ X > S_2(\eta,C)$ mit $S_2(\eta,C)\in\mathbb{R}^+$ gilt, was nach Def. von $\delta$ möglich ist. Sei $\frac{X}{m} = z+r$ mit $z\in\mathbb{N}$, $0\leq r<1$, also $\lfloor\frac{X}{m}\rfloor = z$ sowie $-\frac{a}{X} = \frac{d}{q}+\nu$ mit $q\in\mathbb{N}$, $d\in\mathbb{Z}$, $ggT(d,q)=1$, $q|X$, $\mathbb{P}(q)\subseteq\mathbb{P}(b)$, $q\leq k_2\cdot(\log X)^C$ und $0<|\nu|\leq k_1\cdot\frac{(\log X)^C}{X}$ ($\Leftarrow a\in\mathcal{M}_2$). Wir verwenden *HS2 Proposition 6.2* in der Form

*HS2 Proposition 6.2*:

Sei $A>0$ gegeben. Dann gibt es eine stetig von $A$ abhängige effektive Konstante $c_1 = c_1(A) > 0$, sodass für $n_0\in\mathbb{N}$ sowie gleichmäßig für alle $y\in\mathbb{N}$, $y\leq(\log n_0)^A$, $\mathbb{P}(y)\subseteq\mathbb{P}(b)$ und $w\in\mathbb{Z}$, $ggT(w,y)=1$ und $\beta\in\mathbb{R}$ mit $|\beta|\leq\frac{(\log n_0)^A}{n_0}$ gilt :

$$S(\frac{w}{y}+\beta) := \sum_{1\leq n_1\leq n_0}\Lambda(n_1)\cdot e(n_1(\frac{w}{y}+\beta)) = \frac{\mu(y)}{\varphi(y)}\cdot T(\beta) + O_A(n_0\exp(-c_1\sqrt{\log n_0})).$$

Dabei ist $T(\beta) := \sum\limits_{1\leq n_1\leq n_0} e(\beta n_1)\ \forall\ \beta\in\mathbb{R}$ und die implizite Konstante im $O_A$-Glied ist effektiv in Abhängigkeit von $A$ berechenbar.

Darin setzen wir $A := C$, $n_0 := z$, $\beta := \nu\cdot m$ sowie $w := d\cdot\frac{m}{ggT(m,q)}$ und $y := \frac{q}{ggT(m,q)}$ ein, womit bereits $ggT(w,y)=1$ und $\mathbb{P}(y)\subseteq\mathbb{P}(q)\subseteq\mathbb{P}(b)$ erfüllt ist ($\Leftarrow y|q$). Um auch den übrigen Voraussetzungen in *HS2* zu genügen, wählen wir $X$ hinreichend groß bzw. oberhalb der Schranke $S_3(\eta, C) \geq S_2(\eta, C)$. In Zuge dessen werden auch die Konstanten $\gamma_1(C), \gamma_2(C) \in \mathbb{R}^+$ $\gamma_2(C) \leq 1$ eingeführt. Schließlich erhalten wir für alle $X > S_4(\eta, C)$ insbesondere

$$\sum_{n \leq \lfloor \frac{X}{m} \rfloor} \Lambda(n) e(-\frac{amn}{X}) = \frac{\mu(y)}{\varphi(y)} \cdot T(\beta) + O_C(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_1(C) \cdot \sqrt{\log(X/m)})),$$

mit effektivem $c_1 = c_1(C) \in \mathbb{R}^+$, wobei wir die Schranke $S_4(\eta, C) \geq S_3(\eta, C)$ so wählen, dass $0 < |\beta| \leq \frac{(\log z)^C}{z} < \frac{\pi}{4} < 1$ für alle $X > S_4(\eta, C)$ ist. Zur Konstruktion dieser Schranke verwenden wir $z = \lfloor \frac{X}{m} \rfloor \gg X^{\eta/4} \ \forall \ X > S_3(\eta, C)$. Aus $q|X$ folgt $\frac{X}{m} \cdot \beta = X \cdot \nu = -a - \frac{dX}{q} \in \mathbb{Z}$ und daraus $\beta \cdot (z + r) \in \mathbb{Z}$, was $e(\beta z) = e(-\beta r)$ und nach der geometrischen Summenformel

$$|T(\beta)| = \begin{cases} z & \text{, falls } \beta \in \mathbb{Z} \\ |\frac{e(\beta z)-1}{e(\beta)-1}|, & \text{sonst} \end{cases} = |\frac{e(\beta z) - 1}{e(\beta) - 1}| = \frac{|e(\beta r) - 1|}{|e(\beta) - 1|} \leq 1$$

liefert, wenn wir $\beta \notin \mathbb{Z}$ beachten ($\Leftarrow 0 < |\beta| < 1$) und uns $|e(\beta r) - 1| \leq |e(\beta) - 1|$ mithilfe $0 \leq |\beta r| \leq |\beta| < \frac{\pi}{4}$ klar machen, indem wir die Beträge durch Kreissehnen am komplexen Einheitskreis identifizieren. Damit kommt $\frac{\mu(y)}{\varphi(y)} \cdot T(\beta) = O(1)$ und insgesamt

$$\sum_{n \leq \lfloor \frac{X}{m} \rfloor} \Lambda(n) e(-\frac{amn}{X}) = O_C(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_1(C) \cdot \sqrt{\log(X/m)})) \quad \forall \ X > S_4(\eta, C).$$

Wir vereinbaren $\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ \forall \ x \in \mathbb{R}^+$, sodass nach [2, S.92 Satz 2.8.2]/dem Primzahlsatz die Abschätzung $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x) = x + O(x \cdot \exp(-c_2 \cdot \sqrt{\log x}) \ \forall \ x \geq 1$ mit effektivem $c_2 \in \mathbb{R}^+$ gilt. Diese erhalten wir für $x \geq 2$ auch aus *HS1 Prop.6.1*, indem wir darin $q = a = 1$ und $C = 2$ wählen ($\Rightarrow (\log x)^C \geq (\log 2)^2 > 1$) und für $x \in [1, 2[$ ist sie trivial. Somit kommt

$$\begin{aligned} |\sum_{n \leq \lfloor \frac{X^{1-\delta}}{m} \rfloor} \Lambda(n) e(-\frac{amn}{X})| \leq \psi(\frac{X^{1-\delta}}{m}) &= \frac{X^{1-\delta}}{m} + O(\frac{X^{1-\delta}}{m} \cdot \exp(-c_2 \cdot \sqrt{\log(X^{1-\delta}/m)})) \\ &= \frac{X^{1-\delta}}{m} + O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_2 \cdot \sqrt{\log(X/m)})) \\ &= O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_2 \cdot \sqrt{\log(X/m)})), \end{aligned}$$

indem wir zunächst die Monotonie der Funktion $t \longmapsto t \cdot \exp(-c_2 \cdot \sqrt{\log t})$ für hinreichend große $t \geq 1$ verwenden und dann den Summanden $\frac{X^{1-\delta}}{m}$ ins letzte $O_{\eta,C}$-Glied absorbieren. Setzen wir $c_3(C) := \min\{c_1(C), c_2\}/2 \in \mathbb{R}^+$ und beachten $\frac{X}{m} \geq X^{\eta/4}$ für alle $X > S_4(\eta, C)$, so folgern wir aus den letzten beiden Abschätzungen das gewünschte Resultat

$$(6.2.5) \qquad \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq n < \frac{X}{m}} \Lambda(n) e(-\frac{amn}{X}) = O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_3 \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X}))$$
$$\forall\ a \in \mathcal{M}_2,\ m \in \mathbb{N},\ X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2} \text{ mit effektivem } c_3 = c_3(C) \in \mathbb{R}^+,$$

denn die Grenzen bei $\frac{X^{1-\delta}}{m}$ und $\frac{X}{m}$ liefern einen Beitrag, der durch den $O_{\eta,C}$-Term absorbiert wird.

IV. Wir weisen $S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = O_{\eta,C}(X \cdot \exp(-c_4 \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X}))$ für $a \in \mathcal{M}_2$ mit einer effektiven Konstanten $c_4 \in \mathbb{R}^+$ nach. Nach (6.2.3) und $S_{\mathcal{R}}(\theta) = \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot e(n\theta)\ \ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = \sum_{X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2}} \Lambda_{\mathcal{C}}(m) \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq p < \frac{X}{m}} \log p \cdot e(\frac{-amp}{X}).$$

Sei zunächst $m \in \mathbb{N},\ X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2}$ fixiert. Aus den Definitionen $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ [2, S.5] und $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}^+$ [2, S.30 (1.46)] kommt wegen [2, S.30 (1.47)] insbesondere

$$\theta(x) - \psi(x) = \sum_{p \leq x} \log p - \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = O(\sqrt{x}) = O(x \cdot \exp(-c_5 \cdot \sqrt{\log x})) \quad \forall\ x \geq 1$$

mit effektivem $c_5 \in \mathbb{R}^+$. Dadurch erhalten wir mithilfe der Definition der Mangoldt-Funktion

$$|\sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq p^s < \frac{X}{m}} \log p \cdot e(\frac{-amp^s}{X})| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq p^s < \frac{X}{m}} \log p - \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq p < \frac{X}{m}} \log p =$$
$$\sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq n < \frac{X}{m}} \Lambda(n) - \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq p < \frac{X}{m}} \log p = \sum_{\lceil \frac{X^{1-\delta}}{m} \rceil \leq n \leq \lceil \frac{X}{m} \rceil - 1} \Lambda(n) - \sum_{\lceil \frac{X^{1-\delta}}{m} \rceil \leq p \leq \lceil \frac{X}{m} \rceil - 1} \log p =$$
$$\psi(\lceil \frac{X}{m} \rceil - 1) - \theta(\lceil \frac{X}{m} \rceil - 1) - (\psi(\lceil \frac{X^{1-\delta}}{m} \rceil - 1) - \theta(\lceil \frac{X^{1-\delta}}{m} \rceil - 1)) =$$
$$O(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_5 \cdot \sqrt{\log(X/m)})) + O(\frac{X^{1-\delta}}{m} \cdot \exp(-c_5 \cdot \sqrt{\log(X^{1-\delta}/m)})) =$$
$$O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_5 \cdot \sqrt{\log(X/m)})) = O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_6 \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X}))$$

mit effektivem $c_6 \in \mathbb{R}^+$, indem wir die Monotonie der Funktion $t \longmapsto t \cdot \exp(-c_5 \cdot \sqrt{\log t})$ für hinreichend große $t \geq 1$ sowie $\frac{X}{m} \geq \frac{X^{1-\delta}}{m} \geq X^{\eta/4} \geq 2\ \ \forall\ X > S_5(\eta, C) \geq S_4(\eta, C)$ nutzen.
Also ist

$$\sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq p^s < \frac{X}{m}} \log p \cdot e(\frac{-amp^s}{X}) = O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_6 \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X})),$$

was nach (6.2.5) schließlich

$$\sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m}\le p<\frac{X}{m}} \log p\cdot e(\frac{-amp}{X}) =$$
$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m}\le p^s<\frac{X}{m}} \log p\cdot e(\frac{-amp^s}{X}) - \sum_{s=2}^{\infty}\sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m}\le p^s<\frac{X}{m}} \log p\cdot e(\frac{-amp^s}{X}) =$$
$$\sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m}\le n<\frac{X}{m}} \Lambda(n)e(-\frac{amn}{X}) + O_{\eta,C}(\frac{X}{m}\cdot\exp(-c_6\cdot\sqrt{\eta}\cdot\sqrt{\log X})) =$$
$$O_{\eta,C}(\frac{X}{m}\cdot\exp(-c_7\cdot\sqrt{\eta}\cdot\sqrt{\log X}))\quad\forall\ m\in\mathbb{N},\ X^S\le m<X^{s+(l-1)\delta^2}$$

mit effektivem $c_7 = c_7(C) = \min\{c_3(C), c_6\}\in\mathbb{R}^+$ impliziert. Kombinieren wir dies mit der obigen Gleichung für $S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X})$, so folgt

$$|S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X})| \ll_{\eta,C} \sum_{X^S\le m<X^{S+(l-1)\delta^2}} \frac{\Lambda_{\mathcal{C}}(m)}{m}\cdot X\cdot\exp(-c_7\cdot\sqrt{\eta}\cdot\sqrt{\log X}).$$

Ferner ist $\sum\limits_{X^S\le m<X^{S+(l-1)\delta^2}} \frac{\Lambda_{\mathcal{C}}(m)}{m} = \prod\limits_{i=1}^{l-1}\sum\limits_{p\in[X^{a_i},X^{a_i+\delta^2}[} \frac{\log p}{p}$ nach Definition von $\mathcal{C}$.
Aus [2, S.6 Satz 1.1.4] ergibt sich $\sum\limits_{p\le x}\frac{\log p}{p} = \log x + O(1)\ \forall\ x\ge 1$, woraus wir auf

$$\sum_{p\in[X^{a_i},X^{a_i+\delta^2}[} \frac{\log p}{p} = \delta^2\cdot\log X + O(1) \ll \log X\quad\forall\ 1\le i\le l-1$$

schließen ($\Leftarrow X>1\ \wedge$ Def. $\delta$). Wegen $l-1\ll\frac{1}{\eta}$ gilt $0\le \sum\limits_{X^S\le m<X^{S+(l-1)\delta^2}}\frac{\Lambda_{\mathcal{C}}(m)}{m} \ll_\eta (\log X)^{l-1}$ und wir erhalten daraus nach einigen technischen Umformungen

$$|S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X})| \ll_{\eta,C} X\cdot\exp(-c_8\cdot\sqrt{\eta}\cdot\sqrt{\log X}) \ll_{\eta,C} X\cdot(\log X)^{-4C}\quad\forall\ a\in\mathcal{M}_2$$

mit effektivem $c_8 = c_8(C)\in\mathbb{R}^+$, denn diese Konstante rührt von $c_7 = c_7(C)$ her. Hier wird auch klar, weshalb wir zwingend eine effektive Konstante $c_8(C)$ benötigen. Wäre nämlich $c_8(C)$ nicht effektiv berechenbar, so auch die von $\eta$ und $C$ abhängige Konstante im letzten $\ll_{\eta,C}$-Zeichen nicht. Zusammen mit der trivialen Abschätzung $|S_{\mathcal{A}}(\theta)|\le\#\mathcal{A}\ \forall\ \theta\in\mathbb{R}$ und $\#\mathcal{M}_2\le\#\mathcal{M}\ll_{\eta,C}(\log X)^{3C}$ ($\Leftarrow$ (6.2.2)) folgern wir

$$(6.2.6)\qquad \sum(2) = O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^C}).$$

In V und VI zeigen wir $S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = S_{\mathcal{R}}(-\frac{d}{q}) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\cdot\sum\limits_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{4C}})$ für $a\in\mathcal{M}_3$.

V. Sei $a \in \mathcal{M}_3$ gegeben. Dann ist $\frac{a}{X} = \frac{d}{q}$ mit $d \in \mathbb{N}_0,\ q \in \mathbb{N},\ ggT(d,q) = 1$, $q \leq k_2 \cdot (\log X)^C < X^{1/3} < X,\ q|X$ und $\mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$. Wir sehen leicht

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = S_{\mathcal{R}}(-\frac{d}{q}) &= \sum_{\substack{t=1 \\ ggT(t,q)=1}}^{q} e(t \cdot \frac{-d}{q}) \sum_{\substack{n<X \\ n \equiv t \bmod q}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) + \sum_{\substack{t=1 \\ ggT(t,q)\neq 1}}^{q} e(t \cdot \frac{-d}{q}) \sum_{\substack{n<X \\ n \equiv t \bmod q}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \\ &:= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \end{aligned}$$

und schätzen zunächst $\sum\limits_{\substack{n<X \\ ggT(n,q)\neq 1}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n)$ und damit $|\sum_2|$ nach oben ab.

Es gibt eine Schranke $S_6(\eta, C) \geq S_5(\eta, C)$ mit $\eta/2 - \delta - (l-1)\delta^2 \geq \eta/4 \ \ \forall\ X > S_6(\eta, C)$ (beachte Def. $\delta$). Nutzen wir zusätzlich $\min\limits_{1 \leq i \leq l-1} a_i \geq \frac{\eta}{2}$ und $S = \sum\limits_{i=1}^{l-1} a_i < 1 - \frac{\eta}{2}$, so erhalten wir $\mathcal{R} \subseteq [\frac{\eta}{4}, 1]^l$ für alle $X > S_6(\eta, C)$ nach Definition von $\delta$ und $\mathcal{R}$, wenn wir $e_l$ für $\vec{e} \in \mathcal{R}$ nach unten abschätzen.

Aus $\Lambda_{\mathcal{R}}(n) \neq 0$ folgt $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l$ mit $(\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_l}{\log X}) \in \mathcal{R}$, also insbesondere $p_i \geq X^{\eta/4} > b$ für alle $1 \leq i \leq l,\ X > S_7(\eta, C) \geq S_6(\eta, C)$. Demnach besitzen $n$ und $b$ keine gemeinsamen Primteiler und wegen $\mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$ daher auch $n$ und $q$ nicht. Dies liefert insgesamt

$$(6.2.7) \quad \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \neq 0 \ \Rightarrow\ ggT(n,b) = 1 \quad \wedge \quad ggT(n,q) = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0,\ X > S_7(\eta, C).$$

Also ist $|\sum_2| \leq \sum\limits_{\substack{n<X \\ ggT(n,q)\neq 1}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = 0$ für alle $X > S_7(\eta, C)$ und folglich

$$(6.2.8) \quad \sum\nolimits_2 = O_{\eta,C}(1) \quad \wedge \quad \sum_{\substack{n<X \\ ggT(n,q)\neq 1}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = O_{\eta,C}(1),$$

denn es gilt $0 \leq \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \ll_{\eta,C} 1$ für alle $n \in \mathbb{N},\ n < X$ und alle $X \leq S_7(\eta, C)$.

Nach (1.56) in [2, S.34] ist $\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum\limits_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(t)\chi(n) = \begin{cases} 1, \text{ falls } n \equiv t \bmod q \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

für $n, t \in \mathbb{Z},\ ggT(t,q) = 1$, wobei über alle Charaktere $\chi$ mod $q$ summiert wird, $\chi_0$ der Hauptcharakter mod $q$ ist und mit $\bar{\chi}$ der zu $\chi$ inverse bzw. konjugiert komplexe Charakter mod $q$ bezeichnet wird. Folglich können wir die Restklassen mod $q$ „trennen" und durch Separation des Hauptcharakters $\chi_0$ $(= \bar{\chi}_0)$ mod $q$ sowie dessen Definition kommt

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{t=1\\ ggT(t,q)=1}}^{q} e(t\cdot\frac{-d}{q})\cdot\sum_{n<X}\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\sum_{\chi \bmod q}\bar{\chi}(t)\chi(n)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}}(n) := \sum\nolimits_3+\sum\nolimits_4 \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_3 &= \sum_{\substack{t=1\\ ggT(t,q)=1}}^{q} e(t\cdot\frac{-d}{q})\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\bar{\chi}_0(t)\sum_{n<X}\chi_0(n)\Lambda_{\mathcal{R}}(n)\\ &= \sum_{\substack{t=1\\ ggT(t,q)=1}}^{q} e(t\cdot\frac{-d}{q})\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\sum_{\substack{n<X\\ ggT(n,q)=1}}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\cdot\sum_{\substack{n<X\\ ggT(n,q)=1}}\Lambda_{\mathcal{R}}(n)\\ &= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\cdot\sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n)+O_{\eta,C}(1) \quad \text{sowie}\\ \sum\nolimits_4 &= \sum_{\substack{t=1\\ ggT(t,q)=1}}^{q} e(t\cdot\frac{-d}{q})\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\cdot\sum_{\chi\neq\chi_0 \bmod q}\bar{\chi}(t)\sum_{n<X}\chi(n)\Lambda_{\mathcal{R}}(n).\end{aligned}$$

Dabei verwenden wir die Ramanujan-Summe $\sum\limits_{\substack{t=1\\ ggT(t,q)=1}}^{q} e(t\cdot\frac{-d}{q}) = \mu(q)$, wobei dies nach Lemma 1.3.1 und (1.30) in [2, S.20] gilt, sowie (6.2.8) zur Umformung von $\sum_3$. Insgesamt ergibt sich

$$(6.2.9) \qquad \sum\nolimits_1 = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\cdot\sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n)+O_{\eta,C}(1)+\sum\nolimits_4.$$

VI. Wir skizzieren den Nachweis zu $\sum(t) := \frac{1}{\varphi(q)}\cdot\sum\limits_{\chi\neq\chi_0 \bmod q}\bar{\chi}(t)\sum\limits_{n<X}\chi(n)\Lambda_{\mathcal{R}}(n) = O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{5C}})$ für $t\in\mathbb{Z},\ ggT(t,q)=1$ und $q\in\mathbb{N},\ q\le k_2\cdot(\log X)^C$ mit $q|X$ bzw. $\mathbb{P}(q)\subseteq\mathbb{P}(b)$.

Aus (6.2.3) und der vollständigen Multiplikativität eines Charakters folgt

$$\sum_{n<X}\chi(n)\Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{X^S\le m<X^{S+(l-1)\delta^2}}\Lambda_{\mathcal{C}}(m)\chi(m)\sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m}\le p<\frac{X}{m}}\log p\cdot\chi(p) \quad \forall\ \chi \bmod q.$$

Fixieren wir nun den Charakter $\chi \bmod q$ sowie $m\in\mathbb{N},\ X^S\le m<X^{S+(l-1)\delta^2}$, so erhalten wir mit derselben Idee wie auf S.146-147 ab „Sei zunächst...” die Aussage

$$\sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m}\le p<\frac{X}{m}}\log p\cdot\chi(p) = \sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m}\le n<\frac{X}{m}}\Lambda(n)\chi(n)+O_{\eta,C}(\frac{X}{m}\cdot\exp(-c_6\cdot\sqrt{\eta}\cdot\sqrt{\log X}))$$

mit effektivem $c_6\in\mathbb{R}^+$, indem wir dort $e(\frac{-amp^s}{X})$ durch $\chi(p^s)$ sowie $e(\frac{-amn}{X})$ durch $\chi(n)$ ersetzen und insbesondere auf S.147 die Zeilen 2-4 beachten. Dabei spielt es keine Rolle, ob $a\in\mathcal{M}_2$ oder $a\in\mathcal{M}_3$ ist. Gleiches gilt auch für die letzte Abschätzung auf S.145 in Kap.III, in der wir problemlos $\chi(n)$ anstatt $e(\frac{-amn}{X})$ schreiben können, sodass mit effektivem $c_2 \in \mathbb{R}^+$ insbesondere

$$\sum_{n \leq \lceil \frac{X^{1-\delta}}{m} \rceil - 1} \Lambda(n)\chi(n) = O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-\frac{c_2}{2} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X}))$$

kommt ($\Leftarrow \frac{X}{m} \geq X^{\eta/4}$). Setzen wir $c_9 := \min\{c_6, \frac{c_2}{2}\} \in \mathbb{R}^+$, wobei $c_9$ effektiv ist, so gilt insgesamt

$$\sum_{\frac{X^{1-\delta}}{m} \leq p < \frac{X}{m}} \log p \cdot \chi(p) = \sum_{n < \frac{X}{m}} \Lambda(n)\chi(n) + O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_9 \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X}))$$
$$\forall\ \chi \bmod q,\ m \in \mathbb{N},\ X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2}.$$

Dies eingesetzt in die erste Gleichung liefert

$$\begin{aligned}\sum_{n<X} \chi(n)\Lambda_{\mathcal{R}}(n) = & \sum_{X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2}} \Lambda_{\mathcal{C}}(m)\chi(m) \sum_{n < \frac{X}{m}} \Lambda(n)\chi(n) + \\ & O_{\eta,C}(X \cdot \exp(-c_{10} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X})) \quad \forall\ \chi \bmod q\end{aligned}$$

mit effektivem $c_{10} \in \mathbb{R}^+$, welches aus $c_9$ herrührt, wobei wir zwischendurch die Abschätzung

$$0 \leq \sum_{X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2}} \frac{\Lambda_{\mathcal{C}}(m)}{m} \ll_\eta (\log X)^{l-1}$$

von S.147 gebrauchen. Ferner gibt es genau $\varphi(q)$ Charaktere mod $q$, sodass $\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} |\bar{\chi}(t)| = \frac{\varphi(q)-1}{\varphi(q)} < 1$ und folglich

$$\begin{aligned}\sum(t) &= \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(t) \sum_{n<X} \chi(n)\Lambda_{\mathcal{R}}(n) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(t) \sum_{X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2}} \Lambda_{\mathcal{C}}(m)\chi(m) \sum_{n<\frac{X}{m}} \Lambda(n)\chi(n) \\ &\quad + \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(t) \cdot O_{\eta,C}(X \cdot \exp(-c_{10} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X})) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(t) \sum_{X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2}} \Lambda_{\mathcal{C}}(m)\chi(m) \sum_{n<\frac{X}{m}} \Lambda(n)\chi(n) \\ &\quad + O_{\eta,C}(X \cdot \exp(-c_{10} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X}))\end{aligned}$$

gilt. Wegen $\chi(m) = 0$ für $ggT(m,q) \neq 1$ können wir die Summe über $m$ durch die Bedingung $ggT(m,q) = 1$ weiter einschränken und erhalten schließlich

$$(6.2.10)\qquad \sum(t) = \sum_{\substack{X^S \le m < X^{S+(l-1)\delta^2} \\ ggT(m,q)=1}} \Lambda_{\mathcal{C}}(m) \cdot \sum(t,m) + O_{\eta,C}(X \cdot \exp(-c_{10} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X}))$$

$$\text{mit } \sum(t,m) := \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(t)\chi(m) \sum_{n < \frac{X}{m}} \Lambda(n)\chi(n)$$

$$\text{für } m \in \mathbb{N},\ X^S \le m < X^{S+(l-1)\delta^2},\ ggT(m,q) = 1.$$

Für fixiertes $m \in \mathbb{N},\ X^S \le m < X^{S+(l-1)\delta^2},\ ggT(m,q) = 1$ schätzen wir nun $\sum(t,m)$ ab.

Aus dem Satz von Euler-Fermat kommt $\bar{\chi}(t)\chi(m) = \bar{\chi}(r)$ mit $r := t \cdot m^{\varphi(q)-1} \in \mathbb{Z}$ und $ggT(r,q) = 1$, denn $\bar{\chi}$ ist der zu $\chi$ inverse Charakter mod $q$. Dabei hängt $r$ insbesondere nur von $t$, $m$ sowie $q$ ab und es gilt $\sum(t,m) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum\limits_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(r) \sum\limits_{n < \frac{X}{m}} \Lambda(n)\chi(n)$.

Für $x \in \mathbb{R},\ x \ge 1,\ r \in \mathbb{Z},\ ggT(r,q) = 1$ und einen Charakter $\chi$ mod $q$ definieren wir $\psi(x,\chi) := \sum\limits_{n \le x} \chi(n)\Lambda(n)$ und $\psi(x,q,r) := \sum\limits_{\substack{n \le x \\ n \equiv r \bmod q}} \Lambda(n)$ gemäß [2, S.90 (2.58)] und [2, S.99 (3.1)]. Wir verwenden *HS1 Proposition 6.2* in der Form

*HS1 Proposition 6.2*:
Sei $C > 0$ beliebig. Dann gibt es eine stetig von $C$ abhängige effektive Konstante $c_{11} = c_{11}(C) > 0$, sodass gleichmäßig für alle $q \in \mathbb{N},\ q \le (\log x)^C,\ \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$ und alle $r \in \mathbb{Z},\ ggT(r,q) = 1$ gilt :

$$\psi(x,q,r) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_C(x \cdot \exp(-c_{11}\sqrt{\log x})) \quad \forall\ x \ge 2.$$

Dabei ist auch die implizite Konstante im $O_C$-Glied effektiv in Abhängigkeit von $C$ berechenbar.

Es gibt eine Schranke $S_8(\eta,C) \ge S_7(\eta,C)$, sodass $x := \lceil \frac{X}{m} \rceil - 1 \ge X^{\eta/4} \ge 2$ für alle $X > S_8(\eta,C)$ gilt. Nach $q \le k_2 \cdot (\log X)^C \le \gamma_2(C) \cdot (\frac{\eta}{4})^C \cdot (\log X)^C \le (\log x)^C$ ($\Leftarrow \gamma_2(C) \le 1$) sind alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt, was nach [2, S.113 (3.18)] insbesondere

$$\psi(x,q,r) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_C(x \cdot \exp(-c_{11}\sqrt{\log x})) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(r)\psi(x,\chi)$$

mit effektivem $c_{11} = c_{11}(C) \in \mathbb{R}^+$ liefert. Durch Abspaltung des Beitrages von $\chi_0$ folgt

$$\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{n \le x} \Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\substack{n \le x \\ ggT(n,q) \neq 1}} \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(r)\psi(x,\chi) =$$
$$\frac{x}{\varphi(q)} + O_C(x \cdot \exp(-c_{11}\sqrt{\log x})).$$

Ferner ist $\sum\limits_{p \in \mathbb{P}(b)} 1 = \omega(b)$ eine nur von $b$ abhängige (absolute) Konstante und $\mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$, was

$$\sum_{\substack{n \le x \\ ggT(n,q) \neq 1}} \Lambda(n) = \sum_{\substack{p^s \le x,\, s \in \mathbb{N} \\ ggT(p^s,q) \neq 1}} \log p = \sum_{p \in \mathbb{P}(q)} \sum_{\substack{p^s \le x \\ s \in \mathbb{N}}} \log p \le \sum_{p \in \mathbb{P}(b)} \sum_{\substack{p^s \le x \\ s \in \mathbb{N}}} \log p \le$$
$$\sum_{p \in \mathbb{P}(b)} \log p \cdot \lfloor \frac{\log x}{\log p} \rfloor \ll \log x$$

impliziert. Damit ist $\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum\limits_{\substack{n \le x \\ ggT(n,q) \neq 1}} \Lambda(n) = O(x \cdot \exp(-c_{12} \cdot \sqrt{\log x}))$ mit effektivem $c_{12} \in \mathbb{R}^+$.

Nach dem Primzahlsatz [2, S.92 Satz 2.8.2] und [2, S.30 (1.46)] gilt mit effektivem $c_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_{n \le x} \Lambda(n) = \psi(x) = x + O(x \cdot \exp(-c_2 \cdot \sqrt{\log x})),$$

also insbesondere $\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum\limits_{n \le x} \Lambda(n) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x \cdot \exp(-c_2 \cdot \sqrt{\log x}))$, was eingesetzt in die vorletzte Gleichung und effektiver Konstante $c_{13} = c_{13}(C) := \min\{c_2, c_{12}, c_{11}(C)\} \in \mathbb{R}^+$ die Gültigkeit von

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(r)\psi(x,\chi) = O_C(x \cdot \exp(-c_{13} \cdot \sqrt{\log x}))$$

liefert. Daraus leiten wir mithilfe von $X^{\eta/4} \le x \le \frac{X}{m}\ \forall\ X > S_8(\eta, C)$ und unseren Definitionen

$$\begin{aligned}\sum(t,m) &= \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(r) \sum_{n < \frac{X}{m}} \Lambda(n)\chi(n) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_0 \bmod q} \bar{\chi}(r)\psi(x,\chi) \\ &= O_C(x \cdot \exp(-c_{13} \cdot \sqrt{\log x})) = O_{\eta,C}(\frac{X}{m} \cdot \exp(-c_{14} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X})) \\ &\forall\ m \in \mathbb{N},\ X^S \le m < X^{S+(l-1)\delta^2},\ ggT(m,q) = 1\end{aligned}$$

mit effektivem $c_{14} = c_{14}(C) = c_{13}(C)/2 \in \mathbb{R}^+$ her. Somit gilt nach (6.2.10) insgesamt

$$(6.2.11) \quad \sum(t) = O_{\eta,C}(X \cdot \exp(-c_{15} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{\log X})) = O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{5C}})$$

für alle im ersten Satz von Kap.VI definierten $t \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$

mit effektivem $c_{15} = c_{15}(C) \in \mathbb{R}^+$, denn $c_{15}$ berechnet sich aus $c_{10}$ und $c_{14}$. Dabei verwenden wir wieder die Abschätzung $0 \leq \sum_{X^S \leq m < X^{S+(l-1)\delta^2}} \frac{\Lambda_{\mathcal{C}}(m)}{m} \ll_\eta (\log X)^{l-1}$ von S.146. Die Effektivität von $c_{15}(C)$ liefert uns das letzte Gleichheitszeichen in (6.2.11) analog zur oberen Schranke von $|S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X})|$ auf S.147. Aus $q \leq k_2 \cdot (\log X)^C$ und (6.2.11) erhalten wir

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{\substack{t=1 \\ ggT(t,q)=1}}^{q} e(t \cdot \frac{-d}{q}) \cdot \sum(t) = O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{4C}})$$

und nach (6.2.8), (6.2.9) sowie $S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = S_{\mathcal{R}}(-\frac{d}{q}) = \sum_1 + \sum_2$ insbesondere

$$(6.2.12) \quad S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = S_{\mathcal{R}}(-\frac{d}{q}) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{4C}}) \quad \forall\ a \in \mathcal{M}_3.$$

VII. Im Folgenden zeigen wir $\sum(3) = \frac{1}{X} \cdot \sum_{a \in \mathcal{M}_3} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{4C}})$.

Dazu zerlegen wir $\mathcal{M}_3$ disjunkt in die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4 := \{a \in \mathcal{M}_3 \mid \exists\, q \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{Z},\ ggT(q,d) = 1,\ q \leq k_2 \cdot (\log X)^C,\ \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b),\ q|X\ : \\ \frac{a}{X} = \frac{d}{q}\ \wedge\ q \nmid b\} \text{ sowie} \\ \mathcal{M}_5 := \{a \in \mathcal{M} \mid |\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X},\ q \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{Z},\ ggT(q,d) = 1,\ q \leq k_2 \cdot (\log X)^C \\ \Rightarrow \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)\ \wedge\ \frac{a}{X} = \frac{d}{q}\ \wedge\ q|X\ \wedge\ q|b\} \end{aligned}$$

und definieren $\sum(i)$ für $i = 4, 5$ wie auf S.143 für $i = 1, 2, 3$, sodass $\sum(3) = \sum(4) + \sum(5)$ ist. Für $a \in \mathcal{M}_4$ ist $\frac{a}{X} = \frac{d}{q}$ mit $q|b^k,\ q \nmid b$ $(k \in \mathbb{N})$, sodass $q \neq 1$ und aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von $q$ und $b$ insbesondere $q$ nicht quadratfrei ist, da ansonsten $q|b$ gilt. Also ist $\mu(q) = 0$. Nach (6.2.12) ist dann $S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{4C}})\ \ \forall\ a \in \mathcal{M}_4$, woraus wir auf

$$(6.2.13) \quad \sum(4) = O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^C})$$

mit $\#\mathcal{M}_4 \leq \#\mathcal{M}_3 \leq \#\mathcal{M} \ll_{\eta,C} (\log X)^{3C}$ ($\Leftarrow$ (6.2.2)) und $|S_{\mathcal{A}}(\theta)| \leq \#\mathcal{A}\ \ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$ schließen.

Es verbleibt die Abschätzung von $\sum(5) = \frac{1}{X} \cdot \sum_{a \in \mathcal{M}_5} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X})$. Dazu weisen wir zunächst $\{\frac{a}{X} \mid a \in \mathcal{M}_5\} = \{\frac{d}{q} \mid 0 \leq d < q,\ ggT(d,q) = 1,\ q|b\} := B_0$ für hinreichend große $X > S_9(\eta, C) \geq S_8(\eta, C)$ nach.

Die $\subseteq$-Inklusion ergibt sich aus der Definition von $\mathcal{M}_5 \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathbb{N}_0 \cap [0, X[$, sodass noch die $\supseteq$-Inklusion zu zeigen ist. Es gibt eine Schranke $S_9(\eta, C) \geq S_8(\eta, C)$, sodass $b \leq k_2 \cdot (\log X)^C$ und $k_1 k_2 b \cdot \frac{(\log X)^{2C}}{X} < 1$ für alle $X > S_9(\eta, C)$ gilt.

Sei $X > S_9(\eta, C)$ und $\frac{d}{q} \in B_0$, also $d \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq d < q,\ ggT(d,q) = 1$ und $q|b$, womit wegen $q|X$ ($\Leftarrow X = b^k,\ k \in \mathbb{N}$) ein $0 \leq a < X$ mit $\frac{d}{q} = \frac{a}{X}$ existiert. Nach $q|b$ ist $q \leq b \leq k_2 \cdot (\log X)^C$ sowie $|\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| = 0 \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}$, sodass bereits $a \in \mathcal{M}$ gilt.
Wäre auch $|\frac{a}{X} - \frac{d_1}{q_1}| \leq k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X}$ mit $q_1 \in \mathbb{N},\ d_1 \in \mathbb{Z},\ ggT(d_1, q_1) = 1,\ q_1 \leq k_2 \cdot (\log X)^C$, so liefert dies wegen $\frac{a}{X} = \frac{d}{q}$ im Fall $\frac{d}{q} \neq \frac{d_1}{q_1}$ die Gültigkeit von

$$k_1 \cdot \frac{(\log X)^C}{X} \geq |\frac{a}{X} - \frac{d_1}{q_1}| = |\frac{d}{q} - \frac{d_1}{q_1}| \geq \frac{1}{qq_1} \geq \frac{1}{b \cdot k_2 \cdot (\log X)^C}$$

und damit einen Widerspruch zu $k_1 k_2 b \cdot \frac{(\log X)^{2C}}{X} < 1$. Also ist $\frac{d_1}{q_1} = \frac{d}{q}$ bzw. $d_1 = d$ und $q_1 = q$ aufgrund der Reduziertheit beider Brüche, was nach Definition $a \in \mathcal{M}_5$ liefert ($\Leftarrow q|b\ \wedge\ q|X$). Insgesamt haben wir für alle $X > S_9(\eta, C)$ die Gültigkeit von

$$\{\frac{a}{X} \mid a \in \mathcal{M}_5\} = \{\frac{d}{q} \mid 0 \leq d < q,\ ggT(d,q) = 1,\ q|b\} = B_0 = \{\frac{d_1}{b} \mid 0 \leq d_1 < b\}$$

gezeigt, sodass nach Definition von $S_{\mathcal{A}}$ und $S_{\mathcal{R}}$ insbesondere

$$\begin{aligned} (6.2.14) \quad \sum(5) &= \frac{1}{X} \cdot \sum_{a \in \mathcal{M}_5} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X}) = \frac{1}{X} \cdot \sum_{0 \leq d_1 < b} S_{\mathcal{A}}(\frac{d_1}{b}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-d_1}{b}) \\ &= \frac{1}{b^k} \cdot \sum_{n < X,\, m \in \mathcal{A}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \sum_{0 \leq d_1 < b} e(\frac{(m-n)d_1}{b}) \\ &= \frac{1}{b^{k-1}} \cdot \sum_{\substack{n < X,\, m \in \mathcal{A} \\ n \equiv m \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \quad \forall\ X > S_9(\eta, C) \end{aligned}$$

gilt, weil $\sum\limits_{0 \leq d_1 < b} e(\frac{(m-n)d_1}{b}) = \begin{cases} b & \text{, falls } n \equiv m \bmod b \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$ ist. Aus (6.2.7) folgt

$$\begin{aligned} (6.2.15) \quad & \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \neq 0 \ \Rightarrow\ ggT(n,b) = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \wedge \\ & \sum_{\substack{n < X \\ ggT(n,b)=1}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{n < X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \end{aligned}$$

für alle $X > S_9(\eta, C)$ wegen $S_9(\eta, C) \geq S_7(\eta, C)$. Dies liefert direkt

$$(6.2.16)\qquad \sum_{\substack{n<X,\, m\in\mathcal{A}\\ n\equiv m \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{\substack{0\le a<b\\ ggT(a,b)=1}} \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n)\cdot \sum_{\substack{m\in\mathcal{A}\\ m\equiv a \bmod b}} 1 \quad \forall\ X > S_9(\eta, C).$$

Sei nun $a_1 \in \mathbb{Z},\ ggT(a_1, b) = 1$ fixiert. Aus [2, S.34 (1.56)] erhalten wir

$$\sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a_1 \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{n<X} \frac{1}{\varphi(b)} \cdot \sum_{\chi \bmod b} \bar{\chi}(a_1)\chi(n)\cdot\Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \frac{1}{\varphi(b)} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) + \sum(a_1)$$

für alle $X > S_9(\eta, C)$ mit $\sum(a_1) := \frac{1}{\varphi(b)} \cdot \sum_{\chi\neq\chi_0 \bmod b} \bar{\chi}(a_1) \sum_{n<X} \chi(n)\Lambda_{\mathcal{R}}(n)$, indem wir den Beitrag des Hauptcharakters $\chi_0$ $(= \bar{\chi}_0)$ mod $b$ abspalten und (6.2.15) anwenden.

Nun sind mit $t := a_1,\ q := b,\ ggT(t, q) = 1,\ q|X,\ \mathbb{P}(q) \subseteq \mathbb{P}(b)$ und $q = b \le k_2 \cdot (\log X)^C$ $\forall\ X > S_9(\eta, C)$ die Voraussetzungen von Kap.VI auf S.149 erfüllt, sodass nach (6.2.11) insbesondere $\sum(a_1) = \sum(t) = O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{5C}})$ gilt. Damit haben wir

$$(6.2.17)\qquad \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a_1 \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \frac{1}{\varphi(b)} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}\Big(\frac{X}{(\log X)^{5C}}\Big)$$

$$\forall\ X > S_9(\eta, C),\ a_1 \in \mathbb{Z},\ ggT(a_1, b) = 1$$

gezeigt. Ferner schließen wir mit einfacher Kombinatorik auf

$$(6.2.18)\qquad \sum_{\substack{m\in\mathcal{A}\\ m\equiv a \bmod b}} 1 = \begin{cases} (b-1)^{k-1} & \text{, falls } a \neq a_0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \forall\ a \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le a < b,$$

indem wir die Definition von $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(b^k)$ in Kap. 4 verwenden sowie die Tatsache ausnutzen, dass genau dann $m \equiv a \bmod b$ gilt, wenn die Einerziffer $n_0$ in der Darstellung von $m$ im $b$-adischen System gerade $a$ ist.

Nach Kap. 5 ist $\kappa_2 = \begin{cases} \frac{b}{b-1} & \text{, falls } ggT(a_0, b) \neq 1 \\ \frac{b(\varphi(b)-1)}{(b-1)\varphi(b)} & \text{, falls } ggT(a_0, b) = 1 \end{cases}$ und wir unterscheiden die folgenden Fälle :

1.Fall: $ggT(a_0, b) \neq 1$

Nach (6.2.15), (6.2.16) und (6.2.18) gilt für alle $X > S_9(\eta, C)$ insbesondere

$$\sum_{\substack{n<X,\, m\in\mathcal{A}\\ n\equiv m \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{\substack{0\le a<b\\ ggT(a,b)=1\\ (a\neq a_0)}} \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot \sum_{\substack{m\in\mathcal{A}\\ m\equiv a \bmod b}} 1 = (b-1)^{k-1} \cdot \sum_{\substack{0\le a<b\\ ggT(a,b)=1\\ (a\neq a_0)}} \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n)$$

$$= (b-1)^{k-1} \cdot \sum_{\substack{n<X\\ ggT(n,b)=1}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = (b-1)^{k-1} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n),$$

denn aus $ggT(a, b) = 1$ folgt $a \neq a_0$, was wegen (6.2.14) und $X = b^k$ sowie $\#\mathcal{A} = (b-1)^k$ auch

$$\sum(5) = \frac{1}{b^{k-1}} \cdot (b-1)^{k-1} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \frac{b}{b^k} \cdot \frac{(b-1)^k}{b-1} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n)$$

für alle $X > S_9(\eta, C)$ liefert.

2.Fall: $ggT(a_0, b) = 1$

Aus (6.2.15), (6.2.16) und (6.2.18) folgt für alle $X > S_9(\eta, C)$ die Gültigkeit von

$$\sum_{\substack{n<X,\, m\in\mathcal{A}\\ n\equiv m \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \sum_{\substack{0\le a<b\\ ggT(a,b)=1\\ a\neq a_0}} \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot \sum_{\substack{m\in\mathcal{A}\\ m\equiv a \bmod b}} 1 + \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a_0 \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot \sum_{\substack{m\in\mathcal{A}\\ m\equiv a_0 \bmod b}} 1 =$$

$$\sum_{\substack{0\le a<b\\ ggT(a,b)=1\\ a\neq a_0}} \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot \sum_{\substack{m\in\mathcal{A}\\ m\equiv a \bmod b}} 1 = (b-1)^{k-1} \cdot \sum_{\substack{0\le a<b\\ ggT(a,b)=1\\ a\neq a_0}} \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) =$$

$$(b-1)^{k-1} \cdot \sum_{\substack{n<X\\ ggT(n,b)=1}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) - (b-1)^{k-1} \cdot \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a_0 \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) =$$

$$(b-1)^{k-1} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) - (b-1)^{k-1} \cdot \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a_0 \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n).$$

Dabei gilt

$$\sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a_0 \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = \frac{1}{\varphi(b)} \cdot \sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}\left(\frac{X}{(\log X)^{5C}}\right) \quad \forall\ X > S_9(\eta, C),$$

wenn wir $a_1 := a_0$ mit $ggT(a_1, b) = 1$ in (6.2.17) einsetzen. Daraus folgt

$$\sum_{\substack{n<X,\, m\in\mathcal{A}\\ n\equiv m \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) = (b-1)^{k-1}\cdot \sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) - (b-1)^{k-1}\cdot \sum_{\substack{n<X\\ n\equiv a_0 \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) =$$
$$(b-1)^{k-1}\cdot \sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) - (b-1)^{k-1}\cdot [\frac{1}{\varphi(b)}\cdot \sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{5C}})] =$$
$$(b-1)^{k-1}\cdot \frac{\varphi(b)-1}{\varphi(b)}\cdot \sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) - (b-1)^{k-1}\cdot O_{\eta,C}(\frac{X}{(\log X)^{5C}}) \quad \forall\ X > S_9(\eta,C),$$

sodass nach (6.2.14), $X = b^k$ und $\#\mathcal{A} = (b-1)^k$ insbesondere

$$\begin{aligned}\sum(5) &= \frac{1}{b^{k-1}}\cdot \sum_{\substack{n<X,\, m\in\mathcal{A}\\ n\equiv m \bmod b}} \Lambda_{\mathcal{R}}(n)\\ &= \frac{1}{b^{k-1}}\cdot (b-1)^{k-1}\cdot \frac{\varphi(b)-1}{\varphi(b)}\cdot \sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) - \frac{1}{b^{k-1}}\cdot (b-1)^{k-1}\cdot O_{\eta,C}(\frac{b^k}{(\log X)^{5C}})\\ &= \frac{b(\varphi(b)-1)}{(b-1)\varphi(b)}\cdot \frac{(b-1)^k}{b^k}\cdot \sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{b}{b-1}\cdot \frac{(b-1)^k}{(\log X)^{5C}})\\ &= \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot \sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{5C}})\end{aligned}$$

für alle $X > S_9(\eta, C)$ gilt, wenn wir $\frac{b}{b-1} \ll 1$ beachten.

Damit ist die Fallunterscheidung abgeschlossen und wir haben

$$\sum(5) = \begin{cases} \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot \sum\limits_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{5C}}) & \text{, falls } ggT(a_0,b)=1\\ \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot \sum\limits_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) & \text{, falls } ggT(a_0,b)\neq 1\end{cases} \qquad \forall\ X > S_9(\eta,C),$$

gezeigt. Dies liefert in beiden Fällen nach (6.2.13)

$$\sum(3) = \sum(4) + \sum(5) = \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot \sum_{n<X}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) + O_{\eta,C}(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^{C}}) \quad \forall\ X > S_9(\eta,C)$$

und schließlich wegen $\frac{1}{X}\cdot \sum\limits_{a\in\mathcal{M}} S_{\mathcal{A}}(\frac{a}{X})S_{\mathcal{R}}(-\frac{a}{X}) = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum(i)$ mithilfe (6.2.4) sowie (6.2.6) das gewünschte Resultat.

$\square$

# 8. Allgemeine Minor Arcs

In diesem Kapitel stellen wir die wesentlichen Werkzeuge für den Beweis von Proposition 6.3 bereit.

**Lemma 8.1**:
Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sowie $\eta \in ]0,1]$, $C \in \mathbb{R}^+$, $l \in \mathbb{N}$, $l \ll \frac{1}{\eta}$ und $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^l$ gegeben. Dann gilt

$$\#\{0 \leq a < X \mid |S_\mathcal{R}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C}\} \ll C^2 \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}.$$

**Beweis**:
Wir beweisen die stärkere Aussage $\#\mathcal{D} \ll C^2 \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}$ für $\mathcal{D} = \{0 \leq a < X \mid |S_\mathcal{R}(\frac{-a}{X})| \gg \frac{X}{C}\}$.
Offenbar ist $\#\mathcal{D} = \sum\limits_{a\in\mathcal{D}} 1 \ll \sum\limits_{a\in\mathcal{D}} \frac{C^2}{X^2} \cdot |S_\mathcal{R}(\frac{-a}{X})|^2 \leq \frac{C^2}{X^2} \cdot \sum\limits_{0\leq a<X} |S_\mathcal{R}(\frac{-a}{X})|^2 = \frac{C^2}{X^2} \cdot \sum\limits_{1\leq a\leq X} |S_\mathcal{R}(\frac{-a}{X})|^2$, denn $S_\mathcal{R}(\frac{-0}{X}) = S_\mathcal{R}(\frac{-X}{X}) = \sum\limits_{n<X} \Lambda_\mathcal{R}(n)$ und für $a \in \mathcal{D}$ gilt $\frac{C^2}{X^2} \cdot |S_\mathcal{R}(\frac{-a}{X})|^2 \gg 1$. Somit kommt

$$(8.1.1) \quad \#\mathcal{D} \ll \frac{C^2}{X^2} \cdot \sum_{1\leq a\leq X} |S_\mathcal{R}(\frac{-a}{X})|^2.$$

Im Folgenden zeigen wir $\frac{1}{X} \cdot \sum\limits_{1\leq a\leq X} |S_\mathcal{R}(\frac{-a}{X})|^2 \ll \sum\limits_{1\leq n\leq X} \Lambda_\mathcal{R}(n)^2$ und verwenden dazu die

Besselsche Ungleichung: Ist H ein Hilbertraum (d.h. ein vollständiger VR mit Skalarprodukt) und $S \subseteq H$ ein Orthonormalsystem, so gilt $\sum\limits_{\vec{s}\in S} |\langle \vec{w}, \vec{s} \rangle|^2 \leq \|\vec{w}\|^2 \;\; \forall \;\vec{w} \in H$, wobei $\langle\; ; \;\rangle$ ein Skalarprodukt auf H und $\|\;\|$ die von $\langle\; ; \;\rangle$ induzierte Norm mit $\|\;\| = \sqrt{\langle\; ; \;\rangle}$ ist.

Offenbar ist $\mathbb{C}^X$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle\, ; \,\rangle : \mathbb{C}^X \times \mathbb{C}^X \longrightarrow \mathbb{C}$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{X} v_i \overline{w_i}$ und der induzierten Norm $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = (\sum\limits_{i=1}^{X} v_i \overline{v_i})^{1/2} = (\sum\limits_{i=1}^{X} |v_i|^2)^{1/2} \;\; \forall \; \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^X$
(beachte: $v_i, w_i \in \mathbb{C} \;\; \forall \; 1 \leq i \leq X$).

Wir setzen $\vec{w} := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_X \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^X$ und $\vec{s}(a) := \begin{pmatrix} s_1(a) \\ \vdots \\ s_X(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^X$ mit $w_i := \Lambda_\mathcal{R}(i) \in \mathbb{N}_0$

und $s_i(a) = \frac{1}{\sqrt{X}} \cdot \overline{e(i \cdot \frac{-a}{X})} = \frac{1}{\sqrt{X}} \cdot e(i \cdot \frac{a}{X}) \in \mathbb{C}$ für alle $1 \leq i \leq X$ und $1 \leq a \leq X$, was

$$\|\vec{w}\|^2 = \sum_{i=1}^{X} |w_i|^2 = \sum_{i=1}^{X} \Lambda_{\mathcal{R}}(i)^2 \quad \text{und} \quad \|\vec{s}(a)\|^2 = \sum_{i=1}^{X} |s_i(a)|^2 = \sum_{i=1}^{X} \frac{1}{X} = 1 \quad \forall\ 1 \le a \le X$$

liefert. Ferner gilt für $1 \le a_1 < a_2 \le X$ insbesondere

$$\langle \vec{s}(a_1), \vec{s}(a_2)\rangle = \sum_{i=1}^{X} s_i(a_1)\overline{s_i(a_2)} = \frac{1}{X} \cdot \sum_{i=1}^{X} e(i \cdot \frac{a_1}{X}) \cdot e(i \cdot \frac{-a_2}{X}) =$$
$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{i=1}^{X} e(i \cdot \frac{a_1 - a_2}{X}) = \frac{1}{X} \cdot \sum_{i=0}^{X-1} e(i \cdot \frac{a_1 - a_2}{X}) = \frac{1}{X} \cdot \frac{e(a_1 - a_2) - 1}{e(\frac{a_1-a_2}{X}) - 1} = 0,$$

weil $e(X \cdot \frac{a_1-a_2}{X}) = e(0 \cdot \frac{a_1-a_2}{X}) = 1$ und $e(\frac{a_1-a_2}{X}) \ne 1$ ist, denn $X \nmid (a_1 - a_2)$.

Folglich ist $S = \{\vec{s}(a) \mid 1 \le a \le X\} \subseteq \mathbb{C}^X$ ein Orthonormalsystem, womit die Voraussetzungen für die Besselsche Ungleichung erfüllt sind und damit $\sum_{\vec{s}\in S} |\langle \vec{w}, \vec{s}\rangle|^2 \le \|\vec{w}\|^2$ gilt.

Wir finden leicht $|\langle \vec{w}, \vec{s}(a)\rangle|^2 = \frac{1}{X} \cdot |\sum_{i=1}^{X} \Lambda_{\mathcal{R}}(i) \cdot e(i \cdot \frac{-a}{X})|^2$ für alle $1 \le a \le X$, woraus

$$(8.1.2) \quad \frac{1}{X} \cdot \sum_{1\le a\le X} |\sum_{i=1}^{X} \Lambda_{\mathcal{R}}(i) \cdot e(i \cdot \frac{-a}{X})|^2 = \sum_{1\le a\le X} |\langle \vec{w}, \vec{s}(a)\rangle|^2 = \sum_{\vec{s}\in S} |\langle \vec{w}, \vec{s}\rangle|^2$$
$$\le \|\vec{w}\|^2 = \sum_{i=1}^{X} \Lambda_{\mathcal{R}}(i)^2$$

folgt, weil für verschiedene $1 \le a \le X$ auch die Vektoren $\vec{s}(a) \in S$ verschieden sind. Dies liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le a\le X} |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|^2 &= \sum_{1\le a\le X} |\sum_{n<X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot e(n \cdot \frac{-a}{X})|^2 \\
&\le \sum_{1\le a\le X} (|\sum_{n\le X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot e(n \cdot \frac{-a}{X})| + |\Lambda_{\mathcal{R}}(X) \cdot e(X \cdot \frac{-a}{X})|)^2 \\
&\ll \sum_{1\le a\le X} (|\sum_{n\le X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \cdot e(n \cdot \frac{-a}{X})|^2 + |\Lambda_{\mathcal{R}}(X)|^2) \\
&= \sum_{1\le a\le X} |\sum_{i=1}^{X} \Lambda_{\mathcal{R}}(i) \cdot e(i \cdot \frac{-a}{X})|^2 + \sum_{1\le a\le X} |\Lambda_{\mathcal{R}}(X)|^2 \\
&\le X \cdot \sum_{i=1}^{X} \Lambda_{\mathcal{R}}(i)^2 + X \cdot \Lambda_{\mathcal{R}}(X)^2 \ll X \cdot \sum_{i=1}^{X} \Lambda_{\mathcal{R}}(i)^2
\end{aligned}$$

nach der Definition von $S_{\mathcal{R}}$ sowie $(x + y)^2 \le 2 \cdot (x^2 + y^2)\ \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Folglich ist

$$(8.1.3) \quad \frac{1}{X} \cdot \sum_{1\le a\le X} |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|^2 \ll \sum_{1\le n\le X} \Lambda_{\mathcal{R}}(n)^2.$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \leq X$ ergibt sich aus der Definition von $\Lambda_{\mathcal{R}}(n)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathcal{R}}(n) &\leq \sum_{n=p_1\cdot\ldots\cdot p_l} \prod_{i=1}^{l} \log p_i \leq \sum_{n=p_1\cdot\ldots\cdot p_l} (\sum_{i=1}^{l} \log p_i \cdot \frac{1}{l})^l = \sum_{n=p_1\cdot\ldots\cdot p_l} (\log(\prod_{i=1}^{l} p_i) \cdot \frac{1}{l})^l \\ &= (\frac{1}{l})^l \cdot \sum_{n=p_1\cdot\ldots\cdot p_l} (\log n)^l \leq (\frac{1}{l})^l \cdot \sum_{n=p_1\cdot\ldots\cdot p_l} (\log X)^l \leq (\frac{1}{l})^l \cdot l! \cdot (\log X)^l \leq (\log X)^l,\end{aligned}$$

indem wir die AM-GM-Ungleichung in der Form $\prod_{i=1}^{l} \log p_i \leq (\sum_{i=1}^{l} \log p_i \cdot \frac{1}{l})^l$ sowie die Eindeutigkeit der PFZ ausnutzen, was $\sum_{n=p_1\cdot\ldots\cdot p_l} 1 \leq l!$ impliziert. Also ist

$$(8.1.4) \quad \Lambda_{\mathcal{R}}(n) \leq (\log X)^l \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \leq X.$$

Damit ist auch $\Lambda_{\mathcal{R}}(n)^2 \leq (\log X)^{2l}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \leq X$, sodass nach (8.1.3) insbesondere

$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{1\leq a\leq X} |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|^2 \ll X \cdot (\log X)^{2l} = X \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}$$

gilt, da $l \ll \frac{1}{\eta}$ ist. Setzen wir dies in (8.1.1) ein, erhalten wir das gewünschte Resultat.

$\square$

**Lemma 8.2**:

Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sowie $\eta \in\ ]0,1]$, $l \in \mathbb{N}$, $l \ll \frac{1}{\eta}$ und $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^l$ gegeben. Wir definieren $\mathcal{E} := \{0 \leq a < X \,|\, F_X(\frac{a}{X}) \geq \frac{1}{X^{23/80}}\}$. Dann gilt mit dem in Kap. 3 erklärten $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ insbesondere

(i) $\#\mathcal{E} \ll X^{23/40-\epsilon}$,

(ii) $\sum_{a\in\mathcal{E}} F_X(\frac{a}{X}) \ll X^{23/80-\epsilon}$,

(iii) $\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0\leq a<X \\ a\notin\mathcal{E}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_\eta \frac{1}{X^\epsilon}$.

Aus technischen Gründen schließen wir die 0 in die Definition von $\mathcal{E}$ mit ein, was in [1, S.21] nicht geschieht. Die Beweise von Lemma 8.2 und von weiteren Sätzen, die obige Definition von $\mathcal{E}$ mit der 0 enthalten, ändern sich dadurch im Vergleich zu [1] nur unwesentlich.

**Beweis**:

Nachweis zu (i) und (ii): Aus Lemma 4.4 (i) und (iii) folgt

$$\#\{0 \leq a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \geq c_1 \cdot \frac{1}{B}\} \ll B^{235/154} \cdot X^{59/433} \quad \wedge \sum_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^{235/154} \ll X^{59/433}$$

für $B \geq 1$ mit einer beliebigen Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}^+$. Wählen wir darin $c_1 = 1$ und $B = X^{23/80}$, so erhalten wir

$$\#\mathcal{E} = \#\{0 \leq a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \geq \frac{1}{X^{23/80}}\} \ll (X^{23/80})^{235/154} \cdot X^{59/433} < X^{23/40-\epsilon},$$

denn $\frac{23}{80} \cdot \frac{235}{154} + \frac{59}{433} < \frac{23}{40} - \epsilon$, also die Gültigkeit von (i). Ferner gilt für $a \in \mathcal{E}$ insbesondere $X^{23/80} \cdot F_X(\frac{a}{X}) \geq 1$ und daher $(X^{23/80} \cdot F_X(\frac{a}{X}))^{235/154} \geq X^{23/80} \cdot F_X(\frac{a}{X}) \geq 1$, was

$$\sum_{a \in \mathcal{E}} X^{23/80} \cdot F_X(\frac{a}{X}) \leq \sum_{a \in \mathcal{E}} (X^{23/80} \cdot F_X(\frac{a}{X}))^{235/154} \leq (X^{23/80})^{235/154} \cdot \sum_{0 \leq a < X} F_X(\frac{a}{X})^{235/154}$$
$$\ll (X^{23/80})^{235/154} \cdot X^{59/433} < X^{23/40-\epsilon}$$

liefert. Daher gilt $\sum_{a \in \mathcal{E}} F_X(\frac{a}{X}) \ll \frac{X^{23/40-\epsilon}}{X^{23/80}} = X^{23/80-\epsilon}$ und folglich (ii).

Nachweis zu (iii): Für $X = 1$ verschwindet die linke Seite in (iii) nach Definition von $S_{\mathcal{R}}$ auf S.65, womit (iii) erfüllt ist. Also darf $X > 1$ bzw. $k \in \mathbb{N}$ angenommen werden.
Aus $a \notin \mathcal{E}$ und $0 \leq a < X$ folgt $0 \leq F_X(\frac{a}{X}) < \frac{1}{X^{23/80}}$ und daraus

$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X, \\ a \notin \mathcal{E},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| < 1}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \leq \frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X, \\ a \notin \mathcal{E},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| < 1}} |F_X(\frac{a}{X})| \leq$$
$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X \\ a \notin \mathcal{E}}} \frac{1}{X^{23/80}} \leq \frac{1}{X} \cdot X \cdot \frac{1}{X^{23/80}} = \frac{1}{X^{23/80}} < \frac{1}{X^{\epsilon}}.$$

Somit gilt

$$(8.2.1) \quad \frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X \\ a \notin \mathcal{E}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \leq \frac{1}{X^{\epsilon}} + \frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X, \\ a \notin \mathcal{E},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \geq 1}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|.$$

Aus dem Beweis von Proposition 6.2 Kap. II (vgl. S.143) entnehmen wir $|S_{\mathcal{R}}(\theta)| \ll_\eta X^{1+(l-1)\delta^2}$ $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ mit $l \ll \frac{1}{\eta}$ und $\delta = (\log(\log X))^{-1}$. Sei $z \in \mathbb{R}^+$ die Konstante in $l \ll \frac{1}{\eta}$, also $l \leq z \cdot \frac{1}{\eta}$.

Wir wählen die Konstante $\gamma > 0$ fest und verfügen erst später darüber. Wegen $\frac{1}{(\log(\log X))^2} \longrightarrow 0$ für $X \longrightarrow \infty$ erhalten wir $z \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\log X}{\log(\log X)^2} \leq k_0 + \gamma \cdot \log X$ mit einer geeigneten Konstanten $k_0 = k_0(\eta, \gamma) \in \mathbb{R}^+$. Im Übrigen gilt dies auch bei Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1, denn dann ist $\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta(X)}$ konstant gegenüber $(\log(\log X))^2$ für $X \longrightarrow \infty$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} X^{(l-1)\delta^2} &\leq X^{z \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \delta^2} = \exp(z \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\log X}{\log(\log X)^2}) \leq \exp(k_0 + \gamma \cdot \log X) \\ &\ll_{\eta,\gamma} \exp(\gamma \cdot \log X) = X^{\gamma}. \end{aligned}$$

Folglich ist $|S_{\mathcal{R}}(\theta)| \ll_{\eta,\gamma} X^{1+\gamma}$ bzw. $|S_{\mathcal{R}}(\theta)| \leq k_1 \cdot X^{1+\gamma} \ \ \forall \ \theta \in \mathbb{R}$ mit $k_1 = k_1(\eta, \gamma) \in \mathbb{R}^+$. Verwenden wir speziell $|S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \leq k_1 \cdot X^{1+\gamma} \ \ \forall \ a \in \mathbb{Z}$, so kommt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X,\, a \notin \mathcal{E}, \\ |F_X(\frac{a}{X})| < \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \geq 1}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \leq \\ &\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X,\, a \notin \mathcal{E}, \\ |F_X(\frac{a}{X})| < \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \geq 1}} \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \cdot k_1 \cdot X^{1+\gamma} \leq \frac{1}{X} \cdot \sum_{0 \leq a < X} k_1 \cdot \frac{1}{X^{\epsilon}} \ll_{\eta,\gamma} \frac{1}{X^{\epsilon}}, \end{aligned}$$

was nach (8.2.1) und $F_X = |F_X|$ die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} (8.2.2) \quad &\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X \\ a \notin \mathcal{E}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \leq \\ &\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X,\, a \notin \mathcal{E}, \\ F_X(\frac{a}{X}) \geq \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \geq 1}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| + O_{\eta,\gamma}(\frac{1}{X^{\epsilon}}) \end{aligned}$$

ergibt. Wir definieren

$$\Phi := \{0 \leq a < X \mid a \notin \mathcal{E} \ \wedge \ F_X(\frac{a}{X}) \geq \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \ \wedge \ |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \geq 1\}$$

und zeigen im Folgenden $\frac{1}{X} \cdot \sum_{a \in \Phi} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_{\eta} \frac{1}{X^{\epsilon}}$. Nach Definition von $\Phi$ gilt

$$(8.2.3) \quad 1 \leq |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \leq k_1 \cdot X^{1+\gamma} \quad \forall \ a \in \Phi.$$

Es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, $r \ll_{\eta,\gamma} \log X$ mit $2^r \leq k_1 \cdot X^{1+\gamma} < 2^{r+1}$ (beachte: $k_1 = k_1(\eta, \gamma)$, $\log X \geq 1$). Wir setzen $C_j := \frac{X}{2^j}$ für $0 \leq j \leq r$, sodass $X \geq C_j = \frac{X}{2^j} \geq \frac{X}{2^r} \geq \frac{X}{k_1 \cdot X^{1+\gamma}} = \frac{1}{k_1} \cdot X^{-\gamma}$ für alle $0 \leq j \leq r$ gilt. Ferner definieren wir $I_j := [\frac{X}{C_j}, 2 \cdot \frac{X}{C_j}[ = [2^j, 2^{j+1}[ \ \ \forall \ 0 \leq j \leq r$, sodass die Intervalle $I_j$ paarweise disjunkt sind und $\dot{\bigcup}_{0 \leq j \leq r} I_j = [1, 2^{r+1}[ \supseteq [1, k_1 \cdot X^{1+\gamma}]$ gilt.

Nach (8.2.3) ist damit jeder Wert $|S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|$ für $a \in \Phi$ in genau einem der Intervalle $I_j$ mit $0 \leq j \leq r$ enthalten. Setzen wir

$$\Phi_j := \{0 \leq a < X \mid a \notin \mathcal{E} \ \wedge \ F_X(\frac{a}{X}) \geq \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \ \wedge \ |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \in I_j\} \subseteq \Phi \quad \forall\ 0 \leq j \leq r,$$

so sind folglich die Mengen $\Phi_j$ paarweise disjunkt und es gilt $\Phi = \dot{\bigcup\limits_{0\leq j\leq r}} \Phi_j$. Dies liefert

$$(8.2.4) \quad \frac{1}{X} \cdot \sum_{a\in\Phi} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| = \frac{1}{X} \cdot \sum_{j=0}^{r} \sum_{a\in\Phi_j} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|.$$

Für fixiertes $0 \leq j \leq r$ berechnen wir $\sum\limits_{a\in\Phi_j} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|$. Nach Definition von $\Phi_j$ gilt

$$(8.2.5) \quad \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \leq F_X(\frac{a}{X}) < \frac{1}{X^{23/80}} \quad \forall\ a \in \Phi_j,$$

denn für $a \in \Phi_j$ ist $a \notin \mathcal{E}$ und $0 \leq a < X$, also $F_X(\frac{a}{X}) < \frac{1}{X^{23/80}}$. Es gibt ein $t \in \mathbb{N}_0$, $t \ll_\gamma \log X$ mit $2^t \cdot \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \leq \frac{1}{X^{23/80}} < 2^{t+1} \cdot \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}}$ und wir setzen $B_i := X^{1+\gamma+\epsilon} \cdot \frac{1}{2^i}$ für $0 \leq i \leq t$, sodass $\frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} = \frac{1}{B_0} \leq \frac{1}{B_i} \leq \frac{1}{B_t} = \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \cdot 2^t \leq \frac{1}{X^{23/80}}$ bzw. $X^{23/80} \leq B_i \leq X^{1+\gamma+\epsilon}$ für alle $0 \leq i \leq t$ ist. Weiter definieren wir $R_i := [\frac{1}{B_i}, 2 \cdot \frac{1}{B_i}[ = [\frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \cdot 2^i, \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \cdot 2^{i+1}[ \ \ \forall\ 0 \leq i \leq t$, sodass auch die Intervalle $R_i$ paarweise disjunkt sind und $\dot{\bigcup\limits_{0\leq i\leq t}} R_i = [\frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}}, \frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}} \cdot 2^{t+1}[ \supseteq [\frac{1}{X^{1+\gamma+\epsilon}}, \frac{1}{X^{23/80}}[$ ist.

Nach (8.2.5) ist damit jeder Wert $F_X(\frac{a}{X})$ für $a \in \Phi_j$ in genau einem der Intervalle $R_i$ mit $0 \leq i \leq t$ enthalten. Setzen wir

$$\Phi_{j,i} := \{0 \leq a < X \mid a \notin \mathcal{E} \ \wedge \ F_X(\frac{a}{X}) \in R_i \ \wedge \ |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \in I_j\} \subseteq \Phi_j \quad \forall\ 0 \leq i \leq t,$$

so sind folglich die Mengen $\Phi_{j,i}$ paarweise disjunkt und es gilt $\Phi_j = \dot{\bigcup\limits_{0\leq i\leq t}} \Phi_{j,i}$. Dies liefert

$$(8.2.6) \quad \sum_{a\in\Phi_j} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| = \sum_{i=0}^{t} \sum_{a\in\Phi_{j,i}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \quad \forall\ 0 \leq j \leq r.$$

Aus (8.2.4) und (8.2.6) folgt wegen $r \ll_{\eta,\gamma} \log X$, $t \ll_\gamma \log X$ und $\log X \geq 1$ insbesondere

$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{a\in\Phi} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| = \frac{1}{X} \cdot \sum_{j=0}^{r} \sum_{a\in\Phi_j} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| =$$
$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{t} \sum_{a\in\Phi_{j,i}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_{\eta,\gamma} \frac{(\log X)^2}{X} \cdot \sup_{\Phi_{i,j}} \sum_{a\in\Phi_{i,j}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|.$$

Im Folgenden identifizieren wir mit $F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B_i}$ die Ungleichung $\frac{1}{B_i} \leq F_X(\frac{a}{X}) < 2 \cdot \frac{1}{B_i}$ bzw. die Aussage $F_X(\frac{a}{X}) \in R_i$ für $0 \leq i \leq t$ und $|S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C_j}$ bedeutet $\frac{X}{C_j} \leq |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| < 2 \cdot \frac{X}{C_j}$ bzw. $|S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \in I_j$ für $0 \leq j \leq r$, sodass

$$\Phi_{j,i} = \{0 \leq a < X \mid a \notin \mathcal{E} \ \wedge \ F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B_i} \ \wedge \ |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C_j}\} \quad \forall\ 0 \leq i \leq t,\ 0 \leq j \leq r$$

ist. Wegen $\frac{1}{k_1} \cdot X^{-\gamma} \leq C_j \leq X \ \ \forall\ 0 \leq j \leq r$ und $X^{23/80} \leq B_i \leq X^{1+\gamma+\epsilon} \ \ \forall\ 0 \leq i \leq t$ gilt also

$$\sup_{\Phi_{i,j}} \sum_{a\in\Phi_{i,j}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| = \sup_{B_i,\, C_j} \sum_{\substack{0\leq a<X,\, a\notin\mathcal{E} \\ F_X(\frac{a}{X})\asymp\frac{1}{B_i},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|\asymp\frac{X}{C_j}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \leq$$
$$\sup_{\substack{B\geq X^{23/80} \\ X\geq C\geq \frac{1}{k_1}\cdot X^{-\gamma}}} \sum_{\substack{0\leq a<X \\ F_X(\frac{a}{X})\asymp\frac{1}{B},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|\asymp\frac{X}{C}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|,$$

was eingesetzt in die vorletzte Abschätzung die Gültigkeit von

$$(8.2.7) \quad \frac{1}{X} \cdot \sum_{a\in\Phi} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_{\eta,\gamma}$$
$$\frac{(\log X)^2}{X} \cdot \sup_{\substack{B\geq X^{23/80} \\ X\geq C\geq \frac{1}{k_1}\cdot X^{-\gamma}}} \sum_{\substack{0\leq a<X \\ F_X(\frac{a}{X})\asymp\frac{1}{B},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|\asymp\frac{X}{C}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|$$

liefert. Wir halten $B$ sowie $C$ mit $B \geq X^{23/80} \geq 1$ und $X \geq C \geq \frac{1}{k_1} \cdot X^{-\gamma}$ fest. Dann gilt

$$\sum_{\substack{0\leq a<X \\ F_X(\frac{a}{X})\asymp\frac{1}{B},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|\asymp\frac{X}{C}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll \frac{X}{BC} \cdot \sum_{\substack{0\leq a<X \\ F_X(\frac{a}{X})\asymp\frac{1}{B},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})|\asymp\frac{X}{C}}} 1 =$$
$$\frac{X}{BC} \cdot \#\{0 \leq a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B} \ \wedge \ |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C}\}.$$

Aus Lemma 4.4 (ii) bzw. Lemma 8.1 folgt

$$\#\{0 \leq a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B}\} \ll B^{235/154} \cdot X^{59/433} \qquad \text{bzw.}$$
$$\#\{0 \leq a < X \mid |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C}\} \ll C^2 \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})},$$

sodass insbesondere

$$\#\{0 \leq a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B} \;\wedge\; |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C}\} \ll$$
$$\min\{B^{235/154} \cdot X^{59/433},\ C^2 \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})}\} \leq (C^2 \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})})^{1/2} \cdot (B^{235/154} \cdot X^{59/433})^{1/2} =$$
$$C \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})} \cdot B^{235/308} \cdot X^{59/866}$$

gilt. Daraus erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{\substack{0 \leq a < X \\ F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll$$
$$\frac{X}{BC} \cdot \#\{0 \leq a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B} \;\wedge\; |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C}\} \ll$$
$$\frac{X}{BC} \cdot C \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})} \cdot B^{235/308} \cdot X^{59/866} = X \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})} \cdot \frac{X^{59/866}}{B^{73/308}}.$$

Wegen $B \geq X^{23/80}$ ist $\frac{X^{59/866}}{B^{73/308}} \leq \frac{X^{59/866}}{(X^{23/80})^{73/308}} = X^{59/866 - 23/80 \cdot 73/308} \leq X^{-2\epsilon}$, was insgesamt

$$\sum_{\substack{0 \leq a < X \\ F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll X \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})} \cdot X^{-2\epsilon}$$

für alle $B$ sowie $C$ mit $B \geq X^{23/80}$ und $X \geq C \geq \frac{1}{k_1} \cdot X^{-\gamma}$ impliziert. Nach (8.2.7) kommt

$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{a \in \Phi} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_{\eta,\gamma}$$
$$\frac{(\log X)^2}{X} \cdot \sup_{\substack{B \geq X^{23/80} \\ X \geq C \geq \frac{1}{k_1} \cdot X^{-\gamma}}} \sum_{\substack{0 \leq a < X \\ F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B},\, |S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \asymp \frac{X}{C}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll$$
$$\frac{(\log X)^2}{X} \cdot X \cdot (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})} \cdot X^{-2\epsilon} = (\log X)^{O(\frac{1}{\eta})} \cdot X^{-2\epsilon} \ll_\eta X^{-\epsilon},$$

indem wir $O(\frac{1}{\eta}) + 2 = O(\frac{1}{\eta})$ sowie $(\log X)^{O(\frac{1}{\eta})} \ll_\eta X^\epsilon$ gebrauchen (beachte: $\eta \in ]0,1]$).
Daher ist $\frac{1}{X} \cdot \sum_{a \in \Phi} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_{\eta,\gamma} X^{-\epsilon}$. Legen wir nun $\gamma := 10^{-6}$ fest, so erhalten wir

$\frac{1}{X} \cdot \sum_{a \in \Phi} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_\eta X^{-\epsilon}$, was nach Definition von $\Phi$ sowie (8.2.2) insgesamt

$$\frac{1}{X} \cdot \sum_{\substack{0 \leq a < X \\ a \notin \mathcal{E}}} |F_X(\frac{a}{X}) S_{\mathcal{R}}(\frac{-a}{X})| \ll_\eta \frac{1}{X^\epsilon}$$

und damit (iii) liefert.

$\square$

# 9. Spezielle Minor-Arcs

In diesem Kapitel leiten wir Lemma 9.1 her, welches wir im Nachweis von Proposition 6.4 benötigen. Um den Beitrag gewisser Teilsummen, die in Lemma 9.1 eine Rolle spielen, zu kontrollieren, bedarf es ferner einer Gitter- und einer Geradenbetrachtung, welche hauptsächlich in Kap. 10 und 11 geschieht. Dazu jedoch später mehr. Ab sofort bezeichnen wir mit $\langle\ ;\ \rangle$ stets das Standardskalarprodukt und mit $\|\ \| = \sqrt{\langle\ ;\ \rangle}$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$, falls nichts anderes erwähnt wird. In diesem Kapitel verwenden wir jedoch auch $\|\ \|$ für den Abstand einer reellen Zahl zur nächsten ganzen Zahl, wobei aus dem Zusammenhang klar werden sollte, was mit $\|\ \|$ gemeint ist. Ferner setzen wir $\frac{1}{0} := +\infty$.

Im Nachweis zu Lemma 9.1 benötigen wir die folgenden Hilfssätze, deren Beweise nur kurz skizziert werden. Insbesondere *HS2* wird schon aus einer geometrischen Überlegung plausibel.

*HS1 Lemma 9.1*:

Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Für $1 \leq N \ll X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $|\sum_{m \ll \frac{X}{N}} e(m\alpha)| \ll \min\{\frac{X}{N}, \|\alpha\|^{-1}\}$.

*Beweis*:

Offenbar ist $|\sum_{m \ll \frac{X}{N}} e(m\alpha)| \leq \sum_{m \ll \frac{X}{N}} 1 \ll \frac{X}{N}$. Aus einer einfachen Kreissehnenbetrachtung am komplexen Einheitskreis erhalten wir $|e(\alpha) - 1| \asymp \|\alpha\|$, was $|\sum_{m \ll \frac{X}{N}} e(m\alpha)| \ll \frac{1}{|e(\alpha)-1|} \ll \|\alpha\|^{-1}$ nach der geometrischen Summenformel und damit den zweiten Teil der Aussage liefert.

$\square$

*HS2 Lemma 9.1*:

Gegeben seien $N, \delta \in \mathbb{R}^+$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Für beliebige Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta \ \wedge \ \|\vec{n}\| \leq c_1 N\} \asymp \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta \ \wedge \ \|\vec{n}\| \leq c_2 N\},$$

wobei die Konstanten in $\asymp$ nur von $c_1$ und $c_2$ abhängen.

*Beweis*: Auf den Nachweis dieses Lemmas wird verzichtet.

**Lemma 9.1**:

Sei $N \in [X^{9/25}, X^{17/40}]$, $1 \le M < \frac{X}{N}$ sowie $1 \le Q \le X^{1/2}$, $E = 0$ oder $1 \le E \le \frac{X^{1/2}}{Q}$ gegeben. Ferner sei $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \mathcal{F}_{\mathcal{D}}(Q, E)$ wie im Beweis von Proposition 6.4 erklärt (vgl. S.68) und

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(Q,E) := \{0 \le a < X \mid \exists\, d \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ ggT(d,q) = 1,\ Q \le q < 2Q :$$
$$|\frac{a}{X} - \frac{d}{q}| \in \begin{cases} [0, \frac{1}{X}[ & \text{, falls } E = 0 \\ [\frac{E}{X}, \frac{2E}{X}[ & \text{, sonst} \end{cases}\},$$

sodass insbesondere $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{F}$ ist. Weiter seien $\alpha_n, \beta_m, \gamma_a \in \mathbb{C}$ Folgen komplexer Zahlen mit $|\alpha_n|, |\beta_m|, |\gamma_a| \ll 1$ für alle Indizes. Dann gilt

$$|\sum_{\substack{a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{E} \\ a \notin \mathcal{M}}} \sum_{\substack{n \asymp N \\ m \asymp M}} F_X(\frac{a}{X}) \cdot \alpha_n \beta_m \gamma_a \cdot e(\frac{-anm}{X})| \ll \frac{X \cdot (\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/200}}.$$

**Beweis**:

Im Exponenten des Nenners muss $\epsilon/200$ anstatt $\epsilon/100$ [1, S.22] stehen. Wir übernehmen die grundsätzliche Idee im Nachweis zu Lemma 9.1, d.h. zunächst das Vorgehen in [1, S.24] beginnend bei „We Split $\mathcal{E}$..." bis [1, S.25 Z.3], wobei die Summation korrekterweise über $a \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{E}'$, $a \notin \mathcal{M}$ anstatt nur über $a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}'$ erfolgen muss. Bei diesen Abschätzungen benötigen wir auch *HS1* und es gilt $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(B) = \{0 \le a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B}\} \subseteq \mathcal{E}$. Ähnlich zu [1, S.25 Z.1-3] genügt es,

$$\sum_{\substack{a_1, a_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{E}' \\ a_1,\, a_2 \notin \mathcal{M}}} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \sum_{n_1, n_2 \asymp N} \min\{\frac{X}{N}\, ,\, \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\|^{-1}\} \ll \frac{NX \cdot (\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}}$$

zu zeigen, wobei wir hier bemerken, dass $\epsilon/100$ im Exponenten des Nenners gerade deswegen passend ist, um nach Wurzelziehen den Exponenten $\epsilon/200$ zu erhalten. Folglich reicht es aus,

$$(*)_1 \quad \sum_{a_1, a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}'} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \sum_{|n_1|, |n_2| \ll N} \min\{\frac{X}{N}\, ,\, \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\|^{-1}\} \ll \frac{NX \cdot (\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}}$$

für alle $1 \le B \ll X^{23/80}$ und $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(B) = \{0 \le a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B}\} \subseteq \mathcal{E}$ nachzuweisen, denn die linke Seite der ersten Abschätzung ist kleiner gleich der linken Seite von $(*)_1$, weil die Summanden in beiden Summen nicht-negativ sind und $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{F}$ gilt.

Folgend sei also $1 \le B \ll X^{23/80}$ und damit $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(B)$ fixiert. Wir wählen $X$ hinreichend groß, sodass $\frac{X}{N} \ge \frac{X}{X^{17/40}} = X^{23/40} \ge 2$ ($\Leftarrow N \in [X^{9/25}, X^{17/40}]$) und $\log X \ge 1$ ist.

Zunächst seien auch $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ fest gewählt.

Dann ist $2 \leq m(n_1, n_2) := \min\{\frac{X}{N}, \|\frac{n_1a_1-n_2a_2}{X}\|^{-1}\} \leq \frac{X}{N} \ \forall \ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, was

$$N^2 \ll \sum_{|n_1|,|n_2| \ll N} 2 \leq \sum_{|n_1|,|n_2| \ll N} \min\{\frac{X}{N}\ ,\ \|\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X}\|^{-1}\} \leq \frac{X}{N} \cdot \sum_{|n_1|,|n_2| \ll N} 1 \ll \frac{X}{N} \cdot N^2$$

liefert. Also gilt auch $c_1 \cdot N^2 \leq \sum\limits_{|n_1|,|n_2| \ll N} \min\{\frac{X}{N}\ ,\ \|\frac{n_1a_1-n_2a_2}{X}\|^{-1}\} \leq c_2 \cdot \frac{X}{N} \cdot N^2$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, die nicht von $a_1$ oder $a_2$ abhängen. Wegen $N \in [X^{9/25}, X^{17/40}]$ existiert insbesondere ein $m \in \mathbb{N}_0$, $m \ll \log X$ mit $2^m \leq \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{X}{N} < 2^{m+1}$ und wir setzen $K_i := 2^i \cdot c_1$ für $i = 0, ..., m$, wobei $K_0 = c_1$ und $c_2 \cdot \frac{X}{N} < 2^{m+1} \cdot c_1 = 2 \cdot K_m$ sowie $1 \ll K_i \ll \frac{X}{N}$ für alle $0 \leq i \leq m$ gilt. Folglich gibt es (genau) ein $0 \leq i \leq m$ mit

$$K_i \cdot N^2 \leq \sum_{|n_1|,|n_2| \ll N} \min\{\frac{X}{N}\ ,\ \|\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X}\|^{-1}\} := \sum(a_1, a_2) < 2 \cdot K_i \cdot N^2,$$

denn die mittlere Summe liegt im Intervall $[K_0 \cdot N^2, 2 \cdot K_m \cdot N^2[ = \dot{\bigcup\limits_{0 \leq i \leq m}} [K_i \cdot N^2, 2 \cdot K_i \cdot N^2[$. Daraus folgt

$$\sum_{a_1,a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}'} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \sum_{|n_1|,|n_2| \ll N} \min\{\frac{X}{N}\ ,\ \|\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X}\|^{-1}\} =$$
$$\sum_{a_1,a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}'} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \sum(a_1, a_2) \leq$$
$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{a_1,a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}' \\ K_i \cdot N^2 \leq \sum(a_1,a_2) < 2 \cdot K_i \cdot N^2}} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \sum(a_1, a_2) \ll$$
$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{\substack{a_1,a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}' \\ K_i \cdot N^2 \leq \sum(a_1,a_2) \leq 2 \cdot K_i \cdot N^2}} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \cdot K_i \cdot N^2 = \sum_{i=0}^{m} \sum_{(a_1,a_2) \in G(K_i)} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \cdot K_i \cdot N^2,$$

indem wir $G(K) := \{(a_1, a_2) \,|\, a_1, a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}' \wedge K \cdot N^2 \leq \sum(a_1, a_2) \leq 2 \cdot K \cdot N^2\}$ für $1 \ll K \ll \frac{X}{N}$ setzen und diese Definition im letzten Schritt für $K = K_i$ benutzen $(i = 0, ..., m)$.

Angenommen es gilt

$$(*)_2 \sum_{(a_1,a_2) \in G(K)} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \frac{X \cdot (\log X)^{O(1)}}{(Q + E)^{\epsilon/100} \cdot NK}$$

für alle $1 \ll K \ll \frac{X}{N}$. Dann ist dies insbesondere für alle $K_i$ $(i = 0, ..., m)$ erfüllt, denn $1 \ll K_i \ll \frac{X}{N} \ \forall \ 0 \leq i \leq m$, was eingesetzt in die letzte Abschätzung

$$\sum_{a_1,a_2\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}'} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \sum_{|n_1|,|n_2|\ll N} \min\{\frac{X}{N}\,,\ \|\frac{n_1a_1-n_2a_2}{X}\|^{-1}\} \ll$$
$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{(a_1,a_2)\in G(K_i)} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X})\cdot K_i\cdot N^2 \ll \sum_{i=0}^{m}\frac{X\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK_i}\cdot K_i\cdot N^2 =$$
$$\sum_{i=0}^{m}\frac{NX\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}} \ll \frac{NX\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}}$$

liefert, indem wir $m+1\ll\log X$ für $\log X\geq 1$ beachten und die 1 ins $O(1)$ absorbieren. Aus $(*)_2$ folgt also $(*)_1$, sodass der Nachweis von $(*)_2$ verbleibt. Dazu sei $1\ll K\ll\frac{X}{N}$ fixiert.

Im Fall $NK\ll X^{17/40+\epsilon/2}$ ist $(*)_2$ erfüllt, denn nach Lemma 8.2 (ii) und $\mathcal{E}'\subseteq\mathcal{E}$ erhalten wir $\sum_{a\in\mathcal{E}'}F_X(\frac{a}{X})\leq\sum_{a\in\mathcal{E}}F_X(\frac{a}{X})\ll X^{23/80-\epsilon}$ sowie $G(K)\subseteq(\mathcal{E}')^2\subseteq\mathcal{E}^2$, was

$$\sum_{(a_1,a_2)\in G(K)} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \leq (\sum_{a\in\mathcal{E}}F_X(\frac{a}{X}))^2 \ll X^{23/40-2\epsilon} = \frac{X}{X^{17/40+2\epsilon}} = \frac{X}{X^{17/40+\epsilon/2}}\cdot\frac{1}{X^{3/2\cdot\epsilon}}$$
$$\ll \frac{X}{NK}\cdot\frac{1}{X^{\epsilon}}\cdot\frac{1}{X^{\epsilon/200}} \ll \frac{X}{NK}\cdot\frac{1}{X^{\epsilon}}\cdot(\frac{1}{Q+E})^{\epsilon/100} \ll \frac{X\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK}$$

ergibt, indem wir $3/2\cdot\epsilon>\epsilon+\epsilon/200$ sowie $Q+E\ll X^{1/2}$ und $(\log X)^{O(1)}\gg\frac{1}{X^{\epsilon}}$ verwenden. Damit darf $NK\gg X^{17/40+\epsilon/2}$ und folglich $K\gg X^{\epsilon/2}$ wegen $N\ll X^{17/40}$ angenommen werden.

Zunächst sei $(a_1,a_2)\in G(K)$ fixiert. Wegen $N\in[X^{9/25},X^{17/40}]$ gibt es insbesondere ein $r\in\mathbb{N}_0$, $r\ll\log X$ mit $2^r<\frac{X}{N}\leq 2^{r+1}$ und wir definieren $\delta(j):=\frac{1}{2^j}\ \forall\ 0\leq j\leq r$, sodass $1\geq\delta(j)\geq\frac{1}{2^r}>\frac{N}{X}$ für alle $0\leq j\leq r$ ist. Für hinreichend großes $X$ gilt ferner $1<2\leq m(n_1,n_2)=\min\{\frac{X}{N}\,,\ \|\frac{n_1a_1-n_2a_2}{X}\|^{-1}\}\leq\frac{X}{N}\ \forall\ n_1,n_2\in\mathbb{Z}$ (s.o.), sodass $m(n_1,n_2)$ in genau einem der paarweise disjunkten Intervalle $]2^j,2^{j+1}]$ mit $0\leq j\leq r$ enthalten ist.
Aus $(a_1,a_2)\in G(K)$ folgt nach Definition von $G(K)$ und $m(n_1,n_2)$ (s.o.) daher insgesamt

$$K\cdot N^2\ll\sum(a_1,a_2)=\sum_{|n_1|,|n_2|\ll N}\min\{\frac{X}{N}\,,\ \|\frac{n_1a_1-n_2a_2}{X}\|^{-1}\}=\sum_{|n_1|,|n_2|\ll N}m(n_1,n_2)\leq$$
$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{\substack{|n_1|,|n_2|\ll N\\2^j<m(n_1,n_2)\leq 2^{j+1}}}m(n_1,n_2)\ll\sum_{j=0}^{r}2^j\cdot\sum_{\substack{|n_1|,|n_2|\ll N\\2^j<m(n_1,n_2)\leq 2^{j+1}}}1\ll\sum_{j=0}^{r}2^j\cdot\sum_{\substack{|n_1|,|n_2|\ll N\\2^j\leq m(n_1,n_2)}}1\ll$$
$$\sum_{j=0}^{r}2^j\cdot\sum_{\substack{|n_1|,|n_2|\ll N\\\|\frac{n_1a_1-n_2a_2}{X}\|\leq 2^{-j}}}1\ll\log X\cdot\max_{0\leq j\leq r}\frac{1}{\delta(j)}\cdot\sum_{\substack{|n_1|,|n_2|\ll N\\\|\frac{n_1a_1-n_2a_2}{X}\|\leq\delta(j)}}1,$$

indem wir $r+1 \ll \log X$ für $\log X \geq 1$ verwenden. Zusammenfassend gilt

$$(9.1.1) \quad \delta N^2 \cdot \frac{K}{\log X} \ll \sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\| \leq \delta}} 1 \quad \text{für ein } 0 \leq j \leq r \text{ bzw. } \delta = \delta(j),\ 1 \geq \delta > \frac{N}{X}.$$

Ferner liefert $(a_1, a_2) \in G(K)$ die Abschätzung

$$K \cdot N^2 \gg \sum(a_1, a_2) = \sum_{|n_1|,|n_2| \ll N} m(n_1, n_2) \geq \sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ 2^j \leq m(n_1,n_2)}} m(n_1, n_2) \geq 2^j \cdot \sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ 2^j \leq m(n_1,n_2)}} 1 \geq$$

$$2^j \cdot \sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ 2^j \leq \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\|^{-1}, \frac{X}{N}}} 1 = \frac{1}{\delta(j)} \cdot \sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ \frac{1}{\delta(j)} \leq \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\|^{-1}, \frac{X}{N}}} 1 = \frac{1}{\delta(j)} \cdot \sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\| \leq \delta(j)}} 1$$

insbesondere für jenes $0 \leq j \leq r$ bzw. $\delta = \delta(j)$ aus (9.1.1), denn die Summationsbedingung $\frac{1}{\delta(j)} \leq \frac{X}{N}$ ist wegen $1 \geq \delta(j) > \frac{N}{X}$ ohnehin erfüllt. Insgesamt haben wir

$$(9.1.2) \quad \delta N^2 \cdot \frac{K}{\log X} \ll \sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\| \leq \delta}} 1 \ll \delta N^2 \cdot K \quad \text{für ein } 1 \geq \delta = \delta(j) > \frac{N}{X}$$

bei einem gegebenem Paar $(a_1, a_2) \in G(K)$ nachgewiesen, welches wir weiterhin festhalten.

Wir wählen das $\delta = \delta(j)$ aus (9.1.2), sodass $1 \geq \delta = \delta(j) > \frac{N}{X}$ ist.

Bezeichnet $c_3 \in \mathbb{R}^+$ die Konstante in $|n_1|, |n_2| \ll N$, so gilt mit $\vec{n} := \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ einerseits

$$\sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\| \leq \delta}} 1 = \sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \leq c_3 N \\ \|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\| \leq \delta}} 1 \asymp \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X} - n_3| \leq \delta,\ |n_1|, |n_2| \leq c_3 N\} \leq$$

$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X} - n_3| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \ll N\}.$$

Dabei steht in $\asymp$ das $\ll$-Zeichen deshalb, weil aus $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\| \leq \delta$ die Existenz eines $n_3 \in \mathbb{Z}$ mit $|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X} - n_3| \leq \delta$ folgt und das $\gg$-Zeichen ergibt sich, da es für fixierte $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ höchstens drei Werte $n_3 \in \mathbb{Z}$ mit $|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X} - n_3| \leq \delta$ gibt ($\Leftarrow \delta \in [0,1]$), wobei letzteres im Fall der Existenz eines solchen $n_3 \in \mathbb{Z}$ direkt $\|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}\| \leq \delta$ impliziert. Wir können also im $\gg$-Zeichen die Konstante $\frac{1}{3}$ wählen. Nach $|n_1|, |n_2| \leq c_3 N$ sowie $|\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X} - n_3| \leq \delta$ kommt wegen $(a_1, a_2) \in G(K) \subseteq [0, X[^2$ insbesondere $|n_3| \leq \delta + |\frac{n_1 a_1 - n_2 a_2}{X}| \leq 1 + |n_1| + |n_2| \leq 1 + 2 \cdot c_3 N \ll N$, also $\|\vec{n}\| \ll N$, womit wir uns das letzte $\leq$-Zeichen erklären.

Ab sofort setzen wir $\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1/X \\ a_2/X \\ 1 \end{pmatrix}$ und erhalten nach *HS2 Lemma 9.1* daher

$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X} - n_3| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \ll N\} = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a}\rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \ll N\} \asymp$$
$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a}\rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\},$$

wobei wir im ersten Schritt $n_1$ durch $-n_1$ substituieren. Somit kommt

$$\sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ \|\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X}\| \leq \delta}} 1 \ll \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a}\rangle| \leq \delta\,, \|\vec{n}\| \leq N\}.$$

Andererseits ist

$$\sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ \|\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X}\| \leq \delta}} 1 \asymp \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X} - n_3| \leq \delta,\ |n_1|, |n_2| \leq c_3N\} \geq$$
$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X} - n_3| \leq \delta,\ |n_1|, |n_2|, |n_3| \leq c_3N\} \geq$$
$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X} - n_3| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \ll N\},$$

wenn wir die Konstante in $\|\vec{n}\| \ll N$ genügend klein in Abhängigkeit von $c_3$ wählen. Analog zu oben können wir aufgrund der Asymptotik in *HS2 Lemma 9.1* den Betrag der letzten Menge durch $\gg \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a}\rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\}$ nach unten abschätzen und erhalten insgesamt

$$\sum_{\substack{|n_1|,|n_2| \ll N \\ \|\frac{n_1a_1 - n_2a_2}{X}\| \leq \delta}} 1 \asymp \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a}\rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\}.$$

Dies in (9.1.2) eingesetzt liefert

$$\delta N^2 \cdot \frac{K}{\log X} \ll \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a}\rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\} \ll \delta N^2 \cdot K \tag{9.1.3}$$
$$\text{für ein } 1 \geq \delta = \delta(j) > \frac{N}{X}$$

bei einem gegebenem Paar $(a_1, a_2) \in G(K)$.

Bezeichnet $c_4 \in \mathbb{R}^+$ die Konstante im ersten $\ll$-Zeichen und $c_5 \in \mathbb{R}^+$ die Konstante im zweiten $\ll$-Zeichen aus (9.1.3), so gibt es für hinreichend großes $X$ mit $\log(\log X) \geq 1$ insbesondere ein $p \in \mathbb{N}_0$, $p \ll \log(\log X) \ll \log X$ mit $2^p \leq \frac{c_5 \cdot \log X}{c_4} < 2^{p+1}$, wobei $p$ hier nicht notwendigerweise eine Primzahl ist. Wir setzen $K_s^{'} := c_4 \cdot \frac{K}{\log X} \cdot 2^s$ für $s = 0, ..., p$, sodass wegen $K \gg X^{\epsilon/2} \gg \log X$ auch $1 \ll \frac{K}{\log X} \ll K_s^{'} \ll K \ll \frac{X}{N} \;\; \forall \; 0 \leq s \leq p$ gilt.

Aus $K_0^{'} = c_4 \cdot \frac{K}{\log X}$ und $2 \cdot K_p^{'} = c_4 \cdot \frac{K}{\log X} \cdot 2^{p+1} > c_5 \cdot K$ kommt

$$[c_4 \cdot \frac{K}{\log X}, c_5 \cdot K] \subseteq \dot{\bigcup_{0 \leq s \leq p}} [K_s^{'}, 2 \cdot K_s^{'}[,$$

sodass wir mit (9.1.3) auf die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} (9.1.4) \quad & \delta N^2 K^{'} \leq \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta, \; \|\vec{n}\| \leq N\} < 2 \cdot \delta N^2 K^{'} \\ & \text{für ein } 1 \geq \delta = \delta(j) > \frac{N}{X} \text{ und für ein } 1 \ll \frac{K}{\log X} \ll K^{'} = K_s^{'} \ll \frac{X}{N} \end{aligned}$$

bei gegebenem Paar $(a_1, a_2) \in G(K)$ schließen. Wir definieren

$$G(K^{'}, \delta) := \{(a_1, a_2) \in G(K) \mid \delta N^2 K^{'} \leq \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta, \; \|\vec{n}\| \leq N\} < 2 \cdot \delta N^2 K^{'}\}$$

für $1 \geq \delta > \frac{N}{X}$ und $1 \ll \frac{K}{\log X} \ll K^{'} \ll \frac{X}{N}$. Verwenden wir diese Definition für $K^{'} = K_s^{'}$ und $\delta = \delta(j)$, so kommt $G(K) \subseteq \bigcup_{\substack{0 \leq s \leq p \\ 0 \leq j \leq r}} G(K_s^{'}, \delta(j))$, denn für jedes Paar $(a_1, a_2) \in G(K)$ können wir nach (9.1.4) eine Menge $G(K_s^{'}, \delta(j))$ mit $0 \leq s \leq p$ und $0 \leq j \leq r$ finden, die dieses Paar enthält. Dies liefert

$$\sum_{(a_1,a_2) \in G(K)} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \leq \sum_{s=0}^{p} \sum_{j=0}^{r} \sum_{(a_1,a_2) \in G(K_s^{'}, \, \delta(j))} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}).$$

Angenommen es gilt

$$(*)_3 \qquad \sum_{(a_1,a_2) \in G(K^{'}, \delta)} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \frac{X \cdot (\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100} \cdot N K'}$$

für alle $1 \ll \frac{K}{\log X} \ll K^{'} \ll \frac{X}{N}$ und alle $1 \geq \delta > \frac{N}{X}$. Dann ist dies insbesondere auch für alle $K_s^{'}$ $(s = 0, ..., p)$ und alle $\delta(j)$ $(j = 0, ..., r)$ erfüllt, sodass wir nach der letzten Abschätzung

$$\sum_{(a_1,a_2)\in G(K)} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \leq \sum_{s=0}^{p}\sum_{j=0}^{r} \sum_{(a_1,a_2)\in G(K_s',\,\delta(j))} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll$$
$$\sum_{s=0}^{p}\sum_{j=0}^{r} \frac{X\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK_s'} \ll \sum_{s=0}^{p}\sum_{j=0}^{r} \frac{X\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK/\log X} \ll \frac{X\cdot(\log X)^{O(1)+3}}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK} =$$
$$\frac{X\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK}$$

erhalten, indem wir $K_s^{'} \gg \frac{K}{\log X}\ \forall\ 0\leq s\leq p$ sowie $r+1,\ p+1 \ll \log X$ für $\log X \geq 1$ verwenden und die 3 ins $O(1)$ absorbieren. Also folgt $(*)_2$ aus $(*)_3$, sodass der Nachweis von $(*)_3$ genügt.

Dazu sei $1 \ll \frac{K}{\log X} \ll K^{'} \ll \frac{X}{N}$ und $1 \geq \delta > \frac{N}{X}$ fixiert. Wir erinnern daran, dass auch die Größen $Q, E, X, N, B, K$ bereits fest vorgegeben sind, wobei $X$ hinreichend groß gewählt ist und weisen nun mithilfe Lemma 9.2 (vgl. S.184) sowie den Propositionen 9.3 (vgl. S.190) und 9.4 (vgl. S.205) die Gültigkeit von $(*)_3$ nach.

Sei $(a_1,a_2)\in G(K^{'},\delta)$. Folglich ist $\#\{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3 \mid |\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\leq\delta,\ \|\vec{n}\|\leq N\} \asymp \delta N^2 K^{'}$.
Wir sehen leicht, dass mit $\vec{t}=\vec{a}$ und $k\asymp K^{'} \gg X^{\epsilon/4}$ ($\Leftarrow K^{'} \gg \frac{K}{\log X} \gg \frac{X^{\epsilon/2}}{\log X}$) für hinreichend großes $X$ die Voraussetzungen von Lemma 9.2 erfüllt sind, d.h. insbesondere gilt dann $k\geq k_0$ mit der Konstanten $k_0\asymp 1$, sodass ein Gitter $L=L_{a_1,a_2}\subseteq\mathbb{Z}^3$ mit $dim\, L\leq 2$ und

$$\#\{\vec{n}\in L_{a_1,a_2} \mid |\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\leq\delta,\ \|\vec{n}\|\leq N\} \gg \delta N^2 K^{'} \asymp \#\{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3 \mid |\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\leq\delta,\ \|\vec{n}\|\leq N\}$$

induziert wird. Somit kommt

$$\#\{\vec{n}\in L_{a_1,a_2} \mid |\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\leq\delta,\ \|\vec{n}\|\leq N\} \asymp \#\{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3 \mid |\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\leq\delta,\ \|\vec{n}\|\leq N\} \asymp \delta N^2 K^{'},$$

denn $\ll$ gilt wegen $L_{a_1,a_2}\subseteq\mathbb{Z}^3$. Damit haben wir

(9.1.5) Es gibt ein Gitter $L=L_{a_1,a_2}\subseteq\mathbb{Z}^3$ mit $dim\, L\leq 2$ und
$$\#\{\vec{n}\in L_{a_1,a_2} \mid |\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\leq\delta,\ \|\vec{n}\|\leq N\} \asymp \delta N^2 K^{'} \quad \forall\ (a_1,a_2)\in G(K^{'},\delta)$$

gezeigt. Dies liefert die Äquivalenz

$$(*)_3 \;\Leftrightarrow \sum_{(a_1,a_2)\in G(K',\delta)} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \frac{X\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK'} \;\Leftrightarrow$$

$$\sum_{(a_1,a_2)\in G(K',\delta)} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X})\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\delta N^2K' \ll \frac{NX\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}} \;\Leftrightarrow$$

$$\sum_{(a_1,a_2)\in G(K',\delta)} \frac{1}{B^2}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\delta N^2K' \ll \frac{NX\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}} \;\Leftrightarrow$$

$$\sum_{(a_1,a_2)\in G(K',\delta)} \frac{1}{B^2}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\#\{\vec{n}\in L_{a_1,a_2}\,|\,|\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\le\delta,\ \|\vec{n}\|\le N\} \ll \frac{NX\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}} \;\Leftrightarrow$$

$$(*)_4 \quad \sum_{(a_1,a_2)\in G(K',\delta)} \#\{\vec{n}\in L_{a_1,a_2}\,|\,|\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\le\delta,\ \|\vec{n}\|\le N\} \ll \frac{NX\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}}\cdot B^2\cdot\delta,$$

denn aus $(a_1,a_2)\in G(K',\delta)\subseteq G(K)$ folgt $a_1,a_2\in\mathcal{E}'(B)$ und daraus $F_X(\frac{a_1}{X}),F_X(\frac{a_2}{X})\asymp\frac{1}{B}$.

Die linke Seite von $(*)_4$ definieren wir mit

$$\sum(G(K',\delta)) := \sum_{(a_1,a_2)\in G(K',\delta)} \#\{\vec{n}\in L_{a_1,a_2}\,|\,|\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\le\delta,\ \|\vec{n}\|\le N\}$$

und bemerken, dass durch die oben fixierten Größen die rechte Seite von $(*)_4$ sowie die Menge $G(K',\delta)$ und damit ihre Elemente $(a_1,a_2)$ fest liegen.
Der noch „freie" Parameter zum Maximieren von $\sum(G(K',\delta))$ bzw. einzelner Summanden in dieser Summe ist die Lage von Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1/X\\a_2/X\\1\end{pmatrix}$ zum Gitter $L_{a_1,a_2}$ bzw. zu der Gitterebene $span(L_{a_1,a_2})$, für $(a_1,a_2)\in G(K',\delta)$. Offensichtlich gilt

$$(9.1.6)\quad \#\{\vec{n}\in L_{a_1,a_2}\,|\,|\langle\vec{n},\vec{a}\rangle|\le\delta,\ \|\vec{n}\|\le N\}\le\#\{\vec{n}\in L_{a_1,a_2}\,|\,\|\vec{n}\|\le N\}:=S_{a_1,a_2}$$
$$\forall\ (a_1,a_2)\in G(K',\delta).$$

Zur geometrischen Veranschaulichung der nachfolgenden Idee kann bei Bedarf Skizze 1 im Beweis zu Lemma 10.1 auf S.211 verwendet werden. Darin entspricht $L(\vec{v},\vec{w})$ gerade $L_{a_1,a_2}$.

Sei $(a_1,a_2)\in G(K',\delta)$ fixiert, womit auch der Vektor $\vec{a}$ und das induzierte Gitter $L_{a_1,a_2}$ bzw. die Gitterebene $span(L_{a_1,a_2})$ fest liegt. Über die Lage zwischen $\vec{a}$ und $span(L_{a_1,a_2})$ wissen wir jedoch noch nichts. Es sei $\vec{d}_{a_1,a_2}$ die senkrechte Projektion von $\vec{a}$ auf $span(L_{a_1,a_2})$, wobei $\vec{d}_{a_1,a_2}$ auf einer Ursprungsgeraden $g \in span(L_{a_1,a_2})$ liegt und insbesondere

$$|\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| = |\langle \vec{n}, \vec{d}_{a_1,a_2} \rangle| = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \cdot |\cos \sphericalangle(\vec{n}, \vec{d}_{a_1,a_2})| = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \cdot |\cos \sphericalangle(\vec{n}, g)|$$

für $\vec{n} \in L_{a_1,a_2}$ gilt. Darin setzen wir $|\cos \sphericalangle(\vec{n}, g)| := |\cos \sphericalangle(\vec{n}, \vec{x})|$ für $\vec{x} \in g$, wobei dieser Wert für alle $\vec{x} \in g$ konstant (d.h. wohldefiniert) ist und daher nur von $\vec{n}$ und $g$ abhängt.

Der Beitrag von $(a_1, a_2) \in G(K', \delta)$ zur Summe $\sum(G(K', \delta))$, also der Wert von $\#\{\vec{n} \in L_{a_1,a_2} \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\}$, sinkt folglich monoton mit $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\|$, wenn wir den Vektor $\vec{d}_{a_1,a_2} \in g$ auf der Ursprungsgeraden $g$ entlang vergrößern und nimmt dann den maximalen Wert $S_{a_1,a_2}$ an ($\Leftarrow$ (9.1.6)), wenn $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \frac{1}{X}$ gilt, also $\vec{a}$ fast senkrecht auf der Gitterebene $span(L_{a_1,a_2})$ steht.
Aus $\|\vec{n}\| \leq N$ und $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \frac{1}{X}$ folgt nämlich $|\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| = |\langle \vec{n}, \vec{d}_{a_1,a_2} \rangle| \leq N \cdot \|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \frac{N}{X} < \delta$ für $\vec{n} \in L_{a_1,a_2}$, sodass im Fall $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \frac{1}{X}$ die Bedingung $|\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta$ in der linken Menge aus (9.1.6) ohnehin erfüllt ist und damit Gleichheit in (9.1.6) vorliegt.

Somit wird die Summe $\sum(G(K', \delta))$ maximal, wenn $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \frac{1}{X}\ \ \forall\ (a_1, a_2) \in G(K', \delta)$ angenommen wird, weil dadurch die einzelnen Summanden maximiert werden.

Wir bemerken, dass dabei nicht die Elemente von $(a_1, a_2) \in G(K', \delta)$ selbst zur Maximierung von $\sum(G(K', \delta))$ verwendet werden, denn diese sind unveränderbar, sondern nur eine Annahme über die (unbekannte) Lage zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1/X \\ a_2/X \\ 1 \end{pmatrix}$ zur Gitterebene $span(L_{a_1,a_2})$ mittels $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\|$ zur Maximierung getroffen wird. Diese Annahme ist in [1, S.26, S.30] nur oberflächlich benannt, jedoch zwingend notwendig für den Nachweis der Prop. 9.3 und 9.4.

Folglich genügt der Nachweis von $(*)_4$ bzw. aufgrund der Äquivalenz von $(*)_3$ unter der Annahme $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \frac{1}{X}\ \ \forall\ (a_1, a_2) \in G(K', \delta)$. Aus der Definition von $G(K', \delta)$ sowie (9.1.5) ergibt sich

$$\sum_{(a_1,a_2)\in G(K',\delta)} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \leq$$

$$\sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}' \\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_1(N,K',\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) + \sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}' \\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_2(N,K',\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \leq$$

$$\sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E} \\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_1(N,K',\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) + \sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathcal{E}' \\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_2(N,K',\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X})$$

wegen $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, wobei $\mathcal{B}_1(N, K', \delta)$ gemäß Proposition 9.3 und $\mathcal{B}_2(N, K', \delta)$ gemäß Proposition 9.4 definiert sind. Wegen $1 \ll \frac{K}{\log X} \ll K'$ und $NK \gg X^{17/40+\epsilon/2}$ ist auch $NK' \gg X^{17/40}$, sodass die Voraussetzungen von Proposition 9.3 erfüllt sind und daraus

$$\sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E} \\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_1(N,K',\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \frac{X\cdot(\log X)^7}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK'},$$

folgt, während Proposition 9.4 und $(Q+E)^{\epsilon/100} \ll X^{\epsilon/200}$ ($\Leftarrow Q+E \ll X^{1/2}$) die Abschätzung

$$\sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathcal{E}' \\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_2(N,K',\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \frac{X^{1-\epsilon}}{NK'} = \frac{X}{NK'}\cdot\frac{1}{X^{\epsilon/200}}\cdot\frac{1}{X^{\epsilon-\epsilon/200}} \ll$$
$$\frac{X}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK'}\cdot\frac{1}{X^{\epsilon-\epsilon/200}} \ll \frac{X\cdot\log X}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK'}$$

impliziert, wenn wir $\log X > \frac{1}{X^{\epsilon-\epsilon/200}}$ und $\epsilon - \epsilon/200 > 0$ beachten. Dies liefert insgesamt

$$\sum_{(a_1,a_2)\in G(K',\delta)} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \frac{X\cdot(\log X)^{O(1)}}{(Q+E)^{\epsilon/100}\cdot NK'}$$

und damit $(*)_3$. Folglich ist Lemma 9.1 bewiesen.

□

Es verbleibt der Nachweis der Propositionen 9.3 und 9.4 sowie von Lemma 9.2, da die entsprechenden Aussagen in den obigen Beweis einfließen. In Lemma 9.2 verwenden wir zusätzlich den folgenden Hilfssatz.

*HS1 Lemma 9.2*:
Sei $\| \ \| : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ beliebige Norm auf $\mathbb{R}^3$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Minkowski-reduzierte Basis (kurz: MR-Basis) vom Gitter $\mathbb{Z}^3$ bezüglich dieser Norm. Dann gilt

$$\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| + \|\lambda_3\vec{v}_3\| \ll \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| := S \quad \forall\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z},$$

wobei die Konstante in $\ll$ absolut ist und nicht von der gewählten Norm abhängt.

*Beweis*:
Wir verwenden die Definition einer MR-Basis in [13, S.6] in der folgenden Form :

Eine Basis $\vec{v_1}, ..., \vec{v}_3$ eines Gitters $L \subseteq \mathbb{R}^3$ der Dimension 3 heißt MR-Basis, wenn für alle $1 \leq i \leq 3$ gilt : Unter allen Vektoren $\vec{v} \in L \backslash \{\vec{0}\}$, sodass sich $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{i-1}, \vec{v}$ zu einer Basis von $L$ ergänzen lassen, ist $\vec{v}_i$ ein kürzester Vektor bezüglich der oben gewählten Norm.

Nun ist $L = \mathbb{Z}^3$ und $\vec{v}_1 \in L\backslash\{\vec{0}\}$ ein kürzester Vektor in $L\backslash\{\vec{0}\}$. Ferner ist $\vec{v}_2 \in L\backslash\{\vec{0}\}$, $\vec{v}_2 \notin span(\vec{v}_1)$ ein kürzester Vektor in $L\backslash\{\vec{0}\}$, der nicht auf der durch $\vec{v}_1$ definierten Geraden liegt. Weiter ist $\vec{v}_3 \in L\backslash\{\vec{0}\}$, $\vec{v}_3 \notin span(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ein kürzester Vektor in $L\backslash\{\vec{0}\}$, der nicht auf der durch $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannten Ebene liegt. Daraus erhalten wir

$$(1) \quad \|\vec{v}_1\| \leq \|s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + s_3\vec{v}_3\| \quad \forall\ s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z},\ (s_1, s_2, s_3) \neq (0,0,0),$$
$$(2) \quad \|\vec{v}_2\| \leq \|s_4\vec{v}_1 + s_5\vec{v}_2 + s_6\vec{v}_3\| \quad \forall\ s_4, s_5, s_6 \in \mathbb{Z},\ (s_5, s_6) \neq (0,0),$$
$$(3) \quad \|\vec{v}_3\| \leq \|s_7\vec{v}_1 + s_8\vec{v}_2 + s_9\vec{v}_3\| \quad \forall\ s_7, s_8, s_9 \in \mathbb{Z},\ s_9 \neq 0,$$

wobei wir später (3) nur mit $s_9 = \pm 1$ benutzen. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z},\ \alpha \neq 0$ gegeben. Wir definieren

$$sgn(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{, falls } x < 0 \end{cases} \quad \forall\ x \in \mathbb{R},$$

sodass $|\alpha - \beta| = ||\alpha| - |\beta||$ für $sgn(\alpha\beta) = 1$ und $|\alpha + \beta| = ||\alpha| - |\beta||$ für $sgn(\alpha\beta) = -1$ gilt. Ferner ist $|\alpha r - \beta| = |\alpha - \beta|$, falls $r = 1$ und $|\alpha r - \beta| = |-\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$, falls $r = -1$. Also existiert stets ein $r \in \{-1, 1\}$, nämlich $r = sgn(\alpha\beta)$, mit $|\alpha r - \beta| = ||\alpha| - |\beta||$. Für $r = 0$ erhalten wir $|\alpha r - \beta| = |\beta|$. Weiter können wir ein $r \in \mathbb{Z}$ finden, sodass $|\alpha r - \beta|$ gerade der betragsmäßig kleinste Rest von $\beta$ mod $|\alpha|$ ist, also $|\alpha r - \beta| \leq \frac{|\alpha|}{2}$ gilt (beachte: $\alpha \neq 0$).

Daraus folgt $|\alpha r - \beta| \leq \min\{\frac{|\alpha|}{2},\ |\beta|,\ ||\alpha| - |\beta||\}$ bei geeigneter Wahl von $r \in \mathbb{Z}$. Somit kommt

$$(4) \quad |\lambda_i s - \lambda_j| \leq \min\{\frac{|\lambda_i|}{2},\ |\lambda_j|,\ ||\lambda_i| - |\lambda_j||\} \text{ bei geeigener Wahl von } s \in \mathbb{Z}$$
$$\text{mit } 1 \leq i, j \leq 3 \text{ und } \lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{Z},\ \lambda_i \neq 0.$$

Wir zeigen zunächst $\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq 8 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\|$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$.

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ fixiert. Wir dürfen $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ annehmen, da ansonsten obige Abschätzung bereits gilt. Aus (1) und (2) folgt mit $s_3 = s_6 = 0,\ s_5 = \pm 1$ die Gültigkeit von

$$(1)' \quad \|\vec{v}_1\| \leq \|s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2\| \quad \forall\ s_1, s_2 \in \mathbb{Z},\ (s_1, s_2) \neq (0,0),$$
$$(2)' \quad \|\vec{v}_2\| \leq \|s_4\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2\| \qquad \forall\ s_4 \in \mathbb{Z}.$$

Dies liefert $\|\vec{v}_1\| \leq \|\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2\|$ und $\|\vec{v}_2\| \leq \|\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2\|$, also insbesondere $\|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\| \leq 2 \cdot \|\pm\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2\|$ und somit

$$(5) \quad \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\| \leq 2 \cdot \|\vec{v}_1 + sgn(\lambda_1\lambda_2)\vec{v}_2\|,$$
$$(6) \quad \|\vec{v}_2\| + \|\vec{v}_1\| \leq 2 \cdot \|\vec{v}_2 + sgn(\lambda_1\lambda_2)\vec{v}_1\|.$$

Nach $(1)'$ mit $s_1 = 1$ und $(2)'$ ist $\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_1 s_2\vec{v}_2\| + \|\lambda_2 s_4\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\|$, sodass wir durch Verwenden der Dreiecksungleichung der Norm insbesondere $\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq 2 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\| + |\lambda_1 s_2 - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| + |\lambda_2 s_4 - \lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\|$ erhalten, für alle $s_2, s_4 \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt mit $s_2 = 0$ und geeigneter Wahl von $s_4$ gemäß (4) bzw. mit $s_4 = 0$ und geeigneter Wahl von $s_2$ gemäß (4) (beachte: $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$):

$$(7) \quad (|\lambda_1| - \frac{|\lambda_2|}{2}) \cdot \|v_1\| \leq 2 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\|,$$
$$(8) \quad (|\lambda_2| - \frac{|\lambda_1|}{2}) \cdot \|v_2\| \leq 2 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\|.$$

Nun gilt $\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| = |\lambda_1| \cdot (\|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|) + (|\lambda_2| - |\lambda_1|) \cdot \|\vec{v}_2\|$ und wir erhalten für den zweiten Summanden nach (8) die Abschätzung

$$(|\lambda_2| - |\lambda_1|) \cdot \|\vec{v}_2\| \leq (|\lambda_2| - \frac{|\lambda_1|}{2}) \cdot \|\vec{v}_2\| \leq 2 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\|.$$

Aus (5) schließen wir für den ersten Summanden

$$|\lambda_1| \cdot (\|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|) \leq |\lambda_1| \cdot 2 \cdot \|\vec{v}_1 + sgn(\lambda_1\lambda_2)\vec{v}_2\| = 2 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_1 sgn(\lambda_1\lambda_2)\vec{v}_2\| \leq$$
$$2 \cdot (\|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\| + |\lambda_1 sgn(\lambda_1\lambda_2) - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\|) = 2 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\| + 2 \cdot ||\lambda_1| - |\lambda_2|| \cdot \|\vec{v}_2\|,$$

denn es gilt $|\lambda_1 sgn(\lambda_1\lambda_2) - \lambda_2| = ||\lambda_1| - |\lambda_2||$, weil $\lambda_1 sgn(\lambda_1\lambda_2)$ und $\lambda_2$ nach Def. von $sgn(\lambda_1\lambda_2)$ stets dasselbe Vorzeichen haben. Somit kommt insgesamt

$$(9) \quad \|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq 4 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\| + 2 \cdot ||\lambda_1| - |\lambda_2|| \cdot \|\vec{v}_2\| \quad \text{und analog dazu}$$
$$(10) \quad \|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq 4 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\| + 2 \cdot ||\lambda_2| - |\lambda_1|| \cdot \|\vec{v}_1\|,$$

indem wir in der Herleitung von (9) die Rollen von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bzw. $\lambda_1$ und $\lambda_2$ vertauschen und (7) sowie (6) verwenden.

Im Fall $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ ist $||\lambda_2| - |\lambda_1|| = |\lambda_1| - |\lambda_2|$ und wir erhalten aus (7) die Gültigkeit von $(|\lambda_1| - |\lambda_2|) \cdot \|\vec{v}_1\| \leq (|\lambda_1| - \frac{|\lambda_2|}{2}) \cdot \|\vec{v}_1\| \leq 2 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\|$ und daher nach (10) insbesondere $\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq 8 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\|$. Im Fall $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$ liefern (8) und (9) das gleiche Resultat.

Damit haben wir $\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq 8 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\| \;\; \forall \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ nachgewiesen.

Für den Beweis von $\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq 8 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_3\vec{v}_3\| \;\; \forall \;\; \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ können wir wieder $\lambda_1, \lambda_3 \neq 0$ annehmen. Setzen wir $s_2 = s_8 = 0$ und $s_9 = \pm 1$ in (1) sowie (3) ein, so erhalten wir

$$(1)'' \quad \|\vec{v}_1\| \leq \|s_1\vec{v}_1 + s_3\vec{v}_3\| \quad \forall \;\; s_1, s_3 \in \mathbb{Z}, \; (s_1, s_3) \neq (0,0),$$
$$(2)'' \quad \|\vec{v}_3\| \leq \|s_7\vec{v}_1 \pm \vec{v}_3\| \quad \forall \;\; s_7 \in \mathbb{Z},$$

woraus wir analog zu oben $\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq 8 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_3\vec{v}_3\| \;\; \forall \;\; \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ folgern.

Für den Nachweis von $\|\lambda_2\vec{v}_2\| + \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq 8 \cdot \|\lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| \;\; \forall \;\; \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ können wir ebenso $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ voraussetzen. Setzen wir $s_4 = s_7 = 0$ und $s_9 = \pm 1$ in (2) und (3) ein, so gilt

$$(1)''' \quad \|\vec{v}_2\| \leq \|s_5\vec{v}_2 + s_6\vec{v}_3\| \quad \forall \;\; s_5, s_6 \in \mathbb{Z}, \; (s_5, s_6) \neq (0,0),$$
$$(2)''' \quad \|\vec{v}_3\| \leq \|s_8\vec{v}_2 \pm \vec{v}_3\| \quad \forall \;\; s_8 \in \mathbb{Z},$$

sodass wir wieder analog zu oben $\|\lambda_2\vec{v}_2\| + \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq 8 \cdot \|\lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| \;\; \forall \;\; \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ folgern. Insgesamt erhalten wir

$$(11) \quad \|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq 8 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\| \quad \forall \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z},$$

$$(12) \quad \|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq 8 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_3\vec{v}_3\| \quad \forall \;\; \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Z},$$

$$(13) \quad \|\lambda_2\vec{v}_2\| + \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq 8 \cdot \|\lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| \quad \forall \;\; \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}.$$

Nun können wir die Abschätzung des Hilfssatzes zeigen. Dazu seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ fixiert und $S := \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\|$. Ferner dürfen wir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ annehmen, denn andernfalls erhalten wir die zu zeigende Abschätzung bereits aus (11)-(13).

Wir weisen zunächst nach, dass es stets ein $1 \leq i \leq 3$ mit $\|\lambda_i\vec{v}_i\| \ll S$ gibt.
Einsetzen von $s_9 = 1$ in (3) liefert nach der Dreiecksungleichung der Norm

$$(14) \quad \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq \|\lambda_3 s_7\vec{v}_1 + \lambda_3 s_8\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| \leq$$
$$\|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| + |\lambda_3 s_7 - \lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\| + |\lambda_3 s_8 - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \quad \forall \;\; s_7, s_8 \in \mathbb{Z}.$$

Ferner erhalten wir mit $s_5 = 1$ in (2) die Gültigkeit von

$$(15) \quad \|\lambda_2\vec{v}_2\| \leq \|\lambda_2 s_4\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_2 s_6\vec{v}_3\| \leq$$
$$\|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| + |\lambda_2 s_4 - \lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\| + |\lambda_2 s_6 - \lambda_3| \cdot \|\vec{v}_3\| \quad \forall \;\; s_4, s_6 \in \mathbb{Z}$$

und mit $s_1 = 1$ in (1) analog dazu

$$(16) \quad \|\lambda_1\vec{v}_1\| \leq \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_1 s_2\vec{v}_2 + \lambda_1 s_3\vec{v}_3\| \leq$$
$$\|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| + |\lambda_1 s_2 - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| + |\lambda_1 s_3 - \lambda_3| \cdot \|\vec{v}_3\| \quad \forall \;\; s_2, s_3 \in \mathbb{Z}.$$

Aus (1)-(2) folgt $\|\vec{v}_1\| \leq \|\vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_3\|$. Sei $\|\vec{v}_3\| \geq 1.01 \cdot \|\vec{v}_1\|$. Mit (14) gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda_3\vec{v}_3\| &\leq \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| + |\lambda_3 s_7 - \lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\| + |\lambda_3 s_8 - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \\ &\leq S + \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot \|\vec{v}_1\| + \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot \|\vec{v}_2\| \leq S + \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot \|\vec{v}_1\| + \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot \|\vec{v}_3\|\end{aligned}$$

nach (4) und geeigneter Wahl von $s_7, s_8 \in \mathbb{Z}$ (beachte: $\lambda_3 \neq 0$). Also ist $\frac{|\lambda_3|}{2} \cdot (\|\vec{v}_3\| - \|\vec{v}_1\|) \leq S$ und daher $|\lambda_3| \cdot (\|\vec{v}_3\| - \|\vec{v}_1\|) \leq 2S$. Wegen $\|\vec{v}_3\| - \|\vec{v}_1\| \geq \|\vec{v}_3\| - \frac{\|\vec{v}_3\|}{1.01} = \frac{1}{101} \cdot \|\vec{v}_3\|$ liefert dies

$\frac{1}{101} \cdot \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq |\lambda_3| \cdot (\|\vec{v}_3\| - \|\vec{v}_1\|) \leq 2S$, also $\|\lambda_3\vec{v}_3\| \ll S$. Folglich darf $\|\vec{v}_3\| < 1.01 \cdot \|\vec{v}_1\|$ angenommen werden, womit $\|\vec{v}_1\| \leq \|\vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_3\| \leq \|\vec{v}_1\| \cdot 1.01$ und insbesondere

$$(17) \quad \|\vec{v}_i\| \leq \|\vec{v}_j\| \cdot 1.01 \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq 3$$

gilt. Sei $|\lambda_3| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$, also $|\lambda_3| \geq |\lambda_1|$ und $|\lambda_3| \geq |\lambda_2|$. Wir zeigen $\|\lambda_3\vec{v}_3\| \ll S$ und unterscheiden dazu die folgenden Fälle, wobei wir in dieser Fallunterscheidung bewusst die Beziehung $\|\vec{v}_1\| \leq \|\vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_3\|$ nicht nutzen, damit wir später Analogien herstellen können.

<u>1.Fall</u>: $|\lambda_3| \geq 2.5 \cdot |\lambda_1|$

Aus (14), (17) und (4) folgt

$$\begin{aligned}
\|\lambda_3\vec{v}_3\| &\leq \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| + |\lambda_3 s_7 - \lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\| + |\lambda_3 s_8 - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \\
&\leq S + |\lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\| + \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot \|\vec{v}_2\| \leq S + \frac{|\lambda_3|}{2.5} \cdot 1.01 \cdot \|\vec{v}_3\| + \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot 1.01 \cdot \|\vec{v}_3\|
\end{aligned}$$

bei geeigneter Wahl von $s_7, s_8 \in \mathbb{Z}$ (beachte: $\lambda_3 \neq 0$). Also ist $(1 - \frac{1.01}{2} - \frac{1.01}{2.5}) \cdot |\lambda_3| \cdot \|\vec{v}_3\| \leq S$ bzw. $0.091 \cdot \|\lambda_3\vec{v}_3\| \leq S$ und damit $\|\lambda_3\vec{v}_3\| \ll S$.

<u>2.Fall</u>: $|\lambda_3| \geq 2.5 \cdot |\lambda_2|$

Analog zu Fall 1 ergibt sich $\|\lambda_3\vec{v}_3\| \ll S$, indem wir $|\lambda_3 s_7 - \lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\| \leq \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot 1.01 \cdot \|\vec{v}_3\|$ und $|\lambda_3 s_8 - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \leq |\lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \leq \frac{|\lambda_3|}{2.5} \cdot 1.01 \cdot \|\vec{v}_3\|$ bei geeigneter Wahl von $s_7, s_8 \in \mathbb{Z}$ gemäß (4) benutzen (beachte: $\lambda_3 \neq 0$) und in die Abschätzung (14) einsetzen.

<u>3.Fall</u>: $|\lambda_3| < 2.5 \cdot |\lambda_1|$ und $|\lambda_3| < 2.5 \cdot |\lambda_2|$

Sei zunächst $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$. Dann ist $|\lambda_3| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_1| \geq 0.4 \cdot |\lambda_3|$.
Wegen $|\lambda_3| - |\lambda_2| + |\lambda_2| - |\lambda_1| = |\lambda_3| - |\lambda_1| \leq |\lambda_3| - 0.4 \cdot |\lambda_3| = 0.6 \cdot |\lambda_3|$ ist mindestens einer der Werte $|\lambda_3| - |\lambda_2|$ oder $|\lambda_2| - |\lambda_1|$ kleiner gleich $0.3 \cdot |\lambda_3|$.

Für $0 \leq |\lambda_3| - |\lambda_2| \leq 0.3 \cdot |\lambda_3|$ liefern (14) und (17) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\lambda_3 \vec{v}_3\| &\leq \|\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3\| + |\lambda_3 s_7 - \lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\| + |\lambda_3 s_8 - \lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \\
&\leq S + \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot \|\vec{v}_1\| + ||\lambda_3| - |\lambda_2|| \cdot \|\vec{v}_2\| \\
&\leq S + \frac{|\lambda_3|}{2} \cdot 1.01 \cdot \|\vec{v}_3\| + 0.3 \cdot |\lambda_3| \cdot 1.01 \cdot \|\vec{v}_3\|
\end{aligned}$$

bei geeigneter Wahl von $s_7, s_8 \in \mathbb{Z}$ gemäß (4) (beachte: $\lambda_3 \neq 0$). Also ist $(1 - \frac{1.01}{2} - 1.01 \cdot 0.3) \cdot |\lambda_3| \cdot \|\vec{v}_3\| = 0.192 \cdot \|\lambda_3 \vec{v}_3\| \leq S$, was $\|\lambda_3 \vec{v}_3\| \ll S$ impliziert.

Somit darf $|\lambda_3| - |\lambda_2| > 0.3 \cdot |\lambda_3|$ und $0 \leq |\lambda_2| - |\lambda_1| \leq 0.3 \cdot |\lambda_3|$ angenommen werden. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|\lambda_2 \vec{v}_2\| &\leq \|\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3\| + |\lambda_2 s_4 - \lambda_1| \cdot \|\vec{v}_1\| + |\lambda_2 s_6 - \lambda_3| \cdot \|\vec{v}_3\| \\
&\leq S + ||\lambda_2| - |\lambda_1|| \cdot \|\vec{v}_1\| + \frac{|\lambda_2|}{2} \cdot \|\vec{v}_3\| \\
&\leq S + (|\lambda_2| - |\lambda_1|) \cdot 1.01 \cdot \|\vec{v}_2\| + \frac{|\lambda_2|}{2} \cdot 1.01 \cdot \|\vec{v}_2\|
\end{aligned}$$

nach (15), (17) und geeigneter Wahl von $s_4, s_6 \in \mathbb{Z}$ gemäß (4) (beachte: $\lambda_2 \neq 0$). Dies liefert

$$(|\lambda_2| - \frac{1.01}{2} \cdot |\lambda_2| - (|\lambda_2| - |\lambda_1|) \cdot 1.01) \cdot \|\vec{v}_2\| \leq S.$$

Wegen $|\lambda_3| - |\lambda_2| > 0.3 \cdot |\lambda_3|$ und $|\lambda_3| \geq |\lambda_2|$ ist $|\lambda_2| \leq 0.7 \cdot |\lambda_3|$ sowie $|\lambda_1| \geq 0.4 \cdot |\lambda_3| \geq 0.4 \cdot |\lambda_2|$, sodass

$$\begin{aligned}
&|\lambda_2| - \frac{1.01}{2} \cdot |\lambda_2| - (|\lambda_2| - |\lambda_1|) \cdot 1.01 = -0.01 \cdot |\lambda_2| - \frac{1.01}{2} \cdot |\lambda_2| + 1.01 \cdot |\lambda_1| = \\
&1.01 \cdot |\lambda_1| - 0.515 \cdot |\lambda_2| \geq 1.01 \cdot 0.4 \cdot |\lambda_3| - 0.515 \cdot |\lambda_2| \geq 0.4 \cdot |\lambda_3| - 0.515 \cdot 0.7 \cdot |\lambda_3| = \\
&0.0395 \cdot |\lambda_3| \geq 0.0395 \cdot |\lambda_2|
\end{aligned}$$

gilt. Dies eingesetzt impliziert $0.0395 \cdot |\lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \leq S$, also $|\lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \ll S$, woraus wir $|\lambda_3| \cdot \|\vec{v}_3\| \leq 2.5 \cdot |\lambda_2| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot 1.01 \ll S$ schließen. Analog dazu erhalten wir $\|\lambda_3 \vec{v}_3\| \ll S$, falls $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ ist, indem man in obiger Argumentation die Rollen von $\lambda_2$ und $\lambda_1$ sowie $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ vertauscht und (16) anstatt (15) verwendet.

Damit ist die Fallunterscheidung abgeschlossen und $\|\lambda_3 \vec{v}_3\| \ll S$, falls $|\lambda_3| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$.

Analog dazu erhalten wir $\|\lambda_1\vec{v}_1\| \ll S$, falls $|\lambda_1| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$ sowie $\|\lambda_2\vec{v}_2\| \ll S$, falls $|\lambda_2| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$ gilt, indem in der obigen Fallunterscheidung $\lambda_1$ und $\vec{v}_1$ bzw. $\lambda_2$ und $\vec{v}_2$ die Rollen von $\lambda_3$ und $\vec{v}_3$ einnehmen. Dabei beachten wir, dass wir in der Fallunterscheidung nur (17), jedoch bewusst nicht die Beziehung $\|\vec{v}_1\| \leq \|\vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_3\|$ verwenden, um Analogie zwischen den Fällen herzustellen. Also haben wir

$$(18) \quad \|\lambda_i\vec{v}_i\| \ll S \quad \text{für ein } 1 \leq i \leq 3$$

gezeigt. Sei zunächst $\|\lambda_1\vec{v}_1\| \ll S$. Nach (13) gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2\| + \|\lambda_3\vec{v}_3\| &\leq \|\lambda_1\vec{v}_1\| + 8 \cdot \|\lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| \leq 8 \cdot (\|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\|) \\ &\leq 8 \cdot (2 \cdot \|\lambda_1\vec{v}_1\| + \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\|) \ll S,\end{aligned}$$

indem wir die Dreiecksungleichung $\|\lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| \leq \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\| + \|\lambda_1\vec{v}_1\|$ verwenden.

Für $\|\lambda_2\vec{v}_2\| \ll S$ bzw. $\|\lambda_3\vec{v}_3\| \ll S$ erhalten wir aus (12) bzw. (11) das gleiche Resultat. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

□

Im Folgenden sei $\| \;\|$ stets die euklidische Norm und $\langle \;;\; \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, sodass insbesondere $\| \;\| = \sqrt{\langle \;;\; \rangle}$ gilt. Nun können wir Lemma 9.2 beweisen.

**Lemma 9.2** (Geometrie der Zahlen):
Sei $k_0 \in \mathbb{R}^+$ eine hinreichend große Konstante und $N, \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $N > \delta$.
Ferner sei der Vektor $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{t}\| \geq 1$ und die Menge $\mathcal{R} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{v}\| \leq N,\ |\langle \vec{v}, \vec{t} \rangle| \leq \delta\}$ gegeben, wobei $\#\mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^3 \geq \delta k N^2$ für ein $k \geq k_0$ gelte.
Dann gibt es ein Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^3$ höchstens 2. Dimension, sodass $\#\mathcal{R} \cap \Lambda \gg \delta k N^2$ ist.

**Beweis**:
Wir können zeigen, dass $\| \;\|_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\|\vec{v}\|_t^2 := \|\vec{v}\|^2 + |\langle \vec{v}, \vec{t} \rangle|^2 \cdot \frac{N^2}{\delta^2}$ für $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ eine Norm ist [1, S.22], indem wir die entsprechenden Eigenschaften der euklidischen Norm und des Standardskalarproduktes verwenden. Der Nachweis hierzu ist lediglich ein Überprüfen der Normeigenschaften. Dabei symbolisiert der Index $t$ die Abhängigkeit der Norm vom Vektor $\vec{t}$.

Aus Proposition 3.1.9 in [11, S.205] folgt auch, dass das Gitter $\mathbb{Z}^3$ bzgl. der $\| \ \|_t$-Norm (jeder beliebigen Norm) eine MR-Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ hat, also insbesondere $\mathbb{Z}^3 = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Dies liefert nach *HS1 Lemma 9.2*

$$(9.2.1) \quad \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\|_t \gg \sum_{i=1}^{3}\|\lambda_i\vec{v}_i\|_t \quad \forall\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}.$$

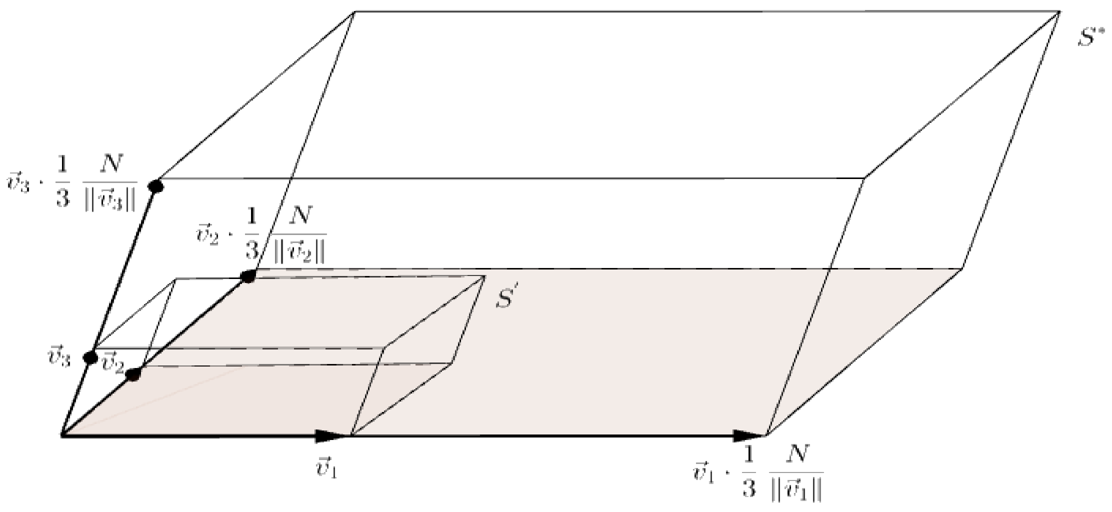
Wir zeigen zunächst, dass $vol(\mathcal{R}) \gg \prod_{i=1}^{3} \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}$ gilt (beachte: $\|\vec{v}_i\|_t \neq 0 \ \Leftarrow\ \vec{v}_i \neq \vec{0}\ \ \forall\ 1 \leq i \leq 3$).

Aus $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{v}\|_t \leq N$ folgt $N^2 \geq \|\vec{v}\|_t^2 = \|\vec{v}\|^2 + |\langle\vec{v}, \vec{t}\rangle|^2 \cdot \frac{N^2}{\delta^2}$ und damit $\|\vec{v}\| \leq N$ sowie $|\langle\vec{v}, \vec{t}\rangle| \leq \delta$, was $\vec{v} \in \mathcal{R}$ und folglich $\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{v}\|_t \leq N\} \subseteq \mathcal{R}$ impliziert.
Da die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, gilt $\mathbb{R}^3 = span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, sodass jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige Darstellung in der Form $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ besitzt. Nun liefert $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $|\lambda_i| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}\ \ \forall\ 1 \leq i \leq 3$ die Gültigkeit von $\|\vec{v}\|_t \leq \sum_{i=1}^{3}\|\lambda_i\vec{v}_i\|_t \leq \sum_{i=1}^{3}\frac{N}{3} = N$ nach der Dreiecksungleichung und insgesamt

$$(9.2.2) \quad S := \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ |\lambda_i| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}\ \ \forall\ 1 \leq i \leq 3\} \subseteq \mathcal{R}.$$

Zur geometrischen Darstellung der folgenden Idee betrachten wir das Parallelepiped

$$S^* := \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda_i \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}\ \ \forall\ 1 \leq i \leq 3\}.$$




Skizze 1: Parallelepiped $S^*$ und Fundamentalzelle $S'$

Offensichtlich gilt $vol(S) = 8 \cdot vol(S^*)$, denn $S$ setzt sich aus 8 Teilepipeden mit Volumen $vol(S^*)$ zusammen, weil es $2^3 = 8$ mögliche Vorzeichenkombination der Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_i| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t} \ \forall\ 1 \leq i \leq 3$ gibt. Dabei ist jedes dieser 8 Teilepipeden kongruent zu $S^*$.

Das Gitter $\mathbb{Z}^3$ hat die Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ und die Fundamentalzelle

$$S^{'} := \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\ \forall\ 1 \leq i \leq 3\}.$$

Nach [12, S.6] ist $det\,\mathbb{Z}^3 = vol(S^{'})$, aber auch $det\,\mathbb{Z}^3 = (det\,G)^{1/2}$, wobei $G = [\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq 3}$ die Gram-Matrix zu einer beliebigen Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ von $\mathbb{Z}^3$ ist. Wählen wir $\vec{b}_1 = \vec{e}_1,\ \vec{b}_2 = \vec{e}_2$ und $\vec{b}_3 = \vec{e}_3$, so erhalten wir $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und daraus $vol(S^{'}) = det\,\mathbb{Z}^3 = (det\,G)^{1/2} = 1$.

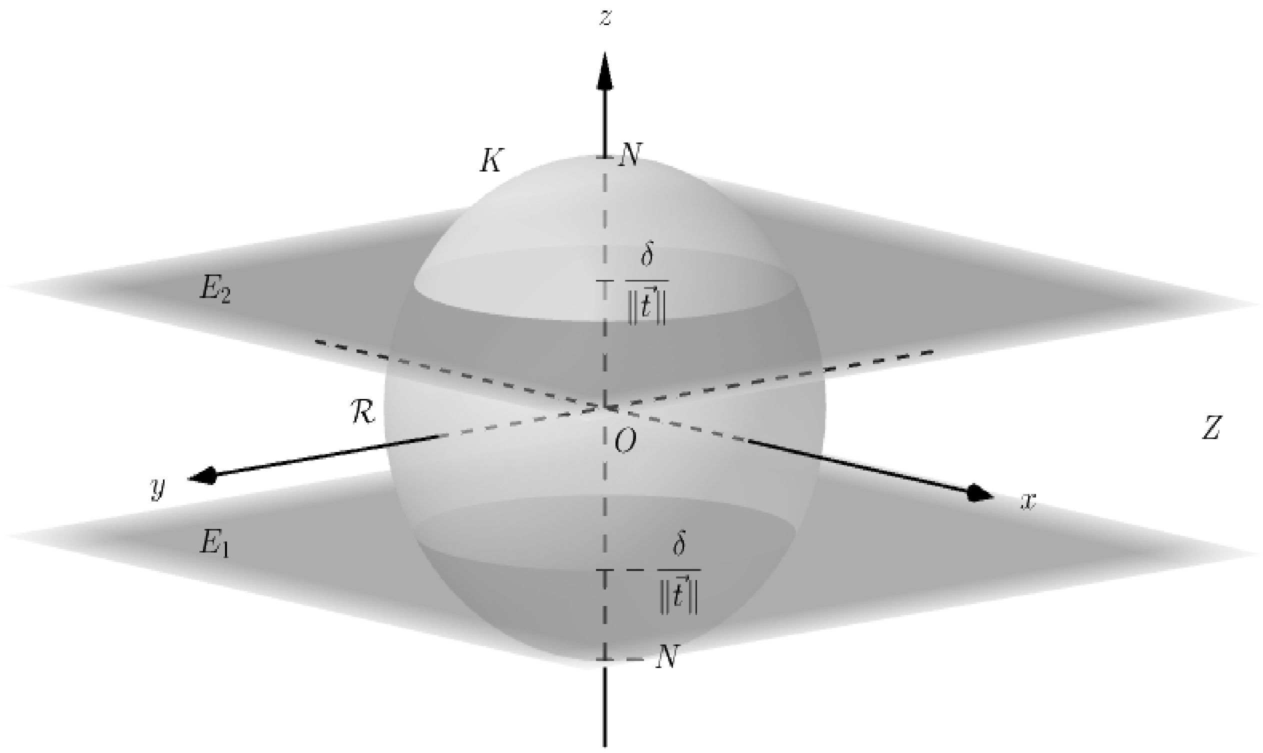
Nun ergibt sich das Parallelepiped $S^*$ aus der Fundamentalzelle $S^{'}$ durch Streckung der $S^{'}$ aufspannenden Seitenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ mit dem Faktor $\frac{1}{3} \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_1\|_t}$ bzw. $\frac{1}{3} \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_2\|_t}$ bzw. $\frac{1}{3} \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_3\|_t}$, sodass die Innenwinkel von $S^*$ und $S^{'}$ übereinstimmen und wegen $vol(S^{'}) = 1$ insbesondere

$$vol(S^*) = vol(S^{'}) \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t} = \frac{1}{27} \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}$$

gilt. Also ist $vol(S) = 8 \cdot vol(S^*) = \frac{8}{27} \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}$ und aus $vol(S) \leq vol(\mathcal{R})$ ($\Leftarrow$ (9.2.2)) kommt

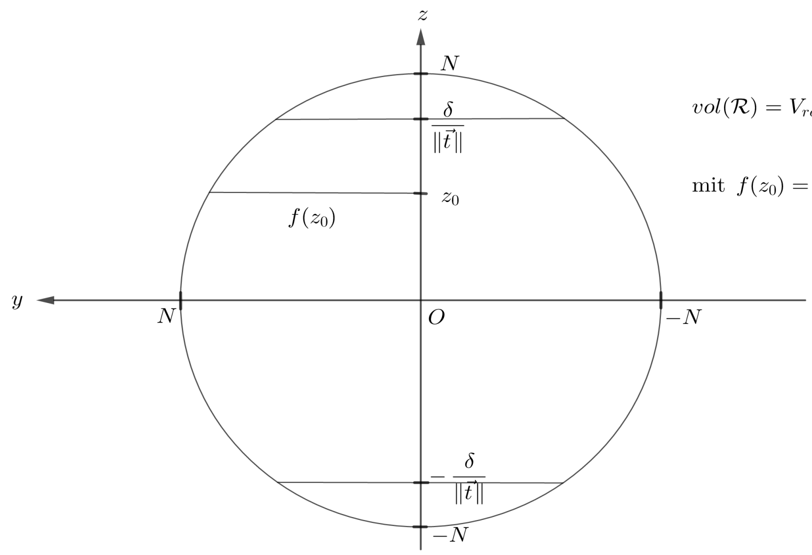
$$(9.2.3) \quad vol(\mathcal{R}) \gg \prod_{i=1}^{3} \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}.$$

Nun weisen wir $vol(\mathcal{R}) \ll \delta N^2$ mithilfe der Skizzen 2 und 3 nach. Dabei legen wir die $z$-Achse so, dass der Vektor $\vec{t}$ auf ihr liegt.




Skizze 2: $\mathcal{R} = K \cap Z$

Es gilt $\mathcal{R} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{v}\| \leq N,\ |\langle \vec{v}, \vec{t}\rangle| \leq \delta\} := K \cap Z$ mit $K := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{v}\| \leq N\}$ und $Z := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, |\langle \vec{v}, \vec{t}\rangle| \leq \delta\}$. Dabei ist offenbar $K$ eine Kugel vom Radius $r = N$ mit Mittelpunkt $O$ und $Z$ der Raum zwischen zwei parallelen Ebenen $E_1$ und $E_2$ ($E_1 \neq E_2$), die sich jeweils im Abstand $\delta/\|\vec{t}\| < N$ zum Ursprung befinden und den Normalenvektor $\vec{t}$ besitzen, welcher auf der $z$-Achse liegt ($\Leftarrow \|\vec{t}\| \geq 1 \ \wedge\ N > \delta$). Also ist $\mathcal{R}$ Schnittkörper einer Kugel $K$ (Radius $r = N$) mit zwei parallelen Ebenen $E_1$ und $E_2$ im Abstand $\delta/\|\vec{t}\| < N$ zum Kugelmittelpunkt $O$.




$$vol(\mathcal{R}) = V_{rot} = \pi \cdot \int_{-\delta/\|\vec{t}\|}^{\delta/\|\vec{t}\|} f(z_0)^2 \, dz_0$$

mit $f(z_0) = \sqrt{N^2 - z_0^2}$

Skizze 3: Projektion von $\mathcal{R}$ in die $y$-$z$-Ebene

Damit können wir $\mathcal{R}$ als Rotationskörper um die $z$-Achse gemäß Skizze 3 auffassen und erhalten

$$(9.2.4) \quad vol(\mathcal{R}) = V_{rot} = \pi \cdot \int\limits_{-\delta/\|\vec{t}\|}^{\delta/\|\vec{t}\|} f(z_0)^2 \, dz_0 = \pi \cdot \int\limits_{-\delta/\|\vec{t}\|}^{\delta/\|\vec{t}\|} N^2 - z_0^2 \, dz_0 \ll \delta N^2$$

mit $f(z_0) = \sqrt{N^2 - z_0^2}$ für alle $z_0 \in [-\frac{\delta}{\|\vec{t}\|}, \frac{\delta}{\|\vec{t}\|}]$ (siehe Skizze 3), denn $\|\vec{t}\| \geq 1$ und $N > \delta/\|\vec{t}\|$.

Aus $\vec{v} \in \mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^3$ folgt $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ sowie $\|\vec{v}\| \leq N$ und $|\langle \vec{v}, \vec{t} \rangle| \leq \delta$, sodass $\|\vec{v}\|_t \leq \sqrt{2} \cdot N$ und nach (9.2.1) insbesondere

$$\|\lambda_i\vec{v}_i\|_t \leq \sum_{i=1}^{3} \|\lambda_i\vec{v}_i\|_t \ll \|\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3\|_t = \|\vec{v}\|_t \leq \sqrt{2} \cdot N \quad \forall\ 1 \leq i \leq 3$$

gilt. Also ist $|\lambda_i| \ll \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}$ bzw. $|\lambda_i| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}^+$ $\forall\ 1 \leq i \leq 3$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} (9.2.5) \quad \mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^3 &\subseteq \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \in \mathcal{R} \mid \lambda_i \in \mathbb{Z},\ |\lambda_i| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}\ \forall\ 1 \leq i \leq 3\} \\ &= \mathcal{R} \cap B \end{aligned}$$

mit $B := \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \mid \lambda_i \in \mathbb{Z},\ |\lambda_i| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}\ \forall\ 1 \leq i \leq 3\} \subseteq \mathbb{Z}^3$.
Wir zerlegen $B$ disjunkt in die Mengen

$$\begin{aligned} &B_1 := \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z},\ |\lambda_1| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_1\|_t}\}, \\ &B_2 := \{\vec{v} = \lambda_2\vec{v}_2 \mid \lambda_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ |\lambda_2| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_2\|_t}\}, \\ &B_3 := \{\vec{v} = \lambda_3\vec{v}_3 \mid \lambda_3 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ |\lambda_3| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_3\|_t}\}, \\ &B_{1,2} := \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ |\lambda_1| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_1\|_t},\ |\lambda_2| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_2\|_t}\}, \\ &B_{1,3} := \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_3\vec{v}_3 \mid \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ |\lambda_1| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_1\|_t},\ |\lambda_3| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_3\|_t}\}, \\ &B_{2,3} := \{\vec{v} = \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \mid \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ |\lambda_2| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_2\|_t},\ |\lambda_3| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_3\|_t}\}, \\ &B_{1,2,3} := \{\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ |\lambda_i| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}\ \forall\ 1 \leq i \leq 3\}. \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Disjunktheit je zweier der Mengen direkt aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ und der Tatsache, dass der Nullvektor $\vec{0}$ nur in $B_1$ und somit nie in beiden betrachteten Mengen liegt. Nun zeigen wir $\#B_{1,2,3} \ll \delta N^2$.

Da jeder Vektor $\vec{v} \in B_{1,2,3} \subseteq \mathbb{Z}^3$ eindeutig in der Form $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i \leq 3$ darstellbar ist, gilt

$$\#B_{1,2,3} = \#\{\, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{Z}\backslash\{0\})^3 \mid |\lambda_i| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t} \ \forall\ 1 \leq i \leq 3\}.$$

Wegen $|\lambda_i| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}$ kommen für $\lambda_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ höchstens $2 \cdot \lfloor c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t} \rfloor \ll \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}$ Werte in Frage, für alle $1 \leq i \leq 3$, sodass $\#B_{1,2,3} \ll \prod_{i=1}^{3} \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t} \ll \delta N^2$ nach (9.2.3) und (9.2.4) gilt.
Folglich gibt es ein $c_2 \in \mathbb{R}^+$ mit

$$(9.2.6) \quad \#B_{1,2,3} \leq c_2 \cdot \delta N^2.$$

Aus der disjunkten Zerlegung von $B$ folgt, dass auch $\mathcal{R} \cap B$ disjunkt in die Mengen $\mathcal{R} \cap B_1$, $\mathcal{R} \cap B_2$,..., $\mathcal{R} \cap B_{1,2,3}$ zerlegt wird, also insbesondere

$$\delta k N^2 \leq \#\mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^3 \leq \#\mathcal{R} \cap B = \#\mathcal{R} \cap B_1 + \#\mathcal{R} \cap B_2 + ... + \#\mathcal{R} \cap B_{1,2,3}$$

für ein $k \geq k_0$ nach (9.2.5) gilt. Setzen wir $k_0 := 2 \cdot c_2 \in \mathbb{R}^+$, so liefert dies

$$\frac{1}{2} \cdot \delta k N^2 = (k - \frac{k}{2}) \cdot \delta N^2 \leq (k - \frac{k_0}{2}) \cdot \delta N^2 = (k - c_2) \cdot \delta N^2 \leq \delta k N^2 - c_2 \cdot \delta N^2 \leq$$
$$\#\mathcal{R} \cap B_1 + \#\mathcal{R} \cap B_2 + ... + \#\mathcal{R} \cap B_{1,2,3} - c_2 \cdot \delta N^2 \leq \#\mathcal{R} \cap B_1 + ... + \#\mathcal{R} \cap B_{2,3},$$

denn es gilt $\#\mathcal{R} \cap B_{1,2,3} \leq \#B_{1,2,3} \leq c_2 \cdot \delta N^2$ wegen (9.2.6).

Nach dem Schubfachprinzip existiert ein $B^* \in \{B_1,\ B_2, ...,\ B_{2,3}\}$ mit $\#\mathcal{R} \cap B^* \geq \frac{1}{12} \cdot \delta k N^2$.
Aus den Definitionen von $B_1, B_2, ..., B_{2,3}$ folgt, dass $B^* \in \{B_1,\ B_2, ...,\ B_{2,3}\}$ ohne die entsprechenden Einschränkungen $|\lambda_i| \leq c_1 \cdot \frac{N}{\|\vec{v}_i\|_t}$ und $\lambda_i \neq 0$ ein Gitter höchstens 2. Dimension ist.
Folglich gibt es ein Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^3$ höchstens 2. Dimension mit $B^* \subseteq \Lambda$.
Damit ist auch $\mathcal{R} \cap B^* \subseteq \mathcal{R} \cap \Lambda$ sowie $\#\mathcal{R} \cap \Lambda \geq \#\mathcal{R} \cap B^* \geq \frac{1}{12} \cdot \delta k N^2$.

$\square$

**Proposition 9.3**:

Gegeben seien $N, K', \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $X^{17/40} \ll NK'$, $\delta > \frac{N}{X}$ sowie $K' \gg 1$.

Betrachte die Menge $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(N, K', \delta)$ aller Paare $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0^2 \cap [0, X[^2$ mit der Eigenschaft :

(∗) Es gibt ein Gitter $L = L_{a_1,a_2} \subseteq \mathbb{Z}^3$ mit $dim\ L \leq 2$ und $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \dfrac{1}{X}$, sodass $M = M_{a_1,a_2} = \{\vec{n} \in L_{a_1,a_2} \,|\, |\langle \vec{n}, \vec{a}\rangle| \leq \delta\,, \|\vec{n}\| \leq N\}$ stets $\#M \gg \delta N^2 K'$ Punkte enthält, die nicht alle kollinear sind.

Dabei ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1/X \\ a_2/X \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{d}_{a_1,a_2}$ die senkrechte Projektion von $\vec{a}$ auf die Gitterebene $span(L_{a_1,a_2})$. Weiter sei $1 \leq Q \leq X^{1/2}$, $E = 0$ oder $1 \leq E \leq \frac{X^{1/2}}{Q}$ gegeben und $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Q, E)$ wie in Lemma 9.1 erklärt sowie die Menge $\mathcal{E}$ gemäß Lemma 8.2 definiert. Dann gilt

$$\sum_{\substack{a_1,a_2 \in \mathcal{F}\cap\mathcal{E} \\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_1(N,K',\delta)}} F_X\Big(\frac{a_1}{X}\Big)F_X\Big(\frac{a_2}{X}\Big) \ll \frac{X \cdot (\log X)^7}{(Q+E)^{\epsilon/100} \cdot NK'}.$$

**Beweis**:

I. Wir nutzen folgend häufig die Tatsache, dass alle Konstanten, die nur von $b$ abhängen, absolut sind und wählen $X$ hinreichend groß, sodass $\log X \geq 1$ ist. Ferner ersetzen wir $K'$ durch $K$.

Sei $(a_1, a_2) \in \mathcal{B}_1$ fixiert. Aus Lemma 10.1 auf S.208 folgt $\frac{a_1}{X} = \frac{b_1}{q} + \nu_1$ und $\frac{a_2}{X} = \frac{b_2}{q} + \nu_2$ mit $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \leq c_1 \cdot \frac{X}{NK}$ sowie $|\nu_1|, |\nu_2| \leq c_2 \cdot \frac{1}{NKq}$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$.

Dabei darf $ggT(b_1, b_2, q) = 1$ angenommen werden, denn wir können $b_1, b_2, q$ durch $ggT(b_1, b_2, q)$ kürzen und erhalten dann die gleiche Aussage mit den gekürzten Werten. Wir erinnern uns an die Definition von $\mathbb{P}(n)$ in Kapitel 6 und setzen $V := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathbb{P}(n) \subseteq \mathbb{P}(b)\}$, sodass insbesondere $V = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, u \in \mathbb{N}_0 : n | b^u\}$ gilt. Weiter sei $g_1 := ggT(b_1, q) \in \mathbb{N}$ und $g_2 := ggT(b_2, q) \in \mathbb{N}$, wobei o.B.d.A. $g_1 \leq g_2$ angenommen werden darf.

Nun ist $g_1 = g_1' d_1$ mit $g_1', d_1 \in \mathbb{N}$, $ggT(g_1', b) = 1$ und $d_1 \in V$, d.h. $g_1'$ ist der größte zu $b$ teilerfremde Teiler von $g_1$. Aus $t | g_1, g_2$ folgt $t | b_1, q$ und $t | b_2, q$ , also auch $t | ggT(b_1, b_2, q)$ und damit $t = 1$, sodass $ggT(g_1, g_2) = 1$ ist. Dies liefert $g_1 g_2 | q$, weil beide Faktoren $q$ teilen.

Analog zu oben ist $\frac{q}{g_1 g_2} = q' d_0$ mit $q', d_0 \in \mathbb{N}$, $ggT(q', b) = 1$ und $d_0 \in V$. Ferner setzen wir $b_1' := \frac{b_1}{g_1} \in \mathbb{Z}$ sowie $b_2' := \frac{b_2}{g_2} \in \mathbb{Z}$ und beachten $q = g_1 g_2 d_0 q' = g_1' g_2 d_0 d_1 q'$, wobei $g_1' \leq g_1 \leq g_2$ ist.

Mithilfe unserer Definitionen sehen wir $ggT(b_1', q' g_2 d_0) = 1$ und $ggT(b_2', q' g_1' d_0 d_1) = 1$.

Nun zeigen wir $|b_1'| \ll q' g_2 d_0$ und $|b_2'| \ll q' g_1' d_0 d_1$. Aus $(a_1, a_2) \in \mathcal{B}_1$ folgt $0 \leq a_1, a_2 < X$ sowie nach obigen Definitionen

$$\frac{a_1}{X} = \frac{b_1}{q} + \nu_1 = \frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1 \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{X} = \frac{b_2}{q} + \nu_2 = \frac{b_2'}{q' g_1' d_0 d_1} + \nu_2$$

mit $|\nu_1|, |\nu_2| \leq c_2 \cdot \frac{1}{NKq}$. Dabei wurde $a_1$ mit $a_2$ in [1, S.27-28] verwechselt, womit sich folgend leicht andere Summen/Definitionen ergeben. Also ist insbesondere

$$-c_2 \cdot \frac{1}{NKq} \leq -\nu_1 \leq \frac{a_1}{X} - \nu_1 = \frac{b_1}{q} \leq 1 + |\nu_1| \leq 1 + c_2 \cdot \frac{1}{NKq},$$

sodass $-\frac{c_2}{NK} \leq b_1 \leq q + \frac{c_2}{NK}$ gilt. Wegen $\frac{c_2}{NK} \ll \frac{c_2}{X^{17/40}}$ bzw. $0 < \frac{c_2}{NK} \leq c_2$ für hinreichend große $X$ ist daher $-c_2 \leq b_1 \leq q + c_2$, was $|b_1| \leq q + c_2 \leq (c_2 + 1) \cdot q \ll q$ liefert. Daraus folgt

$$|b_1'| = |\frac{b_1}{g_1}| = \frac{|b_1|}{g_1} \ll \frac{q}{g_1} = q' g_2 d_0.$$

Analog dazu ergibt sich $|b_2'| \ll q' g_1' d_0 d_1$ wegen $|b_2| \ll q$.
Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so haben wir insgesamt

$$(9.3.1) \quad \{ (\frac{a_1}{X}, \frac{a_2}{X}) \mid (a_1, a_2) \in \mathcal{B}_1, \ a_1, a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E} \} \subseteq S \ \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} S := \{ (\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1, \ \frac{b_2'}{q' g_1' d_0 d_1} + \nu_2) \mid\ & b_1', b_2' \in \mathbb{Z}, \ q', g_2, g_1', d_0, d_1 \in \mathbb{N}, \ g_1' \leq g_1 := g_1' d_1 \leq g_2, \\ & q := g_1' g_2 d_0 d_1 q' \leq c_1 \cdot \frac{X}{NK}, \ d_0, d_1 \in V, \ |\nu_1|, |\nu_2| \leq c_2 \cdot \frac{1}{NKq}, \ |b_1'| \ll q' g_2 d_0, \\ & |b_2'| \ll q' g_1' d_0 d_1, \ ggT(b_1', q' g_2 d_0) = ggT(b_2', q' g_1' d_0 d_1) = ggT(g_1', b) = ggT(q', b) = 1, \\ & X \cdot (\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}, \ X \cdot (\frac{b_2'}{q' g_1' d_0 d_1} + \nu_2) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E} \} \end{aligned}$$

gezeigt. Daraus folgt weiterhin

$$(9.3.2) \qquad \sum_{\substack{a_1, a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E} \\ (a_1, a_2) \in \mathcal{B}_1(N,K,\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \leq$$

$$\sum_{(\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1, \ \frac{b_2'}{q' g_1' d_0 d_1} + \nu_2) \in S} F_X(\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1) F_X(\frac{b_2'}{q' g_1' d_0 d_1} + \nu_2).$$

II. Ähnlich wie in [1, S.27-28] können wir nachweisen, dass

$$S \subseteq \bigcup^{*}_{(G_1,G_2,D_0,D_1,Q',E_1,E_2)\in\mathcal{T}} S(G_1,G_2,D_0,D_1,Q',E_1,E_2) \text{ mit}$$

$$\mathcal{T} := \{(G_1,G_2,D_0,D_1,Q',E_1,E_2) \mid G_1 \le G_2,\ E_1,E_2 \ll \frac{X}{NKQ_0}, \\ Q_0 := G_1G_2D_0D_1Q' \le c_1 \cdot \frac{X}{NK}\} \text{ und}$$

$$S(G_1,G_2,D_0,D_1,Q',E_1,E_2) := \{ (\frac{b_1'}{q'g_2d_0} + \nu_1,\ \frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \in S \mid g_1' \asymp G_1,\ g_2 \asymp G_2, \\ d_0 \asymp D_0,\ d_1 \asymp D_1,\ q' \asymp Q',\ |\nu_1| \le \frac{E_1}{X},\ |\nu_2| \le \frac{E_2}{X}\}$$

gilt, wobei $G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2 \in \mathbb{N}$ allesamt $b$-Potenzen sind, die Asymptotik $x \asymp y$ in der letzten Menge stets $y \le x < b \cdot y$ indiziert und die Vereinigung $\bigcup^{*}$ bedeutet, dass über $O((\log X)^7)$ Tupel aus $\mathcal{T}$ vereinigt wird bzw. $\#\mathcal{T} = O((\log X)^7)$ gilt. Wann immer wir folgend $Q_0$ schreiben, meinen wir das in $\mathcal{T}$ definierte $Q_0 = G_1G_2D_0D_1Q'$.

Den recht technischen Nachweis zu obiger Aussage skizzieren wir an dieser Stelle nur oberflächlich.

Sei $(\frac{b_1'}{q'g_2d_0} + \nu_1,\ \frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \in S$. Dann ist $q = g_1'g_2d_0d_1q' \le c_1 \cdot \frac{X}{NK} \ll c_1 \cdot X^{23/40}$ und insbesondere jedes $t \in \{g_1', g_2, d_0, d_1, q'\} \subseteq \mathbb{N}$ kleiner gleich $X$ für hinreichend große $X$, sodass stets eine $b$-Potenz $T = b^{t_0}$ mit $t_0 \in \mathbb{N}_0$, $t_0 \ll \log X$ und $T = b^{t_0} \le t < b^{t_0+1} = b \cdot T$ existiert.
Je nach Wahl von $t \in \{g_1', g_2, d_0, d_1, q'\}$ bezeichnen wir diese $b$-Potenz entsprechend mit $G_1, G_2, D_0, D_1, Q'$, wobei für jede dieser $b$-Potenzen genau $O(\log X)$ Werte in Frage kommen. Die Aussage $G_1 \le G_2$ erhalten wir dabei wegen $g_1' \le g_2$. Nach $q \le c_1 \cdot \frac{X}{NK}$ gilt $Q_0 = G_1G_2D_0D_1Q' \le q \le c_1 \cdot \frac{X}{NK}$. Aus $|\nu_i| \le c_2 \cdot \frac{1}{NKq} \le c_2 \cdot \frac{1}{NKQ_0} = c_2 \cdot \frac{X/NKQ_0}{X}$ kommt $|\nu_i| \le \frac{E_i}{X}$ mit einer $b$-Potenz $E_i \ll \frac{X}{NKQ_0}$, wobei für $E_i$ ebenfalls nur $O(\log X)$ Werte in Frage kommen, für $i = 1, 2$. Hierbei wählen im Gegensatz zu [1, S.27] bewusst $|\nu_i| \le \frac{E_i}{X}$ anstatt $\nu_i \asymp \frac{E_i}{X}$ für $i = 1, 2$, ohne dass dabei später Schwierigkeiten auftreten.
Folglich ist $(\frac{b_1'}{q'g_2d_0} + \nu_1,\ \frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \in S$ auch in einer Menge $S(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2)$ mit $(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2) \in \mathcal{T}$ enthalten und wir finden $\#\mathcal{T} = O((\log X)^7)$.

Setzen wir dies in (9.3.2) ein, so kommt

$$(9.3.3)\qquad \sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}\\(a_1,a_2)\in\mathcal{B}_1(N,K,\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \leq$$

$$\sum_{(\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0}+\nu_1,\,\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1}+\nu_2)\in S} F_X(\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0}+\nu_1)F_X(\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1}+\nu_2) \ll$$

$$(\log X)^7\cdot \overset{*}{\sup} \sum_{\substack{(\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0}+\nu_1,\,\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1}+\nu_2)\in\\ S(G_1,G_2,D_0,D_1,Q^{'},E_1,E_2)}} F_X(\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0}+\nu_1)F_X(\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1}+\nu_2),$$

wobei $\overset{*}{\sup} = \sup\limits_{\substack{(G_1,G_2,D_0,D_1,Q^{'},E_1,E_2)\in\mathcal{T}\\ S(G_1,G_2,D_0,D_1,Q^{'},E_1,E_2)\neq\emptyset}}$ bedeutet.

Wir fixieren die $b$-Potenzen $G_1, G_2, D_0, D_1, Q^{'}, E_1, E_2$ und definieren

$$\begin{aligned} S_1(Q^{'},G_2,D_0,E_1) := \{&\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0}+\nu_1 \mid b_1^{'}\in\mathbb{Z},\ q^{'},g_2,d_0\in\mathbb{N},\ q^{'}\asymp Q^{'},\ g_2\asymp G_2,\ d_0\asymp D_0,\\ &d_0\in V,\ q^{'}g_2d_0(\leq q)\leq c_1\cdot\frac{X}{NK},\ |\nu_1|\leq\frac{E_1}{X},\ |b_1^{'}|\ll q^{'}g_2d_0,\\ &ggT(b_1^{'},q^{'}g_2d_0)=ggT(q^{'},b)=1,\ X\cdot(\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0}+\nu_1)\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}\}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} S_2(Q^{'},G_1,D_0,D_1,E_2) := \{&\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1}+\nu_2 \mid b_2^{'}\in\mathbb{Z},\ q^{'},g_1^{'},d_0,d_1\in\mathbb{N},\ q^{'}\asymp Q^{'},\ g_1^{'}\asymp G_1,\\ &d_0\asymp D_0,\ d_1\asymp D_1,\ d_0,d_1\in V,\ q^{'}g_1^{'}d_0d_1(\leq q)\leq c_1\cdot\frac{X}{NK},\\ &|\nu_2|\leq\frac{E_2}{X},\ |b_2^{'}|\ll q^{'}g_1^{'}d_0d_1,\ ggT(b_2^{'},q^{'}g_1^{'}d_0d_1)=1,\\ &ggT(q^{'},b)=ggT(g_1^{'},b)=1,\ X\cdot(\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1}+\nu_2)\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}\},\end{aligned}$$

sodass insbesondere

$$S(G_1,G_2,D_0,D_1,Q^{'},E_1,E_2)\subseteq S_1(Q^{'},G_2,D_0,E_1)\times S_2(Q^{'},G_1,D_0,D_1,E_2)$$

gilt. Aus den Definitionen von $S_1$ sowie $S_2$ kommt

$$\sum_{\substack{(\frac{b_1'}{q'g_2d_0}+\nu_1,\ \frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2)\in\\ S(G_1,G_2,D_0,D_1,Q',E_1,E_2)}} F_X(\frac{b_1'}{q'g_2d_0}+\nu_1)F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2) \leq$$

$$\sum_{\substack{(\frac{b_1'}{q'g_2d_0}+\nu_1,\ \frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2)\in\\ S_1(Q',G_2,D_0,E_1)\times S_2(Q',G_1,D_0,D_1,E_2)}} F_X(\frac{b_1'}{q'g_2d_0}+\nu_1)F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2) \leq$$

$$\sum_{\substack{d_0,d_1\in V\\ d_0\asymp D_0\\ d_1\asymp D_1}} \sum_{\substack{q'\asymp Q'\\ ggT(q',b)=1\\ g_2\asymp G_2}} \sum_{\substack{|b_1'|\ll q'g_2d_0\\ ggT(b_1',q'g_2d_0)=1}} \sum_{\substack{|\nu_1|\leq\frac{E_1}{X}\\ X\cdot(\frac{b_1'}{q'g_2d_0}+\nu_1)\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}}} [F_X(\frac{b_1'}{q'g_2d_0}+\nu_1)\cdot$$

$$\sum_{\substack{g_1'\asymp G_1\\ ggT(g_1',b)=1}} \sum_{\substack{|b_2'|\ll q'g_1'd_0d_1\\ ggT(b_2',q'g_1'd_0d_1)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2|\leq\frac{E_2}{X}\\ X\cdot(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2)\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}}} F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2)].$$

Wir halten $d_0, d_1 \in V,\ d_0 \asymp D_0,\ d_1 \asymp D_1$ fest. Dann gilt

$$\sum_{\substack{g_1'\asymp G_1\\ ggT(g_1',b)=1}} \sum_{\substack{|b_2'|\ll q'g_1'd_0d_1\\ ggT(b_2',q'g_1'd_0d_1)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2|\leq\frac{E_2}{X}\\ X\cdot(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2)\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}}} F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2) \leq$$

$$\sup_{\substack{q'\asymp Q'\\ ggT(q',b)=1}} \sum_{\substack{g_1'\asymp G_1\\ ggT(g_1',b)=1}} \sum_{\substack{|b_2'|\ll q'g_1'd_0d_1\\ ggT(b_2',q'g_1'd_0d_1)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2|\leq\frac{E_2}{X}\\ X\cdot(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2)\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}}} F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1}+\nu_2) := \sum\nolimits_1$$

für alle $q' \asymp Q',\ ggT(q', b) = 1$ und wir definieren

$$\sum\nolimits_2 := \sum_{\substack{q'\asymp Q'\\ ggT(q',b)=1\\ g_2\asymp G_2}} \sum_{\substack{|b_1'|\ll q'g_2d_0\\ ggT(b_1',q'g_2d_0)=1}} \sum_{\substack{|\nu_1|\leq\frac{E_1}{X}\\ X\cdot(\frac{b_1'}{q'g_2d_0}+\nu_1)\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}}} F_X(\frac{b_1'}{q'g_2d_0}+\nu_1).$$

Fassen wir dies mit (9.3.3) zusammen, so kommt insgesamt

$$(9.3.4) \qquad \sum_{\substack{a_1,a_2\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}\\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_1(N,K,\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll (\log X)^7 \cdot \sup^{*}_{\substack{d_0,d_1\in V\\ d_0\asymp D_0\\ d_1\asymp D_1}} \sum\nolimits_1 \sum\nolimits_2 .$$

III. Wir fixieren das Tupel $(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2) \in \mathcal{T}$ mit $S(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2) \neq \emptyset$, d.h. ein Tupel unter der Supremumsbedingung von $\overset{*}{\sup}$ und halten auch $d_0, d_1 \in V$ mit $d_0 \asymp D_0,\ d_1 \asymp D_1$ fest. Nun schätzen wir $\sum_1$ sowie $\sum_2$ mehrmals nach oben ab und zeigen zunächst $\sum_2 \ll X^{23/80} + \frac{Q_0 X^{23/80}}{NKD_0D_1}$.

Aus der Definition von $\sum_2$ erhalten wir mit $a_1 = X \cdot (\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1)$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_2 &\leq \sum_{\substack{q' \asymp Q' \\ g_2 \asymp G_2}} \sum_{\substack{|b_1'| \ll q' g_2 d_0 \\ ggT(b_1', q' g_2 d_0) = 1}} \sum_{\substack{|\nu_1| \leq \frac{E_1}{X} \\ X \cdot (\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1) \in \mathcal{E}}} F_X(\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1) \\
&= \sum_{a_1 \in \mathcal{E}} F_X(\frac{a_1}{X}) \cdot \sum_{\substack{q' \asymp Q' \\ g_2 \asymp G_2}} \sum_{\substack{|b_1'| \ll q' g_2 d_0 \\ ggT(b_1', q' g_2 d_0) = 1}} \sum_{|\frac{a_1}{X} - \frac{b_1'}{q' g_2 d_0}| \leq \frac{E_1}{X} (\ll \frac{1}{NKQ_0})} 1 \\
&\leq \sum_{a_1 \in \mathcal{E}} F_X(\frac{a_1}{X}) \cdot \sum_{\substack{q' \asymp Q' \\ g_2 \asymp G_2}} \sum_{\substack{|b_1'| \ll q' g_2 d_0 \\ ggT(b_1', q' g_2 d_0) = 1}} \sum_{|\frac{a_1}{X} - \frac{b_1'}{q' g_2 d_0}| \ll \frac{1}{NKQ_0}} 1 \\
&= \sum_{a_1 \in \mathcal{E}} F_X(\frac{a_1}{X}) \cdot \# A(a_1),
\end{aligned}
$$

wobei wir

$$
\begin{aligned}
A(a_1) := \{(b_1', q', g_2) \mid b_1' \in \mathbb{Z},\ q', g_2 \in \mathbb{N},\ q' \asymp Q',\ g_2 \asymp G_2,\ |b_1'| \ll q' g_2 d_0,& \\
ggT(b_1', q' g_2 d_0) = 1,\ |\frac{a_1}{X} - \frac{b_1'}{q' g_2 d_0}| \ll \frac{1}{NKQ_0}\}&
\end{aligned}
$$

für $a_1 \in \mathbb{Z}$ definieren. Für fixiertes $a_1 \in \mathbb{Z}$ schätzen wir $\# A(a_1)$ nach oben ab. Dazu erklären wir

$$
\begin{aligned}
B(a_1) := \{\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} \mid b_1' \in \mathbb{Z},\ q', g_2 \in \mathbb{N},\ q' \asymp Q',\ g_2 \asymp G_2,\ |b_1'| \ll q' g_2 d_0,\ ggT(b_1',\ q' g_2 d_0) = 1& \\
|\frac{a_1}{X} - \frac{b_1'}{q' g_2 d_0}| \ll \frac{1}{NKQ_0}\}.&
\end{aligned}
$$

Jedes Tripel $(b_1', q', g_2) \in A(a_1)$ induziert über $(b_1', q', g_2) \longmapsto \frac{b_1'}{q' g_2 d_0}$ einen Bruch $\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} \in B(a_1)$. Für einen fixierten Bruch $\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} \in B(a_1)$ zählen wir die Tripel $(b_1'', q'', g_2') \in A(a_1)$, die diesen fixierten Bruch induzieren. Dann gilt nämlich $\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} = \frac{b_1''}{q'' g_2' d_0}$ und wegen der Reduziertheit beider Brüche kommt $b_1'' = b_1'$ und $q'' g_2' = q' g_2$. Also wird $\frac{b_1'}{q' g_2 d_0} \in B(a_1)$ nur von Tripeln der Form $(b_1', q'', g_2')$ mit $q'' g_2' = q' g_2$ induziert und von diesen gibt es $\tau(q' g_2)$ viele, wenn $q''$ alle Teiler von $q' g_2$ durchläuft. Dabei ist $\tau$ die Teileranzahlfunktion. Nach [14] gilt $\tau(n) \ll_\epsilon n^\epsilon$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ insbesondere für das in Kap. 3 festgelegte $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$, was wegen $q' \asymp Q',\ g_2 \asymp G_2$ und

$Q^{'}G_2 \leq Q_0 \ll X$ die Abschätzung $\tau(q^{'}g_2) \ll X^{\epsilon}$ impliziert (beachte Def. $Q_0$ in $\mathcal{T}$).
Folglich wird der fixierte Bruch $\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0} \in B(a_1)$ von $\ll X^{\epsilon}$ Tripeln aus $A(a_1)$ induziert, sodass

$$\#A(a_1) \ll X^{\epsilon} \cdot \#B(a_1)$$

gilt. Wir nehmen $B(a_1)$ als nicht-leer an, denn ansonsten ist $\#B(a_1) = 0$ und daher $\#A(a_1) = 0$. Wegen $q^{'} \asymp Q^{'}$, $g_2 \asymp G_2$ und $|b_1^{'}| \ll q^{'}g_2d_0$ ist $B(a_1)$ endlich und wir setzen $n := \#B(a_1) \in \mathbb{N}$. Dann können wir auch $B(a_1) = \{x_1, ..., x_n\}$ mit $x_1 < ... < x_n$ schreiben.

Je zwei verschiedene Brüche $\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0}$ und $\frac{b_1^{''}}{q^{''}g_2^{'}d_0}$ aus $B(a_1)$ haben einen Abstand $|\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0} - \frac{b_1^{''}}{q^{''}g_2^{'}d_0}| \neq 0$, welcher der Ungleichung

$$\frac{1}{Q^{'2}G_2^2D_0} \asymp \frac{1}{q^{'}q^{''}g_2g_2^{'}d_0} \leq |\frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0} - \frac{b_1^{''}}{q^{''}g_2^{'}d_0}| \leq |\frac{a_1}{X} - \frac{b_1^{'}}{q^{'}g_2d_0}| + |\frac{a_1}{X} - \frac{b_1^{''}}{q^{''}g_2^{'}d_0}| \ll \frac{1}{NKQ_0}$$

genügt. Also gilt insbesondere

$$|x_n - x_1| = x_n - x_1 \ll \frac{1}{NKQ_0} \quad \wedge \quad |x_{i+1} - x_i| = x_{i+1} - x_i \gg \frac{1}{Q^{'2}G_2^2D_0} \quad \forall\ 1 \leq i \leq n-1,$$

was induktiv $\frac{1}{NKQ_0} \gg x_n - x_1 \gg (n-1) \cdot \frac{1}{Q^{'2}G_2^2D_0}$ impliziert. Daraus schließen wir

$$\begin{aligned}\#B(a_1) = n &\ll 1 + \frac{Q^{'2}G_2^2D_0}{NKQ_0} = 1 + \frac{Q^{'2}G_2^2D_0}{NKQ^{'}G_2G_1D_0D_1} = 1 + \frac{Q^{'}G_2D_0}{NKG_1D_0D_1} \\ &\leq 1 + \frac{Q_0}{NKD_0D_1},\end{aligned}$$

indem wir die Definition von $Q_0$ in der Menge $\mathcal{T}$ nutzen. Somit haben wir

$$\#A(a_1) \ll X^{\epsilon} \cdot \#B(a_1) \ll X^{\epsilon} \cdot (1 + \frac{Q_0}{NKD_0D_1}) \quad \forall\ a_1 \in \mathbb{Z}$$

gezeigt. Setzen wir dies in unsere Abschätzung von $\sum_2$ ein, so kommt

$$\begin{aligned}(9.3.5) \quad \sum\nolimits_2 &\leq \sum_{a_1 \in \mathcal{E}} F_X(\frac{a_1}{X}) \cdot \#A(a_1) \ll \sum_{a_1 \in \mathcal{E}} F_X(\frac{a_1}{X}) \cdot X^{\epsilon} \cdot (1 + \frac{Q_0}{NKD_0D_1}) \\ &\ll X^{23/80-\epsilon} \cdot X^{\epsilon} \cdot (1 + \frac{Q_0}{NKD_0D_1}) \ll X^{23/80} + \frac{Q_0X^{23/80}}{NKD_0D_1}\end{aligned}$$

nach Lemma 8.2 (ii). Nun leiten wir $\sum_1 \ll \frac{E_2^{27/77}Q_0^{27/77}G_1^{27/77}}{G_2^{27/77}}$ mithilfe Lemma 4.6 (ii) her.

Wir wählen $q' \asymp Q'$, $ggT(q', b) = 1$ fest und erinnern uns, dass auch $d_0 \asymp D_0$, $d_1 \asymp D_1$ fixiert sind. Aus Lemma 4.6 (ii) mit $Y = X$, $E = E_2 \ll X$, $\eta = \nu_2$, $d = q'd_0d_1$ und $Q = b \cdot G_1q'd_0d_1$ ergibt sich wegen der Periodizität von $F_X$ die Abschätzung

$$\sum_{\substack{g_1' \asymp G_1 \\ ggT(g_1', b)=1}} \sum_{\substack{|b_2'| \ll q'g_1'd_0d_1 \\ ggT(b_2', q'g_1'd_0d_1)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2| \leq \frac{E_2}{X} \\ X \cdot (\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}}} F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \ll$$

$$\sum_{\substack{g_1' \asymp G_1 \\ ggT(g_1', b)=1}} \sum_{\substack{1 \leq b_2' \leq q'g_1'd_0d_1 \\ ggT(b_2', q'g_1'd_0d_1)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2| \leq \frac{E_2}{X} \\ X \cdot (\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \in \mathbb{Z}}} F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \leq$$

$$\sum_{g_1' \leq b \cdot G_1} \sum_{\substack{1 \leq b_2' \leq q'g_1'd_0d_1 \\ ggT(b_2', q'g_1'd_0d_1)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2| \leq \frac{E_2}{X} \\ X \cdot (\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \in \mathbb{Z}}} F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) =$$

$$\sum_{m = q'g_1'd_0d_1 \leq b \cdot G_1q'd_0d_1} \sum_{\substack{1 \leq b_2' \leq q'g_1'd_0d_1 \\ ggT(b_2', q'g_1'd_0d_1)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2| \leq \frac{E_2}{X} \\ X \cdot (\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) \in \mathbb{Z}}} F_X(\frac{b_2'}{q'g_1'd_0d_1} + \nu_2) =$$

$$\sum_{\substack{m \leq b \cdot G_1q'd_0d_1 \\ q'd_0d_1 | m}} \sum_{\substack{1 \leq b_2' \leq m \\ ggT(b_2', m)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2| \leq \frac{E_2}{X} \\ X \cdot (\frac{b_2'}{m} + \nu_2) \in \mathbb{Z}}} F_X(\frac{b_2'}{m} + \nu_2) =$$

$$\sum_{\substack{m \leq Q \\ d | m}} \sum_{\substack{1 \leq b_2' \leq m \\ ggT(b_2', m)=1}} \sum_{\substack{|\nu_2| \leq \frac{E}{X} \\ X \cdot (\frac{b_2'}{m} + \nu_2) \in \mathbb{Z}}} F_X(\frac{b_2'}{m} + \nu_2) \ll (\frac{Q^2E}{d})^{27/77} + \frac{Q^2E}{d \cdot X^{50/77}} \ll$$

$$(Q'D_0D_1G_1^2E_2)^{27/77} + \frac{Q'D_0D_1G_1^2E_2}{X^{50/77}},$$

wenn wir $q' \asymp Q'$, $d_0 \asymp D_0$ und $d_1 \asymp D_1$ verwenden. Ferner ist $Q'D_0D_1G_1^2E_2 = \frac{Q_0G_1}{G_2} \cdot E_2$ und daraus folgern wir mithilfe $G_1 \leq G_2$, $E_2 \ll \frac{X}{NKQ_0}$ und $NK \gg X^{17/40}$ auf die Gültigkeit von $\frac{Q'D_0D_1G_1^2E_2}{X^{50/77}} \ll (Q'D_0D_1G_1^2E_2)^{27/77} = \frac{E_2^{27/77}Q_0^{27/77}G_1^{27/77}}{G_2^{27/77}}$. Aus der Definition von $\sum_1$ folgt insgesamt

$$(9.3.6) \quad \sum\nolimits_1 \ll \frac{E_2^{27/77}Q_0^{27/77}G_1^{27/77}}{G_2^{27/77}}.$$

Mit der gleichen Idee erhalten wir aus Lemma 4.6 (ii) ähnlich zu [1, S.29 (10.6)] die Abschätzung

$$(9.3.7) \quad \sum\nolimits_2 \ll \frac{Q_0^{54/77}E_1^{27/77}}{G_1^{54/77}D_1^{54/77}D_0^{27/77}} + \frac{Q_0^2E_1}{X^{50/77}D_0D_1G_1}.$$

Zuletzt zeigen wir $\sum_1 \ll Q_0^{1/21}(D_0D_1E_2)^{27/77} + \frac{Q_0G_1(D_0D_1)^{1/2}E_2^{5/6}}{G_2\cdot X^{10/21}}$ mithilfe von Lemma 4.7.

Sei $q^{'} \asymp Q^{'}$, $ggT(q^{'}, b) = 1$ fest gewählt. Wir setzen $Y := X$, $q_1 := q^{'}$ $(Q_1 := Q^{'})$ mit $ggT(q_1, b) = 1$, $q_2 := g_1^{'}$ $(Q_2 := G_1)$, $a := b_2^{'}$, $\eta := \nu_1$ $(E := E_2)$ sowie $d := d_0d_1$ $(D := D_0D_1)$, sodass $d \asymp D$ und insbesondere $d|b^u$ für ein $u \in \mathbb{N}_0$ gilt ($\Leftarrow d_0, d_1 \in V,\ d_0 \asymp D_0,\ d_1 \asymp D_1$). Ferner ist $DE = D_0D_1E_2 \le Q_0E_2 \ll \frac{X}{NK} \ll X^{23/40}$, also $DE \le X = Y$ für hinreichend große $X$, womit alle Voraussetzungen von Lemma 4.7 erfüllt sind (vgl. S.49) und wir

$$\begin{aligned}
&\sum := \sum_{\substack{g_1^{'} \asymp G_1 \\ ggT(g_1^{'}, b)=1}} \ \sum_{\substack{1 \le b_2^{'} \le q^{'}g_1^{'}d_0d_1 \\ ggT(b_2^{'}, q^{'}g_1^{'}d_0d_1)=1}} \ \sum_{\substack{|\nu_2| \le \frac{E_2}{X} \\ X\cdot(\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1}+\nu_2)\in\mathbb{Z}}} F_X\Big(\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1} + \nu_2\Big) = \\
&\sum_{\substack{q_2 \asymp Q_2 \\ ggT(q_2,b)=1}} \ \sum_{\substack{a \le dq_1q_2 \\ ggT(a, dq_1q_2)=1}} \ \sum_{\substack{|\eta| \ll \frac{E}{Y} \\ Y\cdot(\frac{a}{dq_1q_2}+\eta)\in\mathbb{Z}}} F_Y\Big(\frac{a}{dq_1q_2} + \eta\Big) = S(d, q_1, Q_2, E, Y) \ll \\
&(DE)^{27/77}\cdot(Q_1Q_2^2)^{1/21} + \frac{E^{5/6}D^{3/2}Q_1Q_2^2}{Y^{10/21}} = \\
&(D_0D_1E_2)^{27/77}\cdot(Q^{'}G_1^2)^{1/21} + \frac{E_2^{5/6}(D_0D_1)^{3/2}Q^{'}G_1^2}{X^{10/21}}
\end{aligned}$$

erhalten. Wegen $(D_0D_1)^{3/2}Q^{'}G_1^2 = \frac{Q_0G_1(D_0D_1)^{1/2}}{G_2}$ und $Q^{'}G_1^2 \le Q^{'}G_1G_2 \le Q_0$ kommt insgesamt

$$\sum \ll Q_0^{1/21}(D_0D_1E_2)^{27/77} + \frac{Q_0G_1(D_0D_1)^{1/2}E_2^{5/6}}{G_2\cdot X^{10/21}} \quad \forall\ q^{'} \asymp Q^{'},\ ggT(q^{'}, b) = 1.$$

Daher gilt nach der Definition von $\sum_1$ insbesondere

$$\text{(9.3.8)}\qquad \sum\nolimits_1 \ll \sup_{\substack{q^{'} \asymp Q^{'} \\ ggT(q^{'}, b)=1}} \sum \ll Q_0^{1/21}(D_0D_1E_2)^{27/77} + \frac{Q_0G_1(D_0D_1)^{1/2}E_2^{5/6}}{G_2\cdot X^{10/21}},$$

indem wir die Summationsbedingung $X\cdot(\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1} + \nu_2) \in \mathcal{F}\cap\mathcal{E}$ in $\sum_1$ zunächst zu $X\cdot(\frac{b_2^{'}}{q^{'}g_1^{'}d_0d_1} + \nu_2) \in \mathbb{Z}$ abschwächen und dann die Periodizität von $F_X$ ausnutzen, also die gleiche Idee wie zur Herleitung des ersten $\ll$-Zeichens in der Abschätzung auf S.197 verwenden.

IV. Wir unterscheiden die folgenden Fälle und zeigen, dass $\sum_1 \cdot \sum_2 \ll Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon}$ ist.

<u>1.Fall</u>: $Q_0^{1/21}(D_0D_1E_2)^{27/77} \geq \frac{Q_0G_1(D_0D_1)^{1/2}E_2^{5/6}}{G_2 \cdot X^{10/21}}$

Dann gilt nach (9.3.8) sowie (9.3.7) insbesondere

$$\sum\nolimits_1 \ll Q_0^{1/21}(D_0D_1E_2)^{27/77} \quad \wedge \quad \sum\nolimits_2 \ll \frac{Q_0^{54/77}E_1^{27/77}}{G_1^{54/77}D_1^{54/77}D_0^{27/77}} + \frac{Q_0^2E_1}{X^{50/77}D_0D_1G_1},$$

was wegen $\frac{1}{G_1^{54/77}D_1^{27/77}} \ll 1$ und $\frac{D_0^{27/77}D_1^{27/77}}{D_0D_1G_1} \ll 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1 \cdot \sum\nolimits_2 &\ll Q_0^{54/77+1/21}(E_1E_2)^{27/77} + \frac{Q_0^{2+1/21}E_1E_2^{27/77}}{X^{50/77}} \\ &\ll Q_0^{54/77+1/21}(E_1E_2)^{27/77} + \frac{Q_0^{2+1/21}E_1E_2}{X^{50/77}}\end{aligned}$$

liefert. Aus [1, S.29 Z.11-14] erhalten wir schließlich $\sum_1 \cdot \sum_2 \ll Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon}$, wobei wir die einzelnen Schritte zur Herleitung dieser Abschätzung nicht mehr durchführen, da sie relativ technisch sind.

<u>2.Fall</u>: $Q_0^{1/21}(D_0D_1E_2)^{27/77} < \frac{Q_0G_1(D_0D_1)^{1/2}E_2^{5/6}}{G_2 \cdot X^{10/21}}$

Aus (9.3.8), (9.3.6) und $G_1 \leq G_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_1 \ll \frac{Q_0G_1(D_0D_1)^{1/2}E_2^{5/6}}{G_2 \cdot X^{10/21}} \leq \frac{Q_0(D_0D_1)^{1/2}E_2}{X^{10/21}} \quad \text{sowie} \\ &\sum\nolimits_1 \ll \frac{E_2^{27/77}Q_0^{27/77}G_1^{27/77}}{G_2^{27/77}} \leq E_2^{27/77}Q_0^{27/77} \quad \text{, womit} \\ &\sum\nolimits_1 \ll \min\{E_2^{27/77}Q_0^{27/77}, \frac{Q_0(D_0D_1)^{1/2}E_2}{X^{10/21}}\}\end{aligned}$$

gilt. Nach Letzterem ist insbesondere

$$\sum\nolimits_1 \ll (E_2^{27/77}Q_0^{27/77})^{1/3} \cdot (\frac{Q_0(D_0D_1)^{1/2}E_2}{X^{10/21}})^{2/3},$$

sodass sich wegen (9.3.7) die Gültigkeit von

$$\sum\nolimits_1 \cdot \sum\nolimits_2 \ll \frac{Q_0^{54/77} E_1^{27/77}}{G_1^{54/77} D_1^{54/77} D_0^{27/77}} \cdot (E_2^{27/77} Q_0^{27/77})^{1/3} \cdot (\frac{Q_0 (D_0 D_1)^{1/2} E_2}{X^{10/21}})^{2/3} +$$
$$\frac{Q_0^2 E_1}{X^{50/77} D_0 D_1 G_1} \cdot \frac{Q_0 (D_0 D_1)^{1/2} E_2}{X^{10/21}}$$
$$\leq \frac{Q_0^{54/77+9/77+2/3} E_1^{27/77} E_2^{9/77+2/3} (D_0 D_1)^{1/3-27/77}}{G_1^{54/77} D_1^{27/77} X^{20/63}} + \frac{Q_0^3 E_1 E_2}{X^{50/77+10/21} G_1}$$
$$\ll \frac{Q_0^{3/2} E_1^{1/2} E_2^{4/5}}{X^{20/63}} + \frac{Q_0^3 E_1 E_2}{X^{9/8}} \ll \frac{Q_0^{3/2} E_1^{1/2} E_2^{4/5}}{X^{3/10}} + \frac{Q_0^3 E_1 E_2}{X^{9/8}},$$

ergibt, indem wir $54/77 + 9/77 + 2/3 < 3/2,\ \ 9/77 + 2/3 < 4/5,\ \ 1/3 - 27/77 < 0$ $50/77 + 10/21 > 9/8$ sowie $20/63 > 3/10$ verwenden. Bei der entsprechenden Herleitung von (10.9) in [1, S.29] finden wir leider einige Lücken.

Nutzen wir die Abschätzungen $E_2 \ll \frac{X}{NKQ_0}$, $Q_0 \ll \frac{X}{NK}$ und $NK \gg X^{17/40}$, so kommt

$$\frac{Q_0^{3/2} E_1^{1/2} E_2^{4/5}}{X^{3/10}} = Q_0^{1.5} E_1^{1/2} E_2^{1/2} E_2^{0.3} \cdot \frac{1}{X^{0.3}} \ll Q_0^{1.5} \cdot (E_1 E_2)^{1/2} \cdot (\frac{X}{NKQ_0})^{0.3} \cdot \frac{1}{X^{0.3}} =$$
$$Q_0^{1.2} \cdot (E_1 E_2)^{1/2} \cdot (\frac{1}{NK})^{0.3} \ll Q_0 \cdot (E_1 E_2)^{1/2} \cdot \frac{Q_0^{0.2}}{(X^{17/40})^{0.3}} \ll$$
$$Q_0 \cdot (E_1 E_2)^{1/2} \cdot \frac{(X/NK)^{0.2}}{X^{51/400}} \ll Q_0 \cdot (E_1 E_2)^{1/2} \cdot \frac{(X^{23/40})^{0.2}}{X^{51/400}} = Q_0 \cdot (E_1 E_2)^{1/2} \cdot \frac{1}{X^{5/400}} \ll$$
$$Q_0 \cdot (E_1 E_2)^{1/2} \cdot \frac{1}{X^{2\epsilon}},$$

was nach obigem

$$\sum\nolimits_1 \cdot \sum\nolimits_2 \ll Q_0 \cdot (E_1 E_2)^{1/2} \cdot \frac{1}{X^{2\epsilon}} + \frac{Q_0^3 E_1 E_2}{X^{9/8}}$$

liefert. Mithilfe von

$$\sum\nolimits_1 \ll \min\{E_2^{27/77} Q_0^{27/77}, \frac{Q_0 (D_0 D_1)^{1/2} E_2}{X^{10/21}}\} \text{ (s.o.) und}$$
$$\sum\nolimits_2 \ll X^{23/80} + \frac{Q_0 X^{23/80}}{NKD_0 D_1} \ (\Leftarrow (9.3.5))$$

finden wir zudem

$$\sum\nolimits_1 \cdot \sum\nolimits_2 \ll X^{23/80} E_2^{27/77} Q_0^{27/77} + \frac{Q_0 X^{23/80}}{NKD_0D_1} \cdot \frac{Q_0(D_0D_1)^{1/2}E_2}{X^{10/21}}$$
$$\ll (XE_2Q_0)^{27/77} + \frac{Q_0^2E_2}{NK(D_0D_1)^{1/2}} \cdot \frac{1}{X^{10/21-23/80}}$$
$$\ll (XE_2Q_0)^{27/77} + \frac{Q_0^2E_2}{NKX^{3/16}},$$

wenn wir $23/80 < 27/77$ und $10/21 - 23/80 > 3/16$ benutzen. Aus den letzten beiden Abschätzungen des Produkts $\sum_1 \cdot \sum_2$ schließen wir

$$\sum\nolimits_1 \cdot \sum\nolimits_2 \ll Q_0 \cdot (E_1E_2)^{1/2} \cdot \frac{1}{X^{2\epsilon}} + \min\{\frac{Q_0^3E_1E_2}{X^{9/8}},\ (XE_2Q_0)^{27/77} + \frac{Q_0^2E_2}{NKX^{3/16}}\}$$

und zeigen folgend $M := \min\{\frac{Q_0^3E_1E_2}{X^{9/8}},\ (XE_2Q_0)^{27/77} + \frac{Q_0^2E_2}{NKX^{3/16}}\} \ll Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon}$.

Verwenden wir $E_2 \ll \frac{X}{NKQ_0}$, $Q_0 \ll \frac{X}{NK} \ll \frac{X}{X^{17/40}} = X^{23/40} \ll X$ sowie $NK \gg X^{17/40} \gg X^{13/32+\epsilon}$ ($\Leftarrow 17/40 > 13/32 + \epsilon$), so gilt nach einfachen Abschätzungen

$$\frac{Q_0^2E_2}{NKX^{3/16}} \ll Q_0^{1-2\epsilon} \ll Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon},$$

womit es genügt, $M' := \min\{\frac{Q_0^3E_1E_2}{X^{9/8}},\ (XE_2Q_0)^{27/77}\} \ll Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon}$ zu zeigen. Nun ist

$$M' \le (\frac{Q_0^3E_1E_2}{X^{9/8}})^{25/102} \cdot ((XE_2Q_0)^{27/77})^{77/102} = \frac{Q_0E_1^{25/102}E_2^{52/102}}{X^{9/8\cdot 25/102-27/102}} \ll \frac{Q_0E_1^{25/102}E_2^{52/102}}{X^{1/100}},$$

indem wir $3 \cdot 25/102 + 27/102 = 1$ und $9/8 \cdot 25/102 - 27/102 > 1/100$ sowie $\min\{x,y\} \le x^r \cdot y^{1-r}\ \ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall\ r \in [0,1]$ benutzen. Wir sehen, dass in [1, S.30 Z.4] die Exponenten bei $E_1$ und $E_2$ fehlerhaft sind. Ferner ist

$$\frac{Q_0E_1^{25/102}E_2^{52/102}}{X^{1/100}} \ll Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon} \cdot \frac{Q_0^{2\epsilon}E_2^{1/102+\epsilon}}{X^{1/100}} \ll Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon},$$

denn aus $\epsilon < \frac{1}{100} - \frac{1}{102} < \frac{1}{102}$ ($\Rightarrow \frac{1}{102} + \epsilon > 2\epsilon$) und $E_2 \ll \frac{X}{NKQ_0}$ sowie $NK \gg X^{17/40}$ folgt

$$\frac{Q_0^{2\epsilon}E_2^{1/102+\epsilon}}{X^{1/100}} \ll \frac{(Q_0E_2)^{1/102+\epsilon}}{X^{1/100}} \ll \frac{(X/NK)^{1/102+\epsilon}}{X^{1/100}} \ll \frac{(X^{23/40})^{1/102+\epsilon}}{X^{1/100}} \ll \frac{X^{1/102+\epsilon}}{X^{1/100}} \ll 1.$$

Somit haben wir die gewünschte Abschätzung von $M'$ und daher auch jene von $M$ gezeigt, was

$$\sum\nolimits_1 \cdot \sum\nolimits_2 \ll Q_0 \cdot (E_1E_2)^{1/2} \cdot \frac{1}{X^{2\epsilon}} + Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon}$$

liefert. Mithilfe von $E_1, E_2 \ll \frac{X}{NKQ_0}$ kommt $E_1E_2Q_0^2 \ll (\frac{X}{NK})^2 \ll (X^{23/40})^2 \ll X^2$, sodass $(E_1E_2)^\epsilon Q_0^{2\epsilon} \ll X^{2\epsilon}$ ist und daher $Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon}$ den ersten Summanden in obiger Abschätzung dominiert. Damit ist die Fallunterscheidung abgeschlossen und in beiden Fällen gilt

$$(9.3.9) \qquad \sum\nolimits_1 \cdot \sum\nolimits_2 \ll Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon}.$$

V. Setzen wir (9.3.9) in (9.3.4) ein, so erhalten wir

$$\sum_{\substack{a_1,a_2 \in \mathcal{F}\cap\mathcal{E} \\ (a_1,a_2)\in\mathcal{B}_1(N,K,\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll (\log X)^7 \cdot \overset{*}{\sup} \sum_{\substack{d_0,d_1 \in V \\ d_0 \asymp D_0 \\ d_1 \asymp D_1}} Q_0^{1-2\epsilon}(E_1E_2)^{1/2-\epsilon}.$$

Für fixierte $b$-Potenzen $D_0, D_1 \geq 1$ schätzen wir $\sum\limits_{\substack{d_0,d_1 \in V \\ d_0 \asymp D_0 \\ d_1 \asymp D_1}} 1 = \sum\limits_{\substack{d_0 \in V \\ d_0 \asymp D_0}} 1 \cdot \sum\limits_{\substack{d_1 \in V \\ d_1 \asymp D_1}} 1$ bzw. $\sum\limits_{\substack{d_0 \in V \\ d_0 \asymp D_0}} 1$ ab.

Nach $V = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P}(n) \subseteq \mathbb{P}(b)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid p|n \;\Rightarrow\; p|b\}$, wobei wir beachten, dass die letzte Menge die 1 enthält, und $d_0 \asymp D_0 \;\Leftrightarrow\; D_0 \leq d_0 < b \cdot D_0$ kommt

$$\sum_{\substack{d_0 \in V \\ d_0 \asymp D_0}} 1 \leq \sum_{\substack{d_0 \in V \\ d_0 \leq b \cdot D_0}} 1 = \#\{d_0 \in \mathbb{N} \mid d_0 \leq b \cdot D_0,\ p|d_0 \;\Rightarrow\; p|b\} = \#\mathcal{D},$$

wenn wir die letzte Menge mit $\mathcal{D}$ bezeichnen. Wir erinnern daran, dass die Basis $b$ die PFZ $b = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ mit $r = \omega(b) \in \mathbb{N}$, $e_i \in \mathbb{N}\ \forall\ 1 \leq i \leq r$ besitzt. Für $d_0 \in \mathcal{D}$ ergibt sich daher eine eindeutige PFZ der Form $d_0 = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{s_i}$ mit $s_i \in \mathbb{N}_0\ \forall\ 1 \leq i \leq r$. Wegen $2^{s_i} \leq p_i^{s_i} \leq d_0 \leq b \cdot D_0$ ist

$$s_i \leq \frac{\log(b \cdot D_0)}{\log 2} = \frac{\log b}{\log 2} + \frac{\log D_0}{\log 2} \ll 1 + \log D_0 \ll D_0^{\epsilon/r} \quad \forall\ 1 \leq i \leq r,$$

indem wir hier $D_0 \geq 1$ sowie die Tatsache nutzen, dass alle nur von $b$ abhängigen Konstanten absolut sind, also insbesondere $\epsilon/r \in \mathbb{R}^+$ absolut ist. Daraus kommt $s_i \leq c \cdot D_0^{\epsilon/r} - 1$ $\forall\ 1 \leq i \leq r$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ (beachte: $D_0^{\epsilon/r} \geq 1$). Also stehen für den Exponenten $s_i$ in der PFZ von $d_0 = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{s_i} \in \mathcal{D}$ nur $\lfloor c \cdot D_0^{\epsilon/r} \rfloor \leq c \cdot D_0^{\epsilon/r}$ Werte zur Verfügung, für alle $1 \leq i \leq r$, sodass es aufgrund der Eindeutigkeit dieser PFZ höchstens $\prod\limits_{i=1}^{r}(c \cdot D_0^{\epsilon/r}) = c^r \cdot D_0^\epsilon \ll D_0^\epsilon$ mögliche Werte für $d_0 \in \mathcal{D}$ gibt, denn $c^r$ ist wieder eine nur von $b$ abhängige absolute Konstante. Damit ist

$$\sum_{\substack{d_0 \in V \\ d_0 \asymp D_0}} 1 \leq \#\mathcal{D} \ll D_0^\epsilon.$$

Analog dazu folgt $\sum_{\substack{d_1 \in V \\ d_1 \asymp D_1}} 1 \ll D_1^\epsilon$ und insgesamt $\sum_{\substack{d_0, d_1 \in V \\ d_0 \asymp D_0 \\ d_1 \asymp D_1}} 1 \ll (D_0 D_1)^\epsilon$, was

$$\begin{aligned} (9.3.10) \qquad \sum_{\substack{a_1, a_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E} \\ (a_1, a_2) \in \mathcal{B}_1(N,K,\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) &\ll (\log X)^7 \cdot \overset{*}{\sup} \; (D_0 D_1)^\epsilon \cdot Q_0^{1-2\epsilon} (E_1 E_2)^{1/2-\epsilon} \\ &\ll (\log X)^7 \cdot \overset{*}{\sup} \; Q_0^{1-\epsilon} (E_1 E_2)^{1/2-\epsilon} \\ &\ll (\log X)^7 \cdot \frac{X}{NK} \cdot \overset{*}{\sup} \; \frac{1}{(Q_0 E_1 E_2)^\epsilon} \end{aligned}$$

liefert, indem wir die Definition $\overset{*}{\sup} = \sup\limits_{\substack{(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2) \in \mathcal{T} \\ S(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2) \neq \emptyset}}$ bzw. jene von $\mathcal{T}$ beachten und daraus $D_0 D_1 \leq Q_0$ sowie $(Q_0 E_1)^{1/2} \cdot (Q_0 E_2)^{1/2} \ll X/NK$ schließen. Ferner finden wir

$$(9.3.11) \qquad \overset{*}{\sup} \; \frac{1}{(Q_0 E_1 E_2)^\epsilon} \leq \overset{*}{\sup_{Q_0 + E_1 + E_2 < X^{1/50}}} \; \frac{1}{(Q_0 E_1 E_2)^\epsilon} + \overset{*}{\sup_{Q_0 + E_1 + E_2 \geq X^{1/50}}} \; \frac{1}{(Q_0 E_1 E_2)^\epsilon}$$

und zeigen zunächst $\overset{*}{\sup}_{Q_0 + E_1 + E_2 < X^{1/50}} \frac{1}{(Q_0 E_1 E_2)^\epsilon} \ll \frac{1}{(Q+E)^{\epsilon/100}}$.

Gegeben sei das Tupel $(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2) \in \mathcal{T}$ von $b$-Potenzen mit $Q_0 + E_1 + E_2 < X^{1/50}$ und $S(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2) \neq \emptyset$ gemäß Definition von $\overset{*}{\sup}$, womit auch $Q_0, E_1, E_2 < X^{1/50}$ ist. Da die Menge $S(G_1, G_2, D_0, D_1, Q', E_1, E_2)$ nicht-leer ist, gibt es ein $a_1 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}$, sodass

$$\frac{a_1}{X} = \frac{b_1'}{q' g_2 d_0} + \nu_1 = \frac{b_1}{q} + \nu_1$$

mit $b_1' \in \mathbb{Z}$, $q', g_2, d_0 \in \mathbb{N}$, $q' \asymp Q'$, $g_2 \asymp G_2$, $d_0 \asymp D_0$ und $|\nu_1| \leq \frac{E_1}{X}$ gilt, wobei wir $b_1 := b_1' D_1 G_1 \in \mathbb{Z}$ und $q := q' g_2 d_0 D_1 G_1 \in \mathbb{N}$, $q \asymp Q_0 = G_1 G_2 D_0 D_1 Q'$ setzen. Wegen $a_1 \in \mathcal{F}$ gilt

$$\frac{a_1}{X} = \frac{b_1^*}{q^*} + \nu_1^*$$

mit $b_1^* \in \mathbb{Z}$, $q^* \in \mathbb{N}$, $ggT(b_1^*, q^*) = 1$, $Q \leq q^* < 2Q$ und $|\nu_1^*| \in \begin{cases} [0, \frac{1}{X}[ & \text{, falls } E = 0 \\ [\frac{E}{X}, \frac{2E}{X}[ & \text{, sonst} \end{cases}$, wenn wir die Definition von $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Q, E)$ auf S.168 beachten.

Somit ergibt sich insbesondere $|\nu_1^*| \ll \frac{\max\{1,E\}}{X} \leq \frac{E+1}{X}$ und $|\nu_1^*| \asymp \frac{E}{X}$, falls $E \neq 0$ ist.
Angenommen es gilt $\frac{b_1}{q} \neq \frac{b_1^*}{q^*}$. Wegen $E_1 \geq 1$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q_0Q} &\ll \frac{1}{qq^*} \leq |\frac{b_1}{q} - \frac{b_1^*}{q^*}| = |\frac{a_1}{X} - \nu_1 - (\frac{a_1}{X} - \nu_1^*)| = |\nu_1^* - \nu_1| \leq |\nu_1^*| + |\nu_1| \\ &\ll \frac{E+1}{X} + \frac{E_1}{X} \ll \frac{E+E_1}{X}.\end{aligned}$$

Für $E \gg E_1$ liefert dies $\frac{1}{Q_0Q} \ll \frac{E}{X} \ll \frac{1}{X^{1/2}Q}$ ($\Leftarrow E \leq \frac{X^{1/2}}{Q}$), also für hinreichend große $X$ den Widerspruch $X^{1/2} \ll Q_0 < X^{1/50}$. Also ist $E \ll E_1$ und $\frac{1}{Q_0Q} \ll \frac{E_1}{X} < \frac{X^{1/50}}{X} = \frac{1}{X^{49/50}}$ ($\Leftarrow E_1 < X^{1/50}$), was $X^{49/50} \ll Q_0Q < X^{1/50}Q$ ($\Leftarrow Q_0 < X^{1/50}$) und damit den Widerspruch $X^{48/50} \ll Q \leq X^{1/2}$ für hinreichend große $X$ liefert. Folglich muss $\frac{b_1}{q} = \frac{b_1^*}{q^*}$ sein.

Wegen $ggT(b_1^*, q^*) = 1$ und $b_1q^* = b_1^*q$ gilt $q^*|q$, was $q^* \leq q$ und $Q \leq q^* \leq q \ll Q_0$ impliziert. Ferner ist $\nu_1 = \frac{a_1}{X} - \frac{b_1}{q} = \frac{a_1}{X} - \frac{b_1^*}{q^*} = \nu_1^*$ und daher $\frac{E_1}{X} \geq |\nu_1| = |\nu_1^*|$.
Im Fall $E \neq 0$ ist $|\nu_1^*| \asymp \frac{E}{X}$, sodass $\frac{E_1}{X} \geq |\nu_1^*| \gg \frac{E}{X}$ bzw. $E_1 \gg E$ ist, woraus insgesamt $Q + E \ll Q_0 + E_1$ folgt. Auch im Fall $E = 0$ gilt $Q + E \ll Q_0 + E_1$ ($\Leftarrow E_1 \geq 1$), sodass in beiden Fällen $Q + E \ll Q_0 + E_1 \leq Q_0 + E_1 + E_2 \leq 3 \cdot Q_0E_1E_2$ ist, denn letzteres ergibt sich mithilfe $Q_0, E_1, E_2 \geq 1$. Daraus kommt wegen $Q + E \geq 1$ insbesondere $(Q+E)^{\epsilon/100} \leq (Q+E)^\epsilon \ll (Q_0E_1E_2)^\epsilon$, womit wir leicht auf

$$\text{(9.3.12)} \qquad \sideset{}{^*}\sup_{Q_0+E_1+E_2<X^{1/50}} \frac{1}{(Q_0E_1E_2)^\epsilon} \ll \frac{1}{(Q+E)^{\epsilon/100}}$$

schließen. Weiter ist $\overset{*}{\sup}_{Q_0+E_1+E_2 \geq X^{1/50}} \frac{1}{(Q_0E_1E_2)^\epsilon} \leq \sup_{\substack{Q_0,E_1,E_2\geq 1 \\ Q_0+E_1+E_2 \geq X^{1/50}}} \frac{1}{(Q_0E_1E_2)^\epsilon}$.

Seien $Q_0, E_1, E_2 \geq 1$ mit $Q_0 + E_1 + E_2 \geq X^{1/50}$ fixiert. Dann gilt wie oben
$3 \cdot Q_0E_1E_2 \geq Q_0 + E_1 + E_2 \geq X^{1/50}$, also auch $\frac{1}{(Q_0E_1E_2)^\epsilon} \ll \frac{1}{X^{\epsilon/50}}$. Nach $1 \leq Q \leq X^{1/2}$ und $E = 0$ oder $1 \leq E \leq \frac{X^{1/2}}{Q}$ ist $Q + E \ll X^{1/2}$, was $(Q+E)^{\epsilon/100} \ll X^{\epsilon/200} \leq X^{\epsilon/50}$ und folglich $\frac{1}{(Q_0E_1E_2)^\epsilon} \ll \frac{1}{X^{\epsilon/50}} \ll \frac{1}{(Q+E)^{\epsilon/100}}$ liefert. Damit haben wir

$$\text{(9.3.13)} \qquad \overset{*}{\sup}_{Q_0+E_1+E_2 \geq X^{1/50}} \frac{1}{(Q_0E_1E_2)^\epsilon} \ll \frac{1}{(Q+E)^{\epsilon/100}}$$

gezeigt. Einsetzen von (9.3.12) und (9.3.13) in (9.3.11) liefert $\overset{*}{\sup} \frac{1}{(Q_0E_1E_2)^\epsilon} \ll \frac{1}{(Q+E)^{\epsilon/100}}$, was wiederum nach (9.3.10) das gewünschte Resultat ergibt.

□

**Proposition 9.4**:

Gegeben seien $N, K', \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $N \gg X^{9/25}$, $\delta > \frac{N}{X}$ und $K' \gg 1$. Ferner sei die Menge $\mathcal{E}$ gemäß Lemma 8.2 definiert und $1 \leq B \ll X^{23/80}$ sowie $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(B) = \{0 \leq a < X \mid F_X(\frac{a}{X}) \asymp \frac{1}{B}\} \subseteq \mathcal{E}$. Betrachte die Menge $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2(N, K', \delta)$ aller Paare $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0^2 \cap [0, X[^2$ mit der Eigenschaft :

(∗) Es gibt ein Gitter $L = L_{a_1,a_2} \subseteq \mathbb{Z}^3$ mit $dim\ L \leq 2$ und $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \dfrac{1}{X}$, sodass $M = M_{a_1,a_2} = \{\vec{n} \in L_{a_1,a_2} \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta\,, \|\vec{n}\| \leq N\}$ stets $\#M \gg \delta N^2 K'$ Punkte enthält und in einer Geraden $L' = L'_{a_1,a_2} \subseteq \mathbb{R}^3$ enthalten ist.

Dabei sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{d}_{a_1,a_2}$ wie in Proposition 9.3 erklärt. Dann gilt

$$\sum_{\substack{a_1,a_2 \in \mathcal{E}' \\ (a_1,a_2) \in \mathcal{B}_2(N,K',\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \frac{X^{1-\epsilon}}{NK'}.$$

**Beweis**:

Wir ersetzen $K'$ durch $K$ und können im Beweis von Proposition 9.4 in [1, S.33 Z.1-Z.12] (bis „Alternatively”) alles übernehmen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Menge $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E}'$ wie in [1] im Intervall $[1, X[$ oder wie hier in $[0, X[$ enthalten ist, denn in beiden Fällen kommt $\#\mathcal{E}' \ll B^{235/154} \cdot X^{59/433}$ aus Lemma 4.4 (ii). Demnach verbleibt der Fall $NK \gg X^{57/80}/B$. Wir sehen leicht

$$\sum_{\substack{a_1,a_2 \in \mathcal{E}' \\ (a_1,a_2) \in \mathcal{B}_2(N,K,\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X}) F_X(\frac{a_2}{X}) \asymp \frac{1}{B^2} \cdot \#[(\mathcal{E}')^2 \cap \mathcal{B}_2]$$

und schätzen nun $\#[(\mathcal{E}')^2 \cap \mathcal{B}_2]$ mithilfe der Lemmata 11.1 und 11.2 ab, wobei wir o.B.d.A. $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$ annehmen dürfen. Dann liefert Lemma 11.1

$$\mathcal{B}_2 \subseteq \{(a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0^2 \cap [0, X[^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{Z}^4 \cap [-c_1 \cdot \frac{X}{N^2K},\ c_1 \cdot \frac{X}{N^2K}]^4 \backslash \{(0,0,0,0)\} : \\ v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0\}$$

mit einer Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}^+$ und $\frac{X}{N^2K} \gg 1$ $(\Leftarrow \mathcal{B}_2 \neq \emptyset)$.

In Lemma 11.2 setzen wir $C := \mathcal{E}' \subseteq \mathbb{N}_0 \cap [0, X[$ und $V := \lceil c_1 \cdot \frac{X}{N^2K} \rceil \in \mathbb{N}$ ein, wobei wegen $1 \ll \frac{X}{N^2K} \ll X^{7/25}$ $(\Leftarrow N \gg X^{9/25}, K \gg 1)$ insbesondere $1 \leq V < X$ für hinreichend große $X$

gilt. Daraus kommt unter Verwendung von $V \ll \frac{X}{N^2K}$ nach Lemma 11.2 insbesondere

$$
\begin{aligned}
&\#[(\mathcal{E}^{'})^2 \cap \mathcal{B}_2] \leq \\
&\#\{(a_1, a_2) \in \mathcal{E}'^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{Z}^4 \cap [-c_1 \cdot \frac{X}{N^2K},\ c_1 \cdot \frac{X}{N^2K}]^4 \backslash \{(0,0,0,0)\} : \\
&\qquad\qquad v_1a_1 + v_2a_2 + v_3X + v_4 = 0\} \leq \\
&\#\{(a_1, a_2) \in C^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{Z}^4 \cap [-V, V]^4 \backslash \{(0,0,0,0)\} : \\
&\qquad\qquad v_1a_1 + v_2a_2 + v_3X + v_4 = 0\} \ll \\
&X^{o(1)} \cdot (\#C^{5/4}V^2 + \#C^{3/2}V + \frac{\#C^{3/2}V^3}{X^{1/2}}) \ll \\
&X^{o(1)} \cdot [(\#\mathcal{E}^{'})^{5/4} \cdot (\frac{X}{N^2K})^2 + (\#\mathcal{E}^{'})^{3/2} \cdot \frac{X}{N^2K} + \frac{(\#\mathcal{E}^{'})^{3/2}(X/N^2K)^3}{X^{1/2}}],
\end{aligned}
$$

woraus wir mit einfachen Mitteln auf

$$
\begin{aligned}
(9.4.1) \qquad &\sum_{\substack{a_1,a_2 \in \mathcal{E}^{'} \\ (a_1,a_2) \in \mathcal{B}_2(N,K,\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \\
&\frac{X^{1+o(1)}}{N^2K} \cdot [\frac{\#\mathcal{E}'^{5/4}}{B^2} \cdot \frac{X}{N^2K} + \frac{\#\mathcal{E}'^{3/2}}{B^2} + \frac{\#\mathcal{E}'^{3/2}}{B^2X^{1/2}} \cdot (\frac{X}{N^2K})^2]
\end{aligned}
$$

schließen. Übernehmen wir die Abschätzungen in [1, S.33 unten], die wir mithilfe von $NK \gg X^{57/80}/B$, $B \ll X^{23/80}$ sowie $\#\mathcal{E}^{'} \ll B^{235/154} \cdot X^{59/433}$ folgern können, so kommt

$$
\frac{\#\mathcal{E}'^{5/4}}{B^2} \cdot \frac{X}{N^2K} \ll \frac{X^{23/32}}{N}, \quad \frac{\#\mathcal{E}'^{3/2}}{B^2} \ll X^{23/80} \ \text{ und } \ \frac{\#\mathcal{E}'^{3/2}}{B^2X^{1/2}} \cdot (\frac{X}{N^2K})^2 \ll \frac{X^{15/16}}{N^2}.
$$

Dies in (9.4.1) eingesetzt liefert

$$
(9.4.2) \qquad \sum_{\substack{a_1,a_2 \in \mathcal{E}^{'} \\ (a_1,a_2) \in \mathcal{B}_2(N,K,\delta)}} F_X(\frac{a_1}{X})F_X(\frac{a_2}{X}) \ll \frac{X^{1+o(1)}}{NK} \cdot [\frac{X^{23/32}}{N^2} + \frac{X^{23/80}}{N} + \frac{X^{15/16}}{N^3}],
$$

woraus wir wie in [1, S.34 Z.1-Z.4] das gewünschte Resultat erhalten.

$\square$

In den folgenden Kapiteln 10 und 11 erfolgt die schon angekündigte Betrachtung jener Gitter und Geraden, die einen Beitrag zur Summe in Lemma 9.1, also den speziellen Minor-Arcs, liefern. Diese Beiträge haben wir mithilfe der Propositionen 9.3 und 9.4 unter Kontrolle, zu deren vollständigem Nachweis noch die Lemmata 10.1, 11.1 und 11.2 herzuleiten sind.

# 10. Gitterbeitrag

Dem Beweis von Lemma 10.1 stellen wir folgenden Hilfssatz voran. Wir erinnern daran, dass wir mit $\langle\ ;\ \rangle$ stets das Standardskalarprodukt und mit $\|\ \| = \sqrt{\langle\ ;\ \rangle}$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.

*HS1 Lemma 10.1*:
Sei $L \subseteq \mathbb{Z}^3$ ein Gitter der Dimension $dim\ L = 2$. Dann besitzt $L$ eine Minkowski-reduzierte Basis $\vec{v}, \vec{w}$ (kurz: MR-Basis) und für diese gilt :

(i) $\|\lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w}\| \gg \|\lambda_1\vec{v}\| + \|\lambda_2\vec{w}_2\| \quad \forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$,

(ii) $|\sin\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})| \gg 1$.

Dabei ist mit $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$ der von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingeschlossene Winkel aus $[0, \pi]$ gemeint.

*Beweis*:
Die Existenz einer MR-Basis ist nach Proposition 3.1.9 in [11, S.205] gesichert.
Aus Theorem 3.1.10 [11, S.206] folgt $\|\vec{v}\| \leq \min_1 L$ und $\|\vec{w}\| \leq \min_2 L$, wobei $\min_1 L$ und $\min_2 L$ die sukzessiven Minima bezeichnen. Dies liefert nach Satz 3.1.4 [11, S.203] insbesondere

$$\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \leq \min_1 L \cdot \min_2 L \leq \gamma_2^2 \cdot det\ L = \gamma_2^2 \cdot \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \gamma_2^2 \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})|,$$

wobei $\gamma_2 \in \mathbb{R}^+$ die Hermite-Konstante zur Dimension 2 bezeichnet. Daraus kommt $|\sin\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})| \gg 1$, also (ii). Verwenden wir die Definition einer MR-Basis in [11, S.205 Def. 3.1.7] für die Dimension 2, so erhalten wir mit $\vec{v} = \vec{v}_1$ und $\vec{w} = \vec{v}_2$ analog zu *HS1 Lemma 9.2*

(1) $\|\vec{v}\| \leq \|s_1\vec{v} + s_2\vec{w}\| \quad \forall\ s_1, s_2 \in \mathbb{Z},\ (s_1, s_2) \neq (0, 0)$,

(2) $\|\vec{w}\| \leq \|s_3\vec{v} + s_4\vec{w}\| \quad \forall\ s_3, s_4 \in \mathbb{Z},\ s_4 \neq 0$.

Mit der gleichen Idee wie auf S.179-180 im Beweis von *HS1 Lemma 9.2* kommt daraus

$$\|\lambda_1\vec{v}\| + \|\lambda_2\vec{w}\| \leq 8 \cdot \|\lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w}\| \quad \forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z},$$

sodass auch (i) gilt.

$\square$

**Lemma 10.1**:
Sei $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N})$ und $N, K, \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\delta > \frac{N}{X}$ sowie $K \gg 1$ gegeben. Betrachte die Menge $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(N, K, \delta)$ aller Paare $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0^2 \cap [0, X[^2$ mit der Eigenschaft :

$(*)$ Es gibt ein Gitter $L = L_{a_1,a_2} \subseteq \mathbb{Z}^3$ mit $dim\ L \leq 2$ und $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \dfrac{1}{X}$, sodass $M = M_{a_1,a_2} = \{\vec{n} \in L_{a_1,a_2} \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta\, , \|\vec{n}\| \leq N\}$ stets $\#M \gg \delta N^2 K$ Punkte enthält, die nicht alle kollinear sind.

Dabei sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{d}_{a_1,a_2}$ wie in Proposition 9.3 erklärt.
Dann gibt es für jedes Paar $(a_1, a_2) \in \mathcal{B}_1$ stets $(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2$ und ein $q \in \mathbb{N}$, $q \ll \frac{X}{NK}$ mit

$$|\frac{a_1}{X} - \frac{d_1}{q}| \ll \frac{1}{NKq} \quad \text{und} \quad |\frac{a_2}{X} - \frac{d_2}{q}| \ll \frac{1}{NKq}.$$

**Beweis**:
Sei $(a_1, a_2) \in \mathcal{B}_1$ gegeben. Nach $(*)$ gilt insbesondere $M = M_{a_1,a_2} \neq \emptyset$ und daher enthält $M$ zwei nicht-kollineare Vektoren $\vec{m}_1$ und $\vec{m}_2$, wobei diese auch in $L = L_{a_1,a_2}$ liegen und folglich $dim\ L = 2$ ist. Aufgrund Proposition 3.1.9 in [11, S.205] besitzt $L \subseteq \mathbb{Z}^3$ eine MR-Basis $\vec{v}, \vec{w} \in L$ mit $L = L(\vec{v}, \vec{w}) = \{\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\}$ und $\|\vec{v}\| = V \in \mathbb{R}^+$ sowie $\|\vec{w}\| = W \in \mathbb{R}^+$ $(\Leftarrow \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0})$. Dabei dürfen wir $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ annehmen, denn für $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) \in ]\frac{\pi}{2}, \pi]$ ersetzen wir $\vec{w}$ durch $-\vec{w}$ und erhalten dann die MR-Basis $\vec{v}, -\vec{w}$ von $L$ mit $\sphericalangle(\vec{v}, -\vec{w}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Wir setzen $\epsilon_1 := |\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle| \in \mathbb{R}_0^+$ und $\epsilon_2 := |\langle \vec{w}, \vec{a} \rangle| \in \mathbb{R}_0^+$.

Für $\vec{n} \in M$ ist $\vec{n} \in L(\vec{v}, \vec{w})$ und daher eindeutig in der Form $\vec{n} = \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ darstellbar, sodass $\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = \lambda_1 \cdot \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle + \lambda_2 \cdot \langle \vec{w}, \vec{a} \rangle$ und folglich

$$\delta \geq |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| = |\lambda_1 \cdot \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle + \lambda_2 \cdot \langle \vec{w}, \vec{a} \rangle| = |\lambda_1^{'} \epsilon_1 + \lambda_2^{'} \epsilon_2|$$

mit $\lambda_1^{'} = \begin{cases} \lambda_1, \text{ falls } \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = \epsilon_1 \\ -\lambda_1, \text{ falls } \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle = -\epsilon_1 \end{cases} \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_2^{'} = \begin{cases} \lambda_2, \text{ falls } \langle \vec{w}, \vec{a} \rangle = \epsilon_2 \\ -\lambda_2, \text{ falls } \langle \vec{w}, \vec{a} \rangle = -\epsilon_2 \end{cases} \in \mathbb{Z}$ gilt.

Ferner ist $N \geq \|\vec{n}\| = \|\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w}\| \gg \|\lambda_1 \vec{v}\| + \|\lambda_2 \vec{w}\| = |\lambda_1| \cdot V + |\lambda_2| \cdot W$ nach

*HS1 Lemma 10.1* (i) und daher insbesondere $|\lambda_1^{'}| = |\lambda_1| \ll \frac{N}{V}$ sowie $|\lambda_2^{'}| = |\lambda_2| \ll \frac{N}{W}$.
Dies liefert insgesamt

$$(10.1.1) \quad M \subseteq \{\lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z} : \exists\, \lambda_1^{'}, \lambda_2^{'} \in \mathbb{Z} \text{ mit } |\lambda_1^{'}\epsilon_1 + \lambda_2^{'}\epsilon_2| \leq \delta,$$
$$|\lambda_1^{'}| = |\lambda_1| \ll \frac{N}{V},\ |\lambda_2^{'}| = |\lambda_2| \ll \frac{N}{W}\} := M_0.$$

Zunächst zeigen wir $V, W \ll N$ und $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll \delta$.

Die beiden nicht-kollinearen Vektoren $\vec{m}_1, \vec{m}_2 \in M$ liegen auch in $L$, sodass insbesondere $\vec{m}_1 = \alpha_1\vec{v} + \beta_1\vec{w}$ sowie $\vec{m}_2 = \alpha_2\vec{v} + \beta_2\vec{w}$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.
Da $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ nicht-kollinear sind, muss $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ und $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$ sein.
Aus *HS1 Lemma 10.1* (i) folgt $N \geq \|\vec{m}_1\| \gg \|\alpha_1\vec{v}\| + \|\beta_1\vec{w}\| = |\alpha_1| \cdot V + |\beta_1| \cdot W$ sowie analog dazu $N \gg |\alpha_2| \cdot V + |\beta_2| \cdot W$ ($\Leftarrow \vec{m}_1, \vec{m}_2 \in M$). Somit ist $N \gg |\alpha_1| \cdot V$, $|\alpha_2| \cdot V$, $|\beta_1| \cdot W$, $|\beta_2| \cdot W$, wobei wegen $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ und $(\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$ ein Index $1 \leq i \leq 2$ bzw. $1 \leq j \leq 2$ mit $|\alpha_i| \geq 1$ bzw. $|\beta_j| \geq 1$ existiert, woraus direkt $N \gg V$ und $N \gg W$ folgt.

Der Vektor $\vec{a} = \vec{d}_{a_1,a_2} + \vec{d}_{\perp}$ ist die Summe zweier Vektoren $\vec{d}_{a_1,a_2} \in span(L)$ und $\vec{d}_{\perp} \perp span(L)$ (vgl. Def. $\vec{d}_{a_1,a_2}$, Skizze 1 auf S.211), was $\epsilon_1 = |\langle\vec{v}, \vec{a}\rangle| = |\langle\vec{v}, \vec{d}_{a_1,a_2}\rangle| \leq V \cdot \|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \ll N \cdot \frac{1}{X} < \delta$ und analog dazu $\epsilon_2 \ll \delta$ liefert ($\Leftarrow \langle\vec{v}, \vec{d}_{\perp}\rangle = \langle\vec{w}, \vec{d}_{\perp}\rangle = 0$). Zusammenfassend haben wir

$$(10.1.2) \quad V, W \ll N \quad \wedge \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \ll \delta$$

gezeigt. Wir definieren

$$M_1 := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists\, (\lambda_1^{'}, \lambda_2^{'}) \in \mathbb{Z}^2 :\ |\lambda_1^{'}| = |\lambda_1| \ll \frac{N}{V},\ |\lambda_2^{'}| = |\lambda_2| \ll \frac{N}{W},$$
$$|\lambda_1^{'}\epsilon_1 + \lambda_2^{'}\epsilon_2| \leq \delta\}.$$

Da jeder Vektor $\vec{n} \in M_0$ eindeutig in der Form $\vec{n} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ darstellbar ist, weil $\vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig sind, existiert eine Bijektion $f : M_0 \longrightarrow M_1$, sodass insbesondere $\#M_0 = \#M_1$ gilt. Wir merken an, dass $M_0$ und $M_1$ endlich sind und setzen weiter

$$M_2 := \{(\lambda_1^{'}, \lambda_2^{'}) \in \mathbb{Z}^2 \mid |\lambda_1^{'}| \ll \frac{N}{V},\ |\lambda_2^{'}| \ll \frac{N}{W},\ |\lambda_1^{'}\epsilon_1 + \lambda_2^{'}\epsilon_2| \leq \delta\}.$$

Damit kommt $\#M_1 \leq 4 \cdot \#M_2$, denn jedes Element $(\lambda_1^{'}, \lambda_2^{'}) \in M_2$ wird von höchstens vier verschiedenen Elementen aus $M_1$, nämlich $(\lambda_1', \lambda_2')$, $(\lambda_1', -\lambda_2')$, $(-\lambda_1', \lambda_2')$ und $(-\lambda_1', -\lambda_2')$, induziert. Also ist $\#M \leq \#M_0 \leq \#M_1 = 4 \cdot \#M_2$ nach (10.1.1), was wegen $\delta K N^2 \ll \#M$ ($\Leftarrow (*)$) die Gültigkeit von

$$(10.1.3) \quad \delta K N^2 \ll \#M_2$$

impliziert. Nun zählen wir die Elemente von $M_2$.

Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ die Konstanten in $|\lambda_1'| \ll \frac{N}{V}$ bzw. $|\lambda_2'| \ll \frac{N}{W}$ aus der Definition von $M_2$. Wegen $M_2 \subseteq \{(\lambda_1', \lambda_2') \in \mathbb{Z}^2 \mid |\lambda_1'| \leq k_1 \cdot \frac{N}{V},\ |\lambda_2'| \leq k_2 \cdot \frac{N}{W}\} := M_3$ gilt insbesondere

$$\#M_2 \leq \#M_3 \ll \frac{N^2}{VW},$$

denn für $\lambda_1' \in \mathbb{Z}$ bzw. $\lambda_2' \in \mathbb{Z}$ kommen höchstens $2 \cdot \lfloor k_1 \cdot \frac{N}{V} \rfloor + 1 \ll \frac{N}{V}$ bzw. $2 \cdot \lfloor k_2 \cdot \frac{N}{W} \rfloor + 1 \ll \frac{N}{W}$ Werte in Frage, wenn wir $\frac{N}{V} \gg 1$ und $\frac{N}{W} \gg 1$ ($\Leftarrow$ (10.1.2)) nutzen.

Ferner ist $M_2 \subseteq \{(\lambda_1', \lambda_2') \in \mathbb{Z}^2 \mid |\lambda_1'| \leq k_1 \cdot \frac{N}{V},\ |\lambda_1'\epsilon_1 + \lambda_2'\epsilon_2| \leq \delta\} := M_4$. Wir erinnern uns an $\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0$. Sei zunächst $\epsilon_2 > 0$, sodass aus (10.1.2) insbesondere $\frac{\delta}{\epsilon_2} \gg 1$ und $\frac{N}{V} \gg 1$ kommt. Für festes $\lambda_1' \in \mathbb{Z}$ mit $|\lambda_1'| \leq k_1 \cdot \frac{N}{V}$ gibt es wegen

$$-\frac{\delta}{\epsilon_2} - \lambda_1' \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \leq \lambda_2' \leq \frac{\delta}{\epsilon_2} - \lambda_1' \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \qquad (\Leftrightarrow |\lambda_1'\epsilon_1 + \lambda_2'\epsilon_2| \leq \delta)$$

höchstens $\lceil 2 \cdot \frac{\delta}{\epsilon_2} \rceil + 1 \ll \frac{\delta}{\epsilon_2}$ Werte für $\lambda_2' \in \mathbb{Z}$ ($\Leftarrow \frac{\delta}{\epsilon_2} \gg 1$), für die $|\lambda_1'\epsilon_1 + \lambda_2'\epsilon_2| \leq \delta$ erfüllt ist und damit $(\lambda_1', \lambda_2')$ in $M_4$ liegt, denn $\lambda_2'$ ist in einem Intervall der Breite $\lceil 2 \cdot \frac{\delta}{\epsilon_2} \rceil$ enthalten. Folglich gibt es $\ll (2 \cdot \lfloor k_1 \cdot \frac{N}{V} \rfloor + 1) \cdot \frac{\delta}{\epsilon_2} \ll \frac{N\delta}{V\epsilon_2}$ Paare $(\lambda_1', \lambda_2') \in M_4$ ($\Leftarrow \frac{N}{V} \gg 1$), was

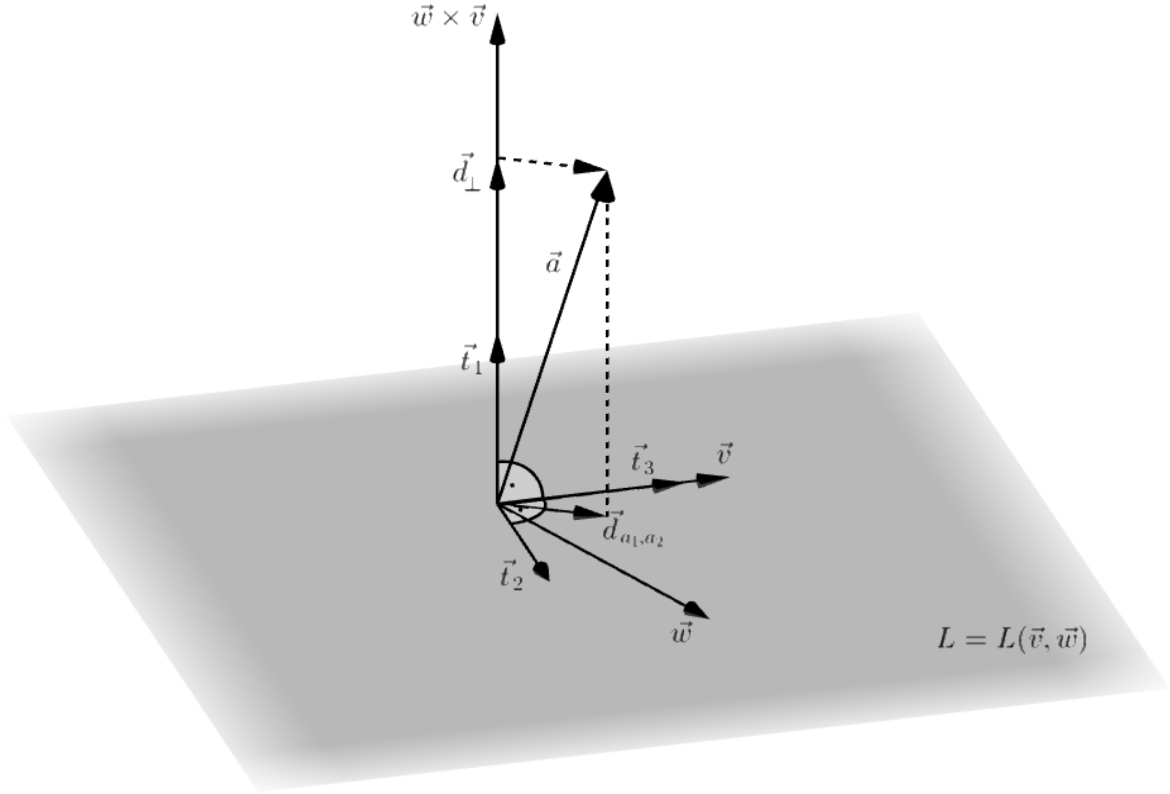
$$\#M_2 \leq \#M_4 \ll \frac{N\delta}{V\epsilon_2}$$

liefert. Im Fall $\epsilon_2 = 0$ gilt nach der Konvention $\frac{1}{0} = +\infty$ die Abschätzung $\#M_2 \ll \frac{N\delta}{V\epsilon_2}$ ebenfalls, ist jedoch trivial, da $M_2 \subseteq M_1$ endlich ist. Mit derselben Idee erhalten wir $\#M_2 \ll \frac{N\delta}{W\epsilon_1}$, indem wir $\lambda_2' \in \mathbb{Z}$ mit $|\lambda_2'| \leq k_2 \cdot \frac{N}{W}$ fixieren und sehen, dass $\lambda_1'$ für $\epsilon_1 > 0$ in einem Intervall der Breite $\lceil 2 \cdot \frac{\delta}{\epsilon_1} \rceil$ enthalten ist. Insgesamt kommt nach (10.1.3)

$$(10.1.4) \quad \delta K N^2 \ll \#M_2 \ll \min\{\frac{N^2}{VW}, \frac{N\delta}{V\epsilon_2}, \frac{N\delta}{W\epsilon_1}\}.$$

Da $\vec{w}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ und somit $\vec{w}, \vec{v}, \vec{w} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, gibt es eine Orthonormalbasis $\vec{t_1}, \vec{t_2}, \vec{t_3} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{t_1} \parallel \vec{w} \times \vec{v}$, also $\vec{t_1} \perp \vec{w}, \vec{v}$ sowie $\vec{t_2} \perp \vec{v}$ und $\vec{t_3} \parallel \vec{v}$, wobei $\vec{t_1} \perp span(L)$ und $\vec{t_2}$, $\vec{t_3} \in span(L)$ gilt. Diese ist in Skizze 1 dargestellt und lässt sich wie folgt definieren

$$(10.1.5) \quad \vec{t_1} = \frac{\vec{w} \times \vec{v}}{\|\vec{w} \times \vec{v}\|}, \quad \vec{t_2} = \frac{\vec{v} \times \vec{t_1}}{\|\vec{v} \times \vec{t_1}\|}, \quad \vec{t_3} = \vec{t_1} \times \vec{t_2}.$$




Skizze 1: Lage bestimmter Vektoren zum Gitter $L = L(\vec{v}, \vec{w})$

Dabei erinnern wir an $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sei $t_{i,j}$ die $j$.-Komponente des Vektors $\vec{t_i}$ für $1 \le i, j \le 3$. Im Folgenden zeigen wir $t_{1,3} \neq 0$, $|\frac{t_{1,1}}{t_{1,3}}| \ll 1$, $|\frac{t_{1,2}}{t_{1,3}}| \ll 1$ sowie $|\frac{t_{2,3}}{t_{1,3}}| \ll 1$ und $|\frac{t_{3,3}}{t_{1,3}}| \ll 1$.

Wir erinnern uns, dass $\vec{a} = \vec{d}_{a_1,a_2} + \vec{d_\perp}$ nach Definition von $\vec{d}_{a_1,a_2}$ gilt, wobei $\vec{d}_{a_1,a_2} \in span(\vec{v}, \vec{w})$, $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \le \frac{1}{X}$ und $\vec{d_\perp} \perp span(\vec{v}, \vec{w})$ bzw. $\vec{d_\perp} \parallel \vec{w} \times \vec{v}$ ist ($\Leftarrow L = L(\vec{v}, \vec{w})$). Nun ist $\vec{d_\perp} = s \cdot \vec{t_1}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $\|s \cdot \vec{t_1} - \vec{a}\| = \|\vec{d_\perp} - \vec{a}\| = \|-\vec{d}_{a_1,a_2}\| \le \frac{1}{X}$, also

$\left\| \begin{pmatrix} s \cdot t_{1,1} \\ s \cdot t_{1,2} \\ s \cdot t_{1,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1/X \\ a_2/X \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \le \frac{1}{X}$. Daraus folgt $|s \cdot t_{1,1} - \frac{a_1}{X}| \le \frac{1}{X}$, $|s \cdot t_{1,2} - \frac{a_2}{X}| \le \frac{1}{X}$ und

$|s \cdot t_{1,3} - 1| \leq \frac{1}{X}$, was wegen $X > 1$ und der Dreiecksungleichung die Gültigkeit von

$$|s \cdot t_{1,1}| \leq \frac{a_1 + 1}{X} \quad \wedge \quad |s \cdot t_{1,2}| \leq \frac{a_2 + 1}{X} \quad \wedge \quad 0 < \frac{X-1}{X} \leq s \cdot t_{1,3} \leq \frac{X+1}{X}$$

impliziert, denn $a_1, a_2 \geq 0$. Somit ist $0 < s \cdot t_{1,3}$ und daher $s \neq 0$ und $t_{1,3} \neq 0$. Aus $a_1 < X$ und $X > 1$ folgt $|\frac{t_{1,1}}{t_{1,3}}| = \frac{|s \cdot t_{1,1}|}{|s \cdot t_{1,3}|} = \frac{|s \cdot t_{1,1}|}{s \cdot t_{1,3}} \leq \frac{(a_1+1)/X}{(X-1)/X} = \frac{a_1+1}{X-1} \ll 1$. Analog dazu schließen wir auf $|\frac{t_{1,2}}{t_{1,3}}| \ll 1$ mithilfe $a_2 < X$.

Ferner ist $\vec{t_3} = \vec{t_1} \times \vec{t_2} = \begin{pmatrix} t_{1,1} \\ t_{1,2} \\ t_{1,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_{2,1} \\ t_{2,2} \\ t_{2,3} \end{pmatrix}$, also $t_{3,3} = t_{1,1} \cdot t_{2,2} - t_{2,1} \cdot t_{1,2}$. Dies liefert

$$|\frac{t_{3,3}}{t_{1,3}}| = |\frac{t_{1,1} \cdot t_{2,2} - t_{2,1} \cdot t_{1,2}}{t_{1,3}}| \leq |t_{2,2}| \cdot |\frac{t_{1,1}}{t_{1,3}}| + |t_{2,1}| \cdot |\frac{t_{1,2}}{t_{1,3}}| \ll |t_{2,2}| + |t_{2,1}| \ll 1,$$

wenn wir $|\frac{t_{1,1}}{t_{1,3}}| \ll 1$ sowie $|\frac{t_{1,2}}{t_{1,3}}| \ll 1$ benutzen und $\|\vec{t_2}\| = 1$ beachten, denn letzteres impliziert $|t_{2,2}|, |t_{2,1}| \leq 1$. Analog dazu erhalten wir $|\frac{t_{2,3}}{t_{1,3}}| \ll 1$ mithilfe von $\vec{t_2} = \vec{t_3} \times \vec{t_1}$ bzw. $t_{2,3} = t_{3,1} \cdot t_{1,2} - t_{1,1} \cdot t_{3,2}$ und $\|\vec{t_3}\| = 1$, weil letzteres $|t_{3,2}|, |t_{3,1}| \leq 1$ liefert. Dabei beachten wir die Rechte-Hand-Regel für das Kreuzprodukt $\vec{t_2} = \vec{t_3} \times \vec{t_1}$ in Skizze 1. Somit gilt insgesamt

$$(10.1.6) \quad t_{1,3} \neq 0, \quad |\frac{t_{2,3}}{t_{1,3}}| \ll 1, \quad |\frac{t_{3,3}}{t_{1,3}}| \ll 1.$$

Wir setzen $\vec{w} \times \vec{v} := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$ , wobei $\vec{w} \times \vec{v}$ nach Def. des Kreuzproduktes und $\vec{w}, \vec{v} \in L \subseteq \mathbb{Z}^3$ ebenfalls in $\mathbb{Z}^3$ liegt. Aus (10.1.5) folgt $\vec{w} \times \vec{v} = r \cdot \vec{t_1}$ mit $r \in \mathbb{R}$, sodass $0 = c_3 = r \cdot t_{1,3}$ insbesondere $r = 0$ ($\Leftarrow t_{1,3} \neq 0$) und damit $\vec{w} \times \vec{v} = \vec{0}$ liefert, was der linearen Unabhängigkeit von $\vec{w}$ und $\vec{v}$ widerspricht. Also ist $c_3 \neq 0$ und $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$.

Definiere $\vec{b} := \vec{a} - \frac{1}{c_3} \cdot \vec{w} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ($\Leftarrow c_3 \neq 0$), sodass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b} = \lambda_1 \vec{t_1} + \lambda_2 \vec{t_2} + \lambda_3 \vec{t_3}$ existieren, weil $\vec{t_1}, \vec{t_2}, \vec{t_3}$ Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Ferner gilt

$$|\langle \vec{v}, \vec{b} \rangle| = |\langle \vec{v}, \vec{a} - \frac{1}{c_3} \cdot \vec{w} \times \vec{v} \rangle| = |\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle| = \epsilon_1 \qquad \wedge$$
$$|\langle \vec{w}, \vec{b} \rangle| = |\langle \vec{w}, \vec{a} - \frac{1}{c_3} \cdot \vec{w} \times \vec{v} \rangle| = |\langle \vec{w}, \vec{a} \rangle| = \epsilon_2.$$

Bezeichnen wir mit $\gamma := \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ den von Vektor $\vec{v}$ und Vektor $\vec{w}$ eingeschlossenen Winkel, so gilt $|\sin\gamma| \gg 1$ nach *HS1 Lemma 10.1* (ii). Wir finden

$$\epsilon_1 = |\langle \vec{v}, \vec{b} \rangle| = |\langle \vec{v}, \lambda_1 \vec{t_1} + \lambda_2 \vec{t_2} + \lambda_3 \vec{t_3} \rangle| = |\langle \vec{v}, \lambda_3 \vec{t_3} \rangle| = |\lambda_3| \cdot V \cdot |\cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{t_3})| = |\lambda_3| \cdot V,$$

denn $\vec{t_1}, \vec{t_2} \perp \vec{v}$ und $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{t_3}) = 0$, weil $\vec{v}$ und $\vec{t_3}$ kollinear sind. Also ist $|\lambda_3| = \frac{\epsilon_1}{V}$. Weiter gilt

$$\epsilon_2 = |\langle \vec{w}, \vec{b} \rangle| = |\langle \vec{w}, \lambda_1 \vec{t_1} + \lambda_2 \vec{t_2} + \lambda_3 \vec{t_3} \rangle| = |\langle \vec{w}, \lambda_2 \vec{t_2} + \lambda_3 \vec{t_3} \rangle| = |\lambda_2 \cdot \langle \vec{w}, \vec{t_2} \rangle + \lambda_3 \cdot \langle \vec{w}, \vec{t_3} \rangle|$$

wegen $\vec{t_1} \perp \vec{w}$ bzw. $\langle \vec{w}, \lambda_1 \vec{t_1} \rangle = 0$. Anhand von Skizze 1 sehen wir leicht, dass

$$\langle \vec{w}, \vec{t_2} \rangle = W \cdot \cos\sphericalangle(\vec{w}, \vec{t_2}) = W \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{v}, \vec{t_2}) - \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})) = W \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma) = W \cdot \sin(\gamma)$$

wegen $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{t_2}) = \frac{\pi}{2}$ sowie $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt und weiterhin

$$\langle \vec{w}, \vec{t_3} \rangle = W \cdot \cos\sphericalangle(\vec{w}, \vec{t_3}) = W \cdot \cos\sphericalangle(\vec{w}, \vec{v}) = W \cdot \cos(\gamma)$$

ist, weil $\vec{v}$ und $\vec{t_3}$ kollinear sind und dieselbe Richtung haben. Insgesamt erhalten wir

$$\epsilon_2 = |\lambda_2 \cdot W \cdot \sin(\gamma) + \lambda_3 \cdot W \cdot \cos(\gamma)| = W \cdot |\lambda_2 \cdot \sin(\gamma) + \lambda_3 \cdot \cos(\gamma)|.$$

Nach $|\sin(\gamma)| \gg 1$ sowie $1 = \cos(\gamma)^2 + \sin(\gamma)^2$ gilt $|\cos(\gamma)| \ll 1$ und daher

$$|\lambda_2 \cdot \sin(\gamma) + \lambda_3 \cdot \cos(\gamma)| = |\sin(\gamma)| \cdot |\lambda_2 + \lambda_3 \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}| \gg |\lambda_2 + \lambda_3 \cdot c|$$

mit $c := \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \in \mathbb{R}$, $|c| \ll 1$ ($\Leftarrow \sin(\gamma) \neq 0 \Leftarrow |\sin(\gamma)| \gg 1$). Folglich ist $\epsilon_2 \gg W \cdot |\lambda_2 + \lambda_3 \cdot c|$ und $|\lambda_3| = \frac{\epsilon_1}{V}$, sodass $|\lambda_2| - |\lambda_3 \cdot c| \leq |\lambda_2 + \lambda_3 \cdot c| \ll \frac{\epsilon_2}{W}$ gilt. Dies liefert $|\lambda_2| \ll \frac{\epsilon_2}{W} + |\lambda_3| \cdot |c| \ll \frac{\epsilon_2}{W} + \frac{\epsilon_1}{V}$:

$$(10.1.7) \quad |\lambda_2| + |\lambda_3| \ll \frac{\epsilon_1}{V} + \frac{\epsilon_2}{W}.$$

Aus $\vec{b} = \lambda_1 \vec{t_1} + \lambda_2 \vec{t_2} + \lambda_3 \vec{t_3} = \vec{a} - \frac{1}{c_3} \cdot \vec{w} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1/X \\ a_2/X \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1/c_3 \\ c_2/c_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1/X - c_1/c_3 \\ a_2/X - c_2/c_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt

$\lambda_1 \cdot t_{1,3} + \lambda_2 \cdot t_{2,3} + \lambda_3 \cdot t_{3,3} = 0$ und daraus $\lambda_1 = -\frac{t_{2,3}}{t_{1,3}} \cdot \lambda_2 + -\frac{t_{3,3}}{t_{1,3}} \cdot \lambda_3$ ($\Leftarrow t_{1,3} \neq 0$).

Nach (10.1.7) und (10.1.6) ist

$$(10.1.8)\quad \|\begin{pmatrix} a_1/X - c_1/c_3 \\ a_2/X - c_2/c_3 \end{pmatrix}\| = \|\vec{b}\| = \|\lambda_1\vec{t_1} + \lambda_2\vec{t_2} + \lambda_3\vec{t_3}\| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| =$$
$$|-\frac{t_{2,3}}{t_{1,3}} \cdot \lambda_2 + -\frac{t_{3,3}}{t_{1,3}} \cdot \lambda_3| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \leq |\frac{t_{2,3}}{t_{1,3}}| \cdot |\lambda_2| + |\frac{t_{3,3}}{t_{1,3}}| \cdot |\lambda_3| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \ll$$
$$|\lambda_2| + |\lambda_3| \ll \frac{\epsilon_1}{V} + \frac{\epsilon_2}{W}.$$

Aus (10.1.4) folgt $VW \ll \frac{1}{\delta K} < \frac{X}{NK}$ ($\Leftarrow \delta > \frac{N}{X}$) sowie $\epsilon_1 \ll \frac{1}{NKW}$ und $\epsilon_2 \ll \frac{1}{NKV}$, was

$$\|\begin{pmatrix} a_1/X - c_1/c_3 \\ a_2/X - c_2/c_3 \end{pmatrix}\| \ll \frac{\epsilon_1}{V} + \frac{\epsilon_2}{W} \ll \frac{1}{NKVW}$$

liefert. Wegen $|c_3| \leq \|\vec{w} \times \vec{v}\| \leq VW \ll \frac{X}{NK}$ und $c_3 \neq 0$ ist daher

$$\|\begin{pmatrix} a_1/X - c_1/c_3 \\ a_2/X - c_2/c_3 \end{pmatrix}\| \ll \frac{1}{NK|c_3|}.$$

Setzen wir $q := \begin{cases} c_3 & \text{, falls } c_3 > 0 \\ -c_3 & \text{, falls } c_3 < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}$ und $d_1 := \begin{cases} c_1 & \text{, falls } c_3 > 0 \\ -c_1 & \text{, falls } c_3 < 0 \end{cases} \in \mathbb{Z}$ sowie

$d_2 := \begin{cases} c_2 & \text{, falls } c_3 > 0 \\ -c_2 & \text{, falls } c_3 < 0 \end{cases} \in \mathbb{Z}$ ($\Leftarrow c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z},\ c_3 \neq 0$), so gilt stets

$\frac{c_1}{c_3} = \frac{d_1}{q}$ und $\frac{c_2}{c_3} = \frac{d_2}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}$, $q = |c_3| \ll \frac{X}{NK}$. Ferner ist

$$\|\begin{pmatrix} a_1/X - d_1/q \\ a_2/X - d_2/q \end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix} a_1/X - c_1/c_3 \\ a_2/X - c_2/c_3 \end{pmatrix}\| \ll \frac{1}{NK|c_3|} = \frac{1}{NKq},$$

was nach Definition der euklidischen Norm $\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq |x_1|, |x_2|$ die Gültigkeit von

$$|\frac{a_1}{X} - \frac{d_1}{q}| \ll \frac{1}{NKq} \quad \text{und} \quad |\frac{a_2}{X} - \frac{d_2}{q}| \ll \frac{1}{NKq}$$

liefert. Damit ist Lemma 10.1 bewiesen.

$\square$

# 11. Geradenbeitrag

In diesem Abschnitt beweisen wir die verbliebenen Lemmata 11.1 und 11.2, die wir für den Nachweis von Proposition 9.4 benötigen.

**Lemma 11.1**:
Gegeben seien $N, K, \delta \in \mathbb{R}^+$ mit $N \gg X^{9/25}$, $\delta > \frac{N}{X}$ und $K \gg 1$. Betrachte die Menge $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2(N, K, \delta)$ aller Paare $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0^2 \cap [0, X[^2$ mit der Eigenschaft :

$(*)$ Es gibt ein Gitter $L = L_{a_1,a_2} \subseteq \mathbb{Z}^3$ mit $dim\, L \leq 2$ und $\|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \dfrac{1}{X}$, sodass
$M = M_{a_1,a_2} = \{\vec{n} \in L_{a_1,a_2} \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\}$ stets $\#M \gg \delta N^2 K$
Punkte enthält und in einer Geraden $L^{'} = L^{'}_{a_1,a_2} \subseteq \mathbb{R}^3$ enthalten ist.

Dabei sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{d}_{a_1,a_2}$ wie in Proposition 9.3 erklärt. Dann gibt es für jedes Paar $(a_1, a_2) \in \mathcal{B}_2$ stets einen Vektor $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{Z}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}$ mit $|v_i| \ll \frac{X}{N^2 K}$ $\forall\ 1 \leq i \leq 4$ und $v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0$. Für $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$ ist daher insbesondere $1 \ll \frac{X}{N^2 K}$.

**Beweis**:
Sei $(a_1, a_2) \in \mathcal{B}_2$ fixiert. Nach $(*)$ ist $M = M_{a_1,a_2}$ in einer Geraden $L^{'} = L^{'}_{a_1,a_2} \subseteq \mathbb{R}^3$ enthalten und es gilt $M \subseteq L = L_{a_1,a_2} \subseteq \mathbb{Z}^3$, also auch $M \subseteq L^{'} \cap L \subseteq L^{'} \cap \mathbb{Z}^3 =: \Lambda$. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
M \subseteq M \cap \Lambda &= \{\vec{n} \in L \cap \Lambda \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\} \\
&\subseteq \{\vec{n} \in \Lambda \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\} := M_0,
\end{aligned}
$$

sodass insbesondere $\delta N^2 K \ll \#M \leq \#M_0$ gilt. Ferner ist $M \subseteq L^{'} \cap L \subseteq L^{'} \cap span(L)$.
Die Punkte aus $L$ liegen stets in $span(L)$, wobei $span(L)$ im Fall $dim\, L = 2$ eine Ebene und im Fall $dim\, L = 1$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ definiert. Somit liegt entweder die Gerade $L^{'}$ in $span(L)$ oder $L^{'}$ und $span(L)$ haben nur endlich viele Punkte gemeinsam, nämlich genau einen oder keinen. Im zweiten Fall ist $\#M \leq \#L^{'} \cap span(L) \leq 1$ und daher $1 \geq \#M \gg \delta N^2 K > \frac{N}{X} \cdot N^2 K \gg X^{2/25}$ ($\Leftarrow N \gg X^{9/25},\ K \gg 1$), wobei letzteres für hinreichend große $X$ ausgeschlossen ist. Also gilt

$$(11.1.1) \quad L^{'} \subseteq span(L).$$

Wir zeigen zunächst, dass $\Lambda = L^{'} \cap \mathbb{Z}^3$ ein Gitter der Dimension $dim\, \Lambda = 1$ ist.

Wir wissen, dass $\mathbb{Z}^3$ ein Gitter ist und daher ist nach [12, S.10-11] insbesondere $(\mathbb{Z}^3, +)$ eine diskrete, additive Untergruppe von $\mathbb{R}^3$, womit selbiges auch auf $(\Lambda, +)$ zutrifft. Dies weisen wir nun nach.

Wegen $\vec{0} \in M$ ist auch $\vec{0} \in L^{'}$ $(\Leftarrow M \subseteq L^{'})$ und daher $L^{'}$ eine Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$, sodass $\Lambda = L^{'} \cap \mathbb{Z}^3$ abgeschlossen ist bzgl. $+$ $(\Leftarrow \vec{x} + \vec{y} \in L^{'} \cap \mathbb{Z}^3 \;\; \forall \; \vec{x}, \vec{y} \in L^{'} \cap \mathbb{Z}^3)$, den Nullvektor $\vec{0}$ enthält und für alle $\vec{x} \in \Lambda$ auch ihr Inverse $-\vec{x}$ in $\Lambda$ liegt, denn aus $\vec{x} \in L^{'}$ folgt direkt $-\vec{x} \in L^{'}$. Die Diskretheit von $\mathbb{Z}^3$ vererbt sich nach $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^3$, sodass $(\Lambda, +)$ eine diskrete, additive Untergruppe von $\mathbb{R}^3$ ist und damit nach Satz 1.3.1 [12, S.11] ein Gitter der Dimension $dim\,\Lambda = 1$. Letzteres kommt aus $L^{'} \supseteq \Lambda \supseteq M$ und $\#M \gg X^{2/25}$, weil somit $\Lambda$ bzw. $M$ für hinreichend große $X$ mindestens einen Vektor $\neq \vec{0}$ enthält. Dies liefert insgesamt

$$(11.1.2) \quad M_0 = \{\vec{n} \in \Lambda \mid |\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle| \leq \delta,\ \|\vec{n}\| \leq N\} \text{ enthält } \#M_0 \gg \delta N^2 K \text{ Punkte,}$$
$$\text{wobei } \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^3 \text{ ein Gitter mit } dim\,\Lambda = 1 \text{ ist.}$$

Aus Proposition 3.1.9 in [11, S.205] folgt, dass $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^3$ eine MR-Basis $\vec{v} \in \mathbb{Z}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ besitzt, also $\Lambda = \{\lambda_1 \cdot \vec{v} \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Wir setzen $V := \|\vec{v}\| \in \mathbb{R}^+$ $(\Leftarrow \vec{v} \neq \vec{0})$ sowie $\epsilon_1 := |\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle| \in \mathbb{R}_0^+$. Wegen $\#M_0 \gg \delta N^2 K > \frac{N}{X} \cdot N^2 K \gg X^{2/25}$ $(\Leftarrow N \gg X^{9/25},\ K \gg 1)$ enthält $M_0$ für hinreichend große $X$ mindestens einen Punkt $\vec{n} \in M_0$, $\vec{n} \neq \vec{0}$. Nach (11.1.2) gilt $\vec{n} = \lambda_1 \cdot \vec{v} \in \Lambda$ mit $\lambda_1 \in \mathbb{Z},\ \lambda_1 \neq 0$ und folglich

$$V = \|\vec{v}\| \leq |\lambda_1| \cdot \|\vec{v}\| = \|\vec{n}\| \leq N.$$

Ferner impliziert $\vec{v} \in \Lambda \subseteq L^{'} \subseteq span(L)$ $(\Leftarrow (11.1.1))$ sowie $\vec{a} = \vec{d}_{a_1,a_2} + \vec{d}_{\perp}$ mit $\vec{d}_{a_1,a_2} \in span(L)$ und $\vec{d}_{\perp} \perp span(L)$ (vgl. auch Skizze 1 in Lemma 10.1) die Gültigkeit von

$$\epsilon_1 = |\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle| = |\langle \vec{v}, \vec{d}_{a_1,a_2} \rangle| \leq V \cdot \|\vec{d}_{a_1,a_2}\| \leq \frac{V}{X} \leq \frac{N}{X} < \delta,$$

wenn wir $\vec{v} \in span(L)$ beachten. Zusammenfassend gilt

$$(11.1.3) \quad V \leq N \quad \wedge \quad \epsilon_1 \leq \delta.$$

Für $\vec{x} \in M_0$ ist $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{v} \in \Lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $N \geq \|\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$ bzw. $|\lambda| \leq \frac{N}{V}$ sowie $\delta \geq |\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle| = |\lambda \cdot \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle| = |\lambda| \cdot \epsilon_1$ bzw. $|\lambda| \leq \frac{\delta}{\epsilon_1}$, sodass

$$(11.1.4) \quad M_0 \subseteq \{\lambda \cdot \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{Z},\ |\lambda| \leq \frac{N}{V},\ |\lambda| \leq \frac{\delta}{\epsilon_1}\} := M_1$$

gilt. Einerseits liefert dies $M_1 \subseteq \{\lambda \cdot \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{Z},\ |\lambda| \leq \frac{N}{V}\}$ und folglich

$$\#M_0 \leq \#M_1 \leq 2 \cdot \lfloor \frac{N}{V} \rfloor + 1 \ll \frac{N}{V}.$$

Andererseits kommt $M_1 \subseteq \{\lambda \cdot \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{Z},\ |\lambda| \leq \frac{\delta}{\epsilon_1}\}$ und daher

$$\#M_0 \leq \#M_1 \leq 2 \cdot \lfloor \frac{\delta}{\epsilon_1} \rfloor + 1 \ll \frac{\delta}{\epsilon_1},$$

wobei wir beide Male im letzten Schritt (11.1.3) verwenden und beachten, dass die letzte Abschätzung aufgrund der Konvention $\frac{1}{0} = +\infty$ auch im Fall $\epsilon_1 = 0$ gilt, denn $M_1$ ist endlich. Insgesamt haben wir

$$(11.1.5) \quad \delta N^2 K \ll \#M_0 \leq \#M_1 \ll \min\{\frac{N}{V}, \frac{\delta}{\epsilon_1}\}$$

gezeigt. Leichte Umformung von (11.1.5) liefert $V \ll \frac{1}{NK\delta} < \frac{X}{N^2K}$ $(\delta > \frac{N}{X})$ und $\epsilon_1 \ll \frac{1}{N^2K}$.

Aus $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3,\ \vec{v} \neq \vec{0}$ folgt $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ und wir definieren

$v_4 := -(v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X) \in \mathbb{Z}$, sodass

$$|v_4| = |v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X| = |\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ X \end{pmatrix} \rangle| = |X \cdot \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle| = X \cdot \epsilon_1 \ll \frac{X}{N^2 K}$$

ist. Also gilt $v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0$ sowie $|v_4| \ll \frac{X}{N^2K}$ als auch $|v_i| \leq V \ll \frac{X}{N^2K}$ für alle $1 \leq i \leq 3$, womit Lemma 11.1 bewiesen ist.

$\square$

Für den Beweis von Lemma 11.2 benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

*HS1 Lemma 11.2*:

Gegeben sei ein Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^2$ der Dimension 2 und $N_1, N_2 \in \mathbb{R}^+$. Dann liegen in der Menge

$$\Lambda^* := \{\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \Lambda \mid |b_1| \leq N_1 \ \wedge \ |b_2| \leq N_2\}$$

nur $\ll 1 + \frac{\max\{N_1,N_2\}}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{N_1 N_2}{det\,\Lambda}$ Vektoren, wobei $\vec{v}_1 \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}$ ein kürzester Vektor in $\Lambda \backslash \{\vec{0}\}$ ist.

*Beweis*:

Nach Proposition 3.1.9 [11, S.205] besitzt das Gitter $\Lambda$ eine MR-Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \Lambda$, wobei $\vec{v}_1 \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}$ ein kürzester Vektor in $\Lambda \backslash \{\vec{0}\}$ ist und wir o.B.d.A. die MR-Basisvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ derart wählen können, dass $0 \leq \alpha := \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \leq \frac{\pi}{2}$ gilt (vgl. S.208 im Beweis zu Lemma 10.1). Ferner dürfen wir aus Symmetriegründen annehmen, dass $\vec{v}_1$ im ersten Quadranten liegt. Analog zum Nachweis von *HS1 Lemma 10.1* (ii) kommt $|\sin(\alpha)| \gg 1$, also $|\sin(\alpha)| \asymp 1$.

Wir betrachten zunächst das von den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannte Dreieck $OV_1V_2$, wobei die Eckpunkte $V_1$ und $V_2$ die Ortsvektoren $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$ besitzen.

Da $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ eine MR-Basis von $\Lambda$ ist, bilden je zwei Vektoren aus $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2\}$ eine Basis von $\Lambda$ und es gilt

$$\|\vec{v}_1\| = \overline{OV_1} \leq \|\vec{v}_2\| = \overline{OV_2} \leq \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\| = \overline{V_1V_2},$$

woraus sich die Spitzwinkligkeit von $OV_1V_2$ ergibt ($\Leftarrow \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$). Ferner steht die kürzeste Höhe der Länge $h_{min}$ senkrecht auf der längsten Dreiecksseite von $OV_1V_2$, also senkrecht auf $V_1V_2$, sodass $h_{min} = \frac{2\cdot\triangle OV_1V_2}{\overline{V_1V_2}} \asymp \frac{\overline{OV_1}\cdot\overline{OV_2}}{\overline{V_1V_2}}$ gilt, wobei $\triangle OV_1V_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OV_1} \cdot \overline{OV_2} \cdot |\sin(\alpha)| \asymp \overline{OV_1} \cdot \overline{OV_2}$ der Flächeninhalt des Dreiecks $OV_1V_2$ ist. Aus $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgt $\cos(\alpha) \in [0,1]$ und es gilt

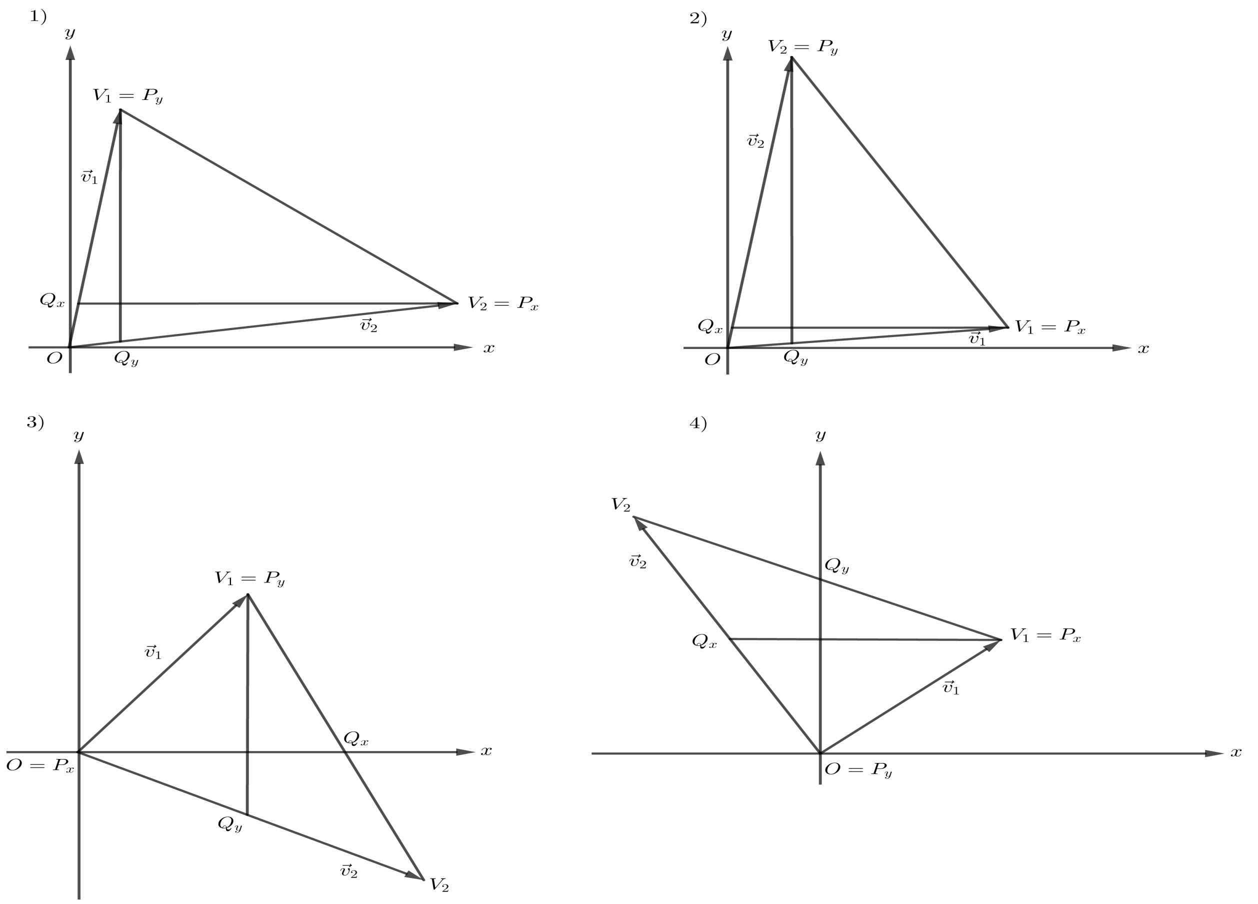
$$\overline{V_1V_2}^2 = \overline{OV_1}^2 + \overline{OV_2}^2 - 2 \cdot \overline{OV_1} \cdot \overline{OV_2} \cdot \cos(\alpha) \leq \overline{OV_1}^2 + \overline{OV_2}^2$$

nach dem Kosinussatz, was wegen $\overline{OV_1} \leq \overline{OV_2}$ insgesamt

$$h_{min} \gg \frac{\overline{OV_1} \cdot \overline{OV_2}}{\overline{V_1V_2}} \geq \frac{\overline{OV_1} \cdot \overline{OV_2}}{\sqrt{\overline{OV_1}^2 + \overline{OV_2}^2}} \geq \frac{\overline{OV_1} \cdot \overline{OV_2}}{\sqrt{2} \cdot \overline{OV_2}} \gg \overline{OV_1} = \|\vec{v}_1\|$$

liefert. Folglich besitzen alle Höhen im Dreieck $OV_1V_2$ eine Länge $\gg \|\vec{v}_1\|$.

Da $\vec{v}_1$ im ersten Quadranten liegt und $\alpha = \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist, kann $\vec{v}_2$ nicht im dritten Quadranten liegen. Somit müssen wir nur die in Skizze 1 dargestellten Fälle 1) – 4) über die Lage der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bzw. des Dreiecks $OV_1V_2$ in der Ebene unterscheiden :




Skizze 1: Lage der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bzw. des Dreiecks $OV_1V_2$ in der Ebene

In jedem der vier Fälle finden wir mithilfe einer einfachen geometrischen Überlegung sowie der Spitzwinkligkeit von Dreieck $OV_1V_2$, welche wir im Fall 1) und 2) benötigen, stets je zwei verschiedene Eckpunkte $P_x, P_y \in \{O, V_1, V_2\}$, sodass die Parallele zur $x$- bzw. $y$-Achse durch $P_x$ bzw. $P_y$ die gegenüberliegende Dreiecksseite/-gerade im Punkt $Q_x$ bzw. $Q_y$ schneidet und die Strecken $[P_xQ_x]$ sowie $[P_yQ_y]$ ganz im Dreieck $OV_1V_2$ enthalten sind.
Wir setzen $d_1 := \overline{P_xQ_x}$ und $d_2 := \overline{P_yQ_y}$. Da $h_{min}$ der kürzeste Abstand eines Eckpunktes von $OV_1V_2$ zur gegenüberliegenden Dreiecksseite/-gerade ist, kommt insgesamt

$$\begin{aligned} &(1) \quad d_1 = \overline{P_xQ_x} \geq h_{min} \gg \|\vec{v}_1\| \quad && \wedge \quad d_2 = \overline{P_yQ_y} \geq h_{min} \gg \|\vec{v}_1\|, \\ &(2) \quad [P_xQ_x] \subseteq OV_1V_2 && \wedge \quad [P_yQ_y] \subseteq OV_1V_2. \end{aligned}$$

Nun wählen wir im Fall 1) und 2) die Basis $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2$ von $\Lambda$, im Fall 3) und 4) die Basis $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = -\vec{v}_2$ von $\Lambda$, also immer diejenigen Vektoren als Basis, deren zugehörigen

Seiten im Dreieck $OV_1V_2$ die Punkte $Q_x$ bzw. $Q_y$ enthalten. Bei der Darstellung der folgenden Idee beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Fall 1) der Lage der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ in der Ebene. Für diese Idee benötigen wir nicht mehr die Eigenschaft, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ eine MR-Basis ist, sodass auch die übrigen Fälle mit der geeigneten Basiswahl (s.o.) und dem gleichen Vorgehen wie in Fall 1) behandelt werden können.

Wir wählen also die Basis $\vec{w}_1 = \vec{v}_1,\ \vec{w}_2 = \vec{v}_2$ von $\Lambda$, sodass wir

$$\Lambda = L(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\}$$

schreiben können. Sei $R = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^2 \mid |b_1| \leq N_1 \ \wedge\ |b_2| \leq N_2\}$ das Rechteck in der Ebene mit den Eckpunkten $A = \begin{pmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} N_1 \\ -N_2 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} -N_1 \\ -N_2 \end{pmatrix}$ sowie den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = 2N_1$ bzw. $\overline{BC} = \overline{DA} = 2N_2$, sodass $\Lambda^* = \Lambda \cap R$ ist.

Ferner sei $F := \{r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 \mid r_1, r_2 \in [0,1]\}$ die Grundmasche des Gitters $\Lambda = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ und $F(\vec{z}) = \{\vec{z} + r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 \mid r_1, r_2 \in [0,1]\}$ für $\vec{z} \in \Lambda$ eine beliebige zur Grundmasche $F$ kongruente Fläche, die durch einen Gittervektor $\vec{z} \in \Lambda$ parametrisiert wird und deren vier Eckpunkte $\vec{z},\ \vec{z} + \vec{v}_1,\ \vec{z} + \vec{v}_2,\ \vec{z} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ allesamt zu $\Lambda$ gehören. Insbesondere ist $F = F(\vec{0})$.

Wir denken uns die Ebene durch diese zur Grundmasche $F$ kongruenten Flächen $F(\vec{z})$ „gekachelt". Dann wird das Rechteck $R \subseteq \overset{*}{\bigcup\limits_{1 \leq i \leq n}} F(\vec{z}_i)$ durch die $n \in \mathbb{N}$ paarweise überschneidungsfreien Flächen $F(\vec{z}_i)$ mit $\vec{z}_i \in \Lambda$ überdeckt (beachte: $\vec{z}_i$ paarweise verschieden) und zwar so, dass $R$ und $F(\vec{z}_i)$ mindestens einen Punkt gemeinsam haben, also $R \cap F(\vec{z}_i) \neq \emptyset$ gilt, für alle $1 \leq i \leq n$, denn ansonsten können wir $F(\vec{z}_i)$ problemlos aus obiger Vereinigung entfernen.
Dabei verstehen wir unter je zwei überschneidungsfreien Flächen stets solche, die keine Fläche gemeinsam haben und symbolisieren die Eigenschaft $R \cap F(\vec{z}_i) \neq \emptyset\ \ \forall\ 1 \leq i \leq n$ durch $\overset{*}{\bigcup}$.
Aus $R \cap F(\vec{z}_i) \neq \emptyset$ mit $1 \leq i \leq n$ folgt, dass entweder $F(\vec{z}_i)$ ganz in $R$ enthalten ist $(F(\vec{z}_i) \subseteq R)$ oder $F(\vec{z}_i)$ mit einer der Rechtecksseiten $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ einen gemeinsamen Punkt besitzt. Gilt nämlich $F(\vec{z}_i) \nsubseteq R$ und $R \cap F(\vec{z}_i) \neq \emptyset$, so liegt ein Punkt von $F(\vec{z}_i)$ außerhalb von $R$ und ein Punkt innerhalb von $R$, sodass aufgrund der Konvexität von $F(\vec{z}_i)$ die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte ganz in $F(\vec{z}_i)$ enthalten ist und eine Rechtecksseite schneidet.
Definieren wir $I_{\subseteq} := \{1 \leq i \leq n \mid F(\vec{z}_i) \subseteq R\}$ und $I(AB) := \{1 \leq i \leq n \mid F(\vec{z}_i) \cap [AB] \neq \emptyset\}$

sowie analog dazu $I(BC)$, $I(CD)$, $I(DA)$, so haben wir insgesamt

$$(3) \quad R \subseteq \overset{*}{\bigcup_{1 \le i \le n}} F(\vec{z}_i) \quad \text{und}$$

$$(4) \quad \{1 \le i \le n\} = \{1 \le i \le n \mid R \cap F(\vec{z}_i) \neq \emptyset\} \subseteq I_{\subseteq} \cup I(AB) \cup I(BC) \cup I(CD) \cup I(DA)$$

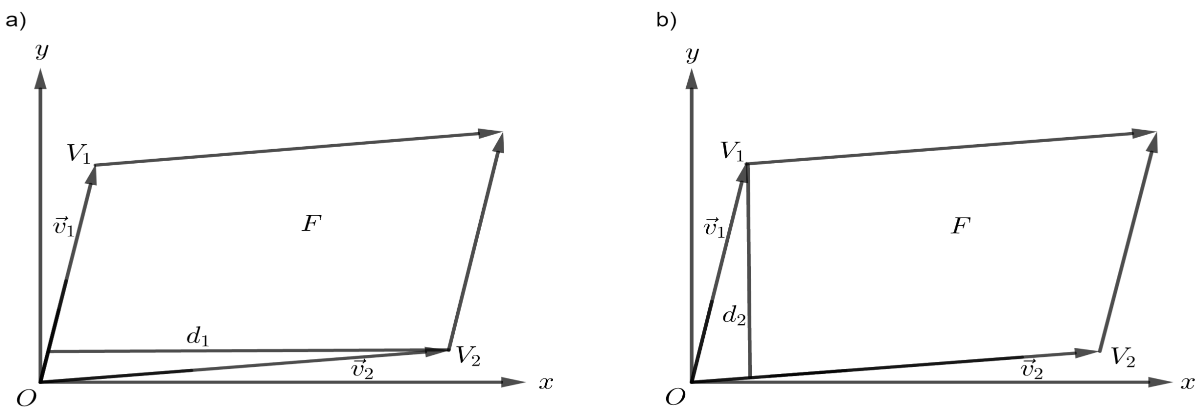
gezeigt. Aufgrund der Kongruenz zur Grundmasche $F$ besitzt $F(\vec{z}_i)$ den Flächeninhalt $vol(F(\vec{z}_i)) = vol(F) = det\,\Lambda \;\; \forall \; 1 \le i \le n$, sodass insbesondere

$$\#I_{\subseteq} \cdot det\,\Lambda = \sum_{i \in I_{\subseteq}} vol(F(\vec{z}_i)) \le vol(R)$$

gilt, denn $\bigcup\limits_{i \in I_{\subseteq}} F(\vec{z}_i) \subseteq R$ und die $F(\vec{z}_i)$ sind paarweise überschneidungsfrei für $1 \le i \le n$. Wegen $vol(R) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4N_1N_2$ liefert dies die Gültigkeit von

$$(5) \quad \#I_{\subseteq} \ll \frac{N_1N_2}{det\,\Lambda}.$$

Wir betrachten die Grundmasche $F$ des Gitters $\Lambda = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.




Skizze 2 a), b): Grundmasche $F$ vom Gitter $\Lambda = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ in der Ebene

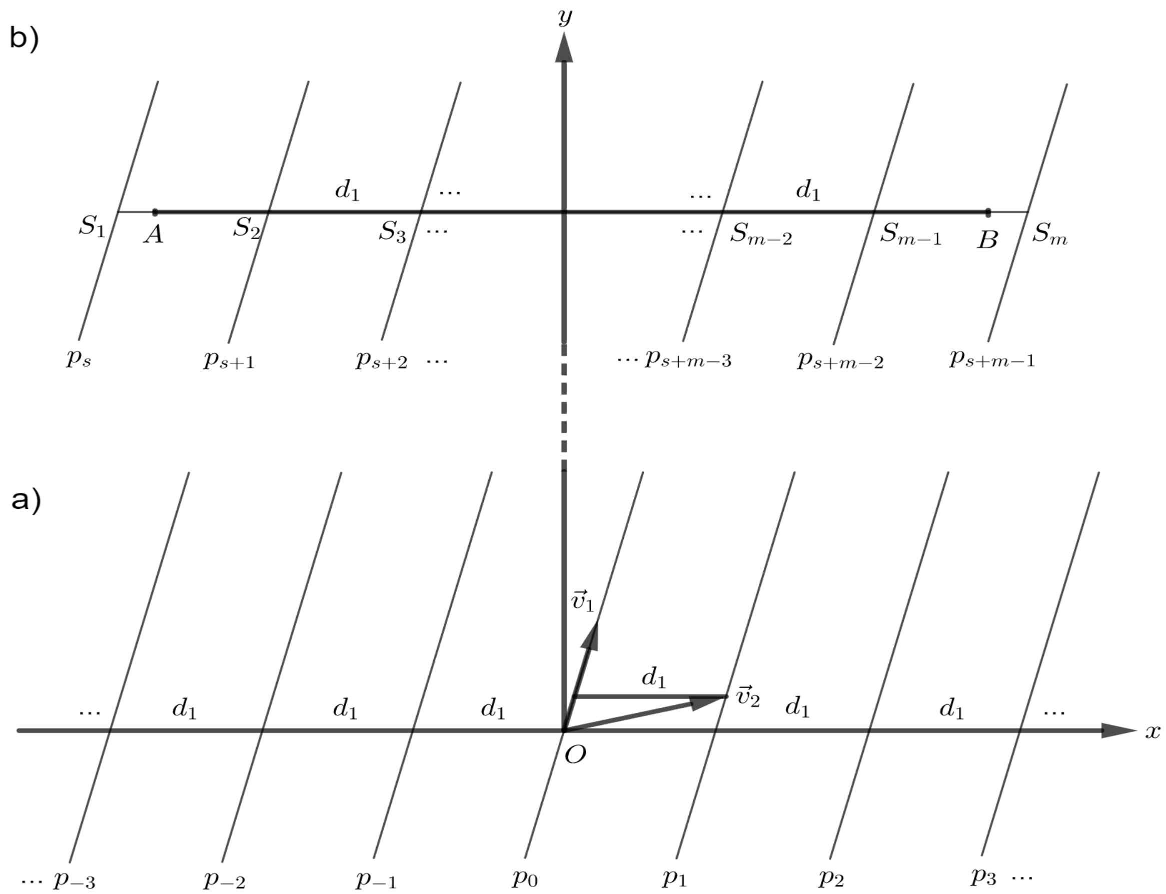
Nach (1) und (2) ist die zur $x$-Achse parallele Strecke $[P_xQ_x]$ der Länge $d_1$ ganz im Dreieck $OV_1V_2$ enthalten und hat überhaupt eine Parallele $p$ zur $x$-Achse gemeinsame Punkte mit $OV_1V_2$, so auch mit der Dreiecksseite der Länge $\|\vec{v}_1\|$, d.h. mit jener Dreiecksseite, die den Punkt $Q_x$ enthält (vgl. Skizze 1 Fall 1)). Also gilt insbesondere auch

$$(6) \quad p \cap F \neq \emptyset \;\Leftrightarrow p \text{ hat gemeinsame Punkte mit einer Seite der Länge } \|\vec{v}_1\| \text{ von } F \quad \forall \; p \parallel x\text{-Achse},$$

denn $\Leftarrow$ ist offensichtlich und $\Rightarrow$ ergibt sich aus dem letzten Satz sowie der Bildung von $F$ aus dem Dreieck $OV_1V_2$ durch Punktspiegelung. Analog dazu erhalten wir

(7) $p \cap F \neq \emptyset \;\Leftrightarrow p$ hat gemeinsame Punkte mit einer Seite der Länge $\|\vec{v}_2\|$ von $F$ $\forall\; p \parallel y$-Achse.

Die zu (6) und (7) analogen Aussagen ergeben sich mithilfe (1) und (2) auch in den übrigen Fällen 2) – 4). Mithilfe der Skizzen 2a), 3 und 4 zeigen wir folgend $\#I(AB) \ll 1 + \frac{\max\{N_1,N_2\}}{\|\vec{v}_1\|}$.




Skizze 3 a), b): Parallele Geraden $p_i$ (unten) und Strecke $[AB] \subseteq [S_1S_m]$ (oben)

Definiere die zueinander parallelen Geraden $p_i : \vec{x} = \begin{pmatrix} i \cdot d_1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{v}_1 \;\; \forall\; r \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$,

wobei nach den Strahlensätzen $i \cdot \vec{v}_2 \in p_i \;\; \forall\; i \in \mathbb{Z}$ ist (vgl. Skizze 3 a)), also auch $p_i : \vec{x} = i \cdot \vec{v}_2 + r \cdot \vec{v}_1 \;\forall\, r \in \mathbb{R}$ gilt und folglich jeder Gitterpunkt aus $\Lambda = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ auf genau einer Geraden $p_i$ enthalten ist. Nun ist jede Strecke in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$), die parallel zur $x$-Achse verläuft, also insbesondere die Strecke $[AB]$, in einer (möglichst kurzen) Strecke $[S_1S_m]$ parallel zur $x$-Achse mit $S_1 \in p_s$ und $S_m \in p_{s+m-1}$ enthalten, wobei $s \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ ist.

Dabei können wir die Punkte $S_1$ und $S_m$ stets so wählen, dass

$$\overline{AB} + 2d_1 \geq \overline{S_1S_m} = (m-1) \cdot d_1 \geq \overline{AB}$$

gilt, also die Strecke $[S_1S_m]$ möglichst kurz ist (vgl. Skizze 3 b)). Daraus folgt

$$(8) \quad m - 1 \ll 1 + \frac{\overline{AB}}{d_1}.$$

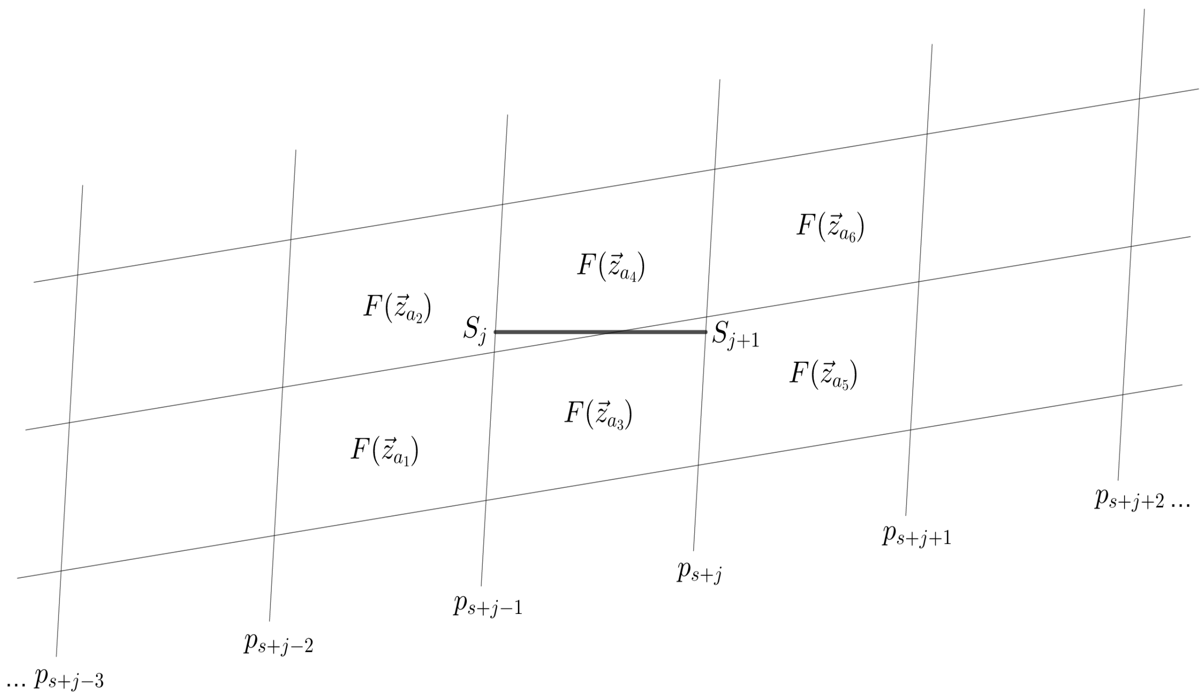
Bezeichnet $S_j$ den (existierenden) Schnittpunkt der Strecke $[S_1S_m]$ mit der Geraden $p_{s+j-1}$ für $1 \leq j \leq m$, so gilt $\overline{S_jS_{j+1}} = d_1 \ \forall \ 1 \leq j \leq m-1$, denn $S_1S_m$ bzw. $S_jS_{j+1}$ verläuft parallel zur $x$-Achse. Nach Definition von $I(AB)$ sowie $[AB] \subseteq [S_1S_m] = \bigcup_{j=1}^{m-1} [S_jS_{j+1}]$ gilt

$$(9) \quad I(AB) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m-1} \{1 \leq i \leq n \mid F(\vec{z}_i) \cap [S_jS_{j+1}] \neq \emptyset\}.$$

Für fixiertes $1 \leq j \leq m-1$ schätzen wir

$$\#\{1 \leq i \leq n \mid F(\vec{z}_i) \cap [S_jS_{j+1}] \neq \emptyset\} \leq \#\{F(\vec{z}_a) \mid F(\vec{z}_a) \cap [S_jS_{j+1}] \neq \emptyset\}$$

mithilfe Skizze 4 nach oben ab, wobei wir bemerken, dass die Flächen $F(\vec{z}_i)$ paarweise verschieden sind für $1 \leq i \leq n$, weil dies auf die Vektoren $\vec{z}_i$ zutrifft und daher das letzte $\leq$-Zeichen gilt.




Skizze 4: Zahl der Flächen $F(\vec{z}_a)$ mit $F(\vec{z}_a) \cap [S_jS_{j+1}] \neq \emptyset$

Sei $F(\vec{z}_a) \cap [S_j S_{j+1}] \neq \emptyset$ mit $S_j \in p_{s+j-1}$ und $S_{j+1} \in p_{s+j}$ gegeben.

Aus $F(\vec{z}_a) = \{\vec{z}_a + r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 \mid r_1, r_2 \in [0,1]\}$ mit $\vec{z}_a \in \Lambda$ folgt insbesondere $\vec{z}_a \in p_i$ für ein $i \in \mathbb{Z}$, denn jeder Gitterpunkt ist auf einer Geraden $p_i$ enthalten. Wir bemerken zudem, dass aufgrund des betrachteten Falles 1) die Flächen $F(\vec{z}_a)$ in unserer Orientierung durch die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ stets nach „rechts" aufgespannt werden.

Für $i \notin \{s+j-2,\ s+j-1,\ s+j\}$ liegt die Fläche $F(\vec{z}_a)$ bzw. der parametrisierende Gitterpunkt $\vec{z}_a \in p_i$ gemäß Skizze 4 zu weit „links" (falls $i < s+j-2$) bzw. zu weit „rechts" (falls $i > s+j$) von der Strecke $[S_j S_{j+1}]$, womit in jedem Falle $F(\vec{z}_a) \cap [S_j S_{j+1}] = \emptyset$ gilt.
Also muss $i \in \{s+j-2,\ s+j-1,\ s+j\}$ sein.

Für $i = s+j-2$ können $F(\vec{z}_a)$ und $[S_j S_{j+1}]$ nur den Punkt $S_j$ gemeinsam haben, wobei dieser in höchstens zwei Flächen $F(\vec{z}_{a_1})$ und $F(\vec{z}_{a_2})$ mit $\vec{z}_{a_1}, \vec{z}_{a_2} \in p_i = p_{s+j-2}$ liegt, sodass $F(\vec{z}_a) \cap [S_j S_{j+1}] \neq \emptyset$ auch nur für diese zwei Flächen $F(\vec{z}_{a_1})$ und $F(\vec{z}_{a_2})$ gelten kann.

Für $i = s+j$ gibt es mit derselben Idee ebenfalls nur höchstens zwei Flächen $F(\vec{z}_{a_5})$ und $F(\vec{z}_{a_6})$ mit $S_{j+1} \in F(\vec{z}_a)$ bzw. $F(\vec{z}_a) \cap [S_j S_{j+1}] \neq \emptyset$, denn die letzten beiden Aussagen sind im betrachteten Fall äquivalent.

Für $i = s+j-1$ gilt $F(\vec{z}_a) \cap [S_j S_{j+1}] \neq \emptyset$ genau dann, wenn $S_j \in F(\vec{z}_a)$ oder $S_{j+1} \in F(\vec{z}_a)$ ist. Dabei ist $\Leftarrow$ offensichtlich und $\Rightarrow$ erhalten wir wie folgt aus (6).

Da $F(\vec{z}_a)$ durch Parallelverschiebung aus der Grundmasche $F$ hervorgeht, gilt (6) auch mit $F(\vec{z}_a)$ anstatt $F$. Nun verläuft die Gerade $S_j S_{j+1}$ parallel zur $x$-Achse und es gilt $F(\vec{z}_a) \cap S_j S_{j+1} \neq \emptyset$, sodass $S_j S_{j+1}$ mit einer Seite der Länge $\|\vec{v}_1\|$ von $F(\vec{z}_a)$ gemeinsame Punkte hat ($\Leftarrow$ (6)). Dies können aber nur die Punkte $S_j$ oder $S_{j+1}$ sein, da die Seiten der Länge $\|\vec{v}_1\|$ von $F(\vec{z}_a)$ in den Geraden $p_{s+j-1}$ bzw. $p_{s+j}$ enthalten sind. Daraus folgt $S_j \in F(\vec{z}_a)$ oder $S_{j+1} \in F(\vec{z}_a)$.

Analog zu oben gibt es nur höchstens zwei Flächen $F(\vec{z}_a)$ mit $S_j \in F(\vec{z}_a)$ und auch nur zwei Flächen $F(\vec{z}_a)$ mit $S_{j+1} \in F(\vec{z}_a)$, falls $\vec{z}_a \in p_i = p_{s+j-1}$ ist, insgesamt also höchstens vier Flächen $F(\vec{z}_a)$ mit $S_j \in F(\vec{z}_a)$ oder $S_{j+1} \in F(\vec{z}_a)$ bzw. $F(\vec{z}_a) \cap [S_j S_{j+1}] \neq \emptyset$. Wie in Skizze 4 ersichtlich, gibt es sogar nur höchstens zwei Flächen $F(\vec{z}_a)$ mit der letztgenannten Eigenschaft, in Skizze 4 sind dies $F(\vec{z}_{a_3})$ und $F(\vec{z}_{a_4})$. Diese schärfere Version brauchen wir aber nicht, um den Beweis zu führen. Insgesamt erhalten wir $\#\{F(\vec{z}_a) \mid F(\vec{z}_a) \cap [S_j S_{j+1}] \neq \emptyset\} \leq 8$ und daraus

$$(10) \quad \#\{1 \leq i \leq n \mid F(\vec{z}_i) \cap [S_j S_{j+1}] \neq \emptyset\} \ll 1 \quad \forall\ 1 \leq j \leq m-1.$$

Aus (8)-(10) folgt $\#I(AB) \ll m - 1 \ll 1 + \frac{\overline{AB}}{d_1} = 1 + \frac{2N_1}{d_1}$, was nach (1) $d_1 \gg \|\vec{v}_1\|$ gerade

$$(11) \quad \#I(AB) \ll 1 + \frac{\max\{N_1, N_2\}}{\|\vec{v}_1\|}$$

ergibt. Die gleiche Idee liefert $\#I(BC) \ll 1 + \frac{\overline{BC}}{d_2} \ll 1 + \frac{\max\{N_1,N_2\}}{\|\vec{v}_1\|}$, wenn wir $\overline{BC} = 2N_2$ und (1) $d_2 \gg \|\vec{v}_1\|$ verwenden (vgl. Skizze 2 b)). In obiger Argumentation nimmt dann $\vec{v}_2$ die Rolle von $\vec{v}_1$ ein und wir nutzen (7) anstatt (6). Ferner erhalten wir mit dieser Idee auch $\#I(CD)$, $\#I(DA) \ll 1 + \frac{\max\{N_1,N_2\}}{\|\vec{v}_1\|}$, woraus mithilfe von (4) und (5)

$$n \leq \#I_{\subseteq} + \#I(AB) + \#I(BC) + \#I(CD) + \#I(DA) \ll 1 + \frac{\max\{N_1, N_2\}}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{N_1 N_2}{det\, \Lambda}$$

kommt. Damit gibt es eine Überdeckung $R \subseteq \overset{*}{\bigcup\limits_{1 \leq i \leq n}} F(\vec{z}_i)$ ($\Leftarrow$ (3)) des Rechtecks $R$
mit $n \ll 1 + \frac{\max\{N_1,N_2\}}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{N_1 N_2}{det\, \Lambda}$ Flächen $F(\vec{z}_i)$, sodass

$$\begin{aligned}\#\Lambda^* = \#\Lambda \cap R \leq \#\Lambda \cap \overset{*}{\bigcup_{1 \leq i \leq n}} F(\vec{z}_i) = \# \overset{*}{\bigcup_{1 \leq i \leq n}} (F(\vec{z}_i) \cap \Lambda) \leq \sum_{i=1}^{n} \#(F(\vec{z}_i) \cap \Lambda) = 4 \cdot n \\ \ll 1 + \frac{\max\{N_1, N_2\}}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{N_1 N_2}{det\, \Lambda}\end{aligned}$$

gilt, denn $\#F(\vec{z}_i) \cap \Lambda = 4\ \ \forall\ 1 \leq i \leq n$, weil jede Fläche $F(\vec{z}_i)$ genau vier Gitterpunkte enthält, nämlich ihre Eckpunkte (beachte: $\vec{z}_i \in \Lambda = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$). Somit ist der Hilfssatz bewiesen.

$\square$

**Lemma 11.2**:
Sei $C \subseteq \mathbb{N}_0 \cap [0, X[$ und $V \in \mathbb{R}$, $1 \leq V < X$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\#\{(a_1, a_2) \in C^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in [-V, V]^4 \cap \mathbb{Z}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\} : \\ &\qquad v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0\} \\ &\ll X^{o(1)} \cdot (\#C^{5/4} V^2 + \#C^{3/2} V + \frac{\#C^{3/2} V^3}{X^{1/2}}).\end{aligned}$$

**Beweis**:

Für $C\backslash\{0\} = \emptyset$ besteht $C$ aus höchstens der 0 und daher ist $\#C = 0$ oder $\#C = 1$, womit in beiden Fällen die Aussage wahr ist, weil dann auch die obige Menge leer ist bzw. aus höchstens einem Paar besteht und sich hinter dem $o(1)$ stets eine nicht-negative Funktion verbirgt. Letzteres gilt für alle $o(1)$ in diesem Beweis. Somit darf $C_0 := C\backslash\{0\}$ als nicht-leer vorausgesetzt werden, sodass $\#C_0 \geq 1$ und $\#C_0 \asymp \#C$ ist. Wir definieren

$$K := \{(a_1, a_2) \in C_0^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in [-V, V]^4 \cap \mathbb{Z}^4\backslash\{(0,0,0,0)\} :$$
$$v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0\},$$
$$K_{i,j} := \{(a_1, a_2) \in C_0^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in [-V, V]^4 \cap \mathbb{Z}^4\backslash\{(0,0,0,0)\},\ v_i = 0,\ v_j \neq 0\ :$$
$$v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0\} \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq 4,\ i \neq j \quad \text{und}$$
$$K_0 := \{(a_1, a_2) \in C_0^2 \mid \exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in [-V, V] \cap \mathbb{Z}\backslash\{0\} :\ v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0\},$$

sodass $K \subseteq K_0 \cup \bigcup\limits_{\substack{1 \leq i,j \leq 4 \\ i \neq j}} K_{i,j}$ und daher $\#K \leq \#K_0 + \sum\limits_{\substack{1 \leq i,j \leq 4 \\ i \neq j}} \#K_{i,j}$ gilt. Ferner gibt es $O(\#C)$ Paare $(a_1, a_2) \in C^2$ mit $a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$, was insgesamt

$$(11.2.1) \quad \#\{(a_1, a_2) \in C^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in [-V, V]^4 \cap \mathbb{Z}^4\backslash\{(0,0,0,0)\} :$$
$$v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0\}$$
$$\leq O(\#C) + \#K \leq O(\#C) + \#K_0 + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq 4 \\ i \neq j}} \#K_{i,j}$$

impliziert. Im Folgenden verwenden wir häufig die Teileranzahlabschätzung $\tau(n) \ll X^{o(1)}$ $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \leq X^c$ mit $c \in \mathbb{R}^+$, denn nach (4) in [14] gilt nämlich

$$\tau(n) \leq n^{c_1 \cdot \frac{1}{\log(\log n)}} = \exp(c_1 \cdot \frac{\log n}{\log(\log n)}) \ll \exp(c_1 \cdot \frac{\log(X^c)}{\log(\log(X^c))}) = X^{c_1 c \cdot \frac{1}{\log(\log(X^c))}} = X^{o(1)}$$

für obige $n$, wobei $c_1 \in \mathbb{R}^+$ die Konstante im $O(\frac{1}{\log(\log n)})$ aus (4) ist. Zudem ist $\tau(n) \ll X^{o(1)}$ $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \ll X^{c_0}$ mit $c_0 \in \mathbb{R}^+$, weil dann ein $c = c(c_0) \in \mathbb{R}^+$ mit $n \leq X^c$ existiert ($\Leftarrow X > 1$).

Für feste $1 \leq i, j \leq 4,\ i \neq j$ schätzen wir zunächst $\#K_{i,j}$ ab. Nach (11.1) in [1, S.31] gilt $\#K_{i,j} = O(\#CV^2 X^{o(1)})$ und wir wollen uns dies im Fall $(i, j) = (3, 2)$ klar machen. Dann ist

$$\#K_{i,j} = \#K_{3,2} \leq$$
$$\#\{(v_1, v_2, 0, v_4, a_1, a_2) \in ([-V, V] \cap \mathbb{Z})^4 \times C_0^2 \mid v_2 \neq 0,\ v_2 a_2 = -v_1 a_1 - v_4 \neq 0\} := \#K_{3,2}^*.$$

Nun gibt es $O(\#C_0V^2) = O(\#CV^2)$ Tupel $(v_1, v_4, a_1) \in ([-V, V] \cap \mathbb{Z})^2 \times C_0$ mit $v_1a_1 + v_4 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und für jedes dieser Tupel existieren wegen $1 \leq |v_1a_1 + v_4| \leq 2VX \ll X^2$ und der Teileranzahlabschätzung nur $\ll X^{o(1)}$ Paare $(v_2, a_2) \in ([-V, V] \cap \mathbb{Z}) \times C_0$ mit $v_2 \neq 0,\ v_2a_2 = -v_1a_1 - v_4 \neq 0$. Folglich ist $\#K^*_{3,2} = O(\#CV^2X^{o(1)})$ und daher auch $\#K_{i,j} = O(\#CV^2X^{o(1)})$ im Fall $(i, j) = (3, 2)$. Die übrigen Fälle können mit ähnlicher Vorgehensweise gehandhabt werden. Also ist $\#K_{i,j} = O(\#CV^2X^{o(1)})\ \ \forall\ 1 \leq i, j \leq 4,\ i \neq j$ und folglich $\sum\limits_{\substack{1\leq i,j\leq 4\\ i\neq j}} \#K_{i,j} = O(\#CV^2X^{o(1)})$, was eingesetzt in (11.2.1) die obere Schranke

$$
\begin{aligned}
(11.2.2)\quad &\#\{(a_1, a_2) \in C^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in [-V, V]^4 \cap \mathbb{Z}^4\backslash\{(0, 0, 0, 0)\} : \\
&\qquad\qquad v_1a_1 + v_2a_2 + v_3X + v_4 = 0\} \\
&\leq \#K_0 + O(\#CV^2X^{o(1)})
\end{aligned}
$$

ergibt. Demnach verbleibt die Abschätzung von $\#K_0$, die in [1, S.31-32] eher lückenhaft dargestellt wird. Diese Lücken konnten aber nach freundlichem E-Mail Kontakt mit Dr. James Maynard geschlossen werden.

Für $a \in \mathbb{N}$ definieren wir $M_a := \min\{(c_1^2 + c_2^2)^{1/2} \mid (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0, 0)\},\ c_1X + c_2 \equiv 0 \bmod a\}$, wobei die letzte Menge wegen $0 \cdot X + a \equiv 0$ mod $a$ nicht-leer ist.
Sei $M_a = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$ mit $(c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0, 0)\},\ c_1X + c_2 \equiv 0 \bmod a$, sodass $M_a \geq 1$ gilt.

Für $|c_2| > a$ setzen wir $c_2^{'} := \begin{cases} c_2 - a, \text{ falls } c_2 \geq 0 \\ c_2 + a, \text{ falls } c_2 < 0 \end{cases} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, wobei $c_2^{'} \neq 0$ direkt aus $|c_2| > a$ folgt und $|c_2^{'}| < |c_2|$ ist. Daher gilt $(c_1, c_2^{'}) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0, 0)\},\ c_1X + c_2^{'} \equiv c_1X + c_2 \equiv 0 \bmod a$ und $M_a = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} > (c_1^2 + c_2^{'2})^{1/2}$, was der Minimalität von $M_a$ widerspricht. Also ist $|c_2| \leq a$. Analog dazu erhalten wir $|c_1| \leq a$, indem wir $c_2$ bzw. $c_2^{'}$ durch $c_1$ bzw. $c_1^{'}$ ersetzen.
Ferner impliziert $|c_1|, |c_2| \leq a$ die Abschätzung $M_a = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} \leq \sqrt{2} \cdot a$, sodass insgesamt

$$
\begin{aligned}
(11.2.3)\quad &1 \leq M_a \leq \sqrt{2} \cdot a \quad \forall\ a \in \mathbb{N} \quad \wedge \\
&M_a = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} \text{ mit } (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0, 0)\},\ c_1X + c_2 \equiv 0 \bmod a \\
&\Rightarrow |c_1|, |c_2| \leq a \qquad \forall\ a \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

gilt. Es gibt $y, z \in \mathbb{N}_0,\ y, z \ll \log X$ mit $2^y \leq X < 2^{y+1}$ und $2^z \leq \sqrt{2} \cdot X < 2^{z+1}$, wobei wir $\log X \geq \log b > 1$ für $X = b^k > 1$ benutzen. Wir definieren

$$C_{i,j} := \{a \in C_0 \mid 2^i \leq a < 2^{i+1},\ 2^j \leq M_a < 2^{j+1}\} \subseteq C_0 \quad \forall\ 0 \leq i \leq y,\ 0 \leq j \leq z,$$

wobei die Mengen $C_{i,j}$ aufgrund der Disjunktheit der Intervalle $[2^i, 2^{i+1}[$ und $[2^j, 2^{j+1}[$ ebenfalls paarweise disjunkt sind. Aus $a \in C_0$ folgt $a \in \mathbb{N}$, $1 \leq a < X$ und daraus $1 \leq M_a \leq \sqrt{2} \cdot X$ ($\Leftarrow$ (11.2.3)), sodass $a$ in einer der Mengen $C_{i,j}$ enthalten ist und folglich $C_0 = \dot{\bigcup}_{\substack{0 \leq i \leq y \\ 0 \leq j \leq z}} C_{i,j}$ gilt. Wegen $(y+1) \cdot (z+1) = O((\log X)^2) = X^{o(1)}$ ($\Leftarrow \log X \geq 1$) geschieht dabei die disjunkte Vereinigung über $X^{o(1)}$ Mengen $C_{i,j}$. Fassen wir unsere Resultate zusammen, so kommt

$$\text{(11.2.4)} \quad C_0 = \dot{\bigcup_{\substack{0 \leq i \leq y \\ 0 \leq j \leq z}}} C_{i,j} \quad \wedge \quad (y+1) \cdot (z+1) = X^{o(1)}.$$

Für fixierte $i, j$ mit $0 \leq i \leq y$ und $0 \leq j \leq z$ schätzen wir $\#C_{i,j}$ nach oben ab. Offenbar ist $C_{i,j} \subseteq C_0$ und daher $\#C_{i,j} \leq \#C_0$. Andrerseits gilt nach (11.2.3) und Def. von $M_a$ insbesondere

$$\begin{aligned} C_{i,j} &\subseteq \{a \in C_0 \mid M_a < 2^{j+1}\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid a < X,\ M_a < 2^{j+1}\} \\ &\subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid \exists\, (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} :\ c_1 X + c_2 \equiv 0 \bmod a, \\ &\qquad\qquad |c_1|, |c_2| \leq a < X,\ (c_1^2 + c_2^2)^{1/2} < 2^{j+1}\} \\ &\subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid \exists\, (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} :\ c_1 X + c_2 \equiv 0 \bmod a, \\ &\qquad\qquad |c_1|, |c_2| \leq a < X,\ |c_1|, |c_2| < 2^{j+1}\}. \end{aligned}$$

Im Fall $c_1 X + c_2 = 0$ mit $(c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ und $|c_1|, |c_2| < X$ ist insbesondere $c_1 \neq 0$, da für $c_1 = 0$ auch $c_2 = 0$ folgen würde. Also ist $c_2 = -c_1 X$ und wir erhalten den Widerspruch $X > |c_2| = |c_1| X \geq X$ wegen $c_1 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Damit muss $c_1 X + c_2 \neq 0$ in obiger Menge gelten, was

$$C_{i,j} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid \exists\, (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} :\ c_1 X + c_2 \neq 0,\ a | c_1 X + c_2,\ |c_1|, |c_2| < 2^{j+1}\}$$

liefert. Wir zählen die Elemente in der rechten Obermenge ab.

Jedes $a \in \mathbb{N}$ induziert ein Paar $(c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mit $c_1 X + c_2 \neq 0$, $a | c_1 X + c_2$ und $|c_1|, |c_2| < 2^{j+1}$. Nun gibt es $O(2^{j+1} \cdot 2^{j+1}) = O((2^j)^2)$ Paare $(c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mit $c_1 X + c_2 \neq 0$ sowie $|c_1|, |c_2| < 2^{j+1}$ und für jedes dieser Paare gibt es wegen $2^{j+1} \leq 2^{z+1} \ll X$ sowie $1 \leq |c_1 X + c_2| \leq 2^{j+1} X + 2^{j+1} \ll X^2$ nach der Teileranzahlabschätzung $\ll X^{o(1)}$ Zahlen $a \in \mathbb{N}$, die das entsprechende Paar induzieren, d.h. welche $a | c_1 X + c_2$ erfüllen.

Folglich enthält die rechte Obermenge $O(X^{o(1)} \cdot (2^j)^2)$ Elemente, was $\#C_{i,j} \ll X^{o(1)} \cdot (2^j)^2$ impliziert. Insgesamt liefert dies

$$(11.2.5) \quad \#C_{i,j} \ll X^{o(1)} \cdot \min\{\#C_0,\ (2^j)^2\} \quad \forall\ 0 \le i \le y,\ \forall\ 0 \le j \le z.$$

Damit haben wir ausreichend Werkzeuge, um $\#K_0$ nach oben abzuschätzen. Wir finden

$$\#K_0 = \sum_{(a_1,a_2)\in K_0} 1 = \sum_{a_1\in C_0} [1 \cdot \sum_{\substack{a_2\in C_0\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1] = \sum_{a_1\in C_0} f(a_1)\cdot g(a_1) \le$$
$$(\sum_{a_1\in C_0} f(a_1)^2)^{1/2} \cdot (\sum_{a_1\in C_0} g(a_1)^2)^{1/2} = (\sum_{a_1\in C_0} 1)^{1/2} \cdot (\sum_{a_1\in C_0} (\sum_{\substack{a_2\in C_0\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1)^2)^{1/2},$$

wenn wir $f(a_1) := 1$ und $g(a_1) := \sum_{\substack{a_2\in C_0\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1$ definieren und beim ersten $\le$-Zeichen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwenden. Wegen $(\sum_{a_1\in C_0} 1)^{1/2} = \#C_0^{1/2}$ liefert dies

$$(11.2.6) \quad \#K_0 \le \#C_0^{1/2} \cdot (\sum_{a_1\in C_0} (\sum_{\substack{a_2\in C_0\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1)^2)^{1/2}.$$

Verwenden wir (11.2.4) und erneut die Cauchy-Schwarz-Ungleichung bei festem $a_1 \in C_0$, so ist

$$0 \le \sum_{\substack{a_2\in C_0\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1 = \sum_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}} [1 \cdot \sum_{\substack{a_2\in C_{i,j}\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1] \le (\sum_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}} 1)^{1/2} \cdot (\sum_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}} (\sum_{\substack{a_2\in C_{i,j}\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1)^2)^{1/2}$$
$$\ll X^{o(1)} \cdot (\sum_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}} (\sum_{\substack{a_2\in C_{i,j}\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1)^2)^{1/2},$$

denn nach (11.2.4) gilt auch $\sum_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}} 1 = (y+1)\cdot(z+1) \ll X^{o(1)}$. Dies in (11.2.6) eingesetzt impliziert

$$
\begin{aligned}
(11.2.7)\quad \#K_0 &\ll \#C_0^{1/2}\cdot\Big(\sum_{a_1\in C_0} X^{o(1)}\cdot\sum_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}}\Big(\sum_{\substack{a_2\in C_{i,j}\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1\Big)^2\Big)^{1/2}\\
&= X^{o(1)}\cdot\#C_0^{1/2}\cdot\Big(\sum_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}}\sum_{a_1\in C_0}\Big(\sum_{\substack{a_2\in C_{i,j}\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1\Big)^2\Big)^{1/2}\\
&\ll X^{o(1)}\cdot\#C_0^{1/2}\cdot\Big(X^{o(1)}\cdot\sup_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}}\sum_{a_1\in C_0}\Big(\sum_{\substack{a_2\in C_{i,j}\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1\Big)^2\Big)^{1/2}\\
&= X^{o(1)}\cdot\#C_0^{1/2}\cdot\sup_{\substack{0\le i\le y\\0\le j\le z}}\Big(\sum_{a_1\in C_0}\Big(\sum_{\substack{a_2\in C_{i,j}\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1\Big)^2\Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

wobei wir bemerken, dass an der entsprechenden Stelle in [1, S.31] einige typographische Fehler unterlaufen sind. Für fixierte $i, j$ mit $0 \le i \le y,\ 0 \le j \le z$ schätzen wir

$$
\sum_{a_1\in C_0}\Big(\sum_{\substack{a_2\in C_{i,j}\\(a_1,a_2)\in K_0}} 1\Big)^2 = \sum_{a_1\in C_0}\sum_{\substack{(a_2,a_2^{'})\in C_{i,j}^2\\(a_1,a_2)\in K_0,\ (a_1,a_2^{'})\in K_0}} 1 =
$$

$$
\#\{(a_1,a_2,a_2^{'})\in C_0\times C_{i,j}^2 \mid (a_1,a_2)\in K_0,\ (a_1,a_2^{'})\in K_0\}
$$

nach oben ab. Wir finden

$$
\begin{aligned}
&\{(a_1,a_2,a_2^{'})\in C_0\times C_{i,j}^2 \mid (a_1,a_2)\in K_0,\ (a_1,a_2^{'})\in K_0\}\subseteq\\
&\{(a_1,a_2,a_2^{'})\in \mathbb{N}\times C_{i,j}^2 \mid \exists\, v_1,v_1^{'},v_2,v_2^{'},v_3,v_3^{'},v_4,v_4^{'}\in[-V,V]\cap\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ 1\le v_1^{'},v_1\le V:\\
&\quad a_1=\frac{v_2a_2+v_3X+v_4}{v_1}=\frac{v_2^{'}a_2^{'}+v_3^{'}X+v_4^{'}}{v_1^{'}}\}\subseteq\\
&\{(a_1,a_2,a_2^{'})\in \mathbb{N}\times C_{i,j}^2 \mid \exists\, v_1,v_1^{'},v_2,v_2^{'},v_3,v_3^{'},v_4,v_4^{'}\in[-V,V]\cap\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ 1\le v_1^{'}\le v_1\le V:\\
&\quad a_1=\frac{v_2a_2+v_3X+v_4}{v_1}=\frac{v_2^{'}a_2^{'}+v_3^{'}X+v_4^{'}}{v_1^{'}}\}\cup\\
&\{(a_1,a_2,a_2^{'})\in \mathbb{N}\times C_{i,j}^2 \mid \exists\, v_1,v_1^{'},v_2,v_2^{'},v_3,v_3^{'},v_4,v_4^{'}\in[-V,V]\cap\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ 1\le v_1< v_1^{'}\le V:\\
&\quad a_1=\frac{v_2a_2+v_3X+v_4}{v_1}=\frac{v_2^{'}a_2^{'}+v_3^{'}X+v_4^{'}}{v_1^{'}}\},
\end{aligned}
$$

wobei wir die erste Inklusion durch Substitution einzelner $v_i$ durch $-v_i$ und wegen $C_0 \subseteq \mathbb{N}$ erhalten. Die letzte Menge enthält aus Symmetriegründen genau so viele Elemente wie

$$\{(a_1, a_2^{'}, a_2) \in \mathbb{N} \times C_{i,j}^2 \mid \exists\, v_1, v_1^{'}, v_2, v_2^{'}, v_3, v_3^{'}, v_4, v_4^{'} \in [-V, V] \cap \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ 1 \leq v_1 < v_1^{'} \leq V :$$
$$a_1 = \frac{v_2^{'} a_2^{'} + v_3^{'} X + v_4^{'}}{v_1^{'}} = \frac{v_2 a_2 + v_3 X + v_4}{v_1}\}$$

und nennen wir darin $a_2$ nun $a_2^{'}$ sowie $v_i$ nun $v_i^{'}$ und umgekehrt, so ist diese Menge in der vorletzten Menge, also jenen Menge vor dem $\cup$-Zeichen, enthalten. Somit kommt

$$\#\{(a_1, a_2, a_2^{'}) \in C_0 \times C_{i,j}^2 \mid (a_1, a_2) \in K_0,\ (a_1, a_2^{'}) \in K_0\} \leq$$
$$2\#\{(a_1, a_2, a_2^{'}) \in \mathbb{N} \times C_{i,j}^2 \mid \exists\, v_1, v_1^{'}, v_2, v_2^{'}, v_3, v_3^{'}, v_4, v_4^{'} \in [-V, V] \cap \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ 1 \leq v_1^{'} \leq v_1 \leq V :$$
$$a_1 = \frac{v_2 a_2 + v_3 X + v_4}{v_1} = \frac{v_2^{'} a_2^{'} + v_3^{'} X + v_4^{'}}{v_1^{'}}\}.$$

Ferner gilt

$$\{(a_1, a_2, a_2^{'}) \in \mathbb{N} \times C_{i,j}^2 \mid \exists\, v_1, v_1^{'}, v_2, v_2^{'}, v_3, v_3^{'}, v_4, v_4^{'} \in [-V, V] \cap \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ 1 \leq v_1^{'} \leq v_1 \leq V :$$
$$a_1 = \frac{v_2 a_2 + v_3 X + v_4}{v_1} = \frac{v_2^{'} a_2^{'} + v_3^{'} X + v_4^{'}}{v_1^{'}}\} \subseteq$$
$$\{(a_1, a_2, a_2^{'}) \in \mathbb{N} \times C_{i,j}^2 \mid \exists\, \tilde{v_1}, \tilde{v_1}^{'}, v_2, v_2^{'}, v_3, v_3^{'}, v_4, v_4^{'} \in [-V, V] \cap \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ 1 \leq \tilde{v_1}^{'} \leq \tilde{v_1} \leq V,$$
$$ggT(\tilde{v_1}, \tilde{v_1}^{'}) = 1 :\ S := \frac{v_2 a_2 + v_3 X + v_4}{\tilde{v_1}} = \frac{v_2^{'} a_2^{'} + v_3^{'} X + v_4^{'}}{\tilde{v_1}^{'}} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\ \wedge\ a_1 | S\} := N,$$

indem wir $\tilde{v_1} = \frac{v_1}{ggT(v_1^{'}, v_1)} \in \mathbb{N}$ sowie $\tilde{v_1}^{'} = \frac{v_1^{'}}{ggT(v_1^{'}, v_1)} \in \mathbb{N}$ für obige $v_1, v_1^{'}$ setzen und beachten, dass aus $a_1, v_1 \neq 0$ insbesondere $v_2 a_2 + v_3 X + v_4 \neq 0$ bzw. $S \neq 0$ folgt, wobei $S = a_1 \cdot ggT(v_1^{'}, v_1)$ wegen $a_1 \in \mathbb{N}$ ebenfalls ganzzahlig ist. Dies liefert

$$\sum_{a_1 \in C_0} \Big( \sum_{\substack{a_2 \in C_{i,j} \\ (a_1, a_2) \in K_0}} 1 \Big)^2 \ll \#N.$$

Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$, $m \ll \log V < \log X$ mit $2^m \leq V < 2^{m+1}$ ($\Leftarrow 1 \leq V < X$), sodass $m + 1 \ll \log X = X^{o(1)}$ gilt ($\Leftarrow \log X \geq 1$). Ferner definieren wir für $r = 0, ..., m$ die Menge

$$N_r := \{(a_1, a_2, a_2^{'}) \in \mathbb{N} \times C_{i,j}^2 \mid \exists\, v_1, v_1^{'}, v_2, v_2^{'}, v_3, v_3^{'}, v_4, v_4^{'} \in [-V, V] \cap \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$
$$1 \leq v_1^{'} \leq v_1,\ v_1 \in [2^r,\ 2^{r+1}],\ ggT(v_1, v_1^{'}) = 1 :$$
$$S := \frac{v_2 a_2 + v_3 X + v_4}{v_1} = \frac{v_2^{'} a_2^{'} + v_3^{'} X + v_4^{'}}{v_1^{'}} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\ \wedge\ a_1 | S\},$$

womit $N \subseteq \bigcup_{r=0}^{m} N_r$ und $\#N \leq (m+1) \cdot \sup_{0 \leq r \leq m} \#N_r \ll X^{o(1)} \cdot \sup_{0 \leq r \leq m} \#N_r$ gilt. Insgesamt ist also

$$(11.2.8) \qquad \sum_{a_1 \in C_0} \Big( \sum_{\substack{a_2 \in C_{i,j} \\ (a_1,a_2) \in K_0}} 1 \Big)^2 \ll \#N \ll X^{o(1)} \cdot \sup_{0 \leq r \leq m} \#N_r.$$

Für festes $0 \leq r \leq m$ schätzen wir $\#N_r$ ab und setzen $V_1 = V_1(r) := 2^r \leq 2^m \leq V$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned}
\#N_r \leq \#\{(a_1, a_2, a_2', v_1, v_1', ..., v_4, v_4') \in \mathbb{N} \times C_{i,j}^2 \times ([-V, V] \cap \mathbb{Z} \backslash \{0\})^8 \mid \\
1 \leq v_1' \leq v_1,\ v_1 \in [2^r,\ 2^{r+1}],\ ggT(v_1, v_1') = 1, \\
S := \frac{v_2 a_2 + v_3 X + v_4}{v_1} = \frac{v_2' a_2' + v_3' X + v_4'}{v_1'} \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\ \wedge\ a_1 | S\}.
\end{aligned}$$

Wählen wir $a_2, a_2', v_1, v_1', ..., v_4, v_4'$ gemäß den Bedingungen in der letzten Menge fest, so ist $1 \leq |S| = |\frac{v_2 a_2 + v_3 X + v_4}{v_1}| \leq |v_2 a_2 + v_3 X + v_4| \leq 2VX + V \ll X^2$, womit für $a_1 \in \mathbb{N}$ als Teiler von $S$ bzw. $|S|$ nach der Teileranzahlabschätzung nur $\ll X^{o(1)}$ Werte in Frage kommen. Also ist

$$\begin{aligned}
(11.2.9) \quad \#N_r \ll \\
X^{o(1)} \cdot \#\{(a_2, a_2', v_1, v_1', ..., v_4, v_4') \in C_{i,j}^2 \times ([-V, V] \cap \mathbb{Z} \backslash \{0\})^8 \mid 1 \leq v_1' \leq v_1, \\
v_1 \in [V_1, 2V_1],\ ggT(v_1, v_1') = 1,\ \frac{v_2 a_2 + v_3 X + v_4}{v_1} = \frac{v_2' a_2' + v_3' X + v_4'}{v_1'}\},
\end{aligned}$$

wobei wir die letzte Menge mit $Q = Q_r$ bezeichnen. Weiter setzen wir

$$\begin{aligned}
B = B_r := \{(a_2, a_2', b_1, b_2, b_3, b_4) \mid a_2, a_2' \in C_{i,j},\ b_s \in \mathbb{Z},\ |b_s| \ll V_1 V\ \ \forall\ 1 \leq s \leq 4,\ b_1 b_2 \neq 0 \\
b_1 a_2 + b_2 a_2' + b_3 X + b_4 = 0\}
\end{aligned}$$

und sehen, dass jedes Tupel $(a_2, a_2', v_1, v_1', ..., v_4, v_4') \in Q$ über $b_1 = v_1' v_2,\ b_2 = -v_1 v_2'$, $b_3 = v_1' v_3 - v_1 v_3'$ und $b_4 = v_1' v_4 - v_1 v_4'$ ein Tupel $(a_2, a_2', b_1, b_2, b_3, b_4) \in B$ induziert, denn $|b_s| \ll V_1 V\ \ \forall\ 1 \leq s \leq 4$ folgt aus $1 \leq v_1' \leq v_1 \ll V_1$ und wir erhalten $b_1 a_2 + b_2 a_2' + b_3 X + b_4 = 0$ durch einfache Umformungen aus der Gleichheit der Brüche.

Für ein fixiertes Tupel $(a_2, a_2', b_1, b_2, b_3, b_4) \in B$ überlegen wir uns, von wie vielen Tupeln $(a_2, a_2', v_1, v_1', ..., v_4, v_4') \in Q$ dieses fixierte Tupel induziert wird.

Sei $(a_2, a_2', v_1, v_1', ..., v_4, v_4') \in Q$ ein solch induzierendes Tupel. Wegen $b_1 = v_1' v_2,\ b_2 = -v_1 v_2'$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\},\ |b_1|, |b_2| \ll V_1 V < X^2$ ($\Leftarrow b_1 b_2 \neq 0$) gibt es nach der Teileranzahlabschätzung jeweils $\ll X^{o(1)}$ mögliche Paare $(v_1', v_2)$ bzw. $(v_1, v_2')$, sodass also auch nur $\ll X^{o(1)}$ Tupel $(v_1, v_1', v_2, v_2')$ mit $1 \le v_1' \le v_1,\ v_1 \in [V_1,\ 2V_1]$ und $ggT(v_1, v_1') = 1$ in Frage kommen.

Für gegebene $v_1, v_1'$ mit $1 \le v_1' \le v_1,\ v_1 \in [V_1,\ 2V_1]$ und $ggT(v_1, v_1') = 1$ gibt es wegen $b_3 = v_1' v_3 - v_1 v_3'$ auch nur $O(\frac{V}{V_1})$ mögliche Paare $(v_3, v_3')$ mit $v_3, v_3' \in [-V, V]$, denn aufgrund $ggT(v_1, v_1') = 1$ sowie $b_3 = v_1' v_3 - v_1 v_3'$ liegt die Restklasse von $v_3 \bmod v_1$ über die Restklassen $[b_3]_{v_1}$ und $[v_1']_{v_1}$ fest, sodass für $v_3 \in [-V, V]$ genau $O(\frac{V}{v_1}) = O(\frac{V}{V_1})$ $(\Leftarrow v_1 \asymp V_1,\ 1 \le V_1 \ll V)$ Werte in Frage kommen, wobei mit gegebenem $v_3$ auch $v_3'$ mittels $b_3 = v_1' v_3 - v_1 v_3'$ festliegt.

Analog dazu gibt es für gegebene $v_1, v_1'$ wie oben nur $O(\frac{V}{V_1})$ mögliche Paare $(v_4, v_4')$ mit $v_4, v_4' \in [-V, V]$, indem wir $b_4 = v_1' v_4 - v_1 v_4'$ bzw. die damit festliegende Restklasse von $v_4$ mod $v_1$ ausnutzen.

Also wird das fixierte Tupel $(a_2, a_2', b_1, b_2, b_3, b_4) \in B$ von nur $O(X^{o(1)} \cdot \frac{V}{V_1} \cdot \frac{V}{V_1}) = O(X^{o(1)} \cdot \frac{V^2}{V_1^2})$ Tupeln $(a_2, a_2', v_1, v_1', ..., v_4, v_4') \in Q$ induziert. Daraus folgt sofort $\#Q \ll X^{o(1)} \cdot \frac{V^2}{V_1^2} \cdot \#B$ und nach (11.2.9) die Abschätzung

$$(11.2.10) \quad \#N_r \ll X^{o(1)} \cdot \#Q_r \ll X^{o(1)} \cdot \frac{V^2}{V_1^2} \cdot \#B_r.$$

Somit verbleibt die Abschätzung von $\#B = \#B_r$. Sei $(a_2, a_2', b_1, b_2, b_3, b_4) \in B$ gegeben. Gemäß Definition von $B$ gibt es dann nur $O(\#C_0 V_1^3 V^3)$ mögliche Tupel $(a_2', b_2, b_3, b_4)$, denn für $b_2, b_3, b_4$ kommen jeweils $O(V_1 V)$ Werte in Frage und für $a_2' \in C_{i,j}$ genau $\#C_{i,j} \le \#C_0$ $(\Leftarrow C_{i,j} \subseteq C_0)$. Für jedes dieser Tupel $(a_2', b_2, b_3, b_4)$ gilt $b_1 a_2 = -(b_2 a_2' + b_3 X + b_4) \neq 0$ $(\Leftarrow b_1, a_2 \neq 0)$, sodass wegen $1 \le |b_2 a_2' + b_3 X + b_4| \ll V_1 V X + V_1 V X + V_1 V \ll X^3$ und der Teileranzahlabschätzung nur $\ll X^{o(1)}$ Paare $(b_1, a_2)$ in Frage kommen. Insgesamt ist daher

$$(11.2.11) \quad \#B_r \ll X^{o(1)} \cdot \#C_0 V_1^3 V^3.$$

Nun schätzen wir $\#B$ auf noch andere Weise nach oben ab. Dazu seien zunächst $a_2, a_2' \in C_{i,j}$ sowie $b_1 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ mit $|b_1| \ll V_1 V$ fixiert. Wir setzen

$$B(a_2, a_2', b_1) := \{(a_2, a_2', b_1, b_2, b_3, b_4) \in B\},$$

sodass

$$
\begin{aligned}
\#B(a_2,a_2^{'},b_1) &\le \#\{(b_2,b_3,b_4)\in\mathbb{Z}^3 \mid |b_s| \ll V_1V\ \ \forall\ 2\le s\le 4,\ b_3X+b_4=-b_1a_2-b_2a_2^{'}\} \\
&\le \#\{(b_2,b_3,b_4)\in\mathbb{Z}^3 \mid |b_3| \ll \frac{V_1V\cdot 2^i}{X},\ |b_4|\ll V_1V, \\
&\qquad\qquad b_3X+b_4\equiv -b_1a_2 \bmod a_2^{'},\ b_2=-\frac{b_3X+b_4+b_1a_2}{a_2^{'}}\} \\
&= \#\{(b_3,b_4)\in\mathbb{Z}^2 \mid |b_3| \ll \frac{V_1V\cdot 2^i}{X},\ |b_4|\ll V_1V,\ b_3X+b_4\equiv -b_1a_2 \bmod a_2^{'}\}
\end{aligned}
$$

gilt, denn aus $b_3=-\frac{b_1a_2+b_2a_2^{'}+b_4}{X}$ folgt $|b_3|\ll\frac{|b_1|a_2+|b_2|a_2^{'}+|b_4|}{X}\ll\frac{V_1V\cdot 2^i}{X}$ wegen $|b_1|,|b_2|,|b_4|\ll V_1V$ sowie $a_2,a_2^{'}\asymp 2^i$ ($\Leftarrow a_2,a_2^{'}\in C_{i,j}$) und für gegebene $b_3,b_4$ mit $b_3X+b_4\equiv -b_1a_2 \mod a_2^{'}$ liegt auch $b_2=-\frac{b_3X+b_4+b_1a_2}{a_2^{'}}\in\mathbb{Z}$ fest. Damit haben wir

$$
\begin{aligned}
(11.2.12)\quad &\#B(a_2,a_2^{'},b_1)\le \\
&\#\{(b_3,b_4)\in\mathbb{Z}^2 \mid |b_3|\ll\frac{V_1V\cdot 2^i}{X},\ |b_4|\ll V_1V,\ b_3X+b_4\equiv -b_1a_2 \mod a_2^{'}\}
\end{aligned}
$$

gezeigt, wobei wir die letzte Menge mit $B^*(a_2,a_2^{'},b_1)$ bezeichnen und o.B.d.A. $B^*(a_2,a_2^{'},b_1)\neq\emptyset$ annehmen dürfen. Damit gibt es ein Paar $(b_{3,0},b_{4,0})\in B^*(a_2,a_2^{'},b_1)$, d.h. insbesondere gilt $|b_{3,0}|\ll\frac{V_1V\cdot 2^i}{X}$, $|b_{4,0}|\ll V_1V$ und $b_{3,0}X+b_{4,0}\equiv -b_1a_2 \bmod a_2^{'}$.

Nun ist jedes Paar $(b_3,b_4)\in B^*(a_2,a_2^{'},b_1)$ in der Form $(b_3,b_4)=(b_{3,0},b_{4,0})+(b_3^{'},b_4^{'})$ mit $(b_3^{'},b_4^{'})\in\mathbb{Z}^2$, $b_3^{'}X+b_4^{'}\equiv 0 \bmod a_2^{'}$ und $|b_3^{'}|\ll\frac{V_1V\cdot 2^i}{X}$, $|b_4^{'}|\ll V_1V$ darstellbar. Letzteres erhalten wir nämlich aus $|b_3^{'}|\le|b_3|+|b_{3,0}|\ll\frac{V_1V\cdot 2^i}{X}$ sowie $|b_4^{'}|\le|b_4|+|b_{4,0}|\ll V_1V$. Daher ist

$$
\begin{aligned}
(11.2.13)\quad &\#B(a_2,a_2^{'},b_1)\le\#B^*(a_2,a_2^{'},b_1)\le \\
&\#\{\begin{pmatrix} b_3^{'} \\ b_4^{'}\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^2 \mid |b_3^{'}|\ll\frac{V_1V\cdot 2^i}{X},\ |b_4^{'}|\ll V_1V,\ b_3^{'}X+b_4^{'}\equiv 0 \bmod a_2^{'}\},
\end{aligned}
$$

wobei das zweite $\le$-Zeichen steht, weil für verschiedene Paare $(b_3,b_4)\in B^*(a_2,a_2^{'},b_1)$ auch die so induzierten Paare $(b_3^{'},b_4^{'})=(b_3,b_4)-(b_{3,0},b_{4,0})$ mit den obigen Eigenschaften verschieden sind.

Wir setzen $\Lambda:=\{\begin{pmatrix} b_3^{'} \\ b_4^{'}\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^2 \mid b_3^{'}X+b_4^{'}\equiv 0 \bmod a_2^{'}\}\subseteq\mathbb{R}^2$. Dabei ist $\Lambda\subseteq\mathbb{Z}^2$ eine additive Untergruppe von $\mathbb{R}^2$, weil $\Lambda$ bzgl. der Addition abgeschlossen ist, den Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$ und auch die jeweiligen additiven Inversen enthält. Wegen $\Lambda\subseteq\mathbb{Z}^2$ ist $\Lambda$ ebenfalls diskret und folglich nach Satz 1.3.1 in [12, S.11] ein Gitter.

Ferner bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_2^{'} \end{pmatrix} \in \Lambda$ eine Basis von $\Lambda$, denn sie sind linear unabhängig (beachte: $s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -X \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s = t = 0$ wegen $a_2^{'} \neq 0$) und jeder Vektor $\begin{pmatrix} b_3^{'} \\ b_4^{'} \end{pmatrix} \in \Lambda$ ist in der Form $\begin{pmatrix} b_3^{'} \\ b_4^{'} \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -X \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a_2^{'} \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{Z}$ darstellbar. Aus $\begin{pmatrix} b_3^{'} \\ b_4^{'} \end{pmatrix} \in \Lambda$ folgt nämlich $b_3^{'} X + b_4^{'} = t \cdot a_2^{'}$ für ein $t \in \mathbb{Z}$ und wir wählen $s = b_3^{'} \in \mathbb{Z}$, sodass vorige Gleichung erfüllt ist.

Folglich ist $dim\, \Lambda = 2$ und $det\, \Lambda = \| \begin{pmatrix} 1 \\ -X \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ a_2^{'} \end{pmatrix} \| = a_2^{'} \asymp 2^i$ ($\Leftarrow a_2^{'} \in C_{i,j}$).

Ferner besitzt $\Lambda$ nach Proposition 3.1.9 in [11, S.205] eine Minkowski-reduzierte Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \Lambda$, wobei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}$ ein kürzester Vektor in $\Lambda \backslash \{\vec{0}\}$ ist. Nach Definition von $M_{a_2^{'}}$ und $v_{1,1} X + v_{2,1} \equiv 0 \bmod a_2^{'}$ ist insbesondere $\|\vec{v}_1\| = (v_{1,1}^2 + v_{2,1}^2)^{1/2} \geq M_{a_2^{'}} \asymp 2^j$, denn $(v_{1,1}, v_{2,1}) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ und $a_2^{'} \in C_{i,j}$. Also gilt $\|\vec{v}_1\| \gg 2^j$.

Aus (11.2.13) ergibt sich

$$\begin{aligned} \#B(a_2, a_2^{'}, b_1) &\leq \#\{ \begin{pmatrix} b_3^{'} \\ b_4^{'} \end{pmatrix} \in \Lambda \mid |b_3^{'}| \ll \frac{V_1 V \cdot 2^i}{X},\ |b_4^{'}| \ll V_1 V \} \\ &= \#\{ \begin{pmatrix} b_3^{'} \\ b_4^{'} \end{pmatrix} \in \Lambda \mid |b_3^{'}| \leq c_1 \cdot \frac{V_1 V \cdot 2^i}{X},\ |b_4^{'}| \leq c_2 \cdot V_1 V \} \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass nach *HS1 Lemma 11.2* mit $N_1 = c_1 \cdot \frac{V_1 V \cdot 2^i}{X}$ und $N_2 = c_2 \cdot V_1 V$ die Abschätzung

$$(11.2.14)\quad \#B(a_2,a_2^{'},b_1) \ll 1+\frac{\max\{N_1,N_2\}}{\|\vec{v}_1\|}+\frac{N_1N_2}{det\,\Lambda} \ll 1+\frac{V_1V}{2^j}+\frac{V_1^2V^2\cdot 2^i}{2^i\cdot X} = 1+\frac{V_1V}{2^j}+\frac{V_1^2V^2}{X}$$

folgt, wenn wir $\max\{N_1,N_2\} \ll \max\{\frac{V_1V\cdot 2^i}{X}, V_1V\} = V_1V$ ($\Leftarrow 2^i \le 2^y \le X$) und $\|\vec{v}_1\| \gg 2^j$ sowie $det\,\Lambda \asymp 2^i$ verwenden.

Weiter gibt es $O(\#C_{i,j}^2 \cdot V_1V) = O(X^{o(1)} \cdot \min\{\#C_0^2,\ (2^j)^4\} \cdot V_1V)$ Tupel $(a_2,a_2^{'},b_1)$ mit $a_2,a_2^{'} \in C_{i,j}$, $b_1 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $|b_1| \ll V_1V$, wenn wir uns an (11.2.5) $\#C_{i,j} \ll X^{o(1)}\cdot\min\{\#C_0,\ (2^j)^2\}$ erinnern. Folglich existieren auch nur $O(X^{o(1)} \cdot \min\{\#C_0^2,\ (2^j)^4\} \cdot V_1V)$ Mengen $B(a_2,a_2^{'},b_1)$. Aus der Definition von $B = B_r$ bzw. $B(a_2,a_2^{'},b_1)$ sowie (11.2.14) erhalten wir damit

$$(11.2.15)\quad \#B_r \ll X^{o(1)} \cdot \min\{\#C_0^2,\ (2^j)^4\} \cdot V_1V \cdot (1+\frac{V_1V}{2^j}+\frac{V_1^2V^2}{X}).$$

Verwenden wir $\min\{x,y\} \le x^s y^{1-s}\ \ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_0^+,\ s \in [0,1]$, so kommt

$$\begin{aligned}
&\min\{\#C_0^2,\ (2^j)^4\} \cdot V_1V \cdot (1+\frac{V_1V}{2^j}+\frac{V_1^2V^2}{X}) \le \\
&\#C_0^2 \cdot V_1V + \min\{\#C_0^2,\ (2^j)^4\} \cdot \frac{V_1^2V^2}{2^j} + \#C_0^2 \cdot \frac{V_1^3V^3}{X} \le \\
&\#C_0^2 \cdot V_1V + (\#C_0^2)^{3/4} \cdot ((2^j)^4)^{1/4} \cdot \frac{V_1^2V^2}{2^j} + \#C_0^2 \cdot \frac{V_1^3V^3}{X} = \\
&\#C_0^2 \cdot V_1V + \#C_0^{3/2} \cdot V_1^2V^2 + \#C_0^2 \cdot \frac{V_1^3V^3}{X}.
\end{aligned}$$

Dies in (11.2.15) eingesetzt liefert

$$(11.2.16)\quad \#B_r \ll X^{o(1)} \cdot (\#C_0^2 \cdot V_1V + \#C_0^{3/2} \cdot V_1^2V^2 + \#C_0^2 \cdot \frac{V_1^3V^3}{X}).$$

Multiplizieren wir diese Abschätzung mit $X^{o(1)} \cdot \frac{V^2}{V_1^2}$ und beachten $V_1 \ll V$, so gilt

$$(11.2.17)\quad X^{o(1)} \cdot \frac{V^2}{V_1^2} \cdot \#B_r \ll X^{o(1)} \cdot (\#C_0^2 \cdot \frac{V^3}{V_1} + \#C_0^{3/2} \cdot V^4 + \#C_0^2 \cdot \frac{V^6}{X}).$$

Ebenso erhalten wir durch Multiplikation von (11.2.11) mit $X^{o(1)} \cdot \frac{V^2}{V_1^2}$ die Gültigkeit von

$$(11.2.18)\quad X^{o(1)} \cdot \frac{V^2}{V_1^2} \cdot \#B_r \ll X^{o(1)} \cdot \#C_0 \cdot V_1V^5.$$

Nach (11.2.10), (11.2.17) und (11.2.18) ist

$$\begin{aligned}
\#N_r &\ll X^{o(1)} \cdot \frac{V^2}{V_1^2} \cdot \#B_r \\
&\ll X^{o(1)} \cdot \min\{\#C_0 \cdot V_1 V^5,\ \#C_0^2 \cdot \frac{V^3}{V_1} + \#C_0^{3/2} \cdot V^4 + \#C_0^2 \cdot \frac{V^6}{X}\} \\
&\leq X^{o(1)} \cdot (\min\{\#C_0 \cdot V_1 V^5,\ \#C_0^2 \cdot \frac{V^3}{V_1}\} + \#C_0^{3/2} \cdot V^4 + \#C_0^2 \cdot \frac{V^6}{X}) \\
&\ll X^{o(1)} \cdot (\#C_0^{3/2} \cdot V^4 + \#C_0^2 \cdot \frac{V^6}{X})
\end{aligned}$$

für alle $0 \leq r \leq m$, denn $\min\{\#C_0 \cdot V_1 V^5, \#C_0^2 \cdot \frac{V^3}{V_1}\} \leq (\#C_0 \cdot V_1 V^5)^{1/2} \cdot (\#C_0^2 \cdot \frac{V^3}{V_1})^{1/2} = \#C_0^{3/2} \cdot V^4$. Setzen wir dies in (11.2.8) ein, so erhalten wir für oben fixierte $i, j$ die Abschätzung

$$\sum_{a_1 \in C_0} (\sum_{\substack{a_2 \in C_{i,j} \\ (a_1,a_2) \in K_0}} 1)^2 \ll \#N \ll X^{o(1)} \cdot \sup_{0 \leq r \leq m} \#N_r \ll X^{o(1)} \cdot (\#C_0^{3/2} \cdot V^4 + \#C_0^2 \cdot \frac{V^6}{X}).$$

Folglich gilt diese Schranke für alle $0 \leq i \leq y$, $0 \leq j \leq z$ und daher nach (11.2.7) insbesondere

$$\begin{aligned}
\#K_0 &\ll X^{o(1)} \cdot \#C_0^{1/2} \cdot \sup_{\substack{0 \leq i \leq y \\ 0 \leq j \leq z}} (\sum_{a_1 \in C_0} (\sum_{\substack{a_2 \in C_{i,j} \\ (a_1,a_2) \in K_0}} 1)^2)^{1/2} \\
&\ll X^{o(1)} \cdot \#C_0^{1/2} \cdot (\#C_0^{3/2} \cdot V^4 + \#C_0^2 \cdot \frac{V^6}{X})^{1/2} \\
&\leq X^{o(1)} \cdot \#C_0^{1/2} \cdot (\#C_0^{3/4} \cdot V^2 + \#C_0 \cdot \frac{V^3}{X^{1/2}}) \\
&= X^{o(1)} \cdot (\#C_0^{5/4} \cdot V^2 + \#C_0^{3/2} \cdot \frac{V^3}{X^{1/2}}),
\end{aligned}$$

was mithilfe von $\#C_0 \leq \#C$ und (11.2.2) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\#\{(a_1, a_2) \in C^2 \mid \exists\, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in [-V, V]^4 \cap \mathbb{Z}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\} : \\
&\qquad\qquad v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 X + v_4 = 0\} \\
&\leq \#K_0 + O(\#C V^2 X^{o(1)}) \ll X^{o(1)} \cdot (\#C_0^{5/4} \cdot V^2 + \#C_0^{3/2} \cdot \frac{V^3}{X^{1/2}}) + \#C V^2 X^{o(1)} \\
&\ll X^{o(1)} \cdot (\#C^{5/4} \cdot V^2 + \frac{\#C^{3/2} V^3}{X^{1/2}}) \\
&\ll X^{o(1)} \cdot (\#C^{5/4} V^2 + \#C^{3/2} V + \frac{\#C^{3/2} V^3}{X^{1/2}})
\end{aligned}$$

liefert, denn die Funktion im $O(\#C V^2 X^{o(1)})$-Glied ist reellwertig und der Summand $\#C V^2 X^{o(1)}$ wird durch den Hauptterm absorbiert.

Damit ist Lemma 11.2 bewiesen und ferner die Anzahl der Paare in der betrachteten Menge sogar $\ll X^{o(1)} \cdot (\#C^{5/4} \cdot V^2 + \frac{\#C^{3/2}V^3}{X^{1/2}})$. Wir belassen es aber bei der unschärferen Abschätzung, um den Nachweis von Proposition 9.4 in der in [1, S.33] dargestellten Form übernehmen zu können.

$\square$

Somit sind alle Lemmata, die wir in den vorigen Kapiteln speziell zur Kontrolle der Minor-Arcs benötigen, nachgewiesen.

# 12. Siebabschätzung

In diesem Kapitel leiten wir aus den Propositionen 5.1 und 6.1 sowie dem „Fundamental Lemma of the Combinatorial Sieve Theory”, welches wir im Folgenden mit FLCS abkürzen, Proposition 12.1 her. Für eine Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0$ und $d \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}^+$ definieren wir

$$\mathcal{C}_d := \{c \in \mathbb{N}_0 \mid cd \in \mathcal{C}\}, \quad \mathcal{C}_d^* := \{c \in \mathcal{C} \mid d|c\} \quad \text{sowie} \quad S(\mathcal{C}, z) := \#\{c \in \mathcal{C} |\, p|c \Rightarrow p \geq z\}.$$

In [1, S.34] steht ein $>$-Zeichen in der letzten Definition, welches aber später einige Probleme verursacht. Daher das $\geq$-Zeichen. Wir weisen nochmal darauf hin, dass wir mit $p$ oder $p_i$ stets eine Primzahl meinen und setzen ab sofort

$$\theta_1 := \frac{9}{25} + 2\epsilon \approx 0.36 \quad \wedge \quad \theta_2 := \frac{17}{40} - 2\epsilon \approx 0.425 \quad \wedge \quad \theta := \theta_2 - \theta_1 \approx 0.065.$$

Dabei sind insbesondere $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta \in \mathbb{Q}^+$ wegen $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$. Zum Nachweis von Proposition 12.1 wird das Lemma 12.2 vorangestellt, für das wir folgende Hilfssätze benötigen.

*HS1 Lemma 12.2*:
Für $s \in \mathbb{R}^+$ und die gegebene Basis $b$ sei $N(s) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < s,\ ggT(n,b) = 1\}$.
Dann gilt $\#N_s = \frac{\varphi(b)}{b} \cdot s + O(1) \quad \forall\ s \in \mathbb{R}^+$.

*Beweis*:
Es darf $s \geq b$ angenommen werden, denn für $s < b$ ist die Aussage trivial, wenn wir uns daran erinnern, dass alle von $b$ abhängigen Konstanten absolut sind. Wir schreiben $n = m \cdot b + z$ mit $z \in \{0, ..., b-1\}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ und sehen, dass $ggT(n,b) = 1 \Leftrightarrow ggT(z,b) = 1$ gilt, woraus wir

$$\begin{aligned} &R(s) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n = m \cdot b + z,\ z \in \{0, ..., b-1\},\ ggT(z,b) = 1,\ m \in \mathbb{N}_0,\ m \leq \lfloor \frac{s}{b} \rfloor - 1\} \\ &\subseteq N(s) \subseteq \\ &Q(s) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n = m \cdot b + z,\ z \in \{0, ..., b-1\},\ ggT(z,b) = 1,\ m \in \mathbb{N}_0,\ m \leq \lfloor \frac{s}{b} \rfloor + 1\} \end{aligned}$$

erhalten. Nun kommen für $z$ unter den Bedingungen in $R(s)$ und $Q(s)$ genau $\varphi(b)$ Werte in Frage, während es für $m$ unter den Bedingungen in $R(s)$ bzw. $Q(s)$ genau $\lfloor \frac{s}{b} \rfloor$ bzw. $\lfloor \frac{s}{b} \rfloor + 2$ Möglichkeiten gibt. Also gilt $\lfloor \frac{s}{b} \rfloor \cdot \varphi(b) = \#R(s)$ sowie $\#Q(s) = (\lfloor \frac{s}{b} \rfloor + 2) \cdot \varphi(b)$, was

$$s \cdot \frac{\varphi(b)}{b} - \varphi(b) \leq \#R(s) \leq \#N(s) \leq \#Q(s) \leq s \cdot \frac{\varphi(b)}{b} + 2 \cdot \varphi(b)$$

und damit das gewünschte Resultat liefert, denn $\varphi(b) = O(1)$.

□

*HS2 Lemma 12.2/ Bedingung im FLCS*:
Gegeben seien $s, r \in \mathbb{R}$ mit $2 \leq s \leq r$. Dann gibt es eine von $s$ und $r$ unabhängige absolute Konstante $C \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$\prod_{s \leq p \leq r} (1 - \frac{1}{p})^{-1} < \frac{\log r}{\log s} \cdot (1 + \frac{C}{\log s})$$

gilt.

*Beweis*:
Aus der Reihenentwicklung $\log(\frac{1}{1-y}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k}$ für $y \in \mathbb{R}$, $|y| < 1$ kommt analog zu [2, S.3]

$$\log(\prod_{s \leq p \leq r} (1 - \frac{1}{p})^{-1}) = \sum_{s \leq p \leq r} \log((1 - \frac{1}{p})^{-1}) = \sum_{s \leq p \leq r} \frac{1}{p} + E \quad \text{mit } E := \sum_{s \leq p \leq r} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k},$$

also $\prod\limits_{s \leq p \leq r} (1 - \frac{1}{p})^{-1} = \exp(\sum\limits_{s \leq p \leq r} \frac{1}{p} + E)$. Nach dem Satz von Mertens [2, S.8 Satz 1.1.5] ist $\sum\limits_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log(\log x) + A + O(\frac{1}{\log x}) \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}, \; x \geq 2$ mit einer Konstanten $A \in \mathbb{R}$, was

$$\sum_{s \leq p \leq r} \frac{1}{p} = \sum_{p \leq r} \frac{1}{p} - \sum_{p < s} \frac{1}{p} = \log(\log r) - \log(\log s) + O(\frac{1}{\log s}) = \log(\frac{\log r}{\log s}) + O(\frac{1}{\log s})$$

wegen $2 \leq s \leq r$ liefert. Insgesamt gilt daher

$$(1) \qquad \prod_{s \leq p \leq r} (1 - \frac{1}{p})^{-1} = \exp(\sum_{s \leq p \leq r} \frac{1}{p} + E) = \frac{\log r}{\log s} \cdot \exp(O(\frac{1}{\log s}) + E).$$

Aus der geometrischen Summenformel und $\frac{1}{\lfloor s \rfloor - 1} \ll \frac{1}{s}$ für $s \geq 2$ folgt

$$0 \leq E = \sum_{s \leq p \leq r} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k} \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{s \leq p \leq r} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{s \leq p \leq r} \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \ll \sum_{s \leq p \leq r} \frac{1}{p(p-1)} \leq$$
$$\sum_{n=\lfloor s \rfloor}^{\lfloor r \rfloor} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=\lfloor s \rfloor}^{\lfloor r \rfloor} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{\lfloor s \rfloor - 1} - \frac{1}{\lfloor r \rfloor} \ll \frac{1}{s} \ll \frac{1}{\log s},$$

also $E = O(\frac{1}{\log s})$, indem wir $\sum\limits_{n=\lfloor s\rfloor}^{\lfloor r\rfloor}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{\lfloor s\rfloor-1} - \frac{1}{\lfloor s\rfloor} + \frac{1}{\lfloor s\rfloor} - \frac{1}{\lfloor s\rfloor+1} + ... + \frac{1}{\lfloor r\rfloor-1} - \frac{1}{\lfloor r\rfloor}$ schreiben und sehen, dass sich je zwei aufeinanderfolgende Summanden wegheben. Einsetzen in (1) liefert

$$(2) \qquad \prod_{s\le p\le r}(1-\frac{1}{p})^{-1} < \frac{\log r}{\log s}\cdot \exp(k\cdot \frac{1}{\log s})$$

mit einer von $s$ und $r$ unabhängigen absoluten Konstanten $k \in \mathbb{R}^+$ ($\log s > 0$). Nun zeigen wir $\exp(k\cdot\frac{1}{\log s}) \le 1 + \frac{C}{\log s}$ für eine absolute Konstante $C \in \mathbb{R}^+$, die nicht von $s$ oder $r$ abhängt.

Die Funktion $f: ]1,\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ f(s) = k\cdot\frac{1}{\log s}$ ist streng monoton fallend und geht für $s \longrightarrow \infty$ gegen Null, sodass es eine Schranke $S_k \in \mathbb{R},\ S_k \ge 2$ gibt mit $0 < f(s) \le 0.5\ \ \forall\ s \ge S_k$.
Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion liefert

$$\exp(k\cdot\frac{1}{\log s}) = \exp(f(s)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(s)^n}{n!} = 1 + f(s) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f(s)^n}{n!}$$

und es gilt nach der geometrischen Summenformel insbesondere

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f(s)^n}{n!} \le \sum_{n=2}^{\infty} f(s)^n = f(s)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f(s)^n = f(s)^2\cdot\frac{1}{1-f(s)} \le 2\cdot f(s)^2 \le f(s)$$

für alle $s \ge S_k$, denn dann ist $1 > 1 - f(s) \ge 0.5 \ge f(s) > 0$. Daher gilt

$$(3) \qquad \exp(k\cdot\frac{1}{\log s}) \le 1 + 2\cdot f(s) = 1 + \frac{2k}{\log s} \quad \forall\ s \ge S_k.$$

Für $2 \le s \le S_k$ ist $\exp(k\cdot\frac{1}{\log s}) \le \exp(k\cdot\frac{1}{\log 2})$ und wir definieren $C_0 := \exp(k\cdot\frac{1}{\log 2})\cdot\log(S_k) \in \mathbb{R}^+$ (beachte: $S_k \ge 2$), sodass $1 + \frac{C_0}{\log s} \ge 1 + \frac{C_0}{\log S_k} > \exp(k\cdot\frac{1}{\log 2}) \ge \exp(k\cdot\frac{1}{\log s})\ \ \forall\ 2 \le s \le S_k$ gilt. Setzen wir $C := \max\{C_0, 2k\} \in \mathbb{R}^+$, so ist diese Konstante absolut und von $s$ sowie $r$ unabhängig, weil dies auf $k$ und damit auch auf $C_0$ zutrifft. Aus (3) kommt insgesamt

$$(4) \qquad \exp(k\cdot\frac{1}{\log s}) \le 1 + \frac{C}{\log s} \quad \forall\ s \ge 2$$

und daraus nach (2) das gewünschte Resultat.

□

*HS3 Lemma 12.2*:
Für $\delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ sei $u = u(\delta) = \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{\delta}$. Dann gilt $\delta^{-2}\cdot u^{-u/2} \ll \exp(-\delta^{-2/3})$ für alle $\delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$, wobei die Konstante in $\ll$ unabhängig von $u$ und $\delta$ ist.

*Beweis*:

Wir beachten $u \geq 2$ sowie $u^{-u/2} = \exp(\log u \cdot -\frac{u}{2}) = \exp(-\frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \log(\frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{\delta}))$ und zeigen zunächst $u^{-u/2} \ll \exp(-\delta^{-1+\epsilon})$, für alle $\delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$, wobei die Konstante in $\ll$ nicht von $u$ oder $\delta$ abhängt.

Die Funktion $f : ]0, \frac{\epsilon}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(\delta) = \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{1}{\delta})$ ist streng monoton fallend und geht für $\delta \longrightarrow 0$ gegen $+\infty$, sodass es eine Schranke $S_1(\epsilon) \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ gibt mit

$$(1) \quad \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{1}{\delta}) = f(\delta) \geq 1 + \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{2}{\epsilon}) \quad \forall\ 0 < \delta \leq S_1(\epsilon).$$

Wir setzen $k = k(\epsilon) := \frac{1+\frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{2}{\epsilon})}{S_1(\epsilon)} \in \mathbb{R}^+$ ($\Leftarrow \epsilon < 2$), sodass $1 + \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{2}{\epsilon}) = k \cdot S_1(\epsilon)$ gilt.
Nun ist aber auch $f(\delta) = \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{1}{\delta}) > 0$ insbesondere für alle $\frac{\epsilon}{4} \geq \delta > S_1(\epsilon)$, was

$$(2) \quad \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{1}{\delta}) + k \cdot S_1(\epsilon) > k \cdot S_1(\epsilon) = 1 + \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{2}{\epsilon}) \quad \forall\ \frac{\epsilon}{4} \geq \delta > S_1(\epsilon)$$

liefert. Aus (1) und (2) folgt wegen $k \cdot \delta > 0$ die Abschätzung

$$(3) \quad \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{1}{\delta}) + k \cdot \delta > 1 + \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{2}{\epsilon}) \quad \forall\ 0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}$$

und daraus wegen $\delta \in [0, 1]$ bzw. $\delta^\epsilon \leq 1$ für $\delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ insbesondere

$$(4) \quad \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{1}{\delta}) + k \cdot \delta > \delta^\epsilon + \frac{\epsilon}{4} \cdot \log(\frac{2}{\epsilon}) \quad \forall\ 0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Leichte Umformung von (4) ergibt $\frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \log(\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{2}) + k > \delta^{-1+\epsilon}\ \ \forall\ 0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}$, woraus wir

$$\exp(\frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \log(\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{2}) + k) = \exp(\frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \log(\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{2})) \cdot e^k > \exp(\delta^{-1+\epsilon}) \quad \forall\ 0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}$$

erhalten. Da $k = k(\epsilon)$ und folglich $e^k$ eine von $u$ und $\delta$ unabhängige Konstante ist, liefert dies unter Beachtung des einleitenden Satzes

$$(5) \quad u^{-u/2} \ll \exp(-\delta^{-1+\epsilon}) \quad \forall\ 0 \leq \delta \leq \frac{\epsilon}{4}$$

mit einer von $u$ und $\delta$ unabhängigen Konstanten in $\ll$.
Wir verwenden folgend häufig $\log \delta = -|\log \delta|\ \ \forall\ \delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$, denn $\frac{\epsilon}{4} \leq 1$.
Die Funktion $g : ]0, \frac{\epsilon}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(\delta) = \frac{1}{2} \cdot \delta^{-1+\epsilon} + 2 \cdot \log(\delta) = \frac{1}{2} \cdot \exp(|\log(\delta)| \cdot (1-\epsilon)) - 2 \cdot |\log(\delta)|$ ist für hinreichend kleine $\delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ streng monoton fallend und geht für $\delta \longrightarrow 0$ gegen $+\infty$, sodass es eine Schranke $S_2(\epsilon) \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ gibt mit $g(\delta) > 0\ \ \forall\ 0 < \delta \leq S_2(\epsilon)$.

Also ist $2 \cdot |\log(\delta)| < \frac{1}{2} \cdot \exp(|\log(\delta)| \cdot (1-\epsilon))$ und daher

$$\begin{aligned} \delta^{-1+\epsilon} + 2 \cdot \log(\delta) &= \exp(|\log(\delta)| \cdot (1-\epsilon)) - 2 \cdot |\log(\delta)| \\ &> \frac{1}{2} \cdot \exp(|\log(\delta)| \cdot (1-\epsilon)) = \frac{1}{2} \cdot \delta^{-1+\epsilon} \end{aligned}$$

für alle $0 < \delta \leq S_2(\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{4}$. Da $\delta \in ]0, S_2(\epsilon)] \subseteq ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ und damit sehr klein ist, gilt $\frac{1}{2} \cdot \delta^{-1+\epsilon} > \delta^{-2/3}$ und folglich $\delta^{-1+\epsilon} + 2 \cdot \log(\delta) > \delta^{-2/3} \;\; \forall \; 0 < \delta \leq S_2(\epsilon)$, woraus wir leicht

$$(6) \quad \exp(-\delta^{-1+\epsilon}) \cdot \delta^{-2} < \exp(-\delta^{-2/3}) \quad \forall \; 0 < \delta \leq S_2(\epsilon)$$

folgern. Im Fall $\frac{\epsilon}{4} \geq \delta > S_2(\epsilon)$ gilt (6) ebenfalls mit einem $\ll$-Zeichen anstatt des $<$-Zeichens, wobei die Konstante in $\ll$ unabhängig von $\delta$ ist. Dann ist nämlich $\delta \asymp 1$ und damit die linke sowie die rechte Seite von (6) jeweils $\asymp 1$. Daraus folgt insgesamt

$$(7) \quad \exp(-\delta^{-1+\epsilon}) \cdot \delta^{-2} \ll \exp(-\delta^{-2/3}) \quad \forall \; 0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{4}$$

mit einer von $\delta$ unabhängigen Konstanten in $\ll$ und nach (5) das gewünschte Resultat.

□

**Lemma 12.2**

Sei $X = b^k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) eine hinreichend große $b$-Potenz, sodass insbesondere $(\log(\log X))^{-1} \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ ist. Wir erinnern an die Definition $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq n < X\}$ im Nachweis zu Proposition 6.1. Dann gilt

$$\sum_{\substack{d < X^{50/77-\epsilon} \\ p|d \Rightarrow p \geq X^\delta}} |S(\mathcal{A}_d, X^\delta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\delta)| \ll \exp(-\delta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$$

für alle $\delta \in [(\log(\log X))^{-1}, \frac{\epsilon}{4}]$, wobei die Konstante in $\ll$ unabhängig von $\delta$ ist.

**Beweis**:

I. Wir fixieren $\delta \in [(\log(\log X))^{-1}, \frac{\epsilon}{4}]$, setzen $D := \{d \in \mathbb{N} \,|\, d < X^{50/77-\epsilon} \;\wedge\; p|d \Rightarrow p \geq X^\delta\}$ und wählen $X$ hinreichend groß, sodass $X^\delta = \exp(\log X \cdot \delta) \geq \exp(\frac{\log X}{\log(\log X)}) > b$ ist. Somit ist auch

$$D = \{d \in \mathbb{N} \,|\, d < X^{50/77-\epsilon},\; ggT(d, b) = 1 \;\;\wedge\;\; p|d \Rightarrow p \geq X^\delta\},$$

denn aus $p|d \Rightarrow p \geq X^\delta > b$ folgt insbesondere $p \nmid b$ für alle Primteiler $p$ von $d$, also $ggT(d,b) = 1$. Ferner definieren wir $\mathcal{B}' = \{n \in \mathcal{B} \mid ggT(n,b) = 1\} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid ggT(n,b) = 1,\ n < X\}$ und zeigen zunächst $\#\mathcal{B}' = \frac{\varphi(b)}{b} \cdot \#\mathcal{B} = \frac{\varphi(b)}{b} \cdot X$.

Nach Definition besteht die Menge $\mathcal{B}'$ aus allen im $b$-adischen System $k$-stelligen Zahlen $n = (n_{k-1}...n_0)_b < X = b^k$ mit $n_i \in \{0,...,b-1\}\ \forall\ 0 \leq i \leq k-1$, wobei führende Nullen erlaubt sind, deren Einerziffer $n_0 \in \{0,...,b-1\}$ teilerfremd zu $b$ ist, denn genau dann gilt nämlich $ggT(n,b) = 1$. Dabei kann $n_0$ genau $\varphi(b)$ Werte annehmen (beachte: $b \geq 2$), sodass $\#\mathcal{B}' = \varphi(b) \cdot b^{k-1} = \frac{\varphi(b)}{b} \cdot b^k = \frac{\varphi(b)}{b} \cdot \#\mathcal{B}$ gilt, weil für die Ziffern $n_i$ mit $1 \leq i \leq k-1$ jeweils $b$ Werte in Frage kommen. Also gilt

$$(12.2.1) \quad \#\mathcal{B}' = \frac{\varphi(b)}{b} \cdot \#\mathcal{B} = \frac{\varphi(b)}{b} \cdot X.$$

Für $d, e \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = ggT(e,b) = 1$ liefert *HS1 Lemma 12.2* die Gültigkeit von

$$\#\{n \in \mathcal{B}'_d \mid e|n\} = \#\{n \in \mathbb{N}_0 \mid nd \in \mathcal{B}'\ \wedge\ e|n\} =$$
$$\#\{n \in \mathbb{N}_0 \mid ggT(nd,b) = 1,\ nd < X\ \wedge\ e|n\} = \#\{m \in \mathbb{N}_0 \mid ggT(m,b) = 1,\ m < \frac{X}{de}\} =$$
$$\frac{\varphi(b)}{b} \cdot \frac{X}{de} + O(1) = \frac{\varphi(b)/b}{de} \cdot \#\mathcal{B} + O(1),$$

wenn wir für $n \in \mathbb{N}_0,\ e|n$ insbesondere $n = m \cdot e$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ definieren und dann $ggT(nd,b) = 1\ \Leftrightarrow\ ggT(m,b) = 1$ beachten ($\Leftarrow ggT(de,b) = 1$). Dies liefert

$$(12.2.2) \quad \#\{n \in \mathcal{B}'_d \mid e|n\} = \frac{\varphi(b)/b}{de} \cdot \#\mathcal{B} + R_d(e)\ \text{ mit } R_d(e) = O(1)$$
$$\forall\ d, e \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = ggT(e,b) = 1.$$

Für $d \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = 1$ ist

$$S(\mathcal{B}_d, X^\delta) = \#\{n \in \mathcal{B}_d \mid p|n \Rightarrow p \geq X^\delta\} = \#\{n \in \mathbb{N}_0 \mid nd \in \mathcal{B}\ \wedge\ p|n \Rightarrow p \geq X^\delta\} =$$
$$\#\{n \in \mathbb{N}_0 \mid nd \in \mathcal{B},\ ggT(nd,b) = 1\ \wedge\ p|n \Rightarrow p \geq X^\delta\} =$$
$$\#\{n \in \mathbb{N}_0 \mid nd \in \mathcal{B}'\ \wedge\ p|n \Rightarrow p \geq X^\delta\} = \#\{n \in \mathcal{B}'_d \mid p|n \Rightarrow p \geq X^\delta\} = S(\mathcal{B}'_d, X^\delta),$$

weil aus $p|n$ folgt $p \geq X^\delta > b$, also $p \nmid b$ für jeden Primteiler $p$ von $n$ und daher $ggT(n,b) = 1$:

$$(12.2.3) \quad S(\mathcal{B}_d, X^\delta) = S(\mathcal{B}'_d, X^\delta) \quad \forall\ d \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = 1\ \text{ bzw. } d \in D.$$

Wir verwenden das „Fundamental Lemma of the Combinatorial Sieve Theory" (kurz: FLCS) in der folgenden Version :

FLCS:
Sei $A \subseteq \mathbb{N}_0$ eine endliche Menge und $A_e = \{a \in A \mid e|a\}$ für $e \in \mathbb{N}$ mit $\#A_e = \frac{\omega(e)}{e} \cdot \#A + R'(e)$, wobei $\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine multiplikative Funktion mit der folgenden Eigenschaft ist :

$$(*) \quad \text{Es gibt Konstanten } c, C \in \mathbb{R}^+, \text{ sodass } \prod_{s \leq p \leq r} (1 - \frac{\omega(p)}{p})^{-1} < (\frac{\log r}{\log s})^c \cdot (1 + \frac{C}{\log s})$$

für alle $s, r \in \mathbb{R},\ 2 \leq s \leq r$ gilt.

Ferner sei $P \subseteq \mathbb{P}$ eine Menge von Primzahlen und wir definieren $P(z) := \prod_{\substack{p \in P \\ p < z}} p$ sowie

$$S(A, P, z) = \#\{a \in A \mid p \in P \ \wedge \ p|a \Rightarrow p \geq z\} \quad \text{für } z \in \mathbb{R},\ z \geq 2.$$

Dann gilt gleichmäßig in $u \in \mathbb{R},\ u \geq 1$ und $z \in \mathbb{R},\ z \geq 2$ sowie $A$ und $P$ die Abschätzung

$$S(A, P, z) = \#A \cdot \prod_{\substack{p \in P \\ p < z}} (1 - \frac{\omega(p)}{p}) \cdot (1 + O_{c,C}(u^{-u/2})) + O(\sum_{\substack{e \leq z^u \\ e | P(z)}} |R'(e)|).$$

Diese Version des FLCS erhalten wir aus Corollary 6.10 und Theorem 6.12 in [3, S.69-70]. Insbesondere stimmen unsere Definitionen im FLCS im Wesentlichen mit jenen in der Quelle [3] überein. In Corollary 6.10 und Theorem 6.12 entsprechen dabei $s, \kappa, D$ gerade $u, c, z^u$ aus obiger Version des FLCS.

Wir sehen, dass die Abschätzung (5.38) in [3, S.42] mit $g(d) = \frac{1}{d} \ \forall \ d \in \mathbb{N}$ nach *HS2 Lemma 12.2* insbesondere für $\kappa = c = 1$ und $K = 1 + \frac{C}{\log 2}$ mit der absoluten Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$ aus *HS2* erfüllt ist.

Für $s \leq c_1\kappa + 2 \leq 6$, wobei $c_1 = 3.591 < 4$ die im obigen Theorem 6.12 erwähnte Konstante ist, entspricht der Summand $4\theta(9\kappa + 1)^\kappa \cdot e^{9\kappa - s} K^{11}$ in Corollary 6.10 gerade einem $O_{c,C}(1) = O_{c,C}(s^{-s/2}) = O_{c,C}(u^{-u/2})$ $(\Leftarrow |\theta| \leq 1,\ 1 \leq s \leq 6)$.

Für $s \geq c_1\kappa + 2$ verwenden wir Theorem 6.12, in welchem der entsprechende Summand $\theta K^\eta \cdot \exp(-s\log s + s\log(\log(sK)) + O(s))$ ebenfalls ein $O_{c,C}(s^{-s/2}) = O_{c,C}(u^{-u/2})$ ist, zumal $\eta$ nur von $\kappa$ abhängt.

Damit haben wir unsere Version des FLCS hinreichend mit Quelle [3] belegt.
Da $c = 1$ und $C$ zwei absolute Konstanten aus *HS1 Lemma 12.2* sind, können wir folgend bei Verwendung des FLCS einfach nur $O(u^{-u/2})$ anstatt $O_{c,C}(u^{-u/2})$ schreiben, da wir in diesen Anwendungsfällen stets $\omega(n) = 1 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$ wählen.

Sei $d \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = 1$ fixiert. Wir setzen $A = \mathcal{B}_d^{'},\ z = X^\delta > b \geq 2,\ \omega(n) = 1 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$ und $P = \mathbb{P}\backslash\mathbb{P}(b) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \nmid b\}$ ins FLCS ein und bemerken, dass offensichtlich $\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ multiplikativ ist und nach *HS2 Lemma 12.2* obige Eigenschaft $(*)$ mit $c = 1$ besitzt.
Ferner ist $A_e = \{n \in A \mid e|n\} = \{n \in \mathcal{B}_d^{'} \mid e|n\}$ insbesondere für $e \in \mathbb{N},\ ggT(e,b) = 1$ und daher

$$\begin{aligned}\#A_e = \#\{n \in \mathcal{B}_d^{'} \mid e|n\} &= \frac{\varphi(b)/b}{de} \cdot \#\mathcal{B} + R_d(e) = \frac{\#\mathcal{B}_d^{'} - R_d(1)}{e} + R_d(e)\\ &= \frac{\omega(e)}{e} \cdot \#A + R_d(e) - \frac{R_d(1)}{e} = \frac{\omega(e)}{e} \cdot \#A + R_d^{'}(e) \quad (R^{'}(e) = R_d^{'}(e) \;\forall\; e \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

mit $R_d^{'}(e) := R_d(e) - \frac{R_d(1)}{e} = O(1)$ für alle $e \in \mathbb{N},\ ggT(e,b) = 1$ nach (12.2.2), wobei letzteres auch $R_d(e) = O(1)$ und $\#A = \#\mathcal{B}_d^{'} = \#\{n \in \mathcal{B}_d^{'} \mid 1|n\} = \frac{\varphi(b)/b}{d} \cdot \#\mathcal{B} + R_d(1)$ mit $R_d(1) = O(1)$ impliziert. Nun ist $P(z) = P(X^\delta) = \prod\limits_{\substack{p\in P\\ p<X^\delta}} p$, also insbesondere $ggT(b, P(z)) = 1$ und es kommt

$$S(A,P,z) = \#\{a \in \mathcal{B}_d^{'} \mid p \in P \;\wedge\; p|a \Rightarrow p \geq X^\delta\} = \#\{a \in \mathcal{B}_d^{'} \mid p|a \Rightarrow p \geq X^\delta\} = S(\mathcal{B}_d^{'}, X^\delta),$$

weil aus $a \in \mathcal{B}_d^{'}$ zunächst $ad \in \mathcal{B}^{'}$ und damit $ggT(a,b) = 1$ folgt, also $p \in P$ ohnehin für alle Primteiler $p$ von $a$ gilt. Daraus erhalten wir das zweite Gleichheitszeichen.
Für $e|P(z)$ ist $ggT(e,b) = 1$ und es gilt $p|e \Rightarrow p < X^\delta = z$, sodass das zu addierende $O$-Glied im FLCS ein $O(\sum\limits_{\substack{e\leq X^{\delta\cdot u}\\ ggT(e,b)=1\\ p|e\,\Rightarrow\, p<X^\delta}} |R_d^{'}(e)|) = O(\sum\limits_{\substack{e\leq X^{\delta\cdot u}\\ ggT(e,b)=1\\ p|e\,\Rightarrow\, p<X^\delta}} 1)$ ist. Zusammenfassend gilt nach dem FLCS

$$\text{(12.2.4)}\quad S(\mathcal{B}_d^{'}, X^\delta) = (\frac{\varphi(b)/b}{d} \cdot \#\mathcal{B} + R_d(1)) \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta\\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p}) \cdot (1 + O(u^{-u/2})) + O(\sum_{\substack{e\leq X^{\delta\cdot u}\\ ggT(e,b)=1\\ p|e\,\Rightarrow\, p<X^\delta}} 1)$$

$$\forall\; u \in \mathbb{R},\ u \geq 1,\ d \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = 1 \text{ bzw. } d \in D, \text{ wobei } R_d(1) = O(1) \text{ ist.}$$

Wir wählen $u = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{\delta} \geq 2$ ($\Leftarrow \delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$) in (12.2.4) und erhalten wegen $1 + O(u^{-u/2}) = O(1)$ und $R_d(1) = O(1) \;\; \forall \; d \in D$ aus (12.2.4) die Abschätzung

$$\text{(12.2.5)} \quad |S(\mathcal{B}_d', X^\delta) - \frac{\varphi(b)/b}{d} \cdot \#\mathcal{B} \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta \\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p})| \ll$$

$$\prod_{\substack{p<X^\delta \\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p}) + \sum_{\substack{e \leq X^{\delta \cdot u} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} 1 + u^{-u/2} \cdot \frac{\varphi(b)/b}{d} \cdot \#\mathcal{B} \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta \\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p})$$

$$\forall \; d \in D \text{ mit } u = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{\delta}.$$

Nun schätzen wir $\prod\limits_{\substack{p<X^\delta \\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p})$ nach oben ab.

Wir finden $\prod\limits_{\substack{p\leq X^\delta \\ p|b}} (1 - \frac{1}{p}) = \prod\limits_{p|b}(1 - \frac{1}{p}) \asymp_b 1$, weil $X^\delta > b$ ist und über $r = \omega(b)$ Primteiler $p$ von $b$ mit $1 - \frac{1}{p} \in [\frac{1}{2}, 1]$ multipliziert wird (beachte: PFZ von $b$ in Kap. 6). Damit gilt

$$\text{(12.2.6)} \quad \prod_{\substack{p<X^\delta \\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p}) \ll \prod_{\substack{p\leq X^\delta \\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p}) = \prod_{p\leq X^\delta} (1 - \frac{1}{p}) / \prod_{\substack{p\leq X^\delta \\ p|b}} (1 - \frac{1}{p})$$

$$\ll \prod_{p\leq X^\delta} (1 - \frac{1}{p}) \ll \frac{1}{\delta \cdot \log X},$$

wenn wir zuletzt die Asymptotik $\prod\limits_{p\leq x} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \asymp \log x \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}, \; x \geq 2$ verwenden.
Diese leiten wir nun her. Aus [2, S.3] folgt für alle $x \in \mathbb{R}, \; x \geq 2$ die Gültigkeit von

$$\log(\prod_{p\leq x}(1 - \frac{1}{p})^{-1}) = \sum_{p\leq x} \log((1 - \frac{1}{p})^{-1}) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} + E \;\text{ mit } 0 \leq E \leq \frac{1}{2}, \text{ was}$$

$$\prod_{p\leq x}(1 - \frac{1}{p})^{-1} = \exp(\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} + E) \asymp \exp(\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}) \;\text{ liefert.}$$

Nach Satz 1.1.5 [2, S.8] ist $\sum\limits_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log(\log x) + A + O(\frac{1}{\log x})$ und $A + O(\frac{1}{\log x}) = O(1)$ ($\Leftarrow x \geq 2$), sodass insgesamt $\prod\limits_{p\leq x} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \asymp \exp(\sum\limits_{p\leq x} \frac{1}{p}) = \exp(\log(\log x) + O(1)) \asymp \log x \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}, \; x \geq 2$ gilt.

Summieren wir (12.2.5) über alle $d \in D$ und beachten zusätzlich (12.2.6) und (12.2.3), so folgt wegen $\frac{\varphi(b)}{b} \leq 1$ insbesondere

$$(12.2.7) \quad \sum_{d \in D} |S(\mathcal{B}_d, X^\delta) - \frac{\varphi(b)/b}{d} \cdot \#\mathcal{B} \cdot \prod_{\substack{p < X^\delta \\ p \nmid b}} (1 - \frac{1}{p})| \ll$$

$$\sum_{d \in D} \frac{1}{\delta \cdot \log X} + \sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\delta \cdot u} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p < X^\delta}} 1 + u^{-u/2} \cdot \frac{\#\mathcal{B}}{\delta \cdot \log X} \cdot \sum_{d \in D} \frac{1}{d} \quad \text{mit } u = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{\delta}.$$

Wegen $\delta^{-1} \leq \log(\log X) \leq \log X$ für hinreichend große $X$ und $u = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{\delta}$ ist

$$\sum_{d \in D} \frac{1}{\delta \cdot \log X} \leq \sum_{d \in D} 1 < X^{50/77 - \epsilon} < X^{50/77} \text{ sowie}$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\delta \cdot u} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p < X^\delta}} 1 = \sum_{d \in D} 1 \cdot \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p < X^\delta}} 1 < X^{50/77 - \epsilon} \cdot X^{\epsilon/2} < X^{50/77}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der PFZ von $d \in D$ in Primfaktoren $p$ mit $X^\delta \leq p < X^{50/77}$ gilt

$$\sum_{d \in D} \frac{1}{d} = \sum_{\substack{d < X^{50/77-\epsilon} \\ p|d \Rightarrow p \geq X^\delta}} \frac{1}{d} \leq \prod_{X^\delta \leq p < X^{50/77}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \prod_{X^\delta \leq p < X^{50/77}} (1 - \frac{1}{p})^{-1} =$$

$$\prod_{p < X^{50/77}} (1 - \frac{1}{p})^{-1} / \prod_{p < X^\delta} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \asymp \log(X^{50/77}) / \log(X^\delta) \asymp \frac{1}{\delta},$$

indem wir zuletzt die Asymptotik $\prod_{p<x} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \asymp \log x \ \ \forall \ x \in \mathbb{R}, \ x \geq 2$ verwenden und $X^{50/77} > X^\delta > b > 2$ beachten. Diese folgt direkt aus der oben gezeigten Asymptotik $\prod_{p \leq x} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \asymp \log x$, denn der von $p = x$ induzierte Faktor $(1 - \frac{1}{p})^{-1}$ liegt in $[1, 2]$ ($\Leftarrow p = x \geq 2$). Aus *HS3 Lemma 12.2* mit $u = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{\delta}$ schließen wir

$$u^{-u/2} \cdot \frac{\#\mathcal{B}}{\delta \cdot \log X} \cdot \sum_{d \in D} \frac{1}{d} \ll \delta^{-2} \cdot u^{-u/2} \cdot \frac{\#\mathcal{B}}{\log X} \ll \exp(-\delta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{B}}{\log X},$$

wobei die Konstanten in $\ll$ nicht von $u$ oder $\delta$ abhängen, was in (12.2.7) eingesetzt

$$(12.2.8) \quad \sum_{d \in D} |S(\mathcal{B}_d, X^\delta) - \frac{\varphi(b)/b}{d} \cdot \#\mathcal{B} \cdot \prod_{\substack{p < X^\delta \\ p \nmid b}} (1 - \frac{1}{p})| \ll X^{50/77} + \exp(-\delta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{B}}{\log X}$$

$$\ll \exp(-\delta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{B}}{\log X}$$

impliziert. Mithilfe $\delta^{-1} \leq \log(\log X)$ und $\#\mathcal{B} = X$ erhalten wir das letzte $\ll$-Zeichen, denn es gilt $\exp(-\delta^{-2/3}) \geq \frac{1}{\exp((\log(\log X))^{2/3})} \gg \frac{1}{\log X}$ und daher $\exp(-\delta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{B}}{\log X} \gg \frac{X}{(\log X)^2} \gg X^{50/77}$.

II. Wir definieren $\mathcal{A}^{'} := \{a \in \mathcal{A} \mid ggT(a,b) = 1\}$ und zeigen zunächst $\#\mathcal{A}^{'} = \kappa \cdot \#\mathcal{A}$.

Wir erinnern uns an die Definitionen von $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$ und $\kappa := \begin{cases} \frac{\varphi(b)}{b-1} & \text{, falls } ggT(a_0,b) \neq 1 \\ \frac{\varphi(b)-1}{b-1} & \text{, falls } ggT(a_0,b) = 1 \end{cases}$

aus den Kapiteln 4 und 5, d.h. $\mathcal{A}$ ist die Menge aller im $b$-adischen System $k$-stelligen Zahlen mit Ziffern aus $\{0,...,b-1\}\backslash\{a_0\}$ (beachte: $X = b^k$), wobei führende Nullen erlaubt sind. Damit ist $\mathcal{A}^{'}$ die Menge aller Zahlen $a = (n_{k-1}...n_0)_b$ mit $n_i \in \{0,...,b-1\}\backslash\{a_0\}$ für alle $0 \leq i \leq k-1$, deren Einerziffer $n_0$ in der Menge $N_0 = \{n \in \{0,...,b-1\}\backslash\{a_0\} \mid ggT(n,b) = 1\}$ enthalten ist, denn genau dann gilt nämlich $ggT(a,b) = 1$.

Nun ist $\#N_0 = \begin{cases} \varphi(b) & \text{, falls } ggT(a_0,b) \neq 1 \\ \varphi(b) - 1 & \text{, falls } ggT(a_0,b) = 1 \end{cases}$ und damit liegen in $\mathcal{A}^{'}$ genau

$(b-1)^{k-1} \cdot \#N_0 = (b-1)^k \cdot \kappa = \kappa \cdot \#\mathcal{A}$ Zahlen, denn für die Ziffern $n_1,...,n_{k-1}$ in der $b$-adischen Darstellung von $a = (n_{k-1}...n_0)_b \in \mathcal{A}^{'}$ stehen genau $b-1$ Werte und für die Einerziffer $n_0$ genau $\#N_0$ Werte zur Verfügung. Somit kommt

$$(12.2.9) \quad \#\mathcal{A}^{'} = \kappa \cdot \#\mathcal{A}.$$

Für $d, e \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = ggT(e,b) = 1$ ist

$$\#\{a \in \mathcal{A}^{'}_d \mid e|a\} = \#\{a \in \mathbb{N}_0 \mid ad \in \mathcal{A}^{'},\ e|a\} = \#\{a \in \mathbb{N}_0 \mid ad \in \mathcal{A},\ ggT(ad,b) = 1,\ e|a\} =$$
$$\#\{a^{'} \in \mathcal{A} \mid ggT(a^{'},b) = 1,\ de|a^{'}\}$$

mit $a^{'} = ad$ und wir definieren $\#\{a \in \mathcal{A}^{'}_d \mid e|a\} := \frac{\kappa \cdot \#\mathcal{A}}{de} + R_d(e)$ für obige $d, e \in \mathbb{N}$, woraus

$$\sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d(e)| = \sum_{\substack{d<X^{50/77-\epsilon} \\ ggT(d,b)=1 \\ p|d \Rightarrow p \geq X^\delta}} \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |\#\{a \in \mathcal{A}^{'}_d \mid e|a\} - \frac{\kappa \cdot \#\mathcal{A}}{de}| =$$

$$\sum_{\substack{d<X^{50/77-\epsilon} \\ ggT(d,b)=1 \\ p|d \Rightarrow p \geq X^\delta}} \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |\#\{a \in \mathcal{A} \mid ggT(a,b) = 1,\ de|a\} - \frac{\kappa \cdot \#\mathcal{A}}{de}| \leq$$

$$\sum_{\substack{q<X^{50/77-\epsilon/2} \\ ggT(q,b)=1}} \sum_{\substack{q=de \\ p|d \Rightarrow p \geq X^\delta \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |\#\{a \in \mathcal{A} \mid ggT(a,b) = 1,\ q|a\} - \kappa \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{q}|$$

folgt. Für festes $q \in \mathbb{N}$ zeigen wir zunächst $\sum\limits_{\substack{q=de \\ p|d \Rightarrow p \geq X^\delta \\ p|e \Rightarrow p < X^\delta}} 1 \leq 1.$

Angenommen es gilt $q = d^{'}e^{'} = d^{''}e^{''}$, wobei $d^{'}, d^{''}$ und $e^{'}, e^{''}$ den Summationsbedingungen genügen, d.h. nur Primteiler $\geq X^\delta$ bzw. $< X^\delta$ besitzen. Damit haben insbesondere $d^{'}$ und $e^{''}$ sowie $d^{''}$ und $e^{'}$ keine gemeinsamen Primteiler, sodass $ggT(d^{'}, e^{''}) = ggT(d^{''}, e^{'}) = 1$ ist.
Aus $q = d^{'}e^{'} = d^{''}e^{''}$ folgt somit $d^{'}|d^{''}$ und $d^{''}|d^{'}$, also $d^{'} = d^{''}$ und $e^{'} = e^{''}$.
Damit ist $q$ wenn überhaupt nur eindeutig in der Form $q = de$ mit $p|d \Rightarrow p \geq X^\delta$ und $p|e \Rightarrow p < X^\delta$ darstellbar, woraus sich die gewünschte Abschätzung ergibt. Dies liefert

$$(12.2.10) \quad \sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p < X^\delta}} |R_d(e)| \leq \sum_{\substack{q < X^{50/77-\epsilon/2} \\ ggT(q,b)=1}} |\#\{a \in \mathcal{A} \mid ggT(a,b) = 1,\ q|a\} - \kappa \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{q}| \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5}$$

nach Proposition 5.1 mit $A := 5$ und $Q := X^{50/77-\epsilon/2} \ll X^{50/77} \cdot (\log X)^{-10}$, $Q \geq 1$.
Analog zur Herleitung von (12.2.3) in Kap.I erhalten wir

$$(12.2.11) \quad S(\mathcal{A}_d, X^\delta) = S(\mathcal{A}_d^{'}, X^\delta) \quad \forall\ d \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = 1 \text{ bzw. } d \in D,$$

wenn wir darin einfach $\mathcal{B}$ durch $\mathcal{A}$ austauschen. Wir leiten nun die (12.2.4) entsprechende Aussage mit $\mathcal{A}$ anstatt $\mathcal{B}$ her, indem wir das FLCS verwenden.

Sei $d \in \mathbb{N}$, $ggT(d,b) = 1$ fixiert. Wir setzen $A = \mathcal{A}_d^{'}$, $z = X^\delta > b \geq 2$, $\omega(n) = 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und $P = \mathbb{P} \backslash \mathbb{P}(b) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \nmid b\}$ ins FLCS ein und bemerken, dass offensichtlich $\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ multiplikativ ist und nach *HS2 Lemma 12.2* obige Eigenschaft $(*)$ mit $c = 1$ besitzt.
Ferner ist $A_e = \{a \in A \mid e|a\} = \{a \in \mathcal{A}_d^{'} \mid e|a\}$ insbesondere für $e \in \mathbb{N}$, $ggT(e,b) = 1$ und daher

$$\begin{aligned} \#A_e &= \#\{a \in \mathcal{A}_d^{'} \mid e|a\} = \frac{\kappa \cdot \#\mathcal{A}}{de} + R_d(e) = \frac{\#\mathcal{A}_d^{'} - R_d(1)}{e} + R_d(e) \\ &= \frac{\omega(e)}{e} \cdot \#A + R_d(e) - \frac{R_d(1)}{e} = \frac{\omega(e)}{e} \cdot \#A + R_d^{'}(e) \quad (R^{'}(e) = R_d^{'}(e)\ \forall\ e \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

mit $R_d^{'}(e) := R_d(e) - \frac{R_d(1)}{e}$ für alle $e \in \mathbb{N}$, $ggT(e,b) = 1$, wobei wir obige Definition $\#\{a \in \mathcal{A}_d^{'} \mid e|a\} := \frac{\kappa \cdot \#\mathcal{A}}{de} + R_d(e)\ \forall\ d, e \in \mathbb{N},\ ggT(d,b) = ggT(e,b) = 1$ verwenden, die auch $\#A = \#\mathcal{A}_d^{'} = \#\{a \in \mathcal{A}_d^{'} \mid 1|a\} = \frac{\kappa \cdot \#\mathcal{A}}{d} + R_d(1)$ impliziert, also $\frac{\kappa \cdot \#\mathcal{A}}{de} = \frac{\#\mathcal{A}_d^{'} - R_d(1)}{e}$.

Nun ist $P(z) = P(X^\delta) = \prod\limits_{\substack{p\in P\\ p<X^\delta}} p$, also insbesondere $ggT(b, P(z)) = 1$ und es gilt

$$S(A, P, z) = \#\{a \in \mathcal{A}_d^{'} \mid p \in P \ \wedge \ p|a \Rightarrow p \geq X^\delta\} = \#\{a \in \mathcal{A}_d^{'} \mid p|a \Rightarrow p \geq X^\delta\} = S(\mathcal{A}_d^{'}, X^\delta),$$

weil aus $a \in \mathcal{A}_d^{'}$ zunächst $ad \in \mathcal{A}^{'}$ und damit $ggT(a, b) = 1$ folgt, also $p \in P$ ohnehin für alle Primteiler $p$ von $a$ gilt. Daraus erhalten wir das zweite Gleichheitszeichen.
Für $e|P(z)$ ist $ggT(e, b) = 1$ und es gilt $p|e \Rightarrow p < X^\delta = z$, sodass das zu addierende $O$-Glied im FLCS ein $O(\sum\limits_{\substack{e\leq X^{\delta\cdot u}\\ ggT(e,b)=1\\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d^{'}(e)|)$ ist. Zusammenfassend gilt nach dem FLCS

$$S(\mathcal{A}_d^{'}, X^\delta) = (\frac{\kappa\cdot\#\mathcal{A}}{d} + R_d(1)) \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta\\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p}) \cdot (1 + O(u^{-u/2})) + O(\sum_{\substack{e\leq X^{\delta\cdot u}\\ ggT(e,b)=1\\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d^{'}(e)|) \tag{12.2.12}$$

$$\forall \ u \in \mathbb{R},\ u \geq 1,\ d \in \mathbb{N},\ ggT(d, b) = 1 \text{ bzw. } d \in D.$$

Wir wählen $u = \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{\delta} \geq 2$ ($\Leftarrow \delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$) in (12.2.12) und erhalten wegen $1 + O(u^{-u/2}) = O(1)$ ähnlich wie (12.2.5) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|S(\mathcal{A}_d^{'}, X^\delta) - \frac{\kappa\cdot\#\mathcal{A}}{d} \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta\\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p})| \ll \\ &|R_d(1)| \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta\\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p}) + \sum_{\substack{e\leq X^{\delta\cdot u}\\ ggT(e,b)=1\\ p|e\Rightarrow p<X^\delta}} |R_d^{'}(e)| + u^{-u/2} \cdot \frac{\kappa\cdot\#\mathcal{A}}{d} \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta\\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p}) \\ &\forall \ d \in D \text{ mit } u = \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{\delta}. \end{aligned} \tag{12.2.13}$$

Verwenden wir die Abschätzungen (12.2.6) $\prod\limits_{\substack{p<X^\delta\\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p}) \ll \frac{1}{\delta\cdot\log X}$ sowie $\sum\limits_{d\in D} \frac{1}{d} \ll \delta^{-1}$ aus Kap.I, summieren (12.2.13) über alle $d \in D$ und beachten zusätzlich (12.2.11), so kommt wegen $\kappa \ll 1$

$$\begin{aligned} &\sum_{d\in D} |S(\mathcal{A}_d, X^\delta) - \frac{\kappa\cdot\#\mathcal{A}}{d} \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta\\ p\nmid b}} (1 - \frac{1}{p})| \ll \\ &\sum_{d\in D} |R_d(1)| \cdot \frac{1}{\delta\cdot\log X} + \sum_{d\in D} \sum_{\substack{e\leq X^{\delta\cdot u}\\ ggT(e,b)=1\\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d^{'}(e)| + \delta^{-2}\cdot u^{-u/2} \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \\ &\text{mit } u = \frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{1}{\delta}. \end{aligned} \tag{12.2.14}$$

Wegen $R_d'(e) := R_d(e) - \frac{R_d(1)}{e}$ für alle $d \in D,\ e \in \mathbb{N},\ ggT(e,b) = 1\ (\Rightarrow ggT(d,b) = 1)$ ist

$$\sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\delta \cdot u} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d'(e)| = \sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d'(e)| \leq$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d(e)| + \sum_{d \in D} |R_d(1)| \cdot \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} \frac{1}{e} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5} + \sum_{d \in D} |R_d(1)| \cdot \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} \frac{1}{e}$$

mit $u = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{\delta}$ nach (12.2.10). Letzteres impliziert auch

$$\sum_{d \in D} |R_d(1)| \leq \sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d(e)| \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5},$$

denn in der dritten (inneren) Summe wird über $|R_d(1)|$ summiert, weil $e = 1$ die Summationsbedingungen erfüllt. Ferner ist aufgrund der Eindeutigkeit der PFZ von $e$ insbesondere

$$\sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} \frac{1}{e} \leq \sum_{\substack{e \in \mathbb{N} \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} \frac{1}{e} = \prod_{p<X^\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \prod_{p<X^\delta} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \asymp \log(X^\delta) = \delta \cdot \log X,$$

wenn wir die in Kap.I nachgewiesene Asymptotik $\prod_{p<x} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \asymp \log x\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 2$ verwenden (beachte: $X^\delta > b > 2$). Zusammengefasst ergibt dies mit $u = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{\delta}$ die Gültigkeit von

$$\sum_{d \in D} \sum_{\substack{e \leq X^{\delta \cdot u} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} |R_d'(e)| \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5} + \sum_{d \in D} |R_d(1)| \cdot \sum_{\substack{e \leq X^{\epsilon/2} \\ ggT(e,b)=1 \\ p|e \Rightarrow p<X^\delta}} \frac{1}{e} \ll$$

$$\ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5} + \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5} \cdot \delta \cdot \log X \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^4}$$

sowie jene von

$$\sum_{d \in D} |R_d(1)| \cdot \frac{1}{\delta \cdot \log X} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5} \cdot \frac{1}{\delta \cdot \log X} \leq \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5} \cdot \frac{\log(\log X)}{\log X} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^5},$$

wenn wir $\delta \in [(\log(\log X))^{-1}, \frac{\epsilon}{4}]$ gebrauchen. Nach (12.2.14) und *HS3 Lemma 12.2* liefert dies

$$(12.2.15) \quad \sum_{d\in D} |S(\mathcal{A}_d, X^\delta) - \frac{\kappa\cdot \#\mathcal{A}}{d} \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta \\ p\nmid b}} (1-\frac{1}{p})| \ll \frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^4} + \exp(-\delta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$$
$$\ll \exp(-\delta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X},$$

wobei die Konstanten in $\ll$ nach *HS3* eben nicht von $u$ oder $\delta$ abhängen. Ferner erhalten wir das letzte $\ll$-Zeichen mithilfe der Abschätzung $\exp(-\delta^{-2/3}) \gg \frac{1}{\log X}$ aus Kap.I.

III. Wir multiplizieren Abschätzung (12.2.8) mit $\frac{\#\mathcal{A}}{\#\mathcal{B}} \cdot \kappa \cdot \frac{b}{\varphi(b)}$, beachten $\kappa \cdot \frac{b}{\varphi(b)} \asymp 1$ und folgern daraus

$$\sum_{d\in D} |\frac{\kappa\cdot \#\mathcal{A}}{d} \cdot \prod_{\substack{p<X^\delta \\ p\nmid b}} (1-\frac{1}{p}) - \frac{b\cdot\kappa\cdot \#\mathcal{A}}{\varphi(b)\cdot \#\mathcal{B}} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\delta)| \ll \exp(-\delta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}.$$

Addieren wir hierzu (12.2.15) und benutzen die Dreiecksungleichung in der Form $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \ \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$ sowie $\kappa_2 = \kappa \cdot \frac{b}{\varphi(b)}$ (vgl. Kap. 5), so erhalten wir das gewünschte Resultat. Der Zusatz über die Unabhängigkeit der Konstante von $\delta$ ergibt sich dabei aus der entsprechenden Eigenschaft der Konstanten in (12.2.8) und (12.2.15), also im Wesentlichen aus *HS3*.

$\square$

**Proposition 12.1**:
Sei $X$ eine hinreichend große $b$-Potenz und $k \in \mathbb{N}$, $k \ll 1$ sowie $\mathcal{R} \subseteq [\epsilon, 1]^k$ ein logarithmisches Polytop. Wir erinnern an $\theta_1 = \frac{9}{25} + 2\epsilon$, $\theta_2 = \frac{17}{40} - 2\epsilon$ sowie $\theta = \theta_2 - \theta_1$. Dann gilt

$$\sum_{d \leq X^{1-\theta_1}} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(d) \cdot [S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta)] = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Im Unterschied zu Proposition 12.1 in [1, S.34] wird hier über $d \leq X^{1-\theta_1}$ mit $1-\theta_1 \approx 0.64$ anstatt über $d < X^{50/77-\epsilon}$ mit $50/77-\epsilon \approx 0.65$ summiert. Aus welchem Grund dies geschieht, wird in Kap.V des folgenden Beweises klar.

**Beweis**:

I. Sei $D := \{d \in \mathbb{N} \mid d \leq X^{1-\theta_1},\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(d) \neq 0\}$. Wir erinnern an folgende Definition aus Kap. 6

$$\mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = p_1 \cdot ... \cdot p_k \text{ mit } (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$$

und zerlegen $D$ disjunkt in die Mengen

$$D_1 = \{d \in \mathbb{N} \mid d \leq X^{\theta_1},\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(d) \neq 0\},$$
$$D_2 = \{d \in \mathbb{N} \mid X^{\theta_1} < d \leq X^{1-\theta_2},\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(d) \neq 0\} \text{ sowie}$$
$$D_3 = \{d \in \mathbb{N} \mid X^{1-\theta_2} < d \leq X^{1-\theta_1},\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(d) \neq 0\},$$

sodass der Nachweis von

$$(*)_i \quad \sum_{d \in D_i} S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

für $i = 1, 2, 3$ genügt. Wir zeigen zunächst $(*)_1$. Dazu erinnern wir uns für $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0$, $d \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{R}^+$ an die entsprechenden Definitionen zu Beginn von Kapitel 12 und erklären weiter

1) $$T_m(\mathcal{C}, d) := \sum_{\substack{X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1 ... p_m}, X^\eta),$$

2) $$U_m(\mathcal{C}, d) := \sum_{\substack{X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1 ... p_m}, p_m),$$

3) $$V_m(\mathcal{C}, d) := \sum_{\substack{X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta \\ X^{\theta_1} < dp_1 \cdot ... \cdot p_m (\leq X^{\theta_2}) \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_{m-1} \leq X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1 ... p_m}, p_m)$$

für $m \in \mathbb{N}$ sowie $T_0(\mathcal{C}, d) := S(\mathcal{C}, X^\eta)$, $U_0(\mathcal{C}, d) := S(\mathcal{C}, X^\theta)$ und $V_0(\mathcal{C}, d) := 0$, wobei wir $\eta = \eta(X) = (\log(\log(\log(\log X))))^{-1} \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ gemäß Bemerkung 1 wählen, d.h. insbesondere $X$ hinreichend groß. Dabei gilt auch $\eta = \eta(X) \in\ ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ für hinreichend große $X$ im Falle einer anderen Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1, denn $\eta = \eta(X) > 0$ ist stets Nullfolge. Ferner liefert Bemerkung 1 die Gültigkeit von $X^\eta > 2$ für hinreichend große $X$, denn dann ist $\eta = \eta(X)$ konstant gegenüber $\log X$ für $X \longrightarrow \infty$. Wir beachten zudem, dass in 3) aus $dp_1 \cdot ... \cdot p_{m-1} \leq X^{\theta_1}$ und $p_m < X^\theta$ auch $dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1 + \theta} = X^{\theta_2}$ folgt, für $m \in \mathbb{N}$.

Sei $d, m \in \mathbb{N}$ und $X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta$ mit $dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&S(\mathcal{C}_{p_1...p_m}, X^\eta) - S(\mathcal{C}_{p_1...p_m}, p_m) = \\
&\#\{c \in \mathcal{C}_{p_1...p_m} \mid p|c \Rightarrow p \geq X^\eta\} - \#\{c \in \mathcal{C}_{p_1...p_m} \mid p|c \Rightarrow p \geq p_m\} = \\
&\#\{c \in \mathcal{C}_{p_1...p_m} \mid p|c \Rightarrow p \geq X^\eta \;\; \wedge \;\; \exists\, q \in \mathbb{P},\ X^\eta \leq q < p_m :\ q|c\} = \\
&\#\{c \in \mathcal{C}_{p_1...p_m} \mid \text{kleinster Primteiler von}\, c\, \text{existiert und liegt in}\ [X^\eta, p_m[\} = \\
&\# \dot{\bigcup_{\substack{X^\eta \leq q < p_m \\ q \in \mathbb{P}}}} \{c \in \mathcal{C}_{p_1...p_m} \mid q \text{ ist kleinster Primteiler von } c\},
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt verwenden, dass für jedes $c \in \mathcal{C}_{p_1...p_m} \subseteq \mathbb{N}_0$ der kleinste Primteiler $q = q_c \in \mathbb{P}$, falls er existiert, eindeutig definiert ist. Dabei beachten wir, dass für $c = 0$ der existierende kleinste Primteiler gerade 2 ist, es für $c = 1$ gar keine Primteiler gibt und für $c \geq 2$ aufgrund der PFZ von $c$ die Aussage trivial ist. Mit $q = p_{m+1}$ kommt

$$
\begin{aligned}
&S(\mathcal{C}_{p_1...p_m}, X^\eta) - S(\mathcal{C}_{p_1...p_m}, p_m) = \\
&\sum_{X^\eta \leq p_{m+1} < p_m} \#\{c \in \mathcal{C}_{p_1...p_m} \mid p_{m+1} \text{ ist kleinster Primteiler von } c\} = \\
&\sum_{X^\eta \leq p_{m+1} < p_m} \#\{c' \in \mathcal{C}_{p_1...p_{m+1}} \mid p|c' \Rightarrow p \geq p_{m+1}\ \} = \sum_{X^\eta \leq p_{m+1} < p_m} S(\mathcal{C}_{p_1...p_{m+1}}, p_{m+1}),
\end{aligned}
$$

wobei wir $c = c' \cdot p_{m+1}$ benutzen. Dies liefert für $m \in \mathbb{N}$ insbesondere

$$
\begin{aligned}
&T_m(\mathcal{C}, d) - U_m(\mathcal{C}, d) = \sum_{\substack{X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1...p_m}, X^\eta) - S(\mathcal{C}_{p_1...p_m}, p_m) = \\
&\sum_{\substack{X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}}} \sum_{X^\eta \leq p_{m+1} < p_m} S(\mathcal{C}_{p_1...p_{m+1}}, p_{m+1}) = \sum_{\substack{X^\eta \leq p_{m+1} < p_m < ... < p_1 < X^\theta \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1...p_{m+1}}, p_{m+1}) = \\
&\sum_{\substack{X^\eta \leq p_{m+1} < ... < p_1 < X^\theta \\ (dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}) \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_{m+1} \leq X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1...p_{m+1}}, p_{m+1}) + \sum_{\substack{X^\eta \leq p_{m+1} < ... < p_1 < X^\theta \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1} \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_{m+1} > X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1...p_{m+1}}, p_{m+1}) = \\
&U_{m+1}(\mathcal{C}, d) + V_{m+1}(\mathcal{C}, d),
\end{aligned}
$$

denn $dp_1 \cdot ... \cdot p_{m+1} \leq X^{\theta_1}$ impliziert $dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}$. Zusammenfassend kommt

$$
(12.1.1) \quad T_m(\mathcal{C}, d) - U_m(\mathcal{C}, d) = U_{m+1}(\mathcal{C}, d) + V_{m+1}(\mathcal{C}, d) \quad \forall\ m \in \mathbb{N},\ \mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0,\ d \in D_1.
$$

Wir weisen die Gültigkeit von (12.1.1) auch für $m = 0$ nach. Dazu erinnern wir an

$\mathcal{C}_d^* := \{c \in \mathcal{C} \mid d|c\}$ für $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0$, sodass für alle Primzahlen $p_1 \in \mathbb{P}$ gilt $(c^{'} = cp_1)$

$$S(\mathcal{C}_{p_1}, p_1) = \#\{c \in \mathcal{C}_{p_1} \mid p|c \Rightarrow p \geq p_1\} = \#\{c \in \mathbb{N}_0 \mid cp_1 \in \mathcal{C} \ \wedge \ p|c \Rightarrow p \geq p_1\} =$$
$$\#\{c^{'} \in \mathcal{C} \mid p_1|c^{'} \ \wedge \ p|c^{'} \Rightarrow p \geq p_1\} = \#\{c^{'} \in \mathcal{C}_{p_1}^* \mid p|c^{'} \Rightarrow p \geq p_1\} = S(\mathcal{C}_{p_1}^*, p_1).$$

Nach der Buchstab-Identität in [16, S.34] gilt $S(A, z) = \#A - \sum\limits_{p<z} S(A_p, p)$, wobei in dieser Quelle $A \subseteq \mathbb{N}_0$, $z \in \mathbb{R}$, $z \geq 1$ und $A_d := \{a \in A \mid d|a\}$ sowie $S(A_d, z) := \{a \in A_d \mid p|a \Rightarrow p \geq z\}$ für $d \in \mathbb{N}$ definiert ist [16, S.23]. Dies liefert wegen $X^\theta, X^\eta \geq 1$ insbesondere

$$\sum_{p_1 < X^\theta} S(\mathcal{C}_{p_1}, p_1) = \sum_{p_1 < X^\theta} S(\mathcal{C}_{p_1}^*, p_1) = \#\mathcal{C} - S(\mathcal{C}, X^\theta) \quad \text{sowie}$$
$$\sum_{p_1 < X^\eta} S(\mathcal{C}_{p_1}, p_1) = \sum_{p_1 < X^\eta} S(\mathcal{C}_{p_1}^*, p_1) = \#\mathcal{C} - S(\mathcal{C}, X^\eta).$$

Für $d \in D_1$ $(\Rightarrow d \leq X^{\theta_1})$ gilt daher

$$U_1(\mathcal{C}, d) + V_1(\mathcal{C}, d) = \sum_{\substack{X^\eta \leq p_1 < X^\theta \\ dp_1 \leq X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1}, p_1) + \sum_{\substack{X^\eta \leq p_1 < X^\theta \\ X^{\theta_1} < dp_1 \\ d \leq X^{\theta_1}}} S(\mathcal{C}_{p_1}, p_1) = \sum_{X^\eta \leq p_1 < X^\theta} S(\mathcal{C}_{p_1}, p_1) =$$
$$\sum_{p_1 < X^\theta} S(\mathcal{C}_{p_1}, p_1) - \sum_{p_1 < X^\eta} S(\mathcal{C}_{p_1}, p_1) = S(\mathcal{C}, X^\eta) - S(\mathcal{C}, X^\theta) = T_0(\mathcal{C}, d) - U_0(\mathcal{C}, d),$$

also insgesamt nach (12.1.1)

$$(12.1.2) \quad T_m(\mathcal{C}, d) - U_m(\mathcal{C}, d) = U_{m+1}(\mathcal{C}, d) + V_{m+1}(\mathcal{C}, d) \quad \forall \ m \in \mathbb{N}_0, \ \mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0, \ d \in D_1.$$

Wir zeigen $S(\mathcal{C}, X^\theta) = U_0(\mathcal{C}, d) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot (T_m(\mathcal{C}, d) + V_m(\mathcal{C}, d))$ für $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0$, $d \in D_1$, wobei wir folgend $U_m(\mathcal{C}, d)$, $T_m(\mathcal{C}, d)$ und $V_m(\mathcal{C}, d)$ mit $U_m, T_m$ bzw. $V_m$ abkürzen.
Aus $V_0 = 0$ und (12.1.2) $T_m - V_{m+1} = U_m + U_{m+1} \ \forall \ m \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot (T_m + V_m) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot T_m + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot V_m =$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot T_m + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot V_{m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot (T_m - V_{m+1}) =$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot (U_m + U_{m+1}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot U_m + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot U_{m+1} =$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot U_m + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cdot U_m = U_0,$$

was nach $U_0(\mathcal{C}, d) = S(\mathcal{C}, X^\theta)$ die Gültigkeit von

$$(12.1.3) \quad S(\mathcal{C}, X^\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot (T_m(\mathcal{C}, d) + V_m(\mathcal{C}, d)) \quad \forall\ \mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0,\ d \in D_1$$

liefert. Nach 1) und 3) ist $T_m(\mathcal{C}, d) = V_m(\mathcal{C}, d) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$, $(m-1) \cdot \eta > 1$, denn dann folgt aus $X^\eta \leq p_m < ... < p_1$ und $d \in \mathbb{N}$ insbesondere $X^{\theta_1} < (X^\eta)^{m-1} \leq p_1 \cdot ... \cdot p_{m-1} \leq dp_1 \cdot ... \cdot p_{m-1}$, sodass die Summationsbedingungen in 1) und 3) nicht erfüllbar sind. Also können wir in (12.1.3) die Einschränkung $m - 1 \leq \frac{1}{\eta}$ bzw. $m \ll \frac{1}{\eta}$ vornehmen ($\Leftarrow \eta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$):

$$(12.1.4) \quad S(\mathcal{C}, X^\theta) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} (-1)^m \cdot (T_m(\mathcal{C}, d) + V_m(\mathcal{C}, d)) \quad \forall\ \mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0,\ d \in D_1.$$

Einsetzen von $\mathcal{C} = \mathcal{A}_d$ und $\mathcal{C} = \mathcal{B}_d$ in (12.1.4) liefert

$$S(\mathcal{A}_d, X^\theta) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} (-1)^m \cdot T_m(\mathcal{A}_d, d) + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} (-1)^m \cdot V_m(\mathcal{A}_d, d) \quad \text{und}$$

$$S(\mathcal{B}_d, X^\theta) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} (-1)^m \cdot T_m(\mathcal{B}_d, d) + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} (-1)^m \cdot V_m(\mathcal{B}_d, d) \qquad \text{für alle } d \in D_1, \text{ sodass}$$

$$\sum_{d \in D_1} S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta) =$$

$$\sum_{d \in D_1} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} (-1)^m \cdot (T_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot T_m(\mathcal{B}_d, d)) +$$

$$\sum_{d \in D_1} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} (-1)^m \cdot (V_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot V_m(\mathcal{B}_d, d))$$

gilt, wobei die Konstante in der Summationsbedingung $m \ll \frac{1}{\eta}$ in allen Summen natürlich die gleiche ist. Verwenden wir die Dreiecksungleichung, so kommt

$$(12.1.5) \quad |\sum_{d \in D_1} S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta)| \leq$$

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} \sum_{d \in D_1} |T_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot T_m(\mathcal{B}_d, d)| +$$

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} |\sum_{d \in D_1} V_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot V_m(\mathcal{B}_d, d)| =: \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 .$$

II. Wir zeigen $\sum_1 = \sum\limits_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} \sum\limits_{d\in D_1} |T_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot T_m(\mathcal{B}_d, d)| = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$.

Aus Lemma 12.2 mit $\delta = \eta = \eta(X) = (\log(\log(\log(\log X))))^{-1} \in [(\log(\log X))^{-1}, \frac{\epsilon}{4}]$, wobei letzteres auch im Falle einer anderen Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gilt, weil $\eta = \eta(X) > 0$ dann für $X \longrightarrow \infty$ gegen Null geht und konstant gegenüber $(\log(\log X))^{-1}$ ist, sowie der Definition $T_0(\mathcal{C}, d) = S(\mathcal{C}, X^\eta)$ für $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0,\ d \in D_1$ erhalten wir

$$\sum_{d\in D_1} |T_0(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot T_0(\mathcal{B}_d, d)| = \sum_{d\in D_1} |S(\mathcal{A}_d, X^\eta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\eta)| \leq$$
$$\sum_{\substack{d<X^{50/77-\epsilon}\\ p|d\Rightarrow p\geq X^\eta}} |S(\mathcal{A}_d, X^\eta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\eta)| \ll \exp(-\eta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

denn wegen $\mathcal{R} \subseteq [\epsilon, 1]^k \subseteq [\eta, 1]^k$, der Def. von $\mathbf{1}_\mathcal{R}$ in Kap.I und $1 - \theta_1 \approx 0.64 < 0.65 \approx \frac{50}{77} - \epsilon$ gilt

$$D_1 \subseteq D = \{d \in \mathbb{N} \mid d \leq X^{1-\theta_1} \ \wedge\ \mathbf{1}_\mathcal{R}(d) \neq 0\} \subseteq \{d \in \mathbb{N} \mid d < X^{50/77-\epsilon} \ \wedge\ p|d \Rightarrow p \geq X^\eta\}.$$

Damit genügt der Nachweis von $\sum_1' := \sum\limits_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} \sum\limits_{d\in D_1} |T_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot T_m(\mathcal{B}_d, d)| = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$.

Für $m, d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0$ erinnern wir uns an die Definition 1) und sehen leicht, dass $(\mathcal{C}_x)_y = \mathcal{C}_{xy}$ für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus schließen wir

$$\text{(12.1.6)} \quad \sum\nolimits_1' = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} \sum_{d\in D_1} |T_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot T_m(\mathcal{B}_d, d)| =$$
$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} \sum_{d\in D_1} |\sum_{\substack{X^\eta\leq p_m<\ldots<p_1<X^\theta\\ dp_1\cdot\ldots\cdot p_m\leq X^{\theta_1}}} S((\mathcal{A}_d)_{p_1\ldots p_m}, X^\eta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S((\mathcal{B}_d)_{p_1\ldots p_m}, X^\eta)| \leq$$
$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} \sum_{d\in D_1} \sum_{\substack{X^\eta\leq p_m<\ldots<p_1<X^\theta\\ dp_1\cdot\ldots\cdot p_m\leq X^{\theta_1}}} |S(\mathcal{A}_{dp_1\ldots p_m}, X^\eta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_{dp_1\ldots p_m}, X^\eta)| =$$
$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} \sum\nolimits_1(m),$$

indem wir für $m \in \mathbb{N},\ m \ll \frac{1}{\eta}$ insbesondere

$$\sum\nolimits_1(m) := \sum_{d\in D_1} \sum_{\substack{X^\eta\leq p_m<\ldots<p_1<X^\theta\\ dp_1\cdot\ldots\cdot p_m\leq X^{\theta_1}}} |S(\mathcal{A}_{dp_1\ldots p_m}, X^\eta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_{dp_1\ldots p_m}, X^\eta)|$$

definieren. Zunächst schätzen wir $\sum_1(m)$ für fixiertes $m \in \mathbb{N},\ m \ll \frac{1}{\eta}$ ab.

Aus $\mathcal{R} \subseteq [\epsilon, 1]^k \subseteq [\eta, 1]^k$ ($\Leftarrow \eta \leq \frac{\epsilon}{4}$) und der Definition von $\mathbf{1}_{\mathcal{R}}$ in Kap.I kommt

$$\begin{aligned} D_1 &= \{d \in \mathbb{N} \mid d \leq X^{\theta_1},\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(d) \neq 0\} \\ &\subseteq \{d \in \mathbb{N} \mid d \leq X^{\theta_1},\ d = q_1 \cdot ... \cdot q_k \ \wedge\ q_i \in \mathbb{P},\ q_i \geq X^\eta\ \forall\ 1 \leq i \leq k\} := D_1^{'} \end{aligned}$$

und wir setzen $T := \{(d, p_m, ..., p_1) \mid d \in D_1^{'} \ \wedge\ X^\eta \leq p_m < ... < p_1 \ \wedge\ dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}\}$, was

$$(12.1.7) \quad \sum\nolimits_1(m) \leq \sum_{(d,p_m,...,p_1)\in T} |S(\mathcal{A}_{dp_1...p_m}, X^\eta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_{dp_1...p_m}, X^\eta)| := \sum\nolimits_1(T)$$

liefert. Ferner definieren wir

$$D_1^{''} := \{d_1 \in \mathbb{N} \mid d_1 = dp_1 \cdot ... \cdot p_m \ \wedge\ (d, p_m, ..., p_1) \in T\}$$

und sehen, dass jedes Tupel $(d, p_m, ..., p_1) \in T$ über $d_1 = dp_1 \cdot ... \cdot p_m$ ein $d_1 \in D_1^{''}$ induziert. Nun überlegen wir uns, von wie vielen Tupeln aus $T$ ein fixiertes $d_1 \in D_1^{''}$ höchstens induziert wird.

Wird $d_1 \in D_1^{''}$ von den Tupeln $(d, p_m, ..., p_1) \in T$ und $(d, p_m^{'}, ..., p_1^{'}) \in T$ induziert, so gilt $d_1 = dp_1 \cdot ... \cdot p_m = dp_1^{'} \cdot ... \cdot p_m^{'}$ mit $p_m < ... < p_1$ und $p_m^{'} < ... < p_1^{'}$, was aufgrund der Eindeutigkeit der kanonischen PFZ von $\frac{d_1}{d} \in \mathbb{N}$ insbesondere $p_i = p_i^{'}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und daher $(d, p_m, ..., p_1) = (d, p_m^{'}, ..., p_1^{'})$ impliziert. Folglich ist die Anzahl der $d_1 \in D_1^{''}$ induzierenden Tupel $(d, p_m, ..., p_1) \in T$ gleich der Anzahl der $d_1 \in D_1^{''}$ induzierenden Tupel $(d, p_m, ..., p_1) \in T$ mit tupelweise verschiedenen $d \in D_1^{'}$.
Wird $d_1 \in D_1^{''}$ von $(d, p_m, ..., p_1) \in T$ induziert, so gilt $d_1 = dp_m \cdot ... \cdot p_1 = q_1 \cdot ... \cdot q_k \cdot p_m \cdot ... \cdot p_1$ mit $d = q_1 \cdot ... \cdot q_k \in D_1^{'}$ und den $m + k$ (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen $q_1, ..., q_k, p_m, ..., p_1 \in \mathbb{P}$, wobei letztere eindeutig über die PFZ von $d_1$ festgelegt sind.
Diese über $d_1 \in D_1^{''}$ festgelegten $m + k$ (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen $q_1, ..., q_k, p_m, ..., p_1 \in \mathbb{P}$ können höchstens $\binom{m+k}{k}$ verschiedene Werte $d \in D_1^{'}$ erzeugen, wenn wir beachten, dass $d \in D_1^{'}$ stets Produkt von genau $k$ dieser Primzahlen sein soll ($\Leftarrow$ Def. $D_1^{'}$).
Also wird $d_1 \in D_1^{''}$ auch von höchstens $\binom{m+k}{k}$ Tupeln $(d, p_m, ..., p_1) \in T$ (mit tupelweise verschiedenen $d \in D_1^{'}$) induziert, woraus direkt

$$(12.1.8) \quad \sum\nolimits_1(m) \leq \sum\nolimits_1(T) \leq \sum_{d_1 \in D_1^{''}} |S(\mathcal{A}_{d_1}, X^\eta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_{d_1}, X^\eta)| \cdot \binom{m+k}{k}$$

folgt. Nach Definition von $D_1^{'}, D_1^{''}, T$ und $\theta_1 < \frac{50}{77} - \epsilon$ gilt

$$D_1^{''} \subseteq \{d_1 \in \mathbb{N} \mid d_1 < X^{50/77-\epsilon} \ \wedge \ p|d_1 \Rightarrow p \geq X^\eta\},$$

sodass Lemma 12.2 mit $\delta = \eta = \eta(X) \in [(\log(\log X))^{-1}, \frac{\epsilon}{4}]$ (vgl. S.258) und (12.1.8)

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1(m) &\leq \sum_{d_1 \in D_1^{''}} |S(\mathcal{A}_{d_1}, X^\eta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_{d_1}, X^\eta)| \cdot \binom{m+k}{k} \\ &\ll \binom{m+k}{k} \cdot \exp(-\eta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\end{aligned}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \ll \frac{1}{\eta}$ liefert. Wegen (12.1.6) ist daher

$$\text{(12.1.9)} \qquad \sum\nolimits_1^{'} \ll \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} \binom{m+k}{k} \cdot \exp(-\eta^{-2/3}) \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}.$$

Aus $k \ll 1$ erhalten wir $\binom{m+k}{k} \ll (m+k)^k \ll m^k \ll (\frac{1}{\eta})^{c_1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \ll \frac{1}{\eta}$ und daraus

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} \binom{m+k}{k} \ll (\frac{1}{\eta})^{c_1+1}$$

mit einer Konstanten $c_1 > 0$. Bei Wahl von $\eta = \eta(X) = (\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$ ist der Faktor

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} \binom{m+k}{k} \cdot \exp(-\eta^{-2/3}) \ll (\frac{1}{\eta})^{c_1+1} \cdot \exp(-\eta^{-2/3}) = \frac{(\log(\log(\log(\log X))))^{c_1+1}}{\exp((\log(\log(\log(\log X))))^{2/3})}$$

und damit ein $o(1)$ für $X \longrightarrow \infty$, was eingesetzt in (12.1.9) die Gültigkeit von $\sum_1^{'} = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ ($\Leftarrow \sum_1^{'} \geq 0$) und folglich jene von $\sum_1 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ liefert. Auch bei einer anderen Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 mit $\eta = \eta(X) \geq (\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$ erhalten wir das gleiche Resultat, wie z.B. als Kehrwert eines 1000-fach iteriertem Logarithmus.

III. In diesem Abschnitt zeigen wir $\sum_2 = \sum\limits_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} |\sum\limits_{d\in D_1} V_m(\mathcal{A}_d,d) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot V_m(\mathcal{B}_d,d)| = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$, denn wegen $V_0 = 0$ genügt in $\sum_2$ die Summation über $m\in\mathbb{N}$, $m \ll \frac{1}{\eta}$.

Sei $m\in\mathbb{N}$, $m\ll\frac{1}{\eta}$ fixiert. Folgend meinen wir mit $b$ stets ein Element aus $\mathcal{B}$ und nicht die gegebene Basis. Wir setzen $\sum^* := \sum\limits_{d\in D_1}\sum\limits_{\substack{X^\eta\le p_m<\ldots<p_1<X^\theta\\ X^{\theta_1}<dp_1\cdot\ldots\cdot p_m\le X^{\theta_2}\\ dp_1\cdot\ldots\cdot p_{m-1}\le X^{\theta_1}}}$.

Für $d\in\mathbb{N}$ und $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{N}_0$ erinnern wir an die Def. 3) sowie $(\mathcal{C}_x)_y = \mathcal{C}_{xy}$ für $x,y\in\mathbb{N}$, sodass

$$\sum\nolimits_2(m) := \sum_{d\in D_1} V_m(\mathcal{A}_d,d) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot V_m(\mathcal{B}_d,d) =$$

$$\sum_{d\in D_1}\sum_{\substack{X^\eta\le p_m<\ldots<p_1<X^\theta\\ X^{\theta_1}<dp_1\cdot\ldots\cdot p_m\le X^{\theta_2}\\ dp_1\cdot\ldots\cdot p_{m-1}\le X^{\theta_1}}} S(\mathcal{A}_{dp_1\ldots p_m},p_m) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot S(\mathcal{B}_{dp_1\ldots p_m},p_m) =$$

$$\sum\nolimits^* \#\{a^{'}\in\mathcal{A}_{dp_1\ldots p_m}\mid p|a^{'}\Rightarrow p\ge p_m\} - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\#\{b^{'}\in\mathcal{B}_{dp_1\ldots p_m}\mid p|b^{'}\Rightarrow p\ge p_m\} =$$

$$\sum\nolimits^* \#\{a\in\mathcal{A}\mid a = a^{'}\cdot dp_1\cdot\ldots\cdot p_m,\ a^{'}\in\mathbb{N},\ p|a^{'}\Rightarrow p\ge p_m\}$$

$$-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum\nolimits^* \#\{b\in\mathcal{B}\mid b = b^{'}\cdot dp_1\cdot\ldots\cdot p_m,\ b^{'}\in\mathbb{N},\ p|b^{'}\Rightarrow p\ge p_m\}$$

kommt, denn $a^{'}, b^{'}\neq 0$, weil 0 den Primteiler 2 enthält und $2 < X^\eta \le p_m$ ist (vgl. S.254).

Nun besitzt jedes $a^{'}\in\mathbb{N}$ mit $p|a\Rightarrow p\ge p_m$ eine eindeutige kanonische PFZ der Form $a^{'} = q_1\cdot\ldots\cdot q_{s_1}$ mit $s_1\in\mathbb{N}_0$ und $p_m\le q_1\le\ldots\le q_{s_1}$, wobei $s_1 = 0$ im Fall $a^{'} = 1$ zu wählen ist und die $q_i$ Primzahlen sind für $1\le i\le s_1$. Dies liefert

$$\sum\nolimits^* \#\{a\in\mathcal{A}\mid a = a^{'}\cdot dp_1\cdot\ldots\cdot p_m,\ a^{'}\in\mathbb{N},\ p|a^{'}\Rightarrow p\ge p_m\} =$$

$$\sum\nolimits^* \sum_{\substack{a^{'}\in\mathbb{N}\\ p|a^{'}\Rightarrow p\ge p_m}} \#\{a\in\mathcal{A}\mid a = a^{'}\cdot dp_1\cdot\ldots\cdot p_m\} =$$

$$\sum\nolimits^* \sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_m\le q_1\le\ldots\le q_{s_1}\\ q_1,\ldots,q_{s_1}\in\mathbb{P}}} \#\{a\in\mathcal{A}\mid a = dp_1\cdot\ldots\cdot p_m\cdot q_1\cdot\ldots\cdot q_{s_1}\} =$$

$$\sum\nolimits^* \sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{\substack{p_m\le q_1\le\ldots\le q_{s_1}\\ q_1,\ldots,q_{s_1}\in\mathbb{P}}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1\cdot\ldots\cdot p_m\cdot q_1\cdot\ldots\cdot q_{s_1}),$$

denn $dp_1\cdot\ldots\cdot p_m$ und $p_m$ liegt unter den Summationsbedingungen in $\sum^*$ fest. Analog dazu gilt

$$\sum\nolimits^* \#\{b \in \mathcal{B} \mid b = b' \cdot dp_1 \cdot ... \cdot p_m,\ b' \in \mathbb{N},\ p|b' \Rightarrow p \geq p_m\} =$$
$$\sum\nolimits^* \sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_m \leq w_1 \leq ... \leq w_{s_2} \\ w_1,...,w_{s_2} \in \mathbb{P}}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1 \cdot ... \cdot p_m \cdot w_1 \cdot ... \cdot w_{s_2}),$$

woraus nach obigem

$$\sum\nolimits_2(m) =$$
$$\sum\nolimits^* \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\substack{p_m \leq v_1 \leq ... \leq v_s \\ v_1,...,v_s \in \mathbb{P}}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1 \cdot ... \cdot p_m \cdot v_1 \cdot ... \cdot v_s) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1 \cdot ... \cdot p_m \cdot v_1 \cdot ... \cdot v_s) =$$
$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{d \in D_1} \sum_{\substack{X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta \\ X^{\theta_1} < dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_2} \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_{m-1} \leq X^{\theta_1} \\ p_m \leq v_1 \leq ... \leq v_s,\ v_i \in \mathbb{P}}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1 \cdot ... \cdot v_s) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1 \cdot ... \cdot v_s) =$$
$$\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k - m} \sum_{d \in D_1} \sum_{\substack{X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta \\ X^{\theta_1} < dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_2} \\ dp_1 \cdot ... \cdot p_{m-1} \leq X^{\theta_1} \\ p_m \leq v_1 \leq ... \leq v_s \leq X,\ v_i \in \mathbb{P}}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1 \cdot ... \cdot v_s) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1 \cdot ... \cdot v_s)$$

folgt, indem wir zuletzt die Tatsache nutzen, dass $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1 \cdot ... \cdot v_s) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1 \cdot ... \cdot v_s) = 0$ ist, falls $dp_1 \cdot ... \cdot v_s = q_1 \cdot ... \cdot q_k \cdot p_1 \cdot ... \cdot p_m \cdot v_1 \cdot ... \cdot v_s \geq X$ gilt und dies ist wegen $p_r, v_j \geq X^\eta$ sowie $q_i \geq X^\eta$ für $(k+m+s) \cdot \frac{1}{\eta} \geq 1$ oder $v_s > X$ erfüllt, wenn wir die Summationsbedingungen und $d \in D_1 \subseteq \{d \in \mathbb{N} \mid d = q_1 \cdot ... \cdot q_k,\ q_i \in \mathbb{P},\ q_i \geq X^\eta\ \forall\ 1 \leq i \leq k\}$ beachten ($\Leftarrow \mathcal{R} \subseteq [\eta, 1]^k$).

Wir setzen

$$T_s := \{(d, p_m, ..., p_1, v_1, ..., v_s) \mid X^\eta \leq p_m < ... < p_1 < X^\theta,\ X^{\theta_1} < dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_2},$$
$$dp_1 \cdot ... \cdot p_{m-1} \leq X^{\theta_1},\ p_m \leq v_1 \leq ... \leq v_s \leq X,\ v_i \in \mathbb{P},\ d \in D_1\} \quad \forall\ s \in \mathbb{N}_0,$$

sodass insgesamt

$$\sum\nolimits_2(m) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k - m} \sum_{(d,p_m,...,p_1,v_1,...,v_s) \in T_s} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1 \cdot ... \cdot v_s) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1 \cdot ... \cdot v_s) \tag{12.1.10}$$
$$= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k - m} \sum\nolimits_2(m, T_s)$$

mit

$$\sum\nolimits_2(m,T_s) := \sum_{(d,p_m,...,p_1,v_1,...,v_s)\in T_s} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1\cdot ...\cdot v_s) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1\cdot ...\cdot v_s) \quad \forall\ s\in\mathbb{N}_0$$

kommt. Nun fixieren wir $s\in\mathbb{N}_0,\ s\le \lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor - k - m$ und schätzen $\sum_2(m,T_s)$ ab. Es gilt

$$\begin{aligned} T_s = \{&(d,p_m,...,p_1,v_1,...,v_s)\mid X^\eta \le p_m < ... < p_1 \le X^\theta,\ X^{\theta_1}\le dp_1\cdot ...\cdot p_m \le X^{\theta_2},\\ &dp_1\cdot ...\cdot p_{m-1}\le X^{\theta_1},\ p_m\le v_1\le ...\le v_s\le X,\ v_i\in\mathbb{P},\ d\in D_1\}, \end{aligned}$$

denn die Fälle $p_1 = X^\theta$ sowie $X^{\theta_1} = dp_1\cdot ...\cdot p_m$ können aus dem folgenden Grund nicht eintreten:

Sei $n\in\mathbb{N}_0,\ n = X^r$ mit $r\in\mathbb{Q}^+$, also $r = \frac{l}{q}$ mit $l,q\in\mathbb{N},\ ggT(l,q)=1$. Dann ist $n^q = X^l$.
Da $X$ eine $b$-Potenz ist, trifft dies auch auf $X^l$ zu, sodass $n^q$ bzw. $n$ nur Primteiler aus $\mathbb{P}(b)$ hat, d.h. es gilt $\mathbb{P}(n)\subseteq\mathbb{P}(b)$. Nun ist $\eta=\eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt, also ist $\eta=\eta(X)$ insbesondere konstant gegenüber $\log X$ für $X\longrightarrow\infty$, womit auch $X^\eta > b$ für hinreichend große $X$ gilt. Somit erhalten wir für $n=p_1,\ r=\theta\in\mathbb{Q}^+$ bzw. $n = dp_1\cdot ...\cdot p_m = q_1\cdot ...\cdot q_k\cdot p_1\cdot ...\cdot p_m,\ r=\theta_1\in\mathbb{Q}^+$ einen Widerspruch zu $\mathbb{P}(n)\subseteq\mathbb{P}(b)$, da $n$ in beiden Fällen nur Primteiler $\ge X^\eta > b$ hat.
Letzteres ergibt sich nämlich aus der Definition von $T_s$ sowie

$$d\in D_1\subseteq\{d\in\mathbb{N}\mid d = q_1\cdot ...\cdot q_k,\ q_i\in\mathbb{P},\ q_i\ge X^\eta\ \forall\ 1\le i\le k\}.$$

Hier wird auch klar, weshalb wir $\theta,\theta_1\in\mathbb{Q}^+$ und damit $\epsilon\in\mathbb{Q}^+$ benötigen.

Durch Umbenennung /Umsortierung der $p_1,...,p_m,v_1,...,v_s$ erhalten wir

$$\begin{aligned} T_s = \{&(d,p_{k+1},...,p_{k+m+s})\mid X^\eta\le p_{k+1} < ... < p_{k+m}\le X^\theta,\ X^{\theta_1}\le dp_{k+1}\cdot ...\cdot p_{k+m}\le X^{\theta_2},\\ &dp_{k+2}\cdot ...\cdot p_{k+m}\le X^{\theta_1},\ p_{k+1}\le p_{k+m+1}\le ...\le p_{k+m+s}\le X,\ d\in D_1\} = \\ &\{(d,p_{k+1},...,p_{k+m+s})\mid d = p_1\cdot ...\cdot p_k\le X^{\theta_1},\ (\frac{\log p_1}{\log X},...,\frac{\log p_k}{\log X})\in\mathcal{R},\\ &dp_{k+2}\cdot ...\cdot p_{k+m}\le X^{\theta_1},\ X^\eta\le p_{k+1}\le ...\le p_{k+m}\le X^\theta,\\ &p_i\ne p_j\ \forall\ k+1\le i<j\le k+m,\ X^{\theta_1}\le dp_{k+1}\cdot ...\cdot p_{k+m}\le X^{\theta_2},\\ &X^\eta\le p_{k+1}\le p_{k+m+1}\le ...\le p_{k+m+s}\le X\} = \\ &\{(d,p_{k+1},...,p_{k+m+s})\mid d = p_1\cdot ...\cdot p_k,\ p_i\ne p_j\ \forall\ k+1\le i<j\le k+m,\\ &(\frac{\log p_1}{\log X},...,\frac{\log p_{k+m+s}}{\log X})\in\mathcal{R}^*\}, \end{aligned}$$

indem wir im letzten Schritt die entsprechenden Bedingungen in die Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^* := (\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s}) \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{k+m+s} \mid \eta \leq e_{k+1} \leq ... \leq e_{k+m} \leq \theta\} \cap \\ \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{k+m+s} \mid \sum_{i=1}^{k+m} e_i \in [\theta_1, \theta_2]\} \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{k+m+s} \mid \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1}}^{k+m} e_i \leq \theta_1\} \cap \\ \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{k+m+s} \mid \sum_{i=1}^{k} e_i \leq \theta_1\} \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^{k+m+s} \mid \eta \leq e_{k+1} \leq e_{k+m+1} \leq ... \leq e_{k+m+s} \leq 1\}\end{aligned}$$

schreiben. Wir setzen $l := k + m + s \in \mathbb{N}$ und erinnern uns an die Einführung in die konvexen (logarithmischen) Polytope in Kapitel 6.

Sämtliche Mengen in der Definition von $\mathcal{R}^*$ außer $\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s}$ sind endliche Durchschnitte von Halbräumen $H^-_{f,\alpha} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^l \mid f(\vec{v}) \leq \alpha\}$, wobei $f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{l} s_j \cdot x_j$ mit $s_j \in \{-1, 0, 1\}$ für alle $1 \leq j \leq l$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$ ist sowie $\alpha = -\eta = -\eta(X) = -(\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$ gilt oder $\alpha$ von $X$ unabhängig ist. Die exakt gleiche Aussage erhalten wir auch für die Menge $\mathbb{R}^k \times [\eta, 1]^{m+s}$, indem wir $s_j := 0 \;\; \forall \;\; 1 \leq j \leq k$ setzen und damit keine Einschränkungen für die ersten $k$-Komponenten erhalten. Insbesondere gilt dann $S(\mathbb{R}^k \times [\eta, 1]^{m+s}) \subseteq \{-1, 0, 1\}$.

Wir zeigen, dass $\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s} \subseteq [\eta, 1]^l$ ($\Leftarrow \mathcal{R} \subseteq [\epsilon, 1]^k \subseteq [\eta, 1]^k$) ein logarithmisches Polytop ist.

Aus dem endlichen Durchschnitt $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} H^-_{f_i, \alpha_i}$ erhalten wir den endlichen Durchschnitt $\mathcal{R} \times \mathbb{R}^{m+s} = \bigcap_{i=1}^{n} (H^-_{f_i, \alpha_i} \times \mathbb{R}^{m+s})$ von Halbräumen, indem wir $s_{j,i} := 0$ für $k < j \leq l$ setzen und damit die bisherige Summation in $f_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{k} s_{j,i} \cdot x_j = \sum_{j=1}^{l} s_{j,i} \cdot x_j$ auf $l$ Summanden ausdehnen bzw. die bisherigen $k$-dimensionalen Halbräume $H^-_{f_i, \alpha_i} \subseteq \mathbb{R}^k$ auf die $l$-dimensionalen Halbräume $H^-_{f_i, \alpha_i} \times \mathbb{R}^{m+s} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{j=1}^{l} s_{j,i} \cdot x_j \leq \alpha_i\} \subseteq \mathbb{R}^l$ erweitern, für alle $1 \leq i \leq n$. Nach dieser Konstruktion gilt auch $S(\mathcal{R} \times \mathbb{R}^{m+s}) = S(\mathcal{R}) \cup \{0\} = S(\mathcal{R})$.

Nun ist $\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s} = (\mathcal{R} \times \mathbb{R}^{m+s}) \cap (\mathbb{R}^k \times [\eta, 1]^{m+s})$ und da die letzten beiden Mengen endliche Durchschnitte von Halbräumen sind, trifft dies auch auf $\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s}$ zu, sodass $\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s} \subseteq [\eta, 1]^l$ aufgrund seiner Beschränktheit bereits ein Polytop ist.

Die noch nachzuweisenden Eigenschaften (1)-(3) der Logarithmizität (siehe Kap. 6) vererben sich im Wesentlichen direkt von $\mathcal{R}$. Dazu bemerken wir, dass die $\alpha_i$ der Halbräume im Durchschnitt von $\mathcal{R} \times \mathbb{R}^{m+s}$ gerade jene der Halbräume im Durchschnitt von $\mathcal{R}$ sind, also unverändert bleiben, die $\alpha_i$ der Halbräume im Durchschnitt von $\mathbb{R}^k \times [\eta, 1]^{m+s}$ allesamt Eigenschaft (2) genügen und neu hinzugewonnene $s_{j,i}$ in $\{-1, 0, 1\}$ liegen und folglich $\neq -\frac{1}{2}$ sind. Letzteres kommt nämlich aus der Def. $s_{j,i} := 0$ für $k < j \leq l$ sowie $S(\mathbb{R}^k \times [\eta, 1]^{m+s}) \subseteq \{-1, 0, 1\}$ und impliziert, dass auch $\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s}$ Eigenschaft (1) genügt, da besagte $\alpha_i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log X)^{1/2}}$ nach obigem nur von den Halbräumen im Durchschnitt von $\mathcal{R} \times \mathbb{R}^{m+s}$ bzw. $\mathcal{R}$ stammen können und $\mathcal{R}$ Eigenschaft (1) erfüllt. Nach *HS2 Prop 13.2* ist $S(\mathbb{R}^k \times [\eta, 1]^{m+s}) \subseteq \{-1, 0, 1\} \subseteq S(\mathcal{R})$, was

$$S(\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s}) = S(\mathcal{R} \times \mathbb{R}^{m+s}) \cup S(\mathbb{R}^k \times [\eta, 1]^{m+s}) = S(\mathcal{R}) \cup S(\mathbb{R}^k \times [\eta, 1]^{m+s}) = S(\mathcal{R})$$

und folglich Eigenschaft (3) liefert.

Zusammenfassend erhalten wir, dass $\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s}$ und damit auch $\mathcal{R}^*$ ein logarithmisches Polytop ist, wenn wir die Aussage über die übrigen Mengen im Durchschnitt von $\mathcal{R}^*$ beachten. Diese liefert zudem $S(\mathcal{R}^*) = S(\mathcal{R} \times [\eta, 1]^{m+s}) \cup \{-1, 0, 1\} = S(\mathcal{R})$ und daher insgesamt

$$(12.1.11) \quad T_s = T_s(\mathcal{R}^*) = \{(d, p_{k+1}, ..., p_{k+m+s}) \mid d = p_1 \cdot ... \cdot p_k,\ p_i \neq p_j \ \forall\ k+1 \leq i < j \leq k+m,\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_{k+m+s}}{\log X}) \in \mathcal{R}^*\},$$

wobei $\mathcal{R}^* \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^{k+m+s} \mid \sum_{i=1}^{k+m} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$ ein logarithmisches Polytop mit $S(\mathcal{R}^*) = S(\mathcal{R})$ ist.

Nach (12.1.11) und $k+m+s \ll \frac{1}{\eta}$ sind die Voraussetzungen von *HS1 Prop.12.1* auf S.128 erfüllt, wobei darin als logarithmisches Polytop gerade $\mathcal{R}^*$ zu wählen ist, was mit $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ wegen $S(\mathcal{R}^*) = S(\mathcal{R})$ schließlich

$$(12.1.12) \quad \sum\nolimits_2(m, T_s) = O_{S(\mathcal{R}^*),\, \eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}) = O_{S(\mathcal{R}),\, \eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$$

liefert. Dabei gilt (12.1.12) bzw. $\sum_2(m, T_s) = O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})$ offenbar gleichmäßig für alle $m \in \mathbb{N},\ m \ll \frac{1}{\eta}$ sowie $s \in \mathbb{N}_0,\ s \le \lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor - k - m$ und die von $\eta$ abhängige implizite Konstante/Funktion im $O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}$-Glied ist effektiv berechenbar und hängt ferner stetig von $\eta$ ab ($\Leftarrow$ *HS1 Prop.12.1*). Aus (12.1.12) und (12.1.10) folgt

$$\sum\nolimits_2(m) = \sum_{s=0}^{\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor-k-m} \sum\nolimits_2(m, T_s) = O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}) \quad \text{und daher}$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} |\sum\nolimits_2(m)| = O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Nach dem letzten Satz hängt auch hier die von $\eta = \eta(X)$ abhängige Konstante/Funktion im letzten $O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}$-Glied stetig von $\eta = \eta(X)$ ab und ist effektiv berechenbar. Da $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt wurde, können wir diese von $\eta = \eta(X)$ stetig abhängige Funktion für $X \longrightarrow \infty$ als konstant gegenüber $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ annehmen. Folglich lässt sich das letzte $O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})$-Glied als $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ interpretieren, denn $S(\mathcal{R})$ ist unabhängig von $X$.
Daher ist $\sum_2 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ und nach (12.1.5) sowie $\sum_1 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ insbesondere $(*)_1$ gezeigt.

IV. Den Nachweis von $(*)_2 \sum_{d\in D_2} S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ führen wir mit einer ähnlichen Idee wie den Beweis von $(*)_1$ in den vorigen Kapiteln. Dazu ersetzen wir überall die Bedingungen $d \le X^{\theta_1}$ durch $X^{\theta_1} < d \le X^{1-\theta_2}$ sowie $dp_1\cdot\ldots\cdot p_m \le X^{\theta_1}$ durch $dp_1\cdot\ldots\cdot p_m \le X^{1-\theta_2}$ und bemerken, dass dann in Def. 3) die Summation auf $X^{1-\theta_2} < dp_1\cdot\ldots\cdot p_m \le X^{1-\theta_1}$ und $dp_1\cdot\ldots\cdot p_{m-1} \le X^{1-\theta_2}$ eingeschränkt wird ($\Leftarrow 1-\theta_2+\theta = 1-\theta_1$). Analog zu (12.1.5) kommt

$$|\sum_{d\in D_2} S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta)| \le$$
$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\ll\frac{1}{\eta}}}\sum_{d\in D_2} |T_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot T_m(\mathcal{B}_d, d)| + \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\ll\frac{1}{\eta}}} |\sum_{d\in D_2} V_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot V_m(\mathcal{B}_d, d)| :=$$
$$\sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4,$$

wobei wir $\sum_3 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ ähnlich wie in Kap.II mithilfe Lemma 12.2 und $1-\theta_2 < \frac{50}{77} - \epsilon$ erhalten. Die Summe $\sum_4$ behandeln wir wie $\sum_2$ in Kap.III, indem wir für fixiertes $m \in \mathbb{N},\ m \ll \frac{1}{\eta}$ unter Verwendung von $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(n) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(n) = 0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0,\ n > X$ auf

$$\sum\nolimits_4(m) := \sum_{d\in D_2} V_m(\mathcal{A}_d,d) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot V_m(\mathcal{B}_d,d) =$$

$$\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor-k-m}\sum_{d\in D_2}\sum_{\substack{X^\eta\le p_m<...<p_1<X^\theta\\ X^{1-\theta_2}<dp_1\cdot...\cdot p_m\le X^{1-\theta_1}\\ dp_1\cdot...\cdot p_{m-1}\le X^{1-\theta_2}\\ p_m\le v_1\le...\le v_s\le X,\, v_i\in\mathbb{P}\\ dp_1\cdot...\cdot v_s\le X}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1\cdot...\cdot v_s) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1\cdot...\cdot v_s) =$$

$$\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor-k-m}\sum_{d\in D_2}\sum_{\substack{X^\eta\le p_m<...<p_1<X^\theta\\ X^{1-\theta_2}<dp_1\cdot...\cdot p_m\le X^{1-\theta_1}\\ dp_1\cdot...\cdot p_{m-1}\le X^{1-\theta_2}\\ p_m\le v_1\le...\le v_s\le X,\, v_i\in\mathbb{P}\\ dp_1\cdot...\cdot v_s\in[X^{1-\epsilon},X]}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1\cdot...\cdot v_s) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1\cdot...\cdot v_s)+$$

$$\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor-k-m}\sum_{d\in D_2}\sum_{\substack{X^\eta\le p_m<...<p_1<X^\theta\\ X^{1-\theta_2}<dp_1\cdot...\cdot p_m\le X^{1-\theta_1}\\ dp_1\cdot...\cdot p_{m-1}\le X^{1-\theta_2}\\ p_m\le v_1\le...\le v_s\le X,\, v_i\in\mathbb{P}\\ dp_1\cdot...\cdot v_s<X^{1-\epsilon}}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1\cdot...\cdot v_s) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1\cdot...\cdot v_s)$$

schließen, wobei wir folgend die vorletzte Summe mit $\sum_4^{'}(m)$ und die letzte Summe mit $\sum_4^{''}(m)$ bezeichnen. Wir schätzen zunächst $\sum_4^{''}(m)$ ab. Für $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{N}_0\cap[0,X[$ definieren wir

$$\sum\nolimits_4^{''}(m,\mathcal{C}) := \sum_{s=0}^{\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor-k-m}\sum_{d\in D_2}\sum_{\substack{X^\eta\le p_m<...<p_1<X^\theta\\ X^{1-\theta_2}<dp_1\cdot...\cdot p_m\le X^{1-\theta_1}\\ dp_1\cdot...\cdot p_{m-1}\le X^{1-\theta_2}\\ p_m\le v_1\le...\le v_s\le X,\, v_i\in\mathbb{P}\\ dp_1\cdot...\cdot v_s<X^{1-\epsilon}}} \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(dp_1\cdot...\cdot v_s),$$

sodass $\sum_4^{''}(m) = \sum_4^{''}(m,\mathcal{A}) - \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_4^{''}(m,\mathcal{B})$ ist und offenbar auch

$$0\le\sum\nolimits_4^{''}(m,\mathcal{C})\le\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor-k-m}\sum_{q_1,...,q_k\in\mathbb{P}}\sum_{\substack{p_1,...,p_m,v_1,...,v_s\in\mathbb{P}\\ c=q_1\cdot...\cdot q_k\cdot p_1\cdot...\cdot p_m\cdot v_1\cdot...\cdot v_s<X^{1-\epsilon}}}\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(c)\le\sum_{c<X^{1-\epsilon}}\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(c)\cdot\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor!$$

gilt, wenn wir $d=q_1\cdot...\cdot q_k$ mit $q_1,...,q_k\in\mathbb{P}$ für $d\in D_2$ beachten und bemerken, dass jedes $c\in\mathbb{N}$, $c<X^{1-\epsilon}$ aufgrund der Eindeutigkeit seiner PFZ auf höchstens $(k+m+s)!\le\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor!$ Arten in der Form $c=q_1\cdot....\cdot q_k\cdot p_1\cdot...\cdot p_m\cdot v_1\cdot...\cdot v_s$ mit Primfaktoren $q_i,p_r,v_j$ und $s\le\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor-k-m$ darstellbar ist.

Wir finden $\lfloor\frac{1}{\eta}\rfloor!\le(\frac{1}{\eta})^{\frac{1}{\eta}}\le\eta\cdot(\log(\log X))^{1/2}$ für hinreichend große $X$ durch Einsetzen von $\eta=\eta(X)=(\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$ bzw. einem gemäß Bemerkung 1 gewähltem $\eta=\eta(X)$ mit

$\eta = \eta(X) \geq (\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$. An dieser Stelle wird auch klar, weshalb sich die Wahl von $\eta = \eta(X) = (\log(\log(\log(\log X))))^{-1}$ als geeignet erweist. Setzen wir nämlich nur $\eta = \eta(X) = (\log(\log(\log X)))^{-1}$, so wäre die Abschätzung $\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor ! \leq (\frac{1}{\eta})^{\frac{1}{\eta}} \leq \eta \cdot (\log(\log X))^{1/2}$ eben nicht für hinreichend große $X$ erfüllt.

Für $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ ist $\sum\limits_{c<X^{1-\epsilon}} \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(c) = \sum\limits_{a<X^{1-\epsilon}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(a) = \#\mathcal{A}(X^{1-\epsilon}) \ll X^{(1-\epsilon)\cdot c} = \frac{\#\mathcal{A}}{X^{c\cdot\epsilon}}$, indem wir die Abschätzung $\#\mathcal{A}(x) \ll x^c$ für alle $x \in \mathbb{R}^+,\ b \leq x < X$ sowie $\#\mathcal{A} = X^c$ mit $c = \frac{\log(b-1)}{\log b}$ aus Kap.4 verwenden. Damit ist $0 \leq \sum_4^{''}(m, \mathcal{A}) \ll \eta \cdot (\log(\log X))^{1/2} \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{X^{c\cdot\epsilon}}$ und folglich $\sum_4^{''}(m, \mathcal{A}) = o(\eta \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$. Tauschen wir nur $\mathcal{B}$ durch $\mathcal{A}$ aus, so kommt analog dazu $\sum_4^{''}(m, \mathcal{B}) = o(\eta \cdot \frac{X}{\log X})$ mithilfe $\#\mathcal{B}(X^{1-\epsilon}) \ll X^{1-\epsilon} = \frac{X}{X^{c\cdot\epsilon}}$ und $c = 1$, was insgesamt $\sum_4^{''}(m) = o(\eta \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ liefert.

Damit ist $\sum_4(m) = \sum_4^{'}(m) + \sum_4^{''}(m) = \sum_4^{'}(m) + o(\eta \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ und wir behandeln $\sum_4^{'}(m)$ wie $\sum_2(m)$ in Kap.III, sodass sich schließlich

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_4^{'}(m) &= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k - m} \sum_{(v_1,\ldots,v_s,d,p_m,\ldots,p_1)\in T_s} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1 \cdot \ldots \cdot v_s) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1 \cdot \ldots \cdot v_s) \\
&= \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k - m} \sum\nolimits_4^{'}(m, T_s)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
T_s := \{&(v_1, \ldots, v_s, d, p_m, \ldots, p_1) \mid X^{\eta} \leq p_m < \ldots < p_1 \leq X^{\theta},\ X^{1-\theta_2} \leq dp_1 \cdot \ldots \cdot p_m \leq X^{1-\theta_1}, \\
&dp_1 \cdot \ldots \cdot p_{m-1} \leq X^{1-\theta_2},\ p_m \leq v_1 \leq \ldots \leq v_s \leq X,\ v_i \in \mathbb{P},\ dp_1 \cdot \ldots \cdot v_s \in [X^{1-\epsilon}, X], \\
&d \in D_2,\ X^{\theta_1-\epsilon} \leq v_1 \cdot \ldots \cdot v_s \leq X^{\theta_2+\epsilon}\} \quad \forall\ s \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

und

$$\sum\nolimits_4^{'}(m, T_s) := \sum_{(v_1,\ldots,v_s,d,p_m,\ldots,p_1)\in T_s} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(dp_1 \cdot \ldots \cdot v_s) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(dp_1 \cdot \ldots \cdot v_s) \quad \forall\ s \in \mathbb{N}_0$$

ergibt. Dabei verwenden wir die Idee auf S.263, um $p_1 = X^{\theta}$, $dp_1 \cdot \ldots \cdot p_m = X^{1-\theta_2}$ auszuschließen und bemerken, dass aus $X^{1-\theta_2} \leq dp_1 \cdot \ldots \cdot p_m \leq X^{1-\theta_1}$ und $dp_1 \cdot \ldots \cdot v_s \in [X^{1-\epsilon}, X]$ stets $T_s = \emptyset$ für $s = 0$ ($\Leftarrow 1 - \theta_1 < 1 - \epsilon$) sowie $X^{\theta_1-\epsilon} \leq v_1 \cdot \ldots \cdot v_s \leq X^{\theta_2+\epsilon}$ folgt.

Nun fixieren wir $s \in \mathbb{N},\ s \leq \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k - m$ und schätzen $\sum_4^{'}(m, T_s)$ ab.
Aufgrund $X^{\theta_1-\epsilon} \leq v_1 \cdot \ldots \cdot v_s \leq X^{\theta_2+\epsilon}$ haben wir wieder Möglichkeit, ein logarithmisches Polytop

$\mathcal{R}^* \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^{s+k+m} \mid \sum_{i=1}^{s} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$ mit $S(\mathcal{R}^*) = S(\mathcal{R})$ und

$$\begin{aligned} T_s = T_s(\mathcal{R}^*) = \{&(p_1, ..., p_s, d, p_{s+k+1}, ..., p_{s+k+m}) \mid d = p_{s+1} \cdot ... \cdot p_{s+k},\ p_i \neq p_j \\ &\forall\ s+k+1 \leq i < j \leq s+k+m,\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_{s+k+m}}{\log X}) \in \mathcal{R}^*\} \end{aligned}$$

zu konstruieren, einen *HS1 Prop.12.1* entsprechenden Hilfssatz zu formulieren und damit analog zu Kap.III zunächst auf $\sum_4'(m, T_s) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$ zu schließen, welches gleichmäßig für alle $m \in \mathbb{N},\ m \ll \frac{1}{\eta}$ sowie $s \in \mathbb{N},\ s \leq \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k - m$ gilt. Somit kommt $\sum_4'(m) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$ und folglich $\sum_4(m) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}) + o(\eta \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ gleichmäßig für alle $m \in \mathbb{N},\ m \ll \frac{1}{\eta}$.
Letzteres gilt daher auch für den Betrag $|\sum_4(m)|$ und Summation über diese $m$ liefert gemäß Bemerkung 1 die Abschätzung $\sum_4 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$, wenn wir wieder die Eigenschaft der impliziten Konstante im $O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}$-Glied und $\sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} o(\eta \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ nutzen. Damit ist $(*)_2$ gezeigt.

V. Den Nachweis von $(*)_3 \sum_{d \in D_3} S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ führen wir mit einer ähnlichen Idee wie den Beweis von $(*)_1$ in Kapitel I-III. Dazu ersetzen wir überall die Bedingungen $d \leq X^{\theta_1}$ durch $X^{1-\theta_2} < d \leq X^{1-\theta_1}$ sowie $dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{\theta_1}$ durch $dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{1-\theta_1}$, wobei in Def. 3) dann über $X^{1-\theta_1} < dp_1 \cdot ... \cdot p_m \leq X^{1-\theta_1+\theta}$ und $dp_1 \cdot ... \cdot p_{m-1} \leq X^{1-\theta_1}$ summiert wird. Analog zu (12.1.5) kommt

$$\begin{aligned} &|\sum_{d \in D_3} S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta)| \leq \\ &\sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} \sum_{d \in D_3} |T_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot T_m(\mathcal{B}_d, d)| + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \ll \frac{1}{\eta}}} |\sum_{d \in D_3} V_m(\mathcal{A}_d, d) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot V_m(\mathcal{B}_d, d)| := \\ &\sum\nolimits_5 + \sum\nolimits_6 \end{aligned}$$

und wir erhalten $\sum_5 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ ähnlich wie in Kap.II mithilfe Lemma 12.2 und $1 - \theta_1 < \frac{50}{77} - \epsilon$. Die Summe $\sum_6$ behandeln wir wie $\sum_4$ in Kap.IV bzw. $\sum_2$ in Kap.III, indem wir die Summation in $\sum_6(m)$ auf $dp_1 \cdot ... \cdot p_m \cdot v_1 \cdot ... \cdot v_s \in [X^{1-\epsilon}, X]$ einschränken, welches nur einen Fehler der Größenordnung $o(\eta \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ verursacht, und den Hauptbeitrag $\sum_6'(m)$ wie oben als $O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$ abschätzen. Dabei nutzen wir die wichtige Eigenschaft $X^{1-\theta_2} < d \leq X^{1-\theta_1}$ für $d \in D_3$, welche uns $p_1 \cdot .... \cdot p_m \cdot v_1 \cdot ... \cdot v_s \in [X^{\theta_1 - \epsilon}, X^{\theta_2 + \epsilon}]$ liefert und damit die notwendigen Mittel gibt, das logarithmische Polytop $\mathcal{R}^* \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^{m+s+k} \mid \sum_{i=1}^{m+s} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$ mit $S(\mathcal{R}^*) = S(\mathcal{R})$ zu konstruieren bzw. den zu *HS1 Prop.12.1* analogen Hilfssatz zu formulieren. Somit können wir die Summe $\sum_6'(m, T_s)$ als $O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$ kontrollieren, sodass auch $\sum_6'(m) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X})$

und schließlich $\sum_6(m) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}) + o(\eta\cdot\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ gilt. Ähnlich wie in Kap.IV kommt daraus gemäß Bemerkung 1 die Abschätzung $\sum_6 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ und folglich $(*)_3$.

In Kapitel V wird klar, weshalb wir strenger $D\subseteq[1,X^{1-\theta_1}]$ anstatt $D\subseteq[1,X^{50/77-\epsilon}[$ wie in [1, S.34] benötigen. In letzterem Fall wäre $D_3=\{d\in\mathbb{N}\,|\,X^{1-\theta_2}<d<X^{50/77-\epsilon},\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(d)\neq 0\}$ und damit nicht auszuschließen, dass es ein $d\in D_3$ mit $X^{1-\theta_1}<d<X^{50/77-\epsilon}$ gibt. Dann wäre aber auch $p_1\cdot....\cdot p_m\cdot v_1\cdot...\cdot v_s\in[X^{\theta_1-\epsilon},X^{\theta_2+\epsilon}]$ nicht zwingend erfüllt. Dies ist aber notwendig, um die Beweisidee umzusetzen und die Summen mithilfe des Typ II-Bereichs $[\frac{9}{25}+\epsilon,\frac{17}{40}-\epsilon]$ unter Kontrolle zu halten.

□

**Folgerung aus Proposition 12.1**:

Die in den Kapiteln I-III vorgestellten Ideen bleiben richtig, falls wir $k=0$ wählen. Dann ist zwar $\mathcal{R}\subseteq[\eta,1]^k$ nicht existent, was jedoch keine größeren Schwierigkeiten bereitet, wenn wir einfach $\mathbf{1}_{\mathcal{R}}(n):=1\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ definieren. Ferner setzen wir $D_1:=\{1\}$, sodass in Kap.II ebenso

$$D_1=\{1\}\subseteq\{d\in\mathbb{N}\,|\,d<X^{50/77-\epsilon}\ \wedge\ p|d\Rightarrow p\geq X^{\eta}\}\quad\wedge$$
$$D_1=\{1\}\subseteq\{d\in\mathbb{N}\,|\,d\leq X^{\theta_1},\ d=q_1\cdot...\cdot q_k\ \ \wedge\ \ q_i\in\mathbb{P},\ q_i\geq X^{\eta}\ \forall\ 1\leq i\leq k\}:=D_1^{'}$$

gilt. Für $k=0$ liegen nämlich in $D_1^{'}$ alle natürlichen Zahlen $\leq X^{\theta_1}$, die Produkt von 0 Primzahlen $\geq X^{\eta}$ sind, also insbesondere die 1. Mithilfe Lemma 12.2. kommt $\sum_1=o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ analog zu Kap.II.

In Kap.III verwenden wir $D_1=\{1\}\subseteq\{d\in\mathbb{N}\,|\,d=q_1\cdot...\cdot q_k,\ q_i\in\mathbb{P},\ q_i\geq X^{\eta}\ \forall\ 1\leq i\leq k\}$ sowie $\mathcal{R}\times[\eta,1]^{m+s}=[\eta,1]^{m+s}$ in der Definition von $\mathcal{R}^*$ auf S.264, sodass $\mathcal{R}\times[\eta,1]^{m+s}$ bereits ein log. Polytop ist. Ebenso nutzen wir den Satz über alle Mengen in der Definition von $\mathcal{R}^*$ außer $\mathcal{R}\times[\eta,1]^{m+s}$, womit $\mathcal{R}^*\subseteq[\eta,1]^{m+s}$ ($\Leftarrow k=0$) beschränkt und schließlich wieder ein logarithmisches Polytop mit $S(\mathcal{R}^*)=\{-1,0,1\}$ ist. Folglich gilt (12.1.11) auch mit $k=0$ und $S(\mathcal{R}^*)=\{-1,0,1\}$. Nach *HS1 Prop.12.1* erhalten wir auch für $k=0$ die Abschätzung

$$\sum\nolimits_2(m,T_s)=O_{S(\mathcal{R}^*),\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})=O_{\{-1,0,1\},\,\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})=O_{\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Daraus folgt $\sum_2=O_{\eta}\,(\frac{\delta\cdot\#\mathcal{A}}{\log X})$ bzw. $\sum_2=o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ analog zu Kap.III und somit die Gültigkeit von $(*)_1$ auch für $D_1=\{1\}$, was $S(\mathcal{A},X^{\theta})-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot S(\mathcal{B},X^{\theta})=o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ impliziert.

# 13. Siebzerlegung und Beweis von Theorem 1.1

Für $n \in \mathbb{N}_0$, $n < X$ setzen wir $w_n := \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(n) - \frac{\kappa_2 \# \mathcal{A}}{X} \geq \frac{\kappa_2 \# \mathcal{A}}{X}$ und definieren

$$S(\mathcal{W}_d, z) := \sum_{\substack{0 \leq n < \frac{X}{d} \\ p|n \Rightarrow p \geq z}} w_{nd} = S(\mathcal{A}_d, z) - \kappa_2 \frac{\# \mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, z) \quad \forall\ d \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{R}^+$$

analog zu [1, S.37], wobei $S(\mathcal{W}, z) := S(\mathcal{W}_1, z)$ sei. Die Buchstab-Identität [16, S.34] liefert nach einfachen Umformungen

$$S(\mathcal{W}_d, s_1) - S(\mathcal{W}_d, s_2) = \sum_{s_1 \leq p < s_2} S(\mathcal{W}_{dp}, p) \quad \forall\ d \in \mathbb{N},\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+,\ s_1 \leq s_2.$$

Diese beiden Gleichungen verwenden wir häufig in diesem Kapitel. Zudem benötigen wir neben *HS1 Proposition 13.2* auf S.136 folgenden Hilfssatz für Proposition 13.2.

*HS2 Proposition 13.2*:
Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{R} \subseteq [0,1]^d$ ein Polytop. Dann gilt $\{-1, 0, 1\} \subseteq S(\mathcal{R})$.

*Beweis*:
Nach Definition von $S(\mathcal{R})$ ist $0 \in S(\mathcal{R})$, sodass der Nachweis von $-1, 1 \in S(\mathcal{R})$ genügt. Da $\mathcal{R}$ Polytop ist, gilt $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} H^-_{f_i,\, \alpha_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Kap. 6). Dabei wird in diesem Durchschnitt insbesondere durch die abgeschlossenen Halbräume $H^-_{f_{i_0},\, \alpha_{i_0}} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^d \,|\, 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + ... + 0 \cdot v_d \leq 1\}$ sowie $H^-_{f_{i_1},\, \alpha_{i_1}} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^d \,|\, (-1) \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + ... + 0 \cdot v_d \leq 0\}$ mit $1 \leq i_0, i_1 \leq n$, $i_0 \neq i_1$ geschnitten, denn für $\vec{v} \in \mathcal{R} \subseteq [0,1]^d$ ist $v_1 \in [0,1]$ (beachte: $d \geq 1$). Aus der Definition von $S(\mathcal{R})$ folgt dann direkt $-1, 1 \in S(\mathcal{R})$.

$\square$

**Proposition 13.2**:
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $T \subseteq \{1, 2, ..., k\}$, $T \neq \emptyset$ sowie $\eta \in ]0,1]$ eine von $X$ unabhängige Konstante oder $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt. Ferner sei $\mathcal{R} \subseteq [\eta, 1]^k$ ein logarithmisches Polytop. Dann gilt

$$\sum := \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_k \\ X^{\theta_1} \leq \prod\limits_{t \in T} p_t \leq X^{\theta_2} \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1 \ldots p_k}, p_1) = o(\frac{\# \mathcal{A}}{\log X}).$$

**Beweis**:

Wir wählen $X$ hinreichend groß, sodass $X^\eta > 2$ ist. Dies ist auch bei Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 möglich (vgl. S.254). Aus $T \neq \emptyset$ folgt $T = \{t_1, ..., t_{l_1}\} \subseteq \{1, 2, ..., k\}$ mit $l_1 \in \mathbb{N}$, $l_1 \leq k$ und $t_1 < ... < t_{l_1}$. Wegen $\mathcal{R} \subseteq [\eta, 1]^k$ können wir die Summation auf Primzahlen $X^\eta \leq p_1, ..., p_k$ einschränken und für diese gilt

$$
\begin{aligned}
&S(\mathcal{W}_{p_1 \ldots p_k}, p_1) = S(\mathcal{A}_{p_1 \ldots p_k}, p_1) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_{p_1 \ldots p_k}, p_1) = \\
&\#\{a \in \mathcal{A} \mid a = a' \cdot p_1 \cdot ... \cdot p_k,\ a' \in \mathbb{N},\ p|a' \Rightarrow p \geq p_1\} - \\
&\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \#\{b \in \mathcal{B} \mid b = b' \cdot p_1 \cdot ... \cdot p_k,\ b' \in \mathbb{N},\ p|b' \Rightarrow p \geq p_1\} = \\
&\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p_1 \leq p_{k+1} \leq ... \leq p_{k+s}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s}) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s}),
\end{aligned}
$$

wenn wir zunächst $a', b' \neq 0$ nutzen ($\Leftarrow 2|0 \wedge 2 < X^\eta \leq p_1$) bzw. die gleiche Idee der eindeutigen PFZ von $a'$ und $b'$ wie auf S.261-262 (ab „Für $d \in \mathbb{N}$...") verwenden. Somit kommt

$$
(13.2.1) \quad \sum = \sum_{\substack{X^\eta \leq p_1, ..., p_k \\ X^{\theta_1} \leq \prod_{t \in T} p_t \leq X^{\theta_2} \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}}} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k} \sum_{\substack{p_1 \leq p_{k+1} \leq ... \leq p_{k+s} \leq X \\ p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s} \leq X}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s}) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s}),
$$

denn wegen $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(m) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(m) = 0 \ \forall\ m \in \mathbb{N}_0,\ m > X$ genügt es, die Summation auf $p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s} \leq X$ zu beschränken, woraus zunächst $X^\eta \leq p_1 \leq p_i \leq X \ \forall\ k+1 \leq i \leq k+s$ und weiter wegen $X^\eta \leq p_i \ \forall\ 1 \leq i \leq k$ auch $(X^\eta)^{k+s} \leq p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s} \leq X$ bzw. $s \leq \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k$ folgt.

Wir erinnern uns, dass $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} H^-_{f_i, \alpha_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie $f_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{k} s_{j,i} \cdot x_j$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ und alle $1 \leq i \leq n$ ein logarithmisches Polytop ist, sodass insbesondere $S(\mathcal{R})$ unabhängig von $X$ ist und

$$
\begin{aligned}
&\alpha_i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log X)^{1/2}} \Rightarrow s_{j,i} \neq -\frac{1}{2} \quad \forall\ 1 \leq j \leq k, \\
&\alpha_i = -(\log(\log(\log(\log X))))^{-1} \quad \text{oder} \quad \alpha_i \text{ von } X \text{ unabhängig},
\end{aligned}
$$

für alle $1 \leq i \leq n$ gilt (vgl. Kap. 6). Wir setzen $R := \{1, 2, ..., k\} \backslash T = \{r_{l_1+1}, ..., r_k\}$ mit $r_{l_1+1} < ... < r_k$, sodass $R \,\dot{\cup}\, T = \{1, 2, ..., k\}$ ist und bemerken, dass nachfolgende Gedanken auch im Fall $R = \emptyset$ korrekt sind.

Wir fixieren zunächst die Primzahlen $p_1, ..., p_k$ und permutieren sie in der Form, dass $p_j^{'} := p_{t_j} \;\; \forall \; 1 \leq j \leq l_1$ und $p_j^{'} := p_{r_j} \;\; \forall \; l_1 + 1 \leq j \leq k$ gilt. Damit ist $\prod\limits_{i=1}^{l_1} p_i^{'} = \prod\limits_{i=1}^{l_1} p_{t_i} = \prod\limits_{t \in T} p_t$ und wir konstruieren nun ein logarithmisches Polytop $\mathcal{R}_T \subseteq [\eta, 1]^k$ mit $S(\mathcal{R}_T) = S(\mathcal{R})$, sodass die Bedingungen $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}$ und $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_T$ äquivalent sind.

Dazu setzen wir $s_{j,i}^{'} := s_{t_j,i} \;\; \forall \; 1 \leq j \leq l_1$ und $s_{j,i}^{'} := s_{r_j,i} \;\; \forall \; l_1 + 1 \leq j \leq k$, für alle $1 \leq i \leq n$, sodass für $\vec{e}^{\,'} = (e_1^{'}, ..., e_k^{'}) \in \mathbb{R}^k$ und $\vec{e} = (e_1, ..., e_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $e_j^{'} = e_{t_j} \;\; \forall \; 1 \leq j \leq l_1$ und $e_j^{'} = e_{r_j} \;\; \forall \; l_1 + 1 \leq j \leq k$, d.h. offenbar ist $(e_1^{'}, ..., e_k^{'})$ eine von $T$ abhängige Permutation von $(e_1, ..., e_k)$, insbesondere

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} s_{j,i}^{'} \, e_j^{'} &= \sum_{j=1}^{l_1} s_{j,i}^{'} \, e_j^{'} + \sum_{j=l_1+1}^{k} s_{j,i}^{'} \, e_j^{'} = \sum_{j=1}^{l_1} s_{t_j,i} \, e_{t_j} + \sum_{j=l_1+1}^{k} s_{r_j,i} \, e_{r_j} = \sum_{t \in T} s_{t,i} \, e_t + \sum_{r \in R} s_{r,i} \, e_r \\ &= \sum_{j=1}^{k} s_{j,i} \, e_j \end{aligned}$$

für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Dann ist dies auch für $\vec{e}^{\,'} := (\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X})$ und $\vec{e} := (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X})$ erfüllt. Definieren wir

$$\mathcal{R}_T := \bigcap_{i=1}^{n} \{\vec{e}^{\,'} \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{j=1}^{k} s_{j,i}^{'} \, e_j^{'} \leq \alpha_i\}$$

und erinnern uns an

$$\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} H_{f_i, \alpha_i}^{-} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\vec{e} \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{j=1}^{k} s_{j,i} \, e_j \leq \alpha_i\},$$

wobei letzteres gemäß der Definition der Halbräume $H_{f, \alpha}^{-}$ in Kap. 6 gilt, so ist $\mathcal{R}_T$ nach [10, S.209 Def. 3.1.9 b)] bereits ein Polyeder und wir erhalten insgesamt

$$(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R} \;\Leftrightarrow\; (\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_T.$$

Demnach verbleibt der Nachweis, dass $\mathcal{R}_T$ ein logarithmisches Polytop mit $S(\mathcal{R}_T) = S(\mathcal{R})$ ist.

Aus $\vec{e}^{\,'} = (e_1^{'}, ..., e_k^{'}) \in \mathcal{R}_T$ folgt $\vec{e} = (e_1, ..., e_k) \in \mathcal{R} \subseteq [\eta, 1]^k$, falls $e_j^{'} = e_{t_j} \;\; \forall \; 1 \leq j \leq l_1$ und $e_j^{'} = e_{r_j} \;\; \forall \; l_1 + 1 \leq j \leq k$ gilt, denn dann ist nach obigem $\sum\limits_{j=1}^{k} s_{j,i}^{'} \, e_j^{'} = \sum\limits_{j=1}^{k} s_{j,i} \, e_j$ für alle $1 \leq i \leq n$ und insbesondere $(e_1^{'}, ..., e_k^{'})$ eine Permutation von $(e_1, ..., e_k)$.

Da $e_i \in [\eta, 1] \ \forall\ 1 \leq i \leq k$ gilt, liegt daher auch jede Komponente von $\vec{e}^{'} = (e_1^{'}, ..., e_k^{'})$ in $[\eta, 1]$, woraus $\vec{e}^{'} \subseteq [\eta, 1]^k$ bzw. insgesamt $\mathcal{R}_T \subseteq [\eta, 1]^k$ folgt. Also ist $\mathcal{R}_T \subseteq [\eta, 1]^k$ ein beschränktes Polyeder und damit gemäß Theorem 3.1.10 in [10, S.211] ein Polytop.

Nach Definition der $s_{j,i}^{'}$ ist $(s_{1,i}^{'}, ..., s_{k,i}^{'})$ eine Permutation von $(s_{1,i}, ..., s_{k,i})$, für alle $1 \leq i \leq n$ und daher sowohl $S(\mathcal{R}_T) = S(\mathcal{R})$ unabhängig von $X$ als auch $\mathcal{R}_T$ logarithmisch, denn die $\alpha_i$ bleiben bei Konstrunktion von $\mathcal{R}_T$ aus $\mathcal{R}$ unverändert, womit sich vor allem Eigenschaft (1) der Logarithmizität von $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{R}_T$ vererbt (vgl. Kap. 6). Wegen $\prod\limits_{t \in T} p_t = \prod\limits_{i=1}^{l_1} p_i^{'}$ gilt zusammenfassend

$$(13.2.2)\quad \begin{aligned} &(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R} \quad \wedge \quad X^{\theta_1} \leq \prod_{t \in T} p_t \leq X^{\theta_2} \ \Leftrightarrow \\ &(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_T \quad \wedge \quad X^{\theta_1} \leq \prod_{i=1}^{l_1} p_i^{'} \leq X^{\theta_2} \ \Leftrightarrow \\ &(\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_T^*, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Äquivalenz mithilfe der Definition

$$\mathcal{R}_T^* := \mathcal{R}_T \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\theta_1, \theta_2]\} \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^k \mid \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$$

ergibt. Wir sehen leicht, dass auch $\mathcal{R}_T^*$ ein logarithmisches Polytop ist, denn dies trifft auf $\mathcal{R}_T$ zu und die Menge $\{\vec{e} \in \mathbb{R}^k \mid \sum\limits_{i=1}^{l_1} e_i \in [\theta_1, \theta_2]\}$ ist Durchschitt zweier Halbräume $H_{f,\alpha}^-$, wobei $\alpha \in \{-\theta_1, \theta_2\}$ und $f(\vec{x}) = \sum\limits_{j=1}^{k} s_j \cdot x_j$ mit $s_j \in \{-1, 0, 1\} \ \forall\ 1 \leq j \leq k$ gilt, sodass $S(\mathcal{R}_T^*) = S(\mathcal{R}_T) \cup \{-1, 0, 1\} = S(\mathcal{R}) \cup \{-1, 0, 1\} = S(\mathcal{R})$ nach *HS2 Prop.13.2* gilt.

Ferner ist $p_1 = \begin{cases} p_1^{'} & \text{, falls } 1 \in T \\ p_{l_1+1}^{'}, & \text{sonst} \end{cases} := p^{'}(T)$ und setzen wir $p_i^{'} := p_i \ \forall\ k+1 \leq i \leq k+s$, so kommt nach (13.2.1) und (13.2.2)

$$(13.2.3)\quad \sum =$$
$$\sum_{\substack{p_1^{'}, ..., p_k^{'} \\ (\frac{\log p_1^{'}}{\log X}, ..., \frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_T^*}} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k} \sum_{\substack{X^\eta \leq p^{'}(T) \leq p_{k+1}^{'} \leq ... \leq p_{k+s}^{'} \leq X \\ p_1^{'} \cdot ... \cdot p_{k+s}^{'} \leq X}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(p_1^{'} \cdot ... \cdot p_{k+s}^{'}) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(p_1^{'} \cdot ... \cdot p_{k+s}^{'}),$$

denn die durch $T$ definierte Permutation $(p_1^{'},...,p_k^{'})$ von $(p_1,...,p_k)$ mit $p_j^{'} := p_{t_j}\ \ \forall\ 1 \leq j \leq l_1$ und $p_j^{'} := p_{r_j}\ \ \forall\ l_1+1 \leq j \leq k$ stellt eine bijektive Abbildung dar.
Wir beachten zudem, dass aus $\mathcal{R}_T^* \subseteq [\eta, 1]^k$ und der Definition von $p^{'}(T)$ auch $X^\eta \leq p^{'}(T)$ und $X^\eta \leq p_1^{'},...,p_k^{'}$ folgt, falls $(\frac{\log p_1^{'}}{\log X},...,\frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_T^*$.

Für fixiertes $s \in \mathbb{N}_0,\ s \leq \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k$ setzen wir $l := k+s \in \mathbb{N}$, sodass $l_1 \leq k \leq l \ll \frac{1}{\eta}$ gilt und berechnen

$$\sum(s) := \sum_{\substack{p_1^{'},...,p_k^{'} \\ (\frac{\log p_1^{'}}{\log X},...,\frac{\log p_k^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_T^*}} \sum_{\substack{X^\eta \leq p^{'}(T) \leq p_{k+1}^{'} \leq ... \leq p_l^{'} \leq X \\ p_1^{'} \cdot ... \cdot p_l^{'} \leq X}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(p_1^{'} \cdot ... \cdot p_l^{'}) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(p_1^{'} \cdot ... \cdot p_l^{'}).$$

Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{T,s}^* := (\mathcal{R}_T^* \times [\eta,1]^s)\ \cap\ \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \eta \leq e_{k+1} \leq ... \leq e_l \leq 1\} \cap \\ \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^{l} e_i \leq 1\}\ \cap\ \{\vec{e} \in \mathbb{R}^l \mid \eta \leq e(T) \leq e_{k+1} \leq 1\} \end{aligned}$$

mit $e(T) := \begin{cases} e_1 & \text{, falls } 1 \in T \\ e_{l_1+1}, & \text{sonst} \end{cases}$, was die Gültigkeit von

$$\sum(s) = \sum_{\substack{p_1^{'},...,p_l^{'} \\ (\frac{\log p_1^{'}}{\log X},...,\frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_{T,s}^*}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(p_1^{'} \cdot ... \cdot p_l^{'}) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(p_1^{'} \cdot ... \cdot p_l^{'})$$

liefert. Argumentieren wir ähnlich zu S.264 (ab „$\mathcal{R}^* := ...$"), wobei $\mathcal{R}_T^*$ die Rolle von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}_{T,s}^*$ die Rolle von $\mathcal{R}^*$ einnimmt, so folgt, dass $\mathcal{R}_{T,s}^* \subseteq \{\vec{e} \in [\eta,1]^l \mid \sum_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25}+\epsilon, \frac{17}{40}-\epsilon]\}$ ein logarithmisches Polytop mit $S(\mathcal{R}_{T,s}^*) = S(\mathcal{R}_T^*) = S(\mathcal{R})$ ist.
Nun sind alle Voraussetzungen von *HS1 Prop.13.2* auf S.136 erfüllt, wobei darin $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{T,s}^*$ zu wählen ist, sodass dieser mit $\delta = (\log(\log X))^{-1}$ die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} \sum(s) &= \sum_{\substack{p_1^{'},...,p_l^{'} \\ (\frac{\log p_1^{'}}{\log X},...,\frac{\log p_l^{'}}{\log X}) \in \mathcal{R}_{T,s}^*}} \mathbf{1}_{\mathcal{A}}(p_1^{'} \cdot ... \cdot p_l^{'}) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(p_1^{'} \cdot ... \cdot p_l^{'}) = O_{S(\mathcal{R}_{T,s}^*),\,\eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}) \\ &= O_{S(\mathcal{R}),\,\eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}) \end{aligned}$$

gleichmäßig für alle $s \in \mathbb{N}_0,\ s \leq \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k$ impliziert. Aus (13.2.3) folgt damit

$$\sum = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor - k} \sum(s) = O_{S(\mathcal{R}),\eta}(\frac{\delta \cdot \#\mathcal{A}}{\log X}),$$

wobei die von $\eta$ abhängige Konstante/Funktion im $O_{S(\mathcal{R}),\eta}$-Glied aus *HS1 Prop.13.2* herrührt und folglich insbesondere effektiv ist und stetig von $\eta$ abhängt. Da $\eta$ eine von $X$ unabhängig Konstante ist oder $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt wird, erhalten wir in beiden Fällen $\sum = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$, denn $S(\mathcal{R})$ ist unabhängig von $X$. Im Falle der Wahl von $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 ergibt sich diese Aussage nämlich wie auf S.266 (ab „Nach dem...").

□

**Proposition 13.3**:
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $T \subseteq \{1, 2, ..., k\}$, $T \neq \emptyset$ sowie $\eta \in ]0, 1]$ eine von $X$ unabhängige Konstante oder $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt. Ferner sei $\mathcal{R} \subseteq [\eta, 1]^k$ ein logarithmisches Polytop. Dann gilt

$$\sum := \sum_{\substack{p_1,\dots,p_k \\ X^{1-\theta_2} \leq \prod\limits_{t \in T} p_t \leq X^{1-\theta_1} \\ (\frac{\log p_1}{\log X},\dots,\frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1 \dots p_k}, p_1) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

**Beweis**:
Der Beweis erfolgt mit denselben Methoden wie der Nachweis zu Proposition 13.2 und wird daher nur skizziert. Auf gleichem Wege wie auf S.272 erhalten wir nämlich (13.2.1) mit $1 - \theta_2$ anstatt $\theta_1$ und $1 - \theta_1$ anstatt $\theta_2$. Nun können wir die entsprechende Summation auf $p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s} \in [X^{1-\epsilon}, X]$ einschränken und machen dabei einen Fehler der Größe $o(\eta \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ ($\Leftarrow \eta \in ]0, 1]$).
Letzteres schließen wir aus der gleichen Idee, wie wir sie auch bei der Herleitung von $\sum_4''(m) = o(\eta \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ auf S.267-268 (ab „Wir schätzen...") verwenden.
Die Summationsbedingungen $p_1 \cdot ... \cdot p_{k+s} \in [X^{1-\epsilon}, X]$ und $X^{1-\theta_2} \leq \prod\limits_{t \in T} p_t \leq X^{1-\theta_1}$ erzwingen, dass wir den Faktor $\prod\limits_{\substack{t=1 \\ t \notin T}}^{k+s} p_t \in [X^{\theta_1 - \epsilon}, X^{\theta_2 + \epsilon}]$ abspalten bzw. ein entsprechendes logarithmisches Polytop $\mathcal{R}^*_{T,s} \subseteq \{\vec{e} \in [\eta, 1]^l \mid \sum\limits_{i=1}^{l_1} e_i \in [\frac{9}{25} + \epsilon, \frac{17}{40} - \epsilon]\}$ konstruieren können. Folglich ist auch der Hauptbeitrag zur Summe $\sum$ durch einen *HS1 Prop.13.2* ähnlichen Satz als $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ kontrollierbar.

□

**Proposition 13.1**:

Sei $k \in \mathbb{N},\ k \ll 1$ und $\mathcal{R} \subseteq [\epsilon, 1]^k$ ein logarithmisches Polytop. Dann gilt

$$\sum := \sum_{\substack{X^\epsilon \leq p_1 \leq ... \leq p_k \\ p_1 \cdot ... \cdot p_k \leq X^{1-\theta_1} \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1 ... p_k}, X^\theta) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

**Beweis**:

Wir definieren

$$\mathcal{R}_1 := \mathcal{R} \cap [\epsilon, 1]^k \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^{k} e_i \leq 1 - \theta_1\} \cap \{\vec{e} \in \mathbb{R}^k \mid e_1 \leq ... \leq e_k\} \subseteq [\epsilon, 1]^k.$$

Sämtliche Mengen im Durchschnitt von $\mathcal{R}_1$ außer $\mathcal{R}$ sind endliche Durchschnitte von Halbräumen $H^-_{f,\,\alpha}$, wobei $\alpha \in \{-\epsilon, 0, 1 - \theta_1, 1\}$ von $X$ unabhängig ist und $f(\vec{x}) = \sum\limits_{j=1}^{k} s_j \cdot x_j$ mit $s_j \in \{-1, 0, 1\}\ \ \forall\ 1 \leq j \leq k$ gilt. Also ist $S(\mathcal{R}_1) = S(\mathcal{R}) \cup \{-1, 0, 1\} = S(\mathcal{R})$ nach *HS2 Prop.13.2* und $\mathcal{R}_1 \subseteq [\epsilon, 1]^k$ aufgrund seiner Beschränktheit ein logarithmisches Polytop, da dies auf $\mathcal{R}$ zutrifft und sich die Eigenschaften (1)-(3) der Logarithmizität auf $\mathcal{R}_1$ vererben. Wenden wir nun Proposition 12.1 auf $\mathcal{R}_1$ an, so kommt

$$\begin{aligned} o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) &= \sum_{\substack{d \leq X^{1-\theta_1} \\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}_1}(d) = 1}} S(\mathcal{A}_d, X^\theta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_d, X^\theta) = \sum_{\substack{d \leq X^{1-\theta_1} \\ \mathbf{1}_{\mathcal{R}_1}(d) = 1}} S(\mathcal{W}_d, X^\theta) \\ &= \sum_{\substack{X^\epsilon \leq p_1 \leq ... \leq p_k \\ p_1 \cdot ... \cdot p_k \leq X^{1-\theta_1} \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}_1}} S(\mathcal{W}_{p_1 ... p_k}, X^\theta) = \sum_{\substack{X^\epsilon \leq p_1 \leq ... \leq p_k \\ p_1 \cdot ... \cdot p_k \leq X^{1-\theta_1} \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1 ... p_k}, X^\theta) \end{aligned}$$

denn jedes $d \in \mathbb{N},\ d \leq X^{1-\theta_1}$ mit $\mathbf{1}_{\mathcal{R}_1}(d) = 1$ hat eine eindeutige kanonische PFZ der Form $d = p_1 \cdot ... \cdot p_k \leq X^{1-\theta_1}$ mit $X^\epsilon \leq p_1 \leq ... \leq p_k$ und $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}_1$ (beachte: Def. $\mathcal{R}_1$), wird also bijektiv auf ein Tupel $(p_1, ..., p_k)$ mit $X^\epsilon \leq p_1 \leq ... \leq p_k,\ p_1 \cdot ... \cdot p_k \leq X^{1-\theta_1}$ und $(\frac{\log p_1}{\log X}, ..., \frac{\log p_k}{\log X}) \in \mathcal{R}_1$ abgebildet. Dabei folgt die letzte Gleichheit aus der Definition von $\mathcal{R}_1$.

$\square$

**Folgerung aus Prop.13.1**:

Wir wählen $k = 1$, $\gamma := \frac{1}{(\log X)^{1/2}}$ sowie $\alpha_1 := -\frac{1}{2} + \frac{1}{(\log X)^{1/2}}$, $f_1(x) = (-1) \cdot x$ und $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $f_2(x) = 1 \cdot x$. Ferner definieren wir

$$\mathcal{R} := \bigcap_{i=1}^{2} H^{-}_{f_i,\,\alpha_i} = \{v \in \mathbb{R} \mid -v \leq -\frac{1}{2} + \gamma\} \cap \{v \in \mathbb{R} \mid v \leq \frac{1}{2}\} = \{v \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} - \gamma \leq v \leq \frac{1}{2}\},$$

sodass $\mathcal{R} \subseteq [\epsilon, 1]^1$ für hinreichend große $X$ insbesondere ein logarithmisches Polytop ist und daher nach Prop.13.1 wegen $\epsilon < \frac{1}{2} - \gamma < \frac{1}{2} < 1 - \theta_1$ auch

$$o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = \sum_{\substack{X^{\epsilon} \leq p_1 \\ p_1 \leq X^{1-\theta_1} \\ \frac{\log p_1}{\log X} \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1}, X^{\theta}) = \sum_{X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}} S(\mathcal{W}_{p_1}, X^{\theta})$$

gilt.

Für den Nachweis von Theorem 1.1 benötigen wir die folgenden Hilfssätze, wobei ab sofort mit $q$ stets eine Primzahl gemeint ist.

*HS1 Theorem 1.1/Eigenschaften der Buchstab-Funktion*:

Sei $\omega : [1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\omega(u) := \begin{cases} \frac{1}{u} & \text{, falls } 1 \leq u \leq 2 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{u} \cdot \int\limits_{1}^{u-1} \omega(t)\, dt & \text{, falls } u > 2 \end{cases}$ $\forall\ u \in [1, \infty[$ die Buchstab-Funktion. Dann gilt :

(i) $\omega$ ist stetig auf $[1, \infty[$,

(ii) $\omega$ ist stetig differenzierbar auf $[1, \infty[\setminus\{2\}$ und nicht differenzierbar für $u = 2$,

(iii) $\frac{1}{u} \leq \omega(u) \leq 1 \quad \forall\ u \in [1, \infty[$,

(iv) $\omega(u) \geq \frac{1}{2} \quad \forall\ u \in [1, \infty[$,

(v) $\omega'(u) = O(1) \quad \forall\ u \in [1, \infty[\setminus\{2\}$.

*Beweisskizze*:

Wir verwenden [16, S.116-118], sodass (iv) bzw. (iii) bereits im Wesentlichen nach dem dortigen Theorem 8.1.2 bzw. (8.1.6) gilt und zudem (8.1.7) $\omega'(u) = \frac{1}{u} \cdot (\omega(u-1) - \omega(u))\ \ \forall\ u > 2$ ist. Letzteres und (iii) impliziert (v) sowie mithilfe von (i) die stetige Differenzierbarkeit von $\omega$

für $u > 2$, während sich jene für $u \in [1,2[$ direkt aus der Definition ergibt. Da der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{u \to 2-0} \frac{\omega(u)-\omega(2)}{u-2} = -\frac{1}{4}$ nicht dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{u \to 2+0} \frac{\omega(u)-\omega(2)}{u-2} = \frac{1}{2} \cdot (\omega(2-1) - \omega(2)) = \frac{1}{4}$ entspricht, ist $\omega$ in $u = 2$ nicht differenzierbar. Ferner kann Eigenschaft (i) durch eine vollständige Induktion über das Intervall $[1, n[$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ bewiesen werden.

$\square$

*HS2 Theorem 1.1*:

Sei $f : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $0 \leq x \leq y$ stetig und streng monoton fallend.
Dann gilt $\sum\limits_{n \in [x,y] \cap \mathbb{N}_0} f(n) = \int\limits_x^y f(t)\, dt + O(f(x))$.

*Beweis*:

Der Beweis ergibt sich im Wesentlichen durch Vergleich des Integrals mit der entsprechenden Ober- und Untersumme.

$\square$

*HS3 Theorem 1.1*:

Gegeben seien $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \in [X^\theta, X]$ sowie die Funktionen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [X^\theta, X]$, welche der Äquivalenz

$$\alpha_0 \leq r \leq \beta_0 \;\wedge\; \alpha_1(r) \leq s \leq \beta_1(r) \;\Leftrightarrow\; \gamma_0 \leq s \leq \delta_0 \;\wedge\; \gamma_1(s) \leq r \leq \delta_1(s) \quad \forall\; s, r \in \mathbb{R}^+$$

genügen. Dann gilt mit der oben definierten Buchstab-Funktion $\omega$ die Abschätzung

$$\sum_{\substack{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \\ \alpha_1(p) \leq q \leq \beta_1(p) \\ q^2 p \leq X}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) \geq -(1 + o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \iint\limits_{\substack{\log_X(\alpha_0) \leq u \leq \log_X(\beta_0) \\ \log_X(\alpha_1(X^u)) \leq v \leq \log_X(\beta_1(X^u)) \\ 2v+u \leq 1}} \omega(\frac{1-u-v}{v})\, \frac{dudv}{uv^2},$$

falls der Wert des Integrals positiv und unabhängig von $X$ ist.

*Beweis*:

I. Wir machen folgend häufig Gebrauch vom Primzahlsatz [2, S.41] in der Form

$$(*) \quad \pi(y) = \int\limits_2^y \frac{1}{\log t}\, dt + O(y \cdot \exp(-C \cdot (\log y)^{1/10})) = \int\limits_2^y \frac{1}{\log t}\, dt + O(\frac{y}{(\log y)^2}) \;\; \forall\; y \geq 2,$$

wobei $C > 0$ eine absolute Konstante und $\pi(y) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p < y\}$ ist. Diese Aussage gilt auch, wenn wir $\pi(y) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq y\}$ definieren, denn im Fall $y \in \mathbb{P}$ kann die zusätzlich in $\pi(y)$ gezählte Primzahl bzw. die $+1$ auf der linken Seite ins $O$-Glied absorbiert werden. Damit dürfen wir bei Anwendung obiger Aussage zwischen beiden Definitionen von $\pi(y)$ wechseln.

Wir definieren $\Phi^*(x,z) := \#\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \ \wedge \ p_1|n \Rightarrow p_1 \geq z\}$ für $x \geq z \geq 2$ und bemerken, dass die in [16, S.116] definierte Version $\Phi(x,z)$ nur $p_1 > z$ anstatt $p_1 \geq z$ verwendet.
Aus Theorem 8.1.1 [16, S.117] folgt

$$\Phi(x,z) \leq \frac{x \cdot \omega(u)}{\log z} + O(\frac{x}{(\log z)^2}) \quad \forall\ x,z \in \mathbb{R}^+,\ 2 \leq z \leq \sqrt{x} \text{ mit } z^u = x.$$

Offenbar ist

$$\begin{aligned}
&\Phi^*(x,z) := \#\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \ \wedge \ p_1|n \Rightarrow p_1 \geq z\} = \\
&\#\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \ \wedge \ p_1|n \Rightarrow p_1 > z\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \ \wedge \ p_1|n \Rightarrow p_1 \geq z \ \wedge \ z \in \mathbb{P},\ z|n\} \leq \\
&\Phi(x,z) + \#\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \ \wedge \ z \in \mathbb{N},\ z|n\} \leq \Phi(x,z) + \frac{x}{z} = \Phi(x,z) + O(\frac{x}{(\log z)^2}),
\end{aligned}$$

denn $(\log z)^2 \ll z$ für $z \geq 2$, was insgesamt

$$(1) \quad \Phi^*(x,z) \leq \frac{x \cdot \omega(u)}{\log z} + k_1 \cdot \frac{x}{(\log z)^2} \quad \forall\ x,z \in \mathbb{R}^+,\ 2 \leq z \leq \sqrt{x} \text{ mit } z^u = x$$

und einer absoluten Konstanten $k_1 \in \mathbb{R}^+$ ergibt.

Ähnliches wollen wir nun auch für alle $x,z \in \mathbb{R}^+,\ z \geq 2,\ \sqrt{x} < z \leq x$ zeigen. Dann ist $z^u = x$ mit $1 \leq u < 2$ und $\Phi^*(x,z) = \#\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x \wedge p_1|n \Rightarrow p_1 \geq z\} = \#\{p \in \mathbb{P} \mid z \leq p \leq x\} \cup \{1\}$, denn besitzt $n \in \mathbb{N}$, $x \geq n > 1$ nur Primteiler $\geq z > \sqrt{x} \geq \sqrt{n}$, so ist $n$ selbst Primzahl. Also ist

$$\Phi^*(x,z) = 1 + \pi(x) - \pi(z) = 1 + \int_z^x \frac{1}{\log t}\,dt + O(\frac{x}{(\log x)^2}) = \int_z^x \frac{1}{\log t}\,dt + O(\frac{x}{(\log x)^2}),$$

wenn wir obige Version $(*)$ des Primzahlsatzes und $O(\frac{z}{(\log z)^2}) = O(\frac{x}{(\log x)^2})$ verwenden (beachte: $x \geq z \geq 2$). Dabei nutzen wir auch die Definition $\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}$.
Mithilfe $z \geq 2,\ \sqrt{x} < z \leq x,\ z^u = x$ und $1 \leq u < 2$ kommt

$$\int_z^x \frac{1}{\log t}\,dt = \int_z^x (\frac{t}{\log t})' + \frac{1}{(\log t)^2}\,dt = [\frac{t}{\log t}]_z^x + \int_z^x \frac{1}{(\log t)^2}\,dt \le \frac{x}{\log x} + \int_z^x \frac{1}{(\log \sqrt{x})^2}\,dt =$$
$$\frac{x}{\log x} + \frac{4x}{(\log x)^2} = \frac{x}{\log z \cdot u} + O(\frac{x}{(\log x)^2}) = \frac{x \cdot \omega(u)}{\log z} + O(\frac{x}{(\log x)^2}),$$

wenn wir $\omega(u) = \frac{1}{u}$ für $1 \le u < 2$ nutzen. Wegen $O(\frac{x}{(\log x)^2}) = O(\frac{x}{(\log z)^2 \cdot u^2}) = O(\frac{x}{(\log z)^2})$ ($\Leftarrow 1 \le u < 2$) gilt insgesamt

$$(2) \quad \Phi^*(x,z) \le \frac{x \cdot \omega(u)}{\log z} + k_2 \cdot \frac{x}{(\log z)^2} \quad \forall\ x, z \in \mathbb{R}^+,\ z \ge 2,\ x \ge z > \sqrt{x} \ \text{ mit } z^u = x$$

und einer absoluten Konstanten $k_2 \in \mathbb{R}^+$. Nach (1) und (2) erhalten wir

$$(3) \quad \Phi^*(x,z) \le \frac{x \cdot \omega(u)}{\log z} + k_3 \cdot \frac{x}{(\log z)^2} \quad \forall\ x, z \in \mathbb{R}^+,\ x \ge z \ge 2 \ \text{ mit } z^u = x$$

und $k_3 := \max\{k_1, k_2\} \in \mathbb{R}^+$. Wir finden

$$\sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X}} \sum_{\substack{0 \le n < \frac{X}{pq} \\ p_1 | n \Rightarrow p_1 \ge q}} w_{npq} \ge -\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X}} \sum_{\substack{1 \le n \le \frac{X}{pq} \\ p_1 | n \Rightarrow p_1 \ge q}} 1$$
$$= -\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X}} \Phi^*(\frac{X}{pq}, q),$$

wobei wir im vorletzten Schritt $n \ne 0$ und $n \ne \frac{X}{pq}$ nutzen, denn für $n = 0$ besitzt $n$ den Primteiler $p_1 = 2 \ge q$ und aus $n = \frac{X}{pq}$ folgt $pq|X$ bzw. $p, q \in \mathbb{P}(b)$, wobei beides wegen $2 < b < X^\theta \le p, q$ für hinreichend große $X$ ausgeschlossen ist. Wir setzen $x := \frac{X}{pq}$ und $z := q$, sodass unter den Summationsbedingungen $x \ge z \ge 2$ ist ($\Leftarrow \frac{X}{pq} \ge q \ge X^\theta \ge 2$) und daher aus (3) die Abschätzung

$$0 \le \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X}} \Phi^*(\frac{X}{pq}, q) \le \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X,\ u = \frac{\log_X(X/pq)}{\log_X(q)}}} \frac{X/pq \cdot \omega(u)}{\log q} + k_3 \cdot \frac{X/pq}{(\log q)^2}$$
$$= \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X,\ u = \frac{1 - \log_X(p)}{\log_X(q)} - 1}} \frac{X/pq}{\log q} \cdot \omega(u) \cdot (1 + \frac{k_3}{\log q \cdot \omega(u)})$$

folgt. Unter den Summationsbedingungen gilt $1 \le u = \frac{\log_X(X/pq)}{\log_X(q)} \le \frac{\log_X(X)}{\log_X(\alpha_1(p))} \le \frac{1}{\log_X(X^\theta)} = \frac{1}{\theta}$ sowie $\frac{1}{\omega(u)} \le u \le \frac{1}{\theta}$ ($\Leftarrow$ *HS1* (iii)) und $\log q \ge \log \alpha_1(p) \ge \log(X^\theta) = \theta \cdot \log X$, was insgesamt

$\frac{1}{\log q} \cdot \frac{1}{\omega(u)} \leq \frac{1}{\theta \cdot \log X} \cdot \frac{1}{\theta} \ll \frac{1}{\log X}$ und daher $1 + \frac{k_3}{\log q \cdot \omega(u)} \leq 1 + \frac{k_4}{\log X} = 1 + o(1)$ mit einer Konstanten $k_4 \in \mathbb{R}^+$ ergibt. Zusammenfassend erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad \sum_{\substack{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \\ \alpha_1(p) \leq q \leq \beta_1(p) \\ q^2 p \leq X}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) &\geq -\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \\ \alpha_1(p) \leq q \leq \beta_1(p) \\ q^2 p \leq X}} \Phi^*(\frac{X}{pq}, q) \\
&\geq -(1+o(1)) \cdot \kappa_2 \#\mathcal{A} \cdot \sum_{\substack{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \\ \alpha_1(p) \leq q \leq \beta_1(p) \\ q^2 p \leq X}} \frac{1}{pq} \cdot \frac{1}{\log q} \cdot \omega(\frac{1 - \log_X(p)}{\log_X(q)} - 1).
\end{aligned}
$$

II. Im Folgenden schätzen wir $\sum := \sum_{\substack{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \\ \alpha_1(p) \leq q \leq \beta_1(p) \\ q^2 p \leq X}} \frac{1}{pq} \cdot \frac{1}{\log q} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(q)} - 1)$ nach oben ab und bemerken, dass die Summationsbedingung $q \leq \beta_1(p)$, $q^2 p \leq X$ äquivalent ist zu $q \leq \beta_1^*(p)$ mit $\beta_1^*(p) := \min\{\beta_1(p), (\frac{X}{p})^{1/2}\} \leq X$. Daraus schließen wir

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad \sum &= \sum_{\substack{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \\ \alpha_1(p) \leq q \leq \beta_1^*(p)}} \frac{1}{pq} \cdot \frac{1}{\log q} \cdot \omega(\frac{1 - \log_X(p)}{\log_X(q)} - 1) \\
&= \sum_{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0} \frac{1}{p} \cdot \sum_{\alpha_1(p) \leq n \leq \beta_1^*(p)} \mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log n} \cdot \omega(\frac{1 - \log_X(p)}{\log_X(n)} - 1) \\
&= \sum_{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0} \frac{1}{p} \cdot \sum_{\alpha_1(p) \leq n \leq \beta_1^*(p)} \frac{1}{\log n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log n} \cdot \omega(\frac{1 - \log_X(p)}{\log_X(n)} - 1) + \\
&\quad \sum_{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0} \frac{1}{p} \cdot \sum_{\alpha_1(p) \leq n \leq \beta_1^*(p)} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\log n}) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log n} \cdot \omega(\frac{1 - \log_X(p)}{\log_X(n)} - 1) \\
&=: \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,
\end{aligned}
$$

indem wir die Idee nutzen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $n \in \mathbb{N}$ Primzahl ist, näherungsweise $\frac{1}{\log n}$ beträgt, also die Summe $\sum_2$ „klein” sein sollte. Genauer zeigen wir $\sum_2 = O(\frac{1}{(\log X)^2})$, wobei wir hierzu für eine gegebene Primzahl $\alpha_0 \leq p \leq \beta_0$ zunächst

$$
\sum(p) := \sum_{a(p) \leq n \leq b(p)} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\log n}) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log n} \cdot \omega(\frac{1 - \log_X(p)}{\log_X(n)} - 1) = O(\frac{1}{(\log X)^2})
$$

mit $a(p) = \alpha_1(p)$ und $b(p) = \beta_1^*(p)$ herleiten. Dabei dürfen wir o.B.d.A. $a(p) \leq b(p)$ bzw. $X^\theta \leq a(p) \leq b(p) \leq X$ annehmen, denn andernfalls verschwindet $\sum(p)$.

Setze $f(t) := \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log t} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(t)} - 1) \ \forall \ t \in [a(p), b(p)]$, wobei $f(t)$ bzw. $\omega(\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(t)} - 1)$ $\forall \ t \in [a(p), b(p)]$ definiert ist, weil $t \leq b(p) = \beta_1^*(p) \leq (\frac{X}{p})^{1/2}$ bzw. $\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(t)} - 1 \geq 1$ gilt.

Wir definieren $g(t) := \frac{1-\log_X(p)}{\log_X(t)} - 1 \;\; \forall \;\; t \in [a(p), b(p)]$, sodass $g$ auf $[a(p), b(p)]$ stetig sowie stetig differenzierbar ist und $f(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log t} \cdot \omega(g(t))$ ebenso auf $[a(p), b(p)]$ stetig ist ($\Leftarrow$ *HS1* (i)).

Nach *HS1* (ii) ist $\omega(g(t))$ für alle $t \in [a(p), b(p)]$ mit $g(t) \neq 2$ stetig differenzierbar, denn die Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist stetig differenzierbar. Damit trifft selbiges auch auf $f(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log t} \cdot \omega(g(t))$ zu und es gilt $f^{'}(t) = (\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log t})^{'} \cdot \omega(g(t)) + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log t} \cdot \omega^{'}(g(t))$ $\forall \;\; t \in [a(p), b(p)]$ mit $g(t) \neq 2$, wobei wir $\omega^{'}(g(t)) := \frac{d\,\omega}{d\,g} \cdot \frac{d\,g}{d\,t}$ definieren.

Ferner ist $\omega(g(t)) = O(1)$ ($\Leftarrow$ *HS1* (iii)) und es gilt $g(t) = \log X \cdot \frac{1-\log_X(p)}{\log t} - 1$, also

$$g^{'}(t) = \log X \cdot (\frac{1}{\log t})^{'} \cdot (1 - \log_X(p)) = \log X \cdot -\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{(\log t)^2} \cdot O(1) = O(\frac{1}{t} \cdot \frac{\log X}{(\log t)^2})$$

für alle $t \in [a(p), b(p)]$, denn wegen $X^\theta \leq \alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \leq X$ ist $0 \leq 1 - \log_X(p) \leq 1 - \theta$.
Aus $X^\theta \leq a(p) \leq t \leq b(p) \leq X$ kommt $\log t \asymp \log X$ und daraus insbesondere $g^{'}(t) = O(\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log X}) \;\; \forall \;\; t \in [a(p), b(p)]$. Folglich liefert *HS1* (v) insgesamt

$$\omega^{'}(g(t)) = \frac{d\,\omega}{d\,g} \cdot \frac{d\,g}{d\,t} = O(1) \cdot O(\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log X}) = O(\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log X})$$

für alle $t \in [a(p), b(p)]$ mit $g(t) \neq 2$. Mithilfe $\log t \asymp \log X$ schließen wir

$$\begin{aligned} f^{'}(t) &= (\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log t})^{'} \cdot \omega(g(t)) + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log t} \cdot \omega^{'}(g(t)) \\ &= -\frac{1}{t^2} \cdot (\frac{1}{\log t} + \frac{1}{(\log t)^2}) \cdot O(1) + O(\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log t} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log X}) = O(\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\log X}) \end{aligned}$$

für alle $t \in [a(p), b(p)]$ mit $g(t) \neq 2$. Fassen wir unsere Resultate zusammen, so kommt

(6) $f(t)$ ist stetig differenzierbar für alle $t \in [a(p), b(p)]$ mit $g(t) \neq 2$ und dabei gilt
$$f^{'}(t) = O(\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\log X}) \text{ für jene } t.$$

Nach Definition von $g$ existiert höchstens ein $t_0 \in [a(p), b(p)]$ mit $g(t_0) = 2$.
Im Fall $g(t) \neq 2 \;\; \forall \;\; t \in [a(p), b(p)]$ ist $f$ auf ganz $[a(p), b(p)]$ stetig differenzierbar ($\Leftarrow$ (6)) und daher gilt $f(b(p)) - f(n) = \int\limits_n^{b(p)} f^{'}(t)\,dt \;\; \forall \;\; n \in [a(p), b(p)]$.

Im Fall der Existenz eines solchen $t_0 \in [a(p), b(p)]$ folgern wir ebenso $f(b(p)) - f(n) = \int\limits_n^{b(p)} f^{'}(t)\,dt$ für jene $n \in [a(p), b(p)]$ mit $t_0 \notin [n, b(p)]$, denn dann ist $f$ auf $[n, b(p)]$ wieder stetig differenzierbar ($\Leftarrow$ (6)). Für die übrigen $n \in [a(p), b(p)]$ mit $t_0 \in [n, b(p)]$ ist $f$ in $[n, t_0[$ und in $]t_0, b(p)]$ stetig differenzierbar ($\Leftarrow$ (6)), sodass für die uneigentlichen Integrale $\int\limits_{t_0}^{b(p)} f'(t)\,dt$ und $\int\limits_{n}^{t_0} f'(t)\,dt$ insbesondere

$$\int\limits_{t_0}^{b(p)} f'(t)\,dt = \lim_{s\to t_0+0} \int\limits_{s}^{b(p)} f'(t)\,dt = f(b(p)) - \lim_{s\to t_0+0} f(s) = f(b(p)) - f(t_0) \quad \text{bzw.}$$
$$\int\limits_{n}^{t_0} f'(t)\,dt = \lim_{s\to t_0-0} \int\limits_{n}^{s} f'(t)\,dt = \lim_{s\to t_0-0} f(s) - f(n) = f(t_0) - f(n)$$

gilt, weil $f$ stetig in $t_0$ ist. Somit gilt auch im zweiten Fall und damit insgesamt $f(b(p)) - f(n) = \int\limits_{n}^{b(p)} f'(t)\,dt \;\; \forall\; n \in [a(p), b(p)]$. Daraus kommt mit partieller Summation

$$\text{(7)} \quad \sum(p) = \sum_{a(p)\le n\le b(p)} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\log n}) \cdot f(n)$$
$$= \sum_{a(p)\le n\le b(p)} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\log n}) \cdot f(b(p)) - \int\limits_{a(p)}^{b(p)} \sum_{a(p)\le n\le t} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\log n}) \cdot f'(t)\,dt.$$

Für fixiertes $t \in [a(p), b(p)]$ schätzen wir $\sum\limits_{a(p)\le n\le t} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\log n})$ ab. Aus $(*)$ folgt

$$\pi(x) = \int\limits_{2}^{x} \frac{1}{\log s}\,ds + O(\frac{x}{(\log x)^2}) = \int\limits_{2}^{x} (\frac{s}{\log s})' + \frac{1}{(\log s)^2}\,ds + O(\frac{x}{(\log x)^2})$$
$$= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + O(\frac{x}{(\log x)^2}) + \int\limits_{2}^{x} \frac{1}{(\log s)^2}\,ds = \frac{x}{\log x} + O(\frac{x}{(\log x)^2}) + \int\limits_{2}^{x} \frac{1}{(\log s)^2}\,ds$$

für $x \ge 2$, indem wir $\frac{2}{\log 2}$ ins $O(\frac{x}{(\log x)^2})$ absorbieren. Für hinreichend große $X$ gilt $t \ge a(p) \ge X^\theta > 2$ und daher

$$\sum_{a(p)\le n\le t} \mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) = \pi(t) - \pi(a(p)) = \frac{t}{\log t} - \frac{a(p)}{\log a(p)} + O(\frac{t}{(\log t)^2}) + \int\limits_{a(p)}^{t} \frac{1}{(\log s)^2}\,ds,$$

denn $O(\frac{a(p)}{(\log a(p))^2}) = O(\frac{t}{(\log t)^2})$. Aus $(\frac{1}{\log s})' < 0 \;\; \forall\; s \in [a(p), t]$ folgt

$$\int\limits_{a(p)}^{t} O(1) \cdot (\frac{1}{\log s})'\,ds = O(\int\limits_{a(p)}^{t} |(\frac{1}{\log s})'|\,ds) = O(|\int\limits_{a(p)}^{t} (\frac{1}{\log s})'\,ds|),$$

sodass partielle Summation die Gültigkeit von

$$\sum_{a(p)\le n\le t}\frac{1}{\log n}=\sum_{a(p)\le n\le t}1\cdot\frac{1}{\log t}-\int\limits_{a(p)}^{t}\sum_{a(p)\le n\le s}1\cdot(\frac{1}{\log s})'\,ds=$$

$$(t-a(p)+O(1))\cdot\frac{1}{\log t}-\int\limits_{a(p)}^{t}(s-a(p)+O(1))\cdot(\frac{1}{\log s})'\,ds=$$

$$\frac{t-a(p)}{\log t}+O(\frac{1}{\log t})-\int\limits_{a(p)}^{t}(s-a(p))\cdot\frac{1}{s}\cdot-\frac{1}{(\log s)^2}\,ds+O(|\int\limits_{a(p)}^{t}(\frac{1}{\log s})'\,ds|)=$$

$$\frac{t-a(p)}{\log t}+O(\frac{1}{\log X})+\int\limits_{a(p)}^{t}\frac{1}{(\log s)^2}\,ds+a(p)\cdot\int\limits_{a(p)}^{t}\frac{1}{s}\cdot-\frac{1}{(\log s)^2}\,ds+O(\frac{1}{\log a(p)}-\frac{1}{\log t})=$$

$$\frac{t-a(p)}{\log t}+O(\frac{1}{\log X})+\int\limits_{a(p)}^{t}\frac{1}{(\log s)^2}\,ds+a(p)\cdot\int\limits_{a(p)}^{t}(\frac{1}{\log s})'\,ds+O(\frac{1}{\log X})=$$

$$\frac{t-a(p)}{\log t}+O(\frac{1}{\log X})+\int\limits_{a(p)}^{t}\frac{1}{(\log s)^2}\,ds+a(p)\cdot(\frac{1}{\log t}-\frac{1}{\log a(p)})=$$

$$\frac{t}{\log t}-\frac{a(p)}{\log a(p)}+O(\frac{1}{\log X})+\int\limits_{a(p)}^{t}\frac{1}{(\log s)^2}\,ds$$

liefert, wenn wir $\log a(p)$, $\log t\asymp\log X$ nutzen. Folglich ist

$$(8)\qquad \sum_{a(p)\le n\le t}(\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n)-\frac{1}{\log n})=O(\frac{t}{(\log t)^2})+O(\frac{1}{\log X})=O(\frac{t}{(\log X)^2})\quad\forall\ t\in[a(p),b(p)],$$

denn für diese $t\ge X^\theta$ ist $O(\frac{1}{\log X})=O(\frac{t}{(\log X)^2})$. Gibt es nun kein $t_0\in[a(p),b(p)]$ mit $g(t_0)=2$, so ist $f$ auf ganz $[a(p),b(p)]$ stetig differenzierbar, was nach (6) und (8) insbesondere

$$\int\limits_{a(p)}^{b(p)}\sum_{a(p)\le n\le t}(\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n)-\frac{1}{\log n})\cdot f^{'}(t)\,dt=\int\limits_{a(p)}^{b(p)}O(\frac{t}{(\log X)^2})\cdot O(\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\log X})\,dt=$$

$$O(\frac{1}{(\log X)^3}\cdot\int\limits_{a(p)}^{b(p)}\frac{1}{t}\,dt)=O(\frac{1}{(\log X)^2}),$$

liefert, denn $0\le\int\limits_{a(p)}^{b(p)}\frac{1}{t}\,dt=\log b(p)-\log a(p)\le\log b(p)\asymp\log X$. Im Fall der Existenz (genau) eines solchen $t_0\in[a(p),b(p)]$ mit $g(t_0)=2$ erhalten wir die gleiche Abschätzung, indem wir das Integral $\int\limits_{a(p)}^{b(p)}=\lim\limits_{s\to t_0-0}\int\limits_{a(p)}^{s}+\lim\limits_{s\to t_0+0}\int\limits_{s}^{b(p)}$ in zwei uneigentliche Integrale zerlegen und für diese jeweils (6) und (8) nutzen. Nach *HS1* (iii) ist $f(b(p))=\frac{1}{b(p)}\cdot\frac{1}{\log b(p)}\cdot\omega(\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(b(p))}-1)=O(\frac{1}{b(p)}\cdot\frac{1}{\log X})$

und einsetzen von $t = b(p)$ in (8) liefert

$$\sum_{a(p) \leq n \leq b(p)} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\log n}) = O(\frac{b(p)}{(\log X)^2}),$$

woraus insgesamt

$$\sum_{a(p) \leq n \leq b(p)} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\log n}) \cdot f(b(p)) = O(\frac{1}{(\log X)^3})$$

folgt. Aus den letzten Abschätzungen schließen wir mithilfe von (7) auf

$$(9) \quad \sum(p) = O(\frac{1}{(\log X)^2}) \quad \forall\ p \in \mathbb{P},\ \alpha_0 \leq p \leq \beta_0.$$

Nach Definition von $a(p), b(p)$ und $\sum(p)$ sowie (9) ist

$$(10) \quad \sum\nolimits_2 = \sum_{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0} \frac{1}{p} \cdot \sum(p) = O(\frac{1}{(\log X)^2} \cdot \sum_{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0} \frac{1}{p}) = O(\frac{1}{(\log X)^2}),$$

denn aus dem Satz von Mertens [2, S.8 Satz 1.1.5] und $X^\theta \leq \alpha_0, \beta_0 \leq X$ erhalten wir

$$0 \leq \sum_{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0} \frac{1}{p} = \log(\log \beta_0) - \log(\log \alpha_0) + O(\frac{1}{\log \alpha_0}) \leq \log(\log X) - \log(\log(X^\theta)) + O(1)$$
$$= \log(\frac{\log X}{\log(X^\theta)}) + O(1) = \log(\frac{1}{\theta}) + O(1) = O(1).$$

III. Nun schätzen wir $\sum_1$ aus (5) auf ähnliche Weise ab. Erinnern wir uns an die Definition $\beta_1^*(p) := \min\{\beta_1(p), (\frac{X}{p})^{1/2}\} \leq X$ und verwenden die Äquivalenz

$$\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \ \wedge \ \alpha_1(p) \leq n \leq \beta_1(p) \ \Leftrightarrow \ \gamma_0 \leq n \leq \delta_0 \ \wedge \ \gamma_1(n) \leq p \leq \delta_1(n) \quad \forall \ p \in \mathbb{P}, \ n \in \mathbb{N},$$

welche nach Voraussetzung gilt, so kommt mit $\delta_1^*(n) := \min\{\delta_1(n), \frac{X}{n^2}\} \leq X$ insbesondere

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_1 &= \sum_{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0} \frac{1}{p} \cdot \sum_{\alpha_1(p) \leq n \leq \beta_1^*(p)} \frac{1}{\log n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\log n} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(n)} - 1) = \\
&= \sum_{\substack{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \\ \alpha_1(p) \leq n \leq \beta_1(p) \\ n^2 p \leq X}} \frac{1}{pn} \cdot \frac{1}{(\log n)^2} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(n)} - 1) \\
&= \sum_{\gamma_0 \leq n \leq \delta_0} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\log n)^2} \cdot \sum_{\substack{\gamma_1(n) \leq p \leq \delta_1(n) \\ p \leq \frac{X}{n^2}}} \frac{1}{p} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(n)} - 1) \\
&= \sum_{\gamma_0 \leq n \leq \delta_0} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\log n)^2} \cdot \sum_{\gamma_1(n) \leq p \leq \delta_1^*(n)} \frac{1}{p} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(p)}{\log_X(n)} - 1) \\
&= \sum_{\gamma_0 \leq n \leq \delta_0} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\log n)^2} \cdot \sum_{\gamma_1(n) \leq m \leq \delta_1^*(n)} \mathbf{1}_{\mathbb{P}}(m) \cdot \frac{1}{m} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(m)}{\log_X(n)} - 1) \\
&= \sum_{\gamma_0 \leq n \leq \delta_0} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\log n)^2} \cdot \sum_{\gamma_1(n) \leq m \leq \delta_1^*(n)} \frac{1}{\log m} \cdot \frac{1}{m} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(m)}{\log_X(n)} - 1) + \\
&\quad \sum_{\gamma_0 \leq n \leq \delta_0} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\log n)^2} \cdot \sum_{\gamma_1(n) \leq m \leq \delta_1^*(n)} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(m) - \frac{1}{\log m}) \cdot \frac{1}{m} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(m)}{\log_X(n)} - 1) \\
&=: \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4,
\end{aligned}$$

indem wir wieder die Idee nutzen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $m \in \mathbb{N}$ Primzahl ist, näherungsweise $\frac{1}{\log m}$ beträgt, also die Summe $\sum_4$ „klein" sein sollte.
Im Folgenden zeigen wir $\sum_4 = O(\frac{1}{(\log X)^2})$, indem wir hierzu für fixiertes $\gamma_0 \leq n \leq \beta_0$ zunächst

$$\sum(n) := \sum_{c(n) \leq m \leq d(n)} (\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(m) - \frac{1}{\log m}) \cdot \frac{1}{m} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(m)}{\log_X(n)} - 1) = O(\frac{1}{\log X})$$

mit $c(n) = \gamma_1(n)$ und $d(n) = \delta_1^*(n)$ nachweisen. Dabei dürfen wir o.B.d.A. $c(n) \leq d(n)$ bzw. $X^\theta \leq c(n) \leq d(n) \leq X$ annehmen, denn andernfalls verschwindet $\sum(n)$.

Für den Nachweis von $\sum(n) = O(\frac{1}{\log X})$ verwenden wir die gleichen Mittel wie in Kap.II bei der Abschätzung von $\sum(p)$, wobei wir anstelle von $f$ nun die stetige Funktion $h(t) = \frac{1}{t} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(t)}{\log_X(n)} - 1)$ $\forall \ t \in [c(n), d(n)]$ betrachten und schließlich $h'(t) = O(\frac{1}{t^2})$ für alle Stellen $t \in [c(n), d(n)]$ erhalten, in denen $h$ stetig differenzierbar ist. Analog zu Kap.II sind dies alle $t \in [c(n), d(n)]$ mit $k(t) := \frac{1-\log_X(t)}{\log_X(n)} - 1 \neq 2$, wobei $k(t) = 2$ wiederum nur höchstens eine Lösung $t_0 \in [c(n), d(n)]$ hat.

Im Vergleich zu (6) fehlt in $h'(t) = O(\frac{1}{t^2})$ der Faktor $\frac{1}{\log X}$ im $O$-Glied, während wir in Aussage (8) nur $a(p)$ und $b(p)$ durch $c(n)$ und $d(n)$ ersetzen müssen. Dadurch ergibt sich $\sum(n) = O(\frac{1}{\log X})$ anstatt $\sum(n) = O(\frac{1}{(\log X)^2})$, für alle $\gamma_0 \le n \le \delta_0$. Diese schwächere Abschätzung verursacht jedoch keine großen Schwierigkeiten, denn es kommt

$$(11) \qquad \sum\nolimits_4 = \sum_{\gamma_0 \le n \le \delta_0} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\log n)^2} \cdot \sum(n) = O(\frac{1}{(\log X)^3} \cdot \sum_{\gamma_0 \le n \le \delta_0} \frac{1}{n}) = O(\frac{1}{(\log X)^2}),$$

indem wir $\log n \asymp \log X$ für $X^\theta \le \gamma_0 \le n \le \delta_0 \le X$ nutzen sowie die Abschätzung

$$\sum_{\gamma_0 \le n \le \delta_0} \frac{1}{n} \le \sum_{2 \le n \le \delta_0} \frac{1}{n} \le \int_1^{\delta_0} \frac{1}{t}\, dt = \log \delta_0 \le \log X$$

verwenden. Fassen wir (11), (10) und (5) zusammen, so haben wir

$$\begin{aligned}(12) \qquad \sum &= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 = \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 + O(\frac{1}{(\log X)^2}) = \sum\nolimits_3 + O(\frac{1}{(\log X)^2}) \\ &= \sum_{\substack{\alpha_0 \le m \le \beta_0 \\ \alpha_1(m) \le n \le \beta_1(m) \\ n^2 m \le X}} \frac{1}{mn} \cdot \frac{1}{(\log n)^2} \cdot \frac{1}{\log m} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(m)}{\log_X(n)} - 1) + O(\frac{1}{(\log X)^2})\end{aligned}$$

gezeigt, wenn wir die Definition von $\delta_1^*(n)$ sowie die Äquivalenz aus der Voraussetzung benutzen.

Die letzte Summe $\sum_3$ können wir durch das angegebene Doppelintegral abschätzen.
Dazu erklären wir die Funktion

$$\Omega(s,r) := \frac{1}{sr} \cdot \frac{1}{(\log s)^2} \cdot \frac{1}{\log r} \cdot \omega(\frac{1-\log_X(r)}{\log_X(s)} - 1) > 0 \quad \forall\ (s,r) \in D$$

mit dem Definitionsbereich

$$D := \{(s,r) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid \alpha_0 \le r \le \beta_0,\ \alpha_1(r) \le s \le \beta_1(r),\ s^2 r \le X\}$$

und zeigen $\frac{\partial \Omega}{\partial s} < 0$ sowie $\frac{\partial \Omega}{\partial r} < 0$ für alle $(s,r) \in D$ und hinreichend große $X$. Letzteres gibt uns die Möglichkeit mit *HS2 Theorem 1.1* entsprechende Summen durch Integrale abzuschätzen und dabei entsteht insgesamt ein Fehler der Größe $O(\frac{1}{(\log X)^2})$, womit

$$(13) \qquad \sum\nolimits_3 = \iint\limits_{(s,r)\in D} \Omega(s,r)\, ds\, dr + O(\frac{1}{(\log X)^2})$$

gilt. Auf eine detailliertere Herleitung von (13) wird an dieser Stelle verzichtet, da sie doch sehr technisch ist und wenig Interessantes liefert. Ferner sehen wir

$$\iint\limits_{(s,r)\in D} \Omega(s,r)\, ds\, dr = \iint\limits_{\substack{\alpha_0\le r\le\beta_0\\ \alpha_1(r)\le s\le\beta_1(r)\\ s^2r\le X}} \frac{1}{sr}\cdot\frac{1}{(\log s)^2}\cdot\frac{1}{\log r}\cdot\omega(\frac{1-\log_X(r)}{\log_X(s)}-1)\, ds\, dr =$$

$$\frac{1}{(\log X)^3} \iint\limits_{\substack{\alpha_0\le r\le\beta_0\\ \alpha_1(r)\le s\le\beta_1(r)\\ s^2r\le X}} \frac{1}{sr}\cdot\frac{1}{(\log_X(s))^2}\cdot\frac{1}{\log_X(r)}\cdot\omega(\frac{1-\log_X(r)-\log_X(s)}{\log_X(s)})\, ds\, dr.$$

Substituieren wir im letzten Integral $\log_X(s) = \frac{\log s}{\log X} = v(s)$ und $\log_X(r) = \frac{\log r}{\log X} = u(r)$, so gilt $\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\log X}\cdot\frac{1}{s}$ sowie $\frac{du}{dr} = \frac{1}{\log X}\cdot\frac{1}{r}$. Die Integrationsbedingungen sind dann äquivalent zu $\log_X(\alpha_0)\le u\le\log_X(\beta_0)$, $\log_X(\alpha_1(X^u))\le v\le\log_X(\beta_1(X^u))$, $2v+u\le 1$, was insgesamt

$$\iint\limits_{(s,r)\in D} \Omega(s,r)\, ds\, dr = \frac{1}{\log X}\cdot \iint\limits_{\substack{\log_X(\alpha_0)\le u\le\log_X(\beta_0)\\ \log_X(\alpha_1(X^u))\le v\le\log_X(\beta_1(X^u))\\ 2v+u\le 1}} \omega(\frac{1-u-v}{v})\,\frac{dudv}{uv^2} := \frac{1}{\log X}\cdot I$$

liefert, wobei der Integralwert $I>0$ nach Voraussetzung eine von $X$ unabhängige Konstante ist. Setzen wir dies in (12) und (13) ein, so kommt

$$\sum = \sum\nolimits_3 + O(\frac{1}{(\log X)^2}) = \frac{1}{\log X}\cdot I + O(\frac{1}{(\log X)^2}) = \frac{1}{\log X}\cdot(I+o(1))$$

und nach (4) insbesondere

$$\sum_{\substack{\alpha_0\le p\le\beta_0\\ \alpha_1(p)\le q\le\beta_1(p)\\ q^2p\le X}} S(\mathcal{W}_{pq},q) \ge -(1+o(1))\cdot\kappa_2\#\mathcal{A}\cdot\sum = -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot(I+o(1))$$

$$= -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I,$$

denn $o(1)\cdot(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X} = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = o(1)\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I$, weil $I>0$ eine von $X$ unabhängige Konstante ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

$\square$

**Bemerkung zu *HS3 Theorem 1.1*:**

1. Eine verallgemeinerte Version von *HS3* erhalten wir auch für Summen der Form $\sum S(\mathcal{W}_{pqr}, r)$ bzw. $\sum S(\mathcal{W}_{pqrs}, s)$ mit Primzahlen $p, q, r, s$, wobei die entsprechende Summation stets unter der Bedingung $pqr^2 \leq X$ bzw. $pqrs^2 \leq X$ erfolgen muss, sodass $\frac{X}{pqr} \geq r \geq 2$ bzw. $\frac{X}{pqrs} \geq s \geq 2$ gilt und damit $\Phi^*(\frac{X}{pqr}, r)$ sowie $\Phi^*(\frac{X}{pqrs}, s)$ definiert sind. Dabei ist dann auch die Äquivalenz in der Voraussetzung entsprechend zu verändern.

2. Wir erhalten die gleiche Aussage des *HS3* bzw. seiner verallgemeinerten Version, wenn in den Summationsbedingungen von $\sum S(\mathcal{W}_{pq}, q)$, $\sum S(\mathcal{W}_{pqr}, r)$ bzw. $\sum S(\mathcal{W}_{pqrs}, s)$ statt eines $\geq$- oder $\leq$- Zeichens nun ein $>$- oder $<$- Zeichen steht. Im Integral stehen dann die entsprechenden Zeichen in den Integrationsbedingungen, der Wert des Integrals ändert sich dadurch jedoch nicht. Hierzu weisen wir auf das Beispiel $\int\limits_{0\leq x\leq t} x\, dx = \int\limits_{0\leq x<t} x\, dx$ hin.

3. Sämtliche Summen $\sum S(\mathcal{W}_{pq}, q)$, $\sum S(\mathcal{W}_{pqr}, r)$ bzw. $\sum S(\mathcal{W}_{pqrs}, s)$ mit Primzahlen $p, q, r, s$ im Beweis von Theorem 1.1 haben die in *HS3* bzw. seiner verallgemeinerten Version bzw. die unter 2. dargestellte Form oder lassen sich mit denen im *HS3* vorgestellten Werkzeugen durch das entsprechende Integral abschätzen. So hat beispielsweise die Summe $\sum\limits_{\substack{z_1\leq q<p\leq z_2 \\ z_3\leq pq\leq z_5 \\ q^2p\leq X}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ zwar keine der genannten Formen, denn das $<$- zwischen $q$ und $p$ müsste besser ein $\leq$-Zeichen sein, sie lässt sich aber mit den gleichen Ideen wie in *HS3* durch

$$\sum_{\substack{z_1\leq q<p\leq z_2 \\ z_3\leq pq\leq z_5 \\ q^2p\leq X}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) \geq -(1+o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \iint\limits_{\substack{\theta\leq v<u\leq\theta_1 \\ \theta_2\leq u+v\leq 1-\theta_2 \\ 2v+u\leq 1}} \omega(\frac{1-u-v}{v})\, \frac{dudv}{uv^2}$$

nach unten abschätzen, wobei $z_1 = X^{\theta}$, $z_2 = X^{\theta_1}$, $z_3 = X^{\theta_2}$ und $z_5 = X^{1-\theta_2}$ ist.
In diesen Anwendungsfällen auf obige Summen im Beweis von Theorem 1.1 ist auch der Integralwert stets positiv und von $X$ unabhängig, weil dann die Integrationsgrenzen nicht von $X$ abhängen.

4. Der Nenner $v$ in $\omega(\frac{1-u-v}{v})$ sowie $v^2$ in $\frac{dudv}{uv^2}$ rühren von der Primzahl $q$ in den Summanden $S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ der Summe $\sum S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ in *HS3* her. Gleiches gilt verallgemeinert auch in dem unter 3. genannten Anwendungsfall für die entsprechenden Summen $\sum S(\mathcal{W}_{pq}, q)$, $\sum S(\mathcal{W}_{pqr}, r)$ bzw. $\sum S(\mathcal{W}_{pqrs}, s)$ im Beweis von Theorem 1.1.

*HS4 Theorem 1.1*:

Mit den Definitionen von $z_1, ..., z_6$ aus dem Beweis von Theorem 1.1, d.h. es gilt $X^\theta = z_1 < X^{\theta_1} = z_2 < X^{\theta_2} = z_3 < X^{1-\theta_2} = z_5 < X^{1-\theta_1} = z_6 < X$, erhalten wir

$$\sum_{\substack{z_1 \le q \le p \le z_2,\, z_3 \le pq \le z_5 \\ z_6 \le q^2 p \le X,\, q^3 p \le X}} S(\mathcal{W}_{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2}) \ge -(1+o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \iint_{\substack{\theta \le v \le u \le \theta_1 \\ \theta_2 \le v+u \le 1-\theta_2 \\ 1-\theta_1 \le 2v+u \le 1 \\ 3v+u \le 1}} \frac{1}{uv \cdot (1-u-v)}\, dudv.$$

*Beweisskizze*:

Der Beweis wird nur oberflächlich skizziert, denn er verwendet dieselben Methoden wie der Nachweis von *HS3*. Wir finden Konstanten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \in [X^\theta, X]$ und Funktionen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [X^\theta, X]$, welche der Äquivalenz

$$\alpha_0 \le r \le \beta_0 \;\wedge\; \alpha_1(r) \le s \le \beta_1(r) \;\Leftrightarrow\; z_1 \le s \le r \le z_2 \;\wedge\; z_3 \le rs \le z_5 \;\wedge\; z_6 \le s^2 r$$

für alle $s, r \in \mathbb{R}^+$ sowie der in *HS3* geforderten Äquivalenz genügen. Folglich gilt

$$\sum_{\substack{z_1 \le q \le p \le z_2,\, z_3 \le pq \le z_5 \\ z_6 \le q^2 p \le X,\, q^3 p \le X}} S(\mathcal{W}_{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2}) = \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X,\, q^3 p \le X}} S(\mathcal{W}_{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2}).$$

Ähnlich zum Beweis von *HS3* Kap.I (vgl. S.281-282) kommt

$$\sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X,\, q^3 p \le X}} S(\mathcal{W}_{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2}) \ge -\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X,\, q^3 p \le X}} \Phi^*(\frac{X}{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2}) \ge$$
$$-(1+o(1)) \cdot \kappa_2 \#\mathcal{A} \cdot \sum_{\substack{\alpha_0 \le p \le \beta_0 \\ \alpha_1(p) \le q \le \beta_1(p) \\ q^2 p \le X,\, q^3 p \le X}} \frac{1}{pq} \cdot \frac{1}{\log(X/pq)} := -(1+o(1)) \cdot \kappa_2 \#\mathcal{A} \cdot \sum,$$

indem wir $x = \frac{X}{pq}$, $z = (\frac{X}{pq})^{1/2}$ in *HS3* (3) einsetzen und nach $x = z^u$ insbesondere $u = 2$ bzw. $\omega(u) = \omega(2) = \frac{1}{2}$ erhalten, welches sich mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ im Nenner, der aus $\log((X/pq)^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot \log(X/pq)$ stammt, wegkürzt.

Mit der gleichen Idee wie im Beweis zu *HS3* Kap.II-III, d.h. wir ersetzen $\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(m)$ durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\log m}$, dass $m \in \mathbb{N}$ Primzahl ist, schätzen wir $\sum$ ab und finden

$$\sum = \sum_{\substack{\alpha_0\le p\le\beta_0\\ \alpha_1(p)\le q\le\beta_1(p)\\ q^2p\le X,\, q^3p\le X}} \frac{1}{pq}\cdot\frac{1}{\log(X/pq)} = \sum\nolimits_3 + O(\frac{1}{(\log X)^2})$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_0\le m\le\beta_0\\ \alpha_1(m)\le n\le\beta_1(m)\\ n^2m\le X,\, n^3m\le X}} \frac{1}{mn}\cdot\frac{1}{\log m}\cdot\frac{1}{\log n}\cdot\frac{1}{\log(X/mn)} + O(\frac{1}{(\log X)^2}),$$

wobei die zwischenzeitlich verwendeten Funktionen $f$ und $h$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig differenzierbar sind, da sie die Buchstab-Funktion $\omega$ nicht enthalten. Die letzte Abschätzung entspricht also gerade *HS3* (12). Die Summe $\sum_3$ können wir analog zu *HS3* (13) durch ein entsprechendes Doppelintegral bei einem Fehler der Größe $O(\frac{1}{(\log X)^2})$ abschätzen, was schließlich

$$\sum = \iint\limits_{\substack{z_1\le s\le r\le z_2\\ z_3\le rs\le z_5\\ z_6\le s^2r\le X,\, s^3r\le X}} \frac{1}{rs}\cdot\frac{1}{\log s}\cdot\frac{1}{\log r}\cdot\frac{1}{\log(X/sr)}\,ds\,dr + O(\frac{1}{(\log X)^2}) =$$

$$= \frac{1}{(\log X)^3}\cdot \iint\limits_{\substack{z_1\le s\le r\le z_2\\ z_3\le rs\le z_5\\ z_6\le s^2r\le X,\, s^3r\le X}} \frac{1}{rs}\cdot\frac{1}{\log_X(s)}\cdot\frac{1}{\log_X(r)}\cdot\frac{1}{\log_X(X/sr)}\,ds\,dr + O(\frac{1}{(\log X)^2})$$

impliziert, wenn wir entsprechenden Äquivalenzen (s.o.) gebrauchen.

Im letzten Integral substituieren wir $\log_X(s) = \frac{\log s}{\log X} = v(s)$ und $\log_X(r) = \frac{\log r}{\log X} = u(r)$, sodass $\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\log X}\cdot\frac{1}{s}$ sowie $\frac{du}{dr} = \frac{1}{\log X}\cdot\frac{1}{r}$ und $\log_X(X/sr) = 1 - \log_X(s) - \log_X(r) = 1 - u - v$ ist. Die Integrationsbedingungen sind dann äquivalent zu $\theta \le v \le u \le \theta_1,\ \theta_2 \le u + v \le 1 - \theta_2$, $1 - \theta_1 \le 2v + u \le 1,\ 3v + u \le 1$, was insgesamt

$$\frac{1}{(\log X)^3}\cdot \iint\limits_{\substack{z_1\le s\le r\le z_2\\ z_3\le rs\le z_5\\ z_6\le s^2r\le X,\, s^3r\le X}} \frac{1}{rs}\cdot\frac{1}{\log_X(s)}\cdot\frac{1}{\log_X(r)}\cdot\frac{1}{\log_X(X/sr)}\,ds\,dr =$$

$$\frac{1}{\log X}\cdot \iint\limits_{\substack{\theta\le v\le u\le\theta_1\\ \theta_2\le v+u\le 1-\theta_2\\ 1-\theta_1\le 2v+u\le 1\\ 3v+u\le 1}} \frac{1}{v}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1-u-v}\,du\,dv := \frac{1}{\log X}\cdot I$$

liefert. Daraus folgt

$$\sum = \frac{1}{\log X}\cdot I + O(\frac{1}{(\log X)^2}) = \frac{1}{\log X}\cdot[I + o(1)].$$

Setzen wir dies in die Abschätzung von $\sum_{\substack{\alpha_0 \leq p \leq \beta_0 \\ \alpha_1(p) \leq q \leq \beta_1(p) \\ q^2 p \leq X,\, q^3 p \leq X}} S(\mathcal{W}_{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2})$ ein und argumentieren weiter analog zu *HS3*, so erhalten wir das gewünschte Resultat, denn der Wert des Doppelintegrals $I$ ist positiv und von $X$ unabhängig, da $\theta, \theta_1, \theta_2$ von $X$ unabhängige Konstanten sind.

$\square$

'**Bemerkung zu *HS4 Theorem 1.1***:

Die zweite Bemerkung zu *HS3 Theorem 1.1* gilt auch für *HS4*.

Nun verfügen wir über ausreichend Mittel für den Nachweis von Theorem 1.1.

**Theorem 1.1**:
Sei $X$ eine hinreichend große $b$-Potenz. Dann gilt $\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \asymp \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$.

**Beweis**:
I. Wir verwenden die in [1, S.38-42] dargestellte Beweisstruktur. Dabei seien folgend mit $p, q, r, s$ stets Primzahlen gemeint. Wir zeigen zunächst $\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$.

Nach der Folgerung aus Proposition 12.1 gilt

$$(1.1.1) \quad S(\mathcal{W}, X^\theta) = S(\mathcal{W}_1, X^\theta) = S(\mathcal{A}, X^\theta) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}, X^\theta) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

wegen $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$. Ferner ist

$$\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} = \#\{p \in \mathcal{A} \mid \sqrt{X} \leq p < X\} + \#\{p \in \mathcal{A} \mid p < \sqrt{X}\} \leq$$
$$\#\{n \in \mathcal{A} \mid p_1 | n \Rightarrow p_1 \geq \sqrt{X}\} \backslash \{1\} + \pi(\sqrt{X}) \leq S(\mathcal{A}, \sqrt{X}) + \pi(\sqrt{X}),$$

denn $\{p \in \mathcal{A} \mid \sqrt{X} \leq p < X\} = \{n \in \mathcal{A} \mid p_1 | n \Rightarrow p_1 \geq \sqrt{X}\} \backslash \{1\}$, was wir nun zeigen.

Sei $n \in \mathcal{A}$, $n \neq 1$ mit $p_1 | n \Rightarrow p_1 \geq \sqrt{X}$. Daraus folgt $n \in \mathbb{N}$ für hinreichend große $X$, weil dann nämlich der Fall $n = 0$ ausscheidet, denn 0 hat den Primteiler $2 < \sqrt{X}$.
Für $n \notin \mathbb{P}$ gibt es wegen $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ eine nichttriviale Zerlegung in der Form $n = c \cdot d$ mit $c, d \in \mathbb{N}$, $c, d \neq 1$, wobei o.B.d.A. $c \leq \sqrt{n} < \sqrt{X}$ angenommen werden darf ($n < X \Leftarrow n \in \mathcal{A}$).

Ferner besitzt $2 \le c < \sqrt{X}$ einen Primteiler $p_1$ mit $p_1 \le c < \sqrt{X}$ und dieser teilt wegen $c|n$ auch $n$, womit ein Widerspruch entsteht. Also ist $n \in \mathbb{P}$ und daher auch $\sqrt{X} \le n < X$. Folglich gilt $\{n \in \mathcal{A} \mid p_1|n \Rightarrow p_1 \ge \sqrt{X}\} \backslash \{1\} \subseteq \{p \in \mathcal{A} \mid \sqrt{X} \le p < X\}$, sodass beide Mengen gleich sind, denn die $\supseteq$-Inklusion ist offensichtlich. Verwenden wir zusätzlich die Abschätzung

$$\pi(\sqrt{X}) \ll \frac{\sqrt{X}}{\log \sqrt{X}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{X}}{\log X} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{\log X},$$

die aus [2, S.4 Satz 1.1.3] und $\#\mathcal{A} = X^c$ mit $c = \frac{\log(b-1)}{\log b} \ge \frac{20}{21} > \frac{1}{2}$ ($\Leftarrow b \ge 10$) kommt, so gilt

$$(1.1.2) \quad \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} + S(\mathcal{A}, \sqrt{X}).$$

Ferner ist $S(\mathcal{A}, \sqrt{X}) \le S(\mathcal{A}, X^\theta)$ ($\Leftarrow \theta < \frac{1}{2}$) und wegen (1.1.1) erhalten wir $S(\mathcal{A}, X^\theta) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) + \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}, X^\theta)$, sodass der Nachweis von $S(\mathcal{B}, X^\theta) \ll \frac{X}{\log X}$ genügt. Dazu verwenden wir die im Beweis von Lemma 12.2 vorgestellte Version des FLCS (vgl. S.245).

Wir setzen $A = \mathcal{B}$, $z = X^\theta \ge 2$, $\omega(n) = 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ und $P = \mathbb{P}$ ins FLCS ein, sodass $P(z) = P(X^\theta) = \prod_{p<X^\theta} p$ gilt und bemerken, dass offensichtlich $\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ multiplikativ ist und nach *HS2 Lemma 12.2* auf S.240 der im FLCS geforderten Eigenschaft $(*)$ mit $c = 1$ genügt. Ferner ist $A_e = \mathcal{B}_e^* = \{n \in \mathcal{B} \mid e|n\} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < X, \ e|n\}$ und

$$\#A_e = \#\mathcal{B}_e^* = \lfloor \frac{X-1}{e} \rfloor + 1 = \frac{X}{e} + O(1) = \frac{\omega(e)}{e} \cdot \#\mathcal{B} + R'(e)$$

mit $R'(e) = O(1)$ für alle $e \in \mathbb{N}$, wobei $\#A = \#\mathcal{B} = X$ gilt. Offensichtlich ist $S(A, P, z) = S(\mathcal{B}, X^\theta)$, woraus insgesamt nach dem FLCS

$$S(\mathcal{B}, X^\theta) = X \cdot \prod_{p<X^\theta} (1 - \frac{1}{p}) \cdot (1 + O(u^{-u/2})) + O(\sum_{\substack{e \le X^{\theta \cdot u} \\ e|P(X^\theta)}} |R'(e)|)$$

gleichmäßig für alle $u \in \mathbb{R}$, $u \ge 1$ folgt. Setzen wir darin $u = 1$ ein, so ist $1 + O(u^{-u/2}) = O(1)$ und das zu addierende $O$-Glied ein $O(\sum_{e \le X^\theta} 1) = O(X^\theta) = O(\frac{X}{\log X})$, was

$$S(\mathcal{B}, X^\theta) \ll X \cdot \prod_{p<X^\theta} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{X}{\log X} \ll \frac{X}{\log X}$$

liefert, denn aus dem Beweis von Lemma 12.2 Kap.I (vgl. S.247) entnehmen wir $\prod_{p<x} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \asymp \log x \ \forall \ x \in \mathbb{R}^+, \ x \ge 2$, speziell also $\prod_{p<X^\theta} (1 - \frac{1}{p}) \asymp \frac{1}{\log(X^\theta)} \ll \frac{1}{\log X}$. Somit kommt

$$(1.1.3) \quad \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \ll \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}.$$

II. In den folgenden Kapiteln schätzen wir $\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\}$ nach unten ab. Dazu setzen wir

$$z_1 := X^{\theta},\ z_2 := X^{\theta_1},\ z_3 := X^{\theta_2},\ z_4 := X^{1/2},\ z_5 := X^{1-\theta_2},\ z_6 = z_7 := X^{1-\theta_1} = X^{\theta_3} \text{ mit}$$
$$\theta \approx 0.065, \quad \theta_1 \approx 0.36, \quad \theta_2 \approx 0.425, \quad 1-\theta_2 \approx 0.575, \quad \theta_3 := 1-\theta_1 \approx 0.64,$$

sodass offenbar $z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 < z_6 = z_7$ sowie $z_i = X^{t_i}$ mit $t_i \in \mathbb{Q}^+$ für alle $1 \le i \le 7$ gilt ($\Leftarrow \epsilon \in \mathbb{Q}^+$). In [1, S.37-38] wird dagegen $\theta_3 := \frac{50}{77} - \epsilon$ und $z_7 := X^{\theta_3}$ definiert. Die unterschiedlichen Definitionen hängen mit dem Gültigkeitsbereich von Proposition 13.1 zusammen, denn die entsprechende Aussage gilt nur bei Summation bis $p \le X^{1-\theta_1}$ und nicht wie in [1, S.37] behauptet auch bei Summation bis $p \le X^{\theta_3} = X^{50/77-\epsilon}$. Wir setzen daher $\theta_3 := 1-\theta_1$ und $z_7 := z_6$, um Analogie zu den Abschätzungen in [1, S.38-42] herzustellen. Nach Kap.I gilt

$$\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \ge S(\mathcal{A}, \sqrt{X}) - 1 = S(\mathcal{W}, \sqrt{X}) + \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}, \sqrt{X}) - 1 \text{ sowie}$$
$$S(\mathcal{B}, \sqrt{X}) = \#\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < X \ \wedge\ p_1 | n \Rightarrow p_1 \ge \sqrt{X}\} = \#\{p \in \mathbb{P} \mid \sqrt{X} \le p < X\} \cup \{1\},$$

denn letzteres erhalten wir analog zur Herleitung von
$\{n \in \mathcal{A} \mid p_1 | n \Rightarrow p_1 \ge \sqrt{X}\} \backslash \{1\} = \{p \in \mathcal{A} \mid \sqrt{X} \le p < X\}$ auf S.293-294. Aus $(*)$ auf S.279 bzw. dem Primzahlsatz [2, S.41] folgt $\pi(y) = \frac{y}{\log y} + O(\frac{y}{(\log y)^2})\ \forall\ y \ge 4$ und damit

$$\begin{aligned} S(\mathcal{B}, \sqrt{X}) &= 1 + \pi(X) - \pi(\sqrt{X}) = 1 + \frac{X}{\log X} + O(\frac{X}{(\log X)^2}) - \frac{\sqrt{X}}{\log \sqrt{X}} - O(\frac{\sqrt{X}}{(\log \sqrt{X})^2}) \\ &= \frac{X}{\log X} + O(\frac{X}{(\log X)^2}) \end{aligned}$$

für hinreichend große $X$. Dies liefert

$$\kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}, \sqrt{X}) - 1 = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} + O(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^2}) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

denn die 1 können wir ins $O(\frac{\#\mathcal{A}}{(\log X)^2})$-Glied absorbieren ($\Leftarrow \#\mathcal{A} \gg X^{1/2}$), also insgesamt

$$(1.1.4) \quad \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \ge S(\mathcal{W}, z_4) + \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Wir machen folgend häufig Gebrauch von

$$(*) \quad S(\mathcal{W}_d, s_1) - S(\mathcal{W}_d, s_2) = \sum_{s_1 \le p < s_2} S(\mathcal{W}_{dp}, p) \quad \forall\ d \in \mathbb{N},\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+,\ s_1 \le s_2,$$

$$(**) \quad S(\mathcal{C}, s_1) - S(\mathcal{C}, s_2) = \sum_{s_1 \le p < s_2} S(\mathcal{C}_p, p) \qquad \forall\ \mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0,\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+,\ s_1 \le s_2,$$

welches sich im Wesentlichen aus den Definitionen von $S(\mathcal{W}_d, z)$ und $\mathcal{C}_d$ bzw. $\mathcal{C}_d^*$ für $d \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}_0$ in Kap.12/13 sowie der Buchstab-Identität ergibt. Nach (1.1.1) und $(*)$ gilt

$$\begin{aligned}(1.1.5) \quad S(\mathcal{W}, z_4) &= S(\mathcal{W}, z_1) - \sum_{z_1 \le p < z_4} S(\mathcal{W}_p, p) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) - \sum_{z_1 \le p < z_4} S(\mathcal{W}_p, p) \\ &= o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) - \sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, p) - \sum_{z_2 \le p \le z_3} S(\mathcal{W}_p, p) - \sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, p) \\ &= o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) - \sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, p) - \sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, p),\end{aligned}$$

denn Prop.13.2 mit $k = 1$, $T = \{1\}$ und $\mathcal{R} = [\eta, 1]^1$, wobei $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt wird, d.h. insbesondere gilt $\eta \le \theta_1$ für hinreichend große $X$ sowie $\theta_2 \le 1$, liefert

$$\sum_{z_2 \le p \le z_3} S(\mathcal{W}_p, p) = \sum_{\substack{p_1 \\ X^{\theta_1} \le p_1 \le X^{\theta_2} \\ \frac{\log p_1}{\log X} \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1}, p_1) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Folgend verwenden wir häufig stillschweigend die Tatsache, dass aus $n = p_1 \cdot ... \cdot p_k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $p_1, ..., p_k \ge z_1 = X^\theta > b$ für hinreichend große $X$ insbesondere $n \ne X^t$ mit $t \in \mathbb{Q}^+$ folgt. Dies können wir mit derselben Idee wie auf S.263 ab „Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $n = X^r$..." nachweisen. Deshalb gilt beispielsweise

$$\sum_{z_3 < p < z_4} S(\mathcal{W}_p, p) = \sum_{z_3 \le p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, p),$$

weil die Fälle $p = z_3 = X^{\theta_2}$ und $p = z_4 = X^{1/2}$ nicht eintreten können.

III. Wir schätzen nun die Summen $\sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, p)$ und $\sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, p)$ ab.

Setze $\gamma := \frac{1}{(\log X)^{1/2}}$, sodass nach der Folgerung aus Prop.13.1 insbesondere

$$o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = \sum_{X^{1/2-\gamma} \le p_1 \le X^{1/2}} S(\mathcal{W}_{p_1}, z_1) = \sum_{X^{1/2-\gamma} \le p_1 \le X^{1/2}} S(\mathcal{A}_{p_1}, z_1) - \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1)$$

und daher

$$(1.1.6) \qquad \sum_{X^{1/2-\gamma}\le p_1\le X^{1/2}} S(\mathcal{A}_{p_1}, z_1) = \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{X} \cdot \sum_{X^{1/2-\gamma}\le p_1\le X^{1/2}} S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

gilt. Für fixiertes $X^{1/2-\gamma} \le p_1 \le X^{1/2}$ schätzen wir $S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1)$ mithilfe des FLCS ab. Nach Def. in Kap.12 ist $\mathcal{B}^*_{p_1} := \{n^* \in \mathcal{B} \mid p_1|n^*\}$ sowie $\mathcal{B}_{p_1} := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid np_1 \in \mathcal{B}\}$, was

$$\begin{aligned} S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1) &= \#\{n \in \mathcal{B}_{p_1} \mid p|n \Rightarrow p \ge z_1\} = \#\{n \in \mathbb{N}_0 \mid np_1 \in \mathcal{B} \ \wedge\ p|n \Rightarrow p \ge z_1\} \\ &= \#\{n^* \in \mathcal{B} \mid p_1|n^* \ \wedge\ p|n^* \Rightarrow p \ge z_1\} = \#\{n^* \in \mathcal{B}^*_{p_1} \mid p|n^* \Rightarrow p \ge z_1\} \\ &= S(\mathcal{B}^*_{p_1}, z_1) \end{aligned}$$

liefert, wenn wir $n^* = n \cdot p_1$ verwenden und beachten, dass $p_1 \ge X^{1/2-\gamma} \ge X^\theta = z_1$ für hinreichend große $X$ ist.

Wir setzen $A = \mathcal{B}^*_{p_1}$, $z = z_1 \ge 2$, $\omega(n) = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und $P = \mathbb{P}$ ins FLCS ein, sodass $P(z) = P(z_1) = \prod_{p<z_1} p$ gilt und bemerken, dass offensichtlich $\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ multiplikativ ist und nach *HS2 Lemma 12.2* auf S.240 der im FLCS geforderten Eigenschaft $(*)$ mit $c = 1$ genügt.

Es ist $A_e = (\mathcal{B}^*_{p_1})_e = \{n \in \mathcal{B}^*_{p_1} \mid e|n\} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < X,\, p_1|n \ \wedge\ e|n\} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n < X,\, p_1 e\,|n\}$ für $e \in \mathbb{N}$, $ggT(e, p_1) = 1$, woraus wir insbesondere für $e = 1$ die Gültigkeit von $\#A = \#\mathcal{B}^*_{p_1} = \lfloor \frac{X-1}{p_1} \rfloor + 1 = \frac{X}{p_1} + O(1)$ bzw. $\#\mathcal{B}^*_{p_1} \ll \frac{X}{p_1}$ erhalten. Dies liefert

$$\#A_e = \lfloor \frac{X-1}{p_1 e} \rfloor + 1 = \frac{X}{p_1 e} + O(1) = \frac{\omega(e)}{e} \cdot (\#A + O(1)) + O(1) = \frac{\omega(e)}{e} \cdot \#A + R'(e)$$

mit $R'(e) = O(1)$ für alle $e \in \mathbb{N}$, $ggT(e, p_1) = 1$. Offenbar ist $S(A, P, z) = S(\mathcal{B}^*_{p_1}, z_1) = S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1)$, woraus insgesamt nach dem FLCS

$$(1.1.7) \quad S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1) = S(\mathcal{B}^*_{p_1}, z_1) = \#\mathcal{B}^*_{p_1} \cdot \prod_{p<z_1} (1 - \frac{1}{p}) \cdot (1 + O(u^{-u/2})) + O(\sum_{\substack{e \le z_1^u \\ e|P(z_1)}} |R'(e)|)$$

gleichmäßig für alle $u \in \mathbb{R}, u \ge 1$ folgt. Einsetzen von $u = 1$ liefert $1 + O(u^{-u/2}) = O(1)$ und

$$\sum_{\substack{e \le z_1 \\ e|P(z_1)}} |R'(e)| \ll \sum_{\substack{e \le z_1 \\ e|P(z_1)}} 1 \le z_1 = X^\theta,$$

denn aus $e|P(z_1)$ sowie $P(z_1) = \prod_{p<z_1} p$ folgt $ggT(e, p_1) = 1$ $(p_1 \geq z_1)$ und daraus $R'(e) = O(1)$. Somit ist der zu addierende $O$-Term für $u = 1$ ein $O(X^\theta)$ und wir erhalten

$$(1.1.8) \quad S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1) \ll \frac{X}{p_1} \cdot \frac{1}{\log X} + X^\theta \quad \forall \ X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2},$$

indem wir $\#\mathcal{B}^*_{p_1} \ll \frac{X}{p_1}$ nutzen und uns an $\prod_{p<X^\theta}(1-\frac{1}{p}) \asymp \frac{1}{\log(X^\theta)} \ll \frac{1}{\log X}$ in Kap. I erinnern. Summation von (1.1.8) über alle $X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}$ liefert

$$\sum_{X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}} S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1) \ll \frac{X}{\log X} \cdot \sum_{X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}} \frac{1}{p_1} + o(\frac{X}{\log X}),$$

weil $\sum_{X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}} X^\theta \leq X^{1/2} \cdot X^\theta < X^{0.6} = o(\frac{X}{\log X})$ ist. Nach Satz 1.1.5 in [2, S.8] gilt

$$\sum_{X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}} \frac{1}{p_1} = \log(\frac{1/2}{1/2-\gamma}) + O(\frac{1}{\log X}) = \log(1 + \frac{\gamma}{1/2-\gamma}) + O(\frac{1}{\log X}).$$

Durch die Abschätzung $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leq \int_1^x 1 = x - 1 \ \forall \ x \geq 1$ erhalten wir $\log(1+\frac{\gamma}{1/2-\gamma}) \leq \frac{\gamma}{1/2-\gamma}$, denn nach der Definition $\gamma = \frac{1}{(\log X)^{1/2}}$ ist $\frac{\gamma}{1/2-\gamma} > 0$ für hinreichend große $X$ sowie $\frac{\gamma}{1/2-\gamma} = o(1)$ für $X \longrightarrow \infty$, was $\log(1 + \frac{\gamma}{1/2-\gamma}) = o(1)$ und insgesamt

$$(1.1.9) \qquad \sum_{X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}} S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1) \ll \frac{X}{\log X} \cdot (o(1) + O(\frac{1}{\log X})) + o(\frac{X}{\log X}) = o(\frac{X}{\log X})$$

liefert. Zusammen mit (1.1.6) ergibt sich

$$(1.1.10) \qquad \sum_{X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}} S(\mathcal{A}_{p_1}, z_1) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) \quad \wedge \quad \sum_{X^{1/2-\gamma} \leq p_1 \leq X^{1/2}} S(\mathcal{B}_{p_1}, z_1) = o(\frac{X}{\log X}).$$

Mithilfe (1.1.10) weisen wir $\sum_{p \leq X^{1/2}} [S(\mathcal{A}_p, \min\{p, (\frac{X}{p})^{1/2}\}) - S(\mathcal{A}_p, p)] = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ nach. Wir finden

$$\sum_{p \leq X^{1/2}} [S(\mathcal{A}_p, \ \min\{p, (\frac{X}{p})^{1/2}\}) - S(\mathcal{A}_p, p)] = \sum_{\substack{p \leq X^{1/2} \\ (\frac{X}{p})^{1/2} < p}} [S(\mathcal{A}_p, (\frac{X}{p})^{1/2}) - S(\mathcal{A}_p, p)] =$$

$$\sum_{\substack{p \leq X^{1/2} \\ (\frac{X}{p})^{1/2} < p}} \sum_{(\frac{X}{p})^{1/2} \leq q < p} S(\mathcal{A}_{pq}, q) = \sum_{\substack{p < X^{1/2-\gamma} \\ (\frac{X}{p})^{1/2} < p}} \sum_{(\frac{X}{p})^{1/2} \leq q < p} S(\mathcal{A}_{pq}, q) + \sum_{\substack{X^{1/2-\gamma} \leq p \leq X^{1/2} \\ (\frac{X}{p})^{1/2} < p}} \sum_{(\frac{X}{p})^{1/2} \leq q < p} S(\mathcal{A}_{pq}, q)$$

$$:= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

indem wir $(**)$ anwenden. Ferner ist

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{p<X^{1/2-\gamma} \\ (\frac{X}{p})^{1/2}<p}} \sum_{(\frac{X}{p})^{1/2}\le q<p} S(\mathcal{A}_{pq}, q) = \sum_{\substack{p<X^{1/2-\gamma} \\ (\frac{X}{p})^{1/2}<p}} \sum_{(\frac{X}{p})^{1/2}\le q<p} \#\{a \in \mathbb{N}_0 \mid apq \in \mathcal{A} \ \wedge\ p_1|a \Rightarrow p_1 \ge q\}.$$

Zunächst seien $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p < X^{1/2-\gamma}$ und $(\frac{X}{p})^{1/2} \le q < p$ fixiert.
Sei $a \in \{a \in \mathbb{N}_0 \mid apq \in \mathcal{A} \ \wedge\ p_1|a \Rightarrow p_1 \ge q\}$. Dann ist insbesondere $a \neq 0$, denn für $a = 0$ hat $a$ den Primteiler $2 \ge q \ge (\frac{X}{p})^{1/2} > X^{1/4+1/2\gamma} \ge X^{1/4}$, was für hinreichend große $X$ falsch ist. Also ist $a \in \mathbb{N}$ und für $a \neq 1$ besitzt $a$ einen Primteiler $p_1 \ge q$, sodass $apq \ge p_1pq \ge pq^2 \ge X$ und damit $apq \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}_0 \cap [0, X[$ ausgeschlossen ist. Daher ist nur $a = 1$ möglich und es gilt insgesamt

$$0 \le \sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{p<X^{1/2-\gamma} \\ (\frac{X}{p})^{1/2}<p}} \sum_{\substack{(\frac{X}{p})^{1/2}\le q<p \\ pq\in\mathcal{A}}} 1 \le \sum_{\substack{pq<X^{1-\gamma} \\ pq\in\mathcal{A}}} 1 = \sum_{\substack{a<X^{1-\gamma} \\ a\in\mathcal{A}}} \sum_{pq=a} 1 \le 2! \cdot \sum_{\substack{a<X^{1-\gamma} \\ a\in\mathcal{A}}} 1 \ll \#\mathcal{A}(X^{1-\gamma}),$$

denn für jedes $a \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum\limits_{pq=a} 1 \le 2!$ aufgrund der eindeutigen PFZ von $a$. Erinnern wir uns an $\mathcal{A}(x) \ll x^c \ \forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ b \le x < X$ mit $c = \frac{\log\,(b-1)}{\log\, b}$ und $\gamma = \frac{1}{(\log X)^{1/2}} > 0$, so kommt

$$\#\mathcal{A}(X^{1-\gamma}) \ll (X^{1-\gamma})^c = \frac{X^c}{X^{\gamma\cdot c}} = \frac{\#\mathcal{A}}{X^{\gamma\cdot c}} = \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \frac{1}{\exp(c \cdot \log X \cdot \gamma - \log(\log X))} = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

wegen $X^{1-\gamma} \ge b$ für hinreichend große $X$ sowie $\log X \cdot \gamma = (\log X)^{1/2}$. Damit gilt

$$(1.1.11) \quad \sum\nolimits_1 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Für $X^{1/2-\gamma} \le p \le X^{1/2}$ ist $(\frac{X}{p})^{1/2} \ge X^{0.25} \ge X^\theta$ und $p \ge X^\theta$, was nach $(**)$ und (1.1.10) die Abschätzung

$$0 \le \sum\nolimits_2 = \sum_{\substack{X^{1/2-\gamma}\le p\le X^{1/2} \\ (\frac{X}{p})^{1/2}<p}} \sum_{(\frac{X}{p})^{1/2}\le q<p} S(\mathcal{A}_{pq}, q) \le \sum_{X^{1/2-\gamma}\le p\le X^{1/2}} \sum_{X^\theta\le q<p} S(\mathcal{A}_{pq}, q) =$$
$$\sum_{X^{1/2-\gamma}\le p\le X^{1/2}} S(\mathcal{A}_p, X^\theta) - S(\mathcal{A}_p, p) \le \sum_{X^{1/2-\gamma}\le p\le X^{1/2}} S(\mathcal{A}_p, z_1) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

also $\sum_2 = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ liefert. Zusammen mit (1.1.11) impliziert dies

$$(1.1.12) \qquad \sum_{p\le X^{1/2}} [S(\mathcal{A}_p,\ \min\{p, (\frac{X}{p})^{1/2}\}) - S(\mathcal{A}_p, p)] = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Analog zur Herleitung von (1.1.12) folgern wir

$$\sum_{p\leq X^{1/2}}[S(\mathcal{B}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-S(\mathcal{B}_p,p)]=o(\frac{\#\mathcal{B}}{\log X})=o(\frac{X}{\log X}), \tag{1.1.13}$$

indem wir $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{B}$ und $c=\frac{\log(b-1)}{\log b}$ durch $c=1$ ersetzen, die zweite Aussage in (1.1.10) verwenden und $\mathcal{B}\subseteq\mathbb{N}_0\cap[0,X[$ beachten. Wir bemerken, dass jeder Summand auf der linken Seite von (1.1.12) bzw. (1.1.13) nicht-negativ ist, womit insbesondere auch

$$\sum_{z_1\leq p<z_2}[S(\mathcal{A}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-S(\mathcal{A}_p,p)]=o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$
$$\sum_{z_1\leq p<z_2}[S(\mathcal{B}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-S(\mathcal{B}_p,p)]=o(\frac{X}{\log X}),$$
$$\sum_{z_3<p\leq z_4}[S(\mathcal{A}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-S(\mathcal{A}_p,p)]=o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$
$$\sum_{z_3<p\leq z_4}[S(\mathcal{B}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-S(\mathcal{B}_p,p)]=o(\frac{X}{\log X})$$

wegen $z_1<z_2<z_3<z_4=X^{1/2}$ gilt. Dies liefert

$$\begin{aligned}&\sum_{z_1\leq p<z_2}S(\mathcal{W}_p,p)=\sum_{z_1\leq p<z_2}S(\mathcal{A}_p,p)-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot S(\mathcal{B}_p,p)=\\&\sum_{z_1\leq p<z_2}[S(\mathcal{A}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot S(\mathcal{B}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\}]\\&-\sum_{z_1\leq p<z_2}[S(\mathcal{A}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-S(\mathcal{A}_p,p)]\\&+\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{X}\cdot\sum_{z_1\leq p<z_2}[S(\mathcal{B}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-S(\mathcal{B}_p,p)]=\\&\sum_{z_1\leq p<z_2}S(\mathcal{W}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})+o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})\end{aligned}$$

und analog dazu kommt $\sum_{z_3<p\leq z_4}S(\mathcal{W}_p,p)=\sum_{z_3<p\leq z_4}S(\mathcal{W}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})+o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$, was eingesetzt in (1.1.5) die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}S(\mathcal{W},z_4)&=o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})-\sum_{z_1\leq p<z_2}S(\mathcal{W}_p,p)-\sum_{z_3<p\leq z_4}S(\mathcal{W}_p,p)=\\&o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})-\sum_{z_1\leq p<z_2}S(\mathcal{W}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})-\sum_{z_3<p\leq z_4}S(\mathcal{W}_p,\ \min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

impliziert.

IV. Nun formen wir die einzelnen Summen der letzten Zeile aus (1.1.14) um. Wir finden

$$\sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p,\ \min\{p, (\frac{X}{p})^{1/2}\}) = \sum_{\substack{z_1 \le p < z_2 \\ p \le (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_p, p) + \sum_{\substack{z_1 \le p < z_2 \\ p > (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_p, (\frac{X}{p})^{1/2}) =$$

$$- \sum_{\substack{z_1 \le p < z_2 \\ p \le (\frac{X}{p})^{1/2}}} [S(\mathcal{W}_p, z_1) - S(\mathcal{W}_p, p)] - \sum_{\substack{z_1 \le p < z_2 \\ p > (\frac{X}{p})^{1/2}}} [S(\mathcal{W}_p, z_1) - S(\mathcal{W}_p, (\frac{X}{p})^{1/2})] + \sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1),$$

wobei für $p < z_2 \le X^{1/2}$ insbesondere $(\frac{X}{p})^{1/2} \ge X^{1/4} > z_1$ ist, also nach $(*)$ letzteres gleich

$$- \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ p \le (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) - \sum_{\substack{z_1 \le p < z_2 \\ p > (\frac{X}{p})^{1/2} > q \ge z_1}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1) =$$

$$- \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ p \le (\frac{X}{p})^{1/2},\, q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) - \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ p > (\frac{X}{p})^{1/2},\, q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1) =$$

$$- \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1)$$

ist. Insgesamt kommt $\sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p,\ \min\{p, (\frac{X}{p})^{1/2}\}) = - \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1)$.

Analog zu oben gilt

$$\sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p,\ \min\{p, (\frac{X}{p})^{1/2}\}) =$$

$$- \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ p \le (\frac{X}{p})^{1/2}}} [S(\mathcal{W}_p, z_1) - S(\mathcal{W}_p, p)] - \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ p > (\frac{X}{p})^{1/2}}} [S(\mathcal{W}_p, z_1) - S(\mathcal{W}_p, (\frac{X}{p})^{1/2})] + \sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, z_1) =$$

$$- \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ z_1 \le q < p \\ p \le (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) - \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ z_1 \le q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ p > (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, z_1) =$$

$$- \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ z_1 \le q < \min\{p,\, (\frac{X}{p})^{1/2}\} \\ p \le (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) - \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ z_1 \le q < \min\{p,\, (\frac{X}{p})^{1/2}\} \\ p > (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, z_1) =$$

$$- \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ z_1 \le q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, z_1)$$

denn für $z_3 < p \le z_4 = X^{1/2}$ gilt $(\frac{X}{p})^{1/2} \ge X^{1/4} > z_1$ und $p > z_1$, sodass $(*)$ in der zweiten Zeile angewendet werden kann, und ferner $\min\{p, (\frac{X}{p})^{1/2}\} = (\frac{X}{p})^{1/2}$ wegen $(\frac{X}{p})^{1/2} \le (\frac{X}{z_3})^{1/2} \le z_3 < p$, welches wir in der letzten Zeile benutzen. Setzen wir dies in (1.1.14) ein, so gilt

$$(1.1.15) \quad S(\mathcal{W}, z_4) = -\sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1) - \sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, z_1) + \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$$
$$+ \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ z_1 \le q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Die beiden ersten (zu subtrahierenden) Summen besitzen nach Proposition 13.1 jeweils die Größenordnung $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$, welches wir beispielhaft für die erste Summe zeigen.

Nach der Bemerkung am Ende von Kap.II auf S.296 gilt $\sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1) = \sum_{z_1 \le p \le z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1)$, denn $p \neq z_2$ für $p \geq z_1$. Wir wählen $k = 1$, setzen $\alpha_1 := -\theta,\ f_1(x) := (-1) \cdot x$ und $\alpha_2 := \theta_1,\ f_2(x) := 1 \cdot x$ sowie

$$\mathcal{R} := \bigcap_{i=1}^{2} H^{-}_{f_i, \alpha_i} = \{v \in \mathbb{R} \mid -v \le -\theta\} \cap \{v \in \mathbb{R} \mid v \le \theta_1\} = \{v \in \mathbb{R} \mid \theta \le v \le \theta_1\},$$

womit $\mathcal{R} \subseteq [\epsilon, 1]^1$ ein logarithmisches Polytop ist (beachte: $\epsilon < \theta < \theta_1 < 1$) und aus Prop.13.1

$$o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = \sum_{\substack{X^\epsilon \le p_1 \\ p_1 \le X^{1-\theta_1} \\ \frac{\log p_1}{\log X} \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1}, X^\theta) = \sum_{\substack{X^\epsilon \le p_1 \le X^{1-\theta_1} \\ X^\theta \le p_1 \le X^{\theta_1}}} S(\mathcal{W}_{p_1}, X^\theta) = \sum_{z_1 \le p \le z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1)$$

kommt, denn $1 - \theta_1 > \theta_1$. Also ist $\sum_{z_1 \le p < z_2} S(\mathcal{W}_p, z_1) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ und analog dazu erhalten wir $\sum_{z_3 < p \le z_4} S(\mathcal{W}_p, z_1) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$, indem wir ein passendes logarithmisches Polytop $\mathcal{R}$ konstruieren.

Dies in (1.1.15) eingesetzt liefert

$$(1.1.16) \quad S(\mathcal{W}, z_4) = \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{\substack{z_3 < p \le z_4 \\ z_1 \le q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

V. In den folgenden Kapiteln schätzen wir die erste Summe $\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ ab. Wir finden

$$(1.1.17) \qquad \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_1 \le pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_2 \le pq < z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_3 \le pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$$
$$+ \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_5 \le pq < z_6}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_6 \le pq}} S(\mathcal{W}_{pq}, q),$$

wobei nach Proposition 13.2 bzw. 13.3 die Summen $\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_2 \le pq < z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ und $\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_5 \le pq < z_6}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ jeweils die Größenordnung $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ besitzen, welches wir beispielhaft für die erste Summe zeigen.

Nach der Bemerkung am Ende von Kap.II auf S.296 ist

$$\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_2 \le pq < z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1 \le q \le p \le z_2 \\ z_2 \le pq \le z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) - \sum_{\substack{z_1 \le q \le p \le z_2 \\ q = p \\ z_2 \le pq \le z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q),$$

weil $p \neq z_2$, $pq \neq z_3$ für $p, q \ge z_1$ gilt und $q < (\frac{X}{p})^{1/2}$ ohnehin für $pq \le z_3$, $q \le z_2$ erfüllt ist ($\Rightarrow q^2 p \le z_3 \cdot z_2 < X$). Zur Abschätzung von $\sum_{\substack{z_1 \le q \le p \le z_2 \\ z_2 \le pq \le z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ setzen wir $k := 2$ sowie

$$\mathcal{R} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \le v_1 \le v_2 \le \theta_1\} \subseteq [\eta, 1]^2,$$

wobei $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 gewählt wird, d.h. $\eta < \theta$ für hinreichend große $X$ gilt und wir leicht anhand der Definition in Kap. 6 sehen, dass $\mathcal{R}$ ein logarithmisches Polytop ist. Aus Proposition 13.2 mit $T = \{1, 2\}$ folgt daher

$$o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ X^{\theta_1} \le p_1 p_2 \le X^{\theta_2} \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \frac{\log p_2}{\log X}) \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1 p_2}, p_1) = \sum_{\substack{X^{\theta} \le p_1 \le p_2 \le X^{\theta_1} \\ X^{\theta_1} \le p_1 p_2 \le X^{\theta_2}}} S(\mathcal{W}_{p_1 p_2}, p_1) = \sum_{\substack{z_1 \le q \le p \le z_2 \\ z_2 \le pq \le z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$$

Zur Abschätzung von $\sum_{\substack{z_1 \le q \le p \le z_2 \\ q = p \\ z_2 \le pq \le z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ wählen wir wieder $k := 2$ und $\eta = \eta(X)$ gemäß Bemerkung 1 sowie

$$\mathcal{R} := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \le v_1 \le v_2 \le \theta_1\} \cap \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid -v_1 \le -v_2\}$$
$$= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \le v_1 \le v_2 \le \theta_1,\ v_1 = v_2\} \subseteq [\eta, 1]^2,$$

wobei $\mathcal{R}$ auch hier ein logarithmisches Polytop ist. Nach Proposition 13.2 mit $T = \{1, 2\}$ gilt

$$o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = \sum_{\substack{p_1,p_2 \\ X^{\theta_1} \le p_1p_2 \le X^{\theta_2} \\ (\frac{\log p_1}{\log X}, \frac{\log p_2}{\log X}) \in \mathcal{R}}} S(\mathcal{W}_{p_1p_2}, p_1) = \sum_{\substack{X^{\theta} \le p_1 \le p_2 \le X^{\theta_1} \\ p_1 = p_2 \\ X^{\theta_1} \le p_1p_2 \le X^{\theta_2}}} S(\mathcal{W}_{p_1p_2}, p_1) = \sum_{\substack{z_1 \le q \le p \le z_2 \\ q = p \\ z_2 \le pq \le z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q).5$$

Dies liefert $\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_2 \le pq < z_3}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ und analog dazu kommt $\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_5 \le pq < z_6}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$, indem wir Proposition 13.3 verwenden und die passenden logarithmischen Polytope $\mathcal{R}$ definieren. Folglich gilt nach (1.1.17) analog zu [1, S.39 (oben)]

$$(1.1.18) \quad \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_6 \le pq}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_3 \le pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_1 \le pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Aus der Bemerkung am Ende von Kap.II folgt $q \ne z_1$ und $pq \ne z_6$ für $p, q \ge z_1$, sodass wir nach *HS3 Theorem 1.1* sowie den Bemerkungen darunter auf

$$(1.1.19) \quad \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_6 \le pq}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_6 < pq}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) \ge -(1 + o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \iint_{\substack{\theta < v < u < \theta_1 \\ 1 - \theta_1 < u + v \\ 2v + u < 1}} \omega(\frac{1 - u - v}{v}) \frac{dudv}{uv^2} := -(1 + o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot I_1$$

schließen, wobei $I_1$ gerade das Integral in [1, S.39 (13.3)] ist.

VI. Die Summe $\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_3 \le pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ in (1.1.18) müssen wir nun anders als in [1, S.39] behandeln, denn hier kommt erstmals $z_7$ ins Spiel. Verwenden wir wieder die Bemerkung am Ende von

Kap.II, d.h. speziell $q \neq z_1$, $pq \neq z_3$ und $q^2p \neq z_6$, so gilt

$$(1.1.20) \qquad \sum_{\substack{z_1 \leq q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_3 \leq pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ q^2 p < z_6 \\ z_3 < pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q).$$

Nun zur Abschätzung von $\sum\limits_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$. Wir finden

$$\sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5 \\ q^3 p \geq X}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) + \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5 \\ q^3 p < X}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) := \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

und aus *HS3 Theorem 1.1* sowie den Bemerkungen darunter kommt

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5 \\ q^3 p \geq X}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) &\geq -(1 + o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \iint\limits_{\substack{\theta < v < u < \theta_1 \\ \theta_2 < u + v < 1 - \theta_2 \\ 1 - \theta_1 < 2v + u < 1 \\ 3v + u \geq 1}} \omega\Big(\frac{1 - u - v}{v}\Big) \frac{dudv}{uv^2} \\ &= -(1 + o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \iint\limits_{\substack{\theta < v < u < \theta_1 \\ \theta_2 < u + v < 1 - \theta_2 \\ 1 - \theta_1 < 2v + u < 1 \\ 3v + u \geq 1}} \frac{1}{uv \cdot (1 - u - v)}\, dudv, \end{aligned}$$

denn die Integrationsbedingungen $0 < \theta < v < u$, $2v + u < 1$ und $3v + u \geq 1$ implizieren $\frac{1-u-v}{v} \in [1, 2]$, also $\omega(\frac{1-u-v}{v}) = \frac{v}{1-u-v}$ gemäß der Definition der Buchstab-Funktion in *HS1*. Nach $(*)$ gilt

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5 \\ q < (\frac{X}{pq})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5 \\ q < (\frac{X}{pq})^{1/2}}} [S(\mathcal{W}_{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2}) + \sum_{q \leq r < (\frac{X}{pq})^{1/2}} S(\mathcal{W}_{pqr}, r)] =$$

$$\sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5 \\ q^3 p < X}} S(\mathcal{W}_{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2}) + \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5 \\ q \leq r < (\frac{X}{pq})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pqr}, r) := \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4,$$

wobei aus *HS4 Theorem 1.1* und der Bemerkung darunter

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{\substack{z_1 < q < p < z_2 \\ z_6 < q^2 p < X \\ z_3 < pq < z_5 \\ q^3 p < X}} S(\mathcal{W}_{pq}, (\frac{X}{pq})^{1/2}) \geq -(1 + o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \iint\limits_{\substack{\theta < v < u < \theta_1 \\ \theta_2 < v + u < 1 - \theta_2 \\ 1 - \theta_1 < 2v + u < 1 \\ 3v + u < 1}} \frac{1}{uv \cdot (1 - u - v)}\, dudv$$

folgt. Zusammenfassend gilt daher

$$\sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ z_6<q^2p<X\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 \geq \sum\nolimits_4$$

$$-(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot[\iint\limits_{\substack{\theta<v<u<\theta_1\\ \theta_2<u+v<1-\theta_2\\ 1-\theta_1<2v+u<1\\ 3v+u\geq 1}} \frac{1}{uv(1-u-v)}\,dudv + \iint\limits_{\substack{\theta<v<u<\theta_1\\ \theta_2<v+u<1-\theta_2\\ 1-\theta_1<2v+u<1\\ 3v+u<1}} \frac{1}{uv(1-u-v)}\,dudv] =$$

$$-(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot\iint\limits_{\substack{\theta<v<u<\theta_1\\ \theta_2<u+v<1-\theta_2\\ 1-\theta_1<2v+u<1}} \frac{1}{uv(1-u-v)}\,dudv + \sum\nolimits_4 :=$$

$$-(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I_2 + \sum\nolimits_4,$$

wobei wir auf die Definition von I2Integrals und PrimeMultInt in [19, S.5, S.2-3] verweisen. Letzteres berechnet nämlich gemäß [19, S.2-3] ein Integral mit Integranden der Form $\frac{1}{ab(1-a-b)}$. Es verbleibt die Abschätzung von $\sum_4$ nach unten. Dazu finden wir

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ z_6<q^2p<X\\ z_3<pq<z_5\\ q\leq r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ z_2\leq qr\leq z_3}} S(\mathcal{W}_{pqr},r) + \sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ z_6<q^2p<X\\ z_3<pq<z_5\\ q\leq r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ qr<z_2}} S(\mathcal{W}_{pqr},r) + \sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ z_6<q^2p<X\\ z_3<pq<z_5\\ q\leq r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ z_3<qr}} S(\mathcal{W}_{pqr},r)$$

$$=: o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) + \sum\nolimits_5 + \sum\nolimits_6,$$

denn nach der Bemerkung am Ende von Kap. II gilt $\sum\limits_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ z_6<q^2p<X\\ z_3<pq<z_5\\ q\leq r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ z_2\leq qr\leq z_3}} S(\mathcal{W}_{pqr},r) = \sum\limits_{\substack{z_1\leq q<p\leq z_2\\ z_6\leq q^2p\leq X\\ z_3\leq pq\leq z_5\\ q\leq r\leq(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ z_2\leq qr\leq z_3}} S(\mathcal{W}_{pqr},r)$ und letzteres ist ähnlich zur Herleitung von $\sum\limits_{\substack{z_1\leq q<p<z_2\\ q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_2\leq pq<z_3}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ in Kap.V ein $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$.

Dabei verwenden wir Proposition 13.2 und sehen, dass wir darin eine Summation über beliebige Primzahlen $p_1,...,p_k$ und nicht wie in [1, S.37] nur über kanonisch geordnete Primzahlen $p_1\leq ...\leq p_k$ benötigen, denn $r$ muss hier nicht notwendigerweise $r\leq q\leq p$ erfüllen bzw. die kleinste Primzahl unter $r,q,p$ sein. Da über $q\leq r$, $q<p$ summiert wird, ist dies nämlich $q$. Ferner liefert *HS3 Theorem 1.1* und die Bemerkungen darunter die Abschätzungen

$$\sum\nolimits_5 = \sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ z_6<q^2p<X\\ z_3<pq<z_5\\ q\le r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ qr<z_2}} S(\mathcal{W}_{pqr}, r) \geq -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot \iiint\limits_{\substack{\theta<v<u<\theta_1\\ \theta_2<u+v<1-\theta_2\\ 1-\theta_1<2v+u<1\\ v\le t,\, 2t+v+u<1\\ v+t<\theta_1}} \omega(\frac{1-u-v-t}{t})\,\frac{dudvdt}{uvt^2}$$

$$=: -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I_3$$

sowie

$$\sum\nolimits_6 = \sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ z_6<q^2p<X\\ z_3<pq<z_5\\ q\le r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ z_3<qr}} S(\mathcal{W}_{pqr}, r) \geq -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot \iiint\limits_{\substack{\theta<v<u<\theta_1\\ \theta_2<u+v<1-\theta_2\\ 1-\theta_1<2v+u<1\\ v\le t,\, 2t+v+u<1\\ v+t>\theta_2}} \omega(\frac{1-u-v-t}{t})\,\frac{dudvdt}{uvt^2}$$

$$=: -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I_4,$$

wobei wir die Definitionen von I3Integrals, I4Integrals und Alt3MultInt in [19, S.5, S.2] beachten. Insgesamt erhalten wir

$$(1.1.21)\qquad \sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ z_6<q^2p<X\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) \geq -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot[I_2+I_3+I_4] + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

$$= -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot[I_2+I_3+I_4],$$

indem wir den Summanden $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ mit dem Faktor $1+o(1)$ verrechnen, denn $I_2+I_3+I_4>0$ ist eine von $X$ unabhängige Konstante, weil alle Integrationsgrenzen von $X$ unabhängig sind.

Folgend schätzen wir $\sum\limits_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$, also die erste Summe der rechten Seite von (1.1.20), nach unten ab. Siehe dazu auch [1, S.39] ab „When $q^2p<z_7$...” und beachte $z_7=z_6$.

Die gleiche Idee wie in Kap.III auf S.300 mit $\sum\limits_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ anstatt $\sum\limits_{z_1\le p<z_2} S(\mathcal{W}_p, p)$ ergibt

$$\sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},\, \min\{q, (\frac{X}{pq})^{1/2}\}) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Die Summe $\sum\limits_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},\min\{q,(\frac{X}{pq})^{1/2}\})$ behandeln wir wie die Summe $\sum\limits_{z_1\le p<z_2} S(\mathcal{W}_p,\min\{p,(\frac{X}{p})^{1/2}\})$ am Anfang von Kap.IV, woraus

$$\sum_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},\ \min\{q,(\frac{X}{pq})^{1/2}\}) = -\sum_{\substack{z_1\le r<q<p<z_2\\ r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pqr},r) + \sum_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},z_1)$$

ähnlich zu S.301 ab „Insgesamt kommt..." folgt. Daher gilt

$$\sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = \sum_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},z_1) - \sum_{\substack{z_1\le r<q<p<z_2\\ r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pqr},r) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

und dies entspricht im Wesentlichen der zweiten Zeile in [1, S.40]. Ferner ist

$$\sum_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},z_1) = \sum_{\substack{z_1\le q\le p\le z_2\\ q^2p\le z_6\\ z_3\le pq\le z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},z_1) - \sum_{\substack{z_1\le q\le p\le z_2,\ q=p\\ q^2p\le z_6\\ z_3\le pq\le z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},z_1) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

denn die beiden letzten Summen können mithilfe Proposition 13.1 als $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ abgeschätzt werden. Dies geschieht ähnlich zur Herleitung von $\sum\limits_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_2\le pq<z_3}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ in Kap.V.

Damit haben wir

$$\sum_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = -\sum_{\substack{z_1\le r<q<p<z_2\\ r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pqr},r) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) \tag{1.1.22}$$

gezeigt. Ersetzen wir in der obigen Argumentation ab „Die gleiche Idee wie in Kap.III..." einfach $\sum\limits_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq},q)$ durch $\sum\limits_{\substack{z_1\le r<q<p<z_2\\ r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pqr},r)$, so kommt auf gleichem Wege

$$\sum_{\substack{z_1\le r<q<p<z_2\\ r<(\frac{X}{pq})^{1/2}\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pqr},r) = -\sum_{\substack{z_1\le s<r<q<p<z_2\\ r<(\frac{X}{pq})^{1/2},\ s<(\frac{X}{pqr})^{1/2}\\ q^2p<z_6\\ z_3\le pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pqrs},s) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}). \tag{1.1.23}$$

Auf eine detailliertere Herleitung von (1.1.22) und (1.1.23) wird verzichtet, da die grundlegenden Methoden dazu bereits in den vorigen Kapitel vorgeführt wurden. Fassen wir (1.1.22) und (1.1.23) zusammen, so gilt entsprechend der vierten Zeile in [1, S.40]

$$\sum_{\substack{z_1<q<p<z_2 \\ q^2p<z_6 \\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1<s<r<q<p<z_2 \\ q^2p<z_6 \\ z_3<pq<z_5 \\ r^2pq,\, s^2pqr<X}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}), \tag{1.1.24}$$

indem wir wieder die Bemerkung am Ende von Kap.II, d.h. speziell $s \neq z_1$ und $pq \neq z_3$ nutzen. Setze $\sum^* := \sum_{\substack{z_1<s<r<q<p<z_2 \\ q^2p<z_6 \\ z_3<pq<z_5 \\ r^2pq,\, s^2pqr<X}}$. Nach Proposition 13.2 und 13.3 gilt beispielsweise

$$\sum^*_{rs\in[X^{\theta_1},X^{\theta_2}]} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}), \quad \sum^*_{pqr\in[X^{\theta_1},X^{\theta_2}]} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$
$$\sum^*_{qr\in[X^{1-\theta_2},X^{1-\theta_1}]} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) \quad \text{oder} \quad \sum^*_{qrs\in[X^{1-\theta_2},X^{1-\theta_1}]} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

sodass wir insbesondere

$$\sum_{\substack{z_1<s<r<q<p<z_2 \\ q^2p<z_6 \\ z_3<pq<z_5 \\ r^2pq,\, s^2pqr<X}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) = \sum^* S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) = \sum_{\substack{z_1<s<r<q<p<z_2 \\ q^2p<z_6 \\ z_3<pq<z_5 \\ r^2pq,\, s^2pqr<X \\ sr,sq,sp,rq,rp,qp \notin [X^{\theta_1},X^{\theta_2}]}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

erhalten, indem wir entsprechende Teilsummen der Größe $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ abspalten. Setzen wir dies in (1.1.24) ein und beachten *HS3 Theorem 1.1* sowie die Bemerkungen darunter, so kommt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{z_1<q<p<z_2 \\ q^2p<z_6 \\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) &= \sum_{\substack{z_1<s<r<q<p<z_2 \\ q^2p<z_6 \\ z_3<pq<z_5 \\ r^2pq,\, s^2pqr<X \\ sr,sq,sp,rq,rp,qp \notin [X^{\theta_1},\, X^{\theta_2}]}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) \geq \\ &-(1+o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot \iiiint\limits_{(u,v,w,t)\in\mathcal{R}_1} \omega(\frac{1-u-v-w-t}{t}) \frac{dudvdwdt}{uvwt^2} =: \\ &-(1+o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot I_5, \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

indem wir den Summanden $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ mit dem Faktor $1 + o(1)$ verrechnen, denn $I_5 > 0$ ist unabhängig von $X$ sowie

$$\mathcal{R}_1 = \{(u,v,w,t) \mid \theta < t < w < v < u < \theta_1,\ \theta_2 < u+v < 1-\theta_2,\ 2v+u < 1-\theta_1,$$
$$u+v+w+2t < 1,\ u+v+2w < 1,$$
$$\{u+v, u+w, u+t, v+w, v+t, w+t\} \cap [\theta_1, \theta_2] = \emptyset\}$$

definieren. Dies entspricht (13.5) in [1, S.40] (beachte: $\theta_3 = 1 - \theta_1$), wobei es sich dort beim Nenner $w$ im Argument der Buchstab-Funktion um einen typografischen Fehler handelt.

Setzen wir (1.1.25) und (1.1.21) in (1.1.20) ein, so gilt

$$\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_3 \le pq < z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) \ge -(1+o(1)) \cdot \kappa_2 \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \cdot [I_2 + I_3 + I_4 + I_5]. \tag{1.1.26}$$

VII. Nun leiten wir uns noch eine untere Schranke für die Summe $\sum\limits_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_1 \le pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ in (1.1.18) her. Für $pq < z_2$, $z_1 \le q < p$ ist $q^2 p < (qp)^{3/2} < z_2^{3/2} < z_6 = z_7 < X$ sowie $z_1 \le pq$, was nach $(*)$ die Gültigkeit von

$$\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ q < (\frac{X}{p})^{1/2} \\ z_1 \le pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) =$$
$$\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pq}, z_1) - \sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ pq < z_2}} [S(\mathcal{W}_{pq}, z_1) - S(\mathcal{W}_{pq}, q)] =$$
$$\sum_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pq}, z_1) - \sum_{\substack{z_1 \le r < q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pqr}, r) =$$
$$o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) - \sum_{\substack{z_1 \le r < q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pqr}, z_1) + \sum_{\substack{z_1 \le r < q < p < z_2 \\ pq < z_2}} [S(\mathcal{W}_{pqr}, z_1) - S(\mathcal{W}_{pqr}, r)] =$$
$$o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) + \sum_{\substack{z_1 \le s < r < q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) + \sum_{\substack{z_1 < s < r < q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s),$$

liefert, denn die Summen $\sum\limits_{\substack{z_1 \le q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pq}, z_1)$ und $\sum\limits_{\substack{z_1 \le r < q < p < z_2 \\ pq < z_2}} S(\mathcal{W}_{pqr}, z_1)$ haben nach Proposition 13.1 die Größenordnung $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ und den Fall $s = z_1$ können wir wieder ausschließen.

Ähnlich wie in Kapitel VI erhalten wir

$$\sum_{\substack{z_1<s<r<q<p<z_2\\ pq<z_2}} S(\mathcal{W}_{pqrs},s) = \sum_{\substack{z_1<s<r<q<p<z_2\\ pq<z_2\\ srq,srp,rpq,spq\notin[X^{\theta_1},X^{\theta_2}]\\ pqrs\notin[X^{\theta_1},X^{\theta_2}]\cup[X^{1-\theta_2},X^{1-\theta_1}]}} S(\mathcal{W}_{pqrs},s)+o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

weil die übrigen Teilsummen nach Proposition 13.2 und 13.3 jeweils einen Beitrag der Größe $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ zur linken Summe liefern. Nutzen wir nun wieder *HS3 Theorem 1.1* sowie die Bemerkungen darunter, so gilt insgesamt

$$(1.1.27)\quad \sum_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_1\le pq<z_2}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = \sum_{\substack{z_1<s<r<q<p<z_2\\ pq<z_2\\ srq,srp,rpq,spq\notin[X^{\theta_1},X^{\theta_2}]\\ pqrs\notin[X^{\theta_1},X^{\theta_2}]\cup[X^{1-\theta_2},X^{1-\theta_1}]}} S(\mathcal{W}_{pqrs},s)+o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) \ge$$
$$-(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot \iiiint_{(u,v,w,t)\in\mathcal{R}_2} \omega(\frac{1-u-v-w-t}{t})\,\frac{dudvdwdt}{uvwt^2} =:$$
$$-(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I_6,$$

indem wir den Summanden $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ mit dem Faktor $1+o(1)$ verrechnen, denn $I_6>0$ ist unabhängig von $X$ sowie

$$\mathcal{R}_2 = \{(u,v,w,t)\mid \theta<t<w<v<u<\theta_1,\ u+v<\theta_1,$$
$$u+v+w+t\notin[\theta_1,\theta_2]\cup[1-\theta_2,1-\theta_1],$$
$$\{u+v+w,u+v+t,u+w+t,v+w+t\}\cap[\theta_1,\theta_2]=\emptyset\}$$

definieren. Dies entspricht (13.6) in [1, S.40]. Einsetzen von (1.1.19), (1.1.26) und (1.1.27) in (1.1.18) liefert

$$(1.1.28)\quad \sum_{\substack{z_1\le q<p<z_2\\ q<(\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq},q) \ge -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot\sum_{j=1}^{6} I_j.$$

VIII. Damit können wir die erste Summe in (1.1.16) nach unten kontrollieren. Es verbleibt die Abschätzung der zweiten Summe $\sum_{\substack{z_3<p\le z_4\\ z_1\le q<(\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq},q)$ in (1.1.16). Wir finden

$$\sum_{\substack{z_3<p\le z_4\\ z_1\le q<(\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = \sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_6<pq}} S(\mathcal{W}_{pq},q) + \sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_3<pq<z_5\\ z_7<q^2p<X}} S(\mathcal{W}_{pq},q)$$

$$+ \sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_3<pq<z_5\\ q^2p<z_7}} S(\mathcal{W}_{pq},q) + \sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_5\le pq\le z_6}} S(\mathcal{W}_{pq},q),$$

indem wir die Bemerkung am Ende von Kap.II mit $p \neq z_4,\ q \neq z_1,\ pq \neq z_3,\ q^2p \neq z_7$ nutzen. Diese und Proposition 13.3 liefern auch $\sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_5\le pq\le z_6}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = \sum_{\substack{z_3\le p\le z_4\\ z_1\le q\le(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_5\le pq\le z_6}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$, woraus

$$\sum_{\substack{z_3<p\le z_4\\ z_1\le q<(\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = \tag{1.1.29}$$

$$\sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_6<pq}} S(\mathcal{W}_{pq},q) + \sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_3<pq<z_5\\ z_7<q^2p<X}} S(\mathcal{W}_{pq},q) + \sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_3<pq<z_5\\ q^2p<z_7}} S(\mathcal{W}_{pq},q) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

folgt. Die ersten beiden Summen können wir analog zu (13.7) sowie (13.8) in [1, S.41] mithilfe *HS3 Theorem 1.1* und den Bemerkungen darunter abschätzen. Es gilt also

$$\sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_6<pq}} S(\mathcal{W}_{pq},q) \ge -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot \iint\limits_{\substack{\theta_2<u<1/2\\ \theta<v<(1-u)/2\\ 1-\theta_1<u+v}} \omega(\frac{1-u-v}{v})\,\frac{dudv}{uv^2} \tag{1.1.30}$$

$$:= -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I_7$$

sowie mit $\theta_3 = 1-\theta_1$ insbesondere auch

$$\sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_3<pq<z_5\\ z_7<q^2p<X}} S(\mathcal{W}_{pq},q) \ge -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot \iint\limits_{\substack{\theta_2<u<1/2\\ \theta<v<(1-u)/2\\ \theta_2<u+v<1-\theta_2\\ \theta_3<2v+u<1}} \omega(\frac{1-u-v}{v})\,\frac{dudv}{uv^2} \tag{1.1.31}$$

$$:= -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I_8.$$

Für die dritte Summe in (1.1.29) ist $\sum\limits_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_3<pq<z_5\\ q^2p<z_7}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum\limits_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q\\ z_3<pq<z_5\\ q^2p<z_7}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum\limits_{\substack{z_1<q<p\\ z_3<p<z_4\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$,

denn wegen $z_7 = z_6 < X$ gilt ohnehin $q < (\frac{X}{p})^{1/2}$ für $q^2p < z_7$ und aus $z_3 < p,\ q^2p < z_7 = z_6 < X$ folgt $q < (\frac{X}{p})^{1/2} < (\frac{X}{X^{\theta_2}})^{1/2} < X^{0.3} < z_3 < p$.

Die Summe $\sum\limits_{\substack{z_1<q<p\\ z_3<p<z_4\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ behandeln wir wie $\sum\limits_{\substack{z_1<q<p<z_2\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q)$ in Kap. VI bei der Herleitung von (1.1.24) (vgl. S.307 ab „Folgend schätzen wir...") und beachten, dass wir dabei die Bedingung $p < z_2$ nicht benötigen und überall die zusätzliche Summationsbedingung $z_3 < p < z_4$ problemlos einfügen können. Dies ergibt die zu (1.1.24) analoge Aussage

$$\text{(1.1.32)} \qquad \sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_3<pq<z_5\\ q^2p<z_7}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1<q<p\\ z_3<p<z_4\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5}} S(\mathcal{W}_{pq}, q) = \sum_{\substack{z_1<s<r<q<p\\ z_3<p<z_4\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5\\ r^2pq,\ s^2pqr<X}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

$$= \sum_{\substack{z_1<s<r<q\\ z_3<p<z_4\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5\\ r^2pq,\ s^2pqr<X}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

welches auch der Zeile über (13.9) in [1, S.41] entspricht, denn $q < p$ und $q < (\frac{X}{p})^{1/2}$ erhalten wir aus $q^2p < z_7 = z_6 < X$ sowie $z_3 < p$ (s.o.). Ähnlich wie in Kapitel VI kommt

$$\sum_{\substack{z_1<s<r<q\\ z_3<p<z_4\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5\\ r^2pq,\ s^2pqr<X}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) = \sum_{\substack{z_1<s<r<q\\ z_3<p<z_4\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5\\ r^2pq,\ s^2pqr<X\\ sr,sp,sq,rq,rp,pq \notin [X^{\theta_1},X^{\theta_2}]}} S(\mathcal{W}_{pqrs}, s) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}),$$

weil die übrigen Teilsummen nach Proposition 13.2 jeweils einen Beitrag der Größe $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ zur linken Summe liefern. Nutzen wir nun wieder *HS3 Theorem 1.1* sowie die Bemerkungen darunter, so gilt nach (1.1.32) insgesamt

$$(1.1.33) \quad \sum_{\substack{z_3<p<z_4\\ z_1<q<(\frac{X}{p})^{1/2}\\ z_3<pq<z_5\\ q^2p<z_7}} S(\mathcal{W}_{pq},q) = \sum_{\substack{z_1<s<r<q\\ z_3<p<z_4\\ q^2p<z_6\\ z_3<pq<z_5\\ r^2pq,\, s^2pqr<X\\ sr,sp,sq,rq,rp,pq\notin[X^{\theta_1},X^{\theta_2}]}} S(\mathcal{W}_{pqrs},s) + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) \geq$$

$$-(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot \iiiint_{(u,v,w,t)\in\mathcal{R}_3} \omega(\frac{1-u-v-w-t}{t})\frac{dudvdwdt}{uvwt^2} =:$$

$$-(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot I_9,$$

indem wir den Summanden $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ mit dem Faktor $1+o(1)$ verrechnen, denn $I_9>0$ ist unabhängig von $X$ sowie

$$\mathcal{R}_3 = \{(u,v,w,t)\mid \theta<t<w<v,\ \theta_2<u<\frac{1}{2},\ u+2v<\theta_3,\ u+v+2w<1,$$
$$u+v+w+2t<1,\ \theta_2<u+v<1-\theta_2,$$
$$\{u+v,u+w,u+t,v+w,v+t,w+t\}\notin[\theta_1,\theta_2]\}$$

definieren. Dabei erinnern wir uns an $\theta_3=1-\theta_1$ und sehen, dass $I_9$ gerade dem Integral aus (13.9) in [1, S.41] entspricht. Einsetzen von (1.1.30), (1.1.31) und (1.1.33) in (1.1.29) liefert

$$(1.1.34) \quad \sum_{\substack{z_3<p\leq z_4\\ z_1\leq q<(\frac{X}{p})^{1/2}}} S(\mathcal{W}_{pq},q) \geq -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot[I_7+I_8+I_9] + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$$

$$= -(1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot[I_7+I_8+I_9],$$

indem wir den Summanden $o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X})$ mit dem Faktor $1+o(1)$ verrechnen, denn $I_7+I_8+I_9>0$ ist eine von $X$ unabhängige Konstante. Fassen wir (1.1.34), (1.1.28), (1.1.16) und (1.1.4) zusammen, so kommt

$$\#\{p\in\mathbb{P}\mid p\in\mathcal{A}\} \geq S(\mathcal{W},z_4) + \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X} + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) \geq$$

$$\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X} - (1+o(1))\cdot\kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot\sum_{j=1}^{9} I_j + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}) = \kappa_2\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}\cdot[1-\sum_{j=1}^{9} I_j] + o(\frac{\#\mathcal{A}}{\log X}).$$

Numerische Integration der Integrale $I_1,...,I_9$ in [19] liefert im Fall $\theta_1=\frac{9}{25}$ und $\theta_2=\frac{17}{40}$ die Abschätzungen

$$I_1 \leq 0.02895, \quad I_2 \leq 0.35718, \quad I_3 \leq 0.01402,$$
$$I_4 \leq 0.04238, \quad I_5 \leq 0.05547, \quad I_6 \leq 0.06622,$$
$$I_7 \leq 0.21879, \quad I_8 \leq 0.20339, \quad I_9 \leq 0.00924$$

und damit $\sum_{j=1}^{9} I_j \leq 0.99564$. Definieren wir nun $\theta_1 := \frac{9}{25} + 2\epsilon$ und $\theta_2 := \frac{17}{40} - 2\epsilon$ wie in Kap. 12, so liefert in diesem Fall die stetige Abhängigkeit der Integralwerte von $\epsilon$ insbesondere $\sum_{j=1}^{9} I_j \leq 0.99564 + O(\epsilon)$, also $\sum_{j=1}^{9} I_j < 0.999$ für hinreichend kleines $\epsilon$. So wird die Wahl von $\epsilon = 10^{-1000} \in \mathbb{Q}^+$ genügen. Damit haben wir $\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \gg \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$ für hinreichend große $X$ gezeigt. Wegen (1.1.3) ist der Beweis abgeschlossen.

□

Nach Theorem 1.1 gibt es Konstanten $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$c_1 \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X} \leq \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\} \leq c_2 \cdot \frac{\#\mathcal{A}}{\log X}$$

für alle $X = b^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ gilt, die größer als eine Schranke $S \in \mathbb{R}^+$ sind. Dabei sind $c_1, c_2$ sowie $S$ von dem gegebenen ausgezeichneten Paar $(b, a_0)$ abhängig (vgl. Def. 4.1). Wir haben somit eine zum Satz von Tschebyscheff ähnliche Aussage bewiesen, denn dieser Satz ist gerade die obige Aussage mit $\mathcal{A} = \mathbb{N}_0 \cap [0, X[$ und allgemeinem $X \in \mathbb{R}^+$. Nun ist Tschebyscheff's Satz ein Vorläufer des Primzahlsatzes, sodass unser Analogiedenken direkt die Frage aufwirft, ob nicht sogar strenger als Theorem 1.1 die bisher noch nicht bewiesene oder widerlegte Aussage

$$\lim_{X \longrightarrow \infty} \frac{\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\}}{\#\mathcal{A}/\log X} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{\#\{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}(b^k)\}}{\#\mathcal{A}/(k \cdot \log b)} = 1$$

für ein gegebenes Paar $(b, a_0)$ gilt. Für alle $X = b^k$ finden wir die Inklusion

$$\{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ hat in } b\text{-adischer Darstellung nur Ziffern } \neq a_0\} \supseteq \{p \in \mathbb{P} \mid p \in \mathcal{A}\},$$

wobei die rechte Teilmenge nach Theorem 1.1 und $\#\mathcal{A} = X^c$ mit $c = \frac{\log(b-1)}{\log b} > 0$ für $X \longrightarrow \infty$ $(k \longrightarrow \infty)$ auch unendlich viele Elemente hat. Folglich gibt es insbesondere unendlich viele Primzahlen, die in ihrer $b$-adischen Darstellung die Ziffer $a_0$ nicht besitzen.
Im letzten Kapitel gehen wir der Frage nach, welche Paare $(b, a_0)$ ausgezeichnet sind und damit Theorem 1.1 genügen.

# 14. Bestimmung ausgezeichneter Paare

In diesem Kapitel wollen wir möglichst viele bzw. alle ausgezeichneten Paare $(b, a_0)$ ermitteln. Dazu erinnern wir uns zunächst an die Definition 4.1 eines ausgezeichneten Paares aus Kap. 4.

**Definition 4.1**:
Sei $b \in \mathbb{N},\ b \geq 10$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$.
Für $J \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}^+$ sei die $b^J \times b^J$ Matrix $M_t$ definiert durch

$$(M_t)_{i,j} = \begin{cases} G(t_1, t_2, ..., t_{J+1})^t & \text{, falls } i-1 = (t_{J+1}...t_2)_b \text{ und } j-1 = (t_J...t_1)_b \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases},$$

wobei $G(t_1, t_2, ..., t_{J+1}) = \sup\limits_{0 \leq \gamma < b^{-J-1}} \frac{1}{b-1} \cdot |\sum\limits_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot ((0, t_1 t_2 ... t_{J+1})_b + \gamma)|$ für $t_1, t_2, ..., t_{J+1} \in \{0, ..., b-1\}$ erklärt ist.
Ferner sei $\lambda(t, J) = \lambda_{b,a_0}(t, J) \in \mathbb{R}_0^+$ ihr betragsmäßig größter Eigenwert.
Gibt es ein nur von $(b, a_0)$ abhängiges $J = J(b, a_0) \in \mathbb{N}$, sodass sowohl $\lambda_{b,a_0}(1, J) \leq b^{27/77}$ als auch $\lambda_{b,a_0}(\frac{235}{154}, J) \leq b^{59/433}$ gilt, so nennen wir das Paar $(b, a_0)$ ausgezeichnet.

Wann immer wir folgend $b$ oder $a_0$ oder $(b, a_0)$ schreiben, gilt stets $b \in \mathbb{N},\ b \geq 10$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$. Weiter heißt von nun an eine Konstante absolut, wenn sie von keinem Parameter oder einer Größe in der entsprechenden Aussage abhängt, also insbesondere nicht von $b$ oder $a_0$. Sollte eine Abhängigkeit vorhanden sein, wird diese explizit erwähnt und indiziert. Wir definieren die stetige Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch

$$F(s) := \frac{1}{b-1} \cdot |\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(ns)| \quad \forall\ s \in \mathbb{R},$$

wobei $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{R},\ F(s) \neq 0$ stetig differenzierbar ist. Dies liegt vor allem daran, dass

$$s \longmapsto (\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} \cos(2\pi ns))^2 \quad \text{und} \quad s \longmapsto (\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} \sin(2\pi ns))^2$$

auf $\mathbb{R}$ sowie $x \longmapsto \sqrt{x}$ auf $\mathbb{R}^+$ stetig differenzierbare Funktionen sind. Dabei haben wir bereits stillschweigend $e(\alpha) = \cos(2\pi\alpha) + i \cdot \sin(2\pi\alpha)$ verwendet, was zusammen mit den Additionstheoremen die in [27] dargestellte Form $F[t]$ für die Funktion $F$ ergibt. Formal setzen wir

$F^{'}(s) := 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $F(s) = 0$ sowie $\frac{1}{0} := +\infty$. Das folgende wichtige Lemma gibt uns das entscheidende Werkzeug zur Bestimmung der ausgezeichneten Paare.

**Lemma 14.1**:

Sei $(b, a_0)$ gegeben. Dann ist dieses Paar ausgezeichnet, wenn

$$\sup_{0\le r<\frac{1}{b}} \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) < b^{27/77} \quad \wedge \quad \sup_{0\le r<\frac{1}{b}} \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^{235/154} < b^{59/433}$$

gilt.

**Beweis**:

I. Für $J \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_{J+1} \in \{0, ..., b-1\}$ definieren wir

$$F^*(t_1, ..., t_{J+1}) := \frac{1}{b-1} \cdot | \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot (0, t_1...t_{J+1})_b)|$$

und zeigen zunächst, dass

$$(14.1.1) \quad G(t_1, ..., t_{J+1}) \le F^*(t_1, ..., t_{J+1}) + k \cdot \frac{1}{b^J} \quad \forall\ J \in \mathbb{N}, \forall\ t_1, ..., t_{J+1} \in \{0, ..., b-1\}$$

mit einer absoluten Konstanten $k \in \mathbb{R}^+$ gilt.

Dazu seien $J \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [0, b^{-J-1}[$ und $t_1, ..., t_{J+1} \in \{0, ..., b-1\}$ fixiert. Wir finden

$$\frac{1}{b-1} \cdot | \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot ((0, t_1...t_{J+1})_b + \gamma))| =$$
$$\frac{1}{b-1} \cdot | \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot (0, t_1...t_{J+1})_b) + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot (0, t_1...t_{J+1})_b) \cdot (e(n\gamma) - 1)| \le$$
$$\frac{1}{b-1} \cdot | \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot (0, t_1...t_{J+1})_b)| + \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} |e(n\gamma) - 1|.$$

Für $n \in \{0, ..., b-1\} \backslash \{a_0\}$ ist $0 \le n\gamma < n \cdot b^{-J-1} < \frac{b}{b^{J+1}} = \frac{1}{b^J} < \frac{1}{2}$ und daher $|e(n\gamma) - 1| \ll \|n\gamma\| = n\gamma < \frac{1}{b^J}$, wobei wir die Asymptotik $|e(s) - 1| \asymp \|s\| \ \ \forall\ s \in \mathbb{R}$ leicht am komplexen Einheitskreis einsehen, indem wir $|e(s) - 1|$ mit der Länge einer Kreissehne identifizieren. Folglich ist $\frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} |e(n\gamma) - 1| \ll \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq a_0}}^{b-1} \frac{1}{b^J} < \frac{1}{b-1} \cdot \frac{b-1}{b^J} = \frac{1}{b^J}$, was nach obigem

$$\frac{1}{b-1}\cdot|\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(n\cdot((0,t_1...t_{J+1})_b+\gamma))| \leq \frac{1}{b-1}\cdot|\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(n\cdot(0,t_1...t_{J+1})_b)| + k\cdot\frac{1}{b^J}$$

mit einer absoluten Konstanten $k \in \mathbb{R}^+$ liefert. Da diese Abschätzung für alle $\gamma \in [0, b^{-J-1}[$ gilt, erhalten wir nach Definition von $G$ und $F^*$ direkt (14.1.1).

Es seien wieder $J \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_{J+1} \in \{0, ..., b-1\}$ gegeben. Schreiben wir nun kürzer $G$ anstatt $G(t_1, ..., t_{J+1})$ und $F^*$ anstatt $F^*(t_1, ..., t_{J+1})$, so ist $G, F^* \in [0,1]$ und $G \leq F^* + k\cdot\frac{1}{b^J}$ sowie $G^{235/154} \leq (F^* + k\cdot\frac{1}{b^J})^{235/154}$ nach der Dreiecksungleichung und (14.1.1). Ferner kommt

$$\begin{aligned}(F^*+k\cdot\frac{1}{b^J})^{235} &= \sum_{n=0}^{235}\binom{235}{n}\cdot {F^*}^n\cdot(k\cdot\frac{1}{b^J})^{235-n} = {F^*}^{235}+\sum_{n=0}^{234}\binom{235}{n}\cdot {F^*}^n\cdot(k\cdot\frac{1}{b^J})^{235-n}\\ &= {F^*}^{235}+k\cdot\frac{1}{b^J}\cdot\sum_{n=0}^{234}\binom{235}{n}\cdot {F^*}^n\cdot(k\cdot\frac{1}{b^J})^{234-n}\end{aligned}$$

aus dem Binomischen Lehrsatz. Nun gibt es eine Schranke $S_1(b) \in \mathbb{N}$, sodass für $J \in \mathbb{N},\ J \geq S_1(b)$ stets $k\cdot\frac{1}{b^J} \in [0,1]$ ist. Für diese hinreichend großen $J \in \mathbb{N},\ J \geq S_1(b)$ gilt insbesondere auch ${F^*}^n,\ (k\cdot\frac{1}{b^J})^{234-n} \in [0,1]\ \ \forall\ 0 \leq n \leq 234$, sodass wir

$$\begin{aligned}(F^*+k\cdot\frac{1}{b^J})^{235} &= {F^*}^{235}+k\cdot\frac{1}{b^J}\cdot\sum_{n=0}^{234}\binom{235}{n}\cdot {F^*}^n\cdot(k\cdot\frac{1}{b^J})^{234-n} \leq {F^*}^{235}+k\cdot\frac{1}{b^J}\cdot\sum_{n=0}^{234}\binom{235}{n}\\ &\leq {F^*}^{235}+k\cdot\frac{1}{b^J}\cdot\sum_{n=0}^{235}\binom{235}{n} = {F^*}^{235}+k\cdot\frac{1}{b^J}\cdot 2^{235}\end{aligned}$$

für diese $J \in \mathbb{N},\ J \geq S_1(b)$ finden. Nutzen wir die Abschätzung $(x+y)^{1/154} \leq x^{1/154}+y^{1/154}$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}_0^+$, so folgt mit der absoluten Konstanten $k_1 := (k\cdot 2^{235})^{1/154} \in \mathbb{R}^+$ insbesondere

$$\begin{aligned}G^{235/154} &\leq (F^*+k\cdot\frac{1}{b^J})^{235/154} \leq ({F^*}^{235}+k\cdot\frac{1}{b^J}\cdot 2^{235})^{1/154} \leq {F^*}^{235/154}+(k\cdot\frac{1}{b^J}\cdot 2^{235})^{1/154}\\ &= {F^*}^{235/154}+k_1\cdot(\frac{1}{b^J})^{1/154}\end{aligned}$$

für alle $J \in \mathbb{N},\ J \geq S_1(b)$. Wegen $\frac{1}{b^J} \in [0,1]$ ist $(\frac{1}{b^J})^{1/154} \geq \frac{1}{b^J}$ und wir definieren die absolute Konstante $k_2 := \max\{k, k_1\} \in \mathbb{R}^+$, sodass $G \leq F^*+k\cdot\frac{1}{b^J} \leq F^*+k_2\cdot(\frac{1}{b^J})^{1/154}$ und insgesamt

$$(14.1.2) \quad G(t_1,...,t_{J+1}) \le F^*(t_1,...,t_{J+1}) + k_2 \cdot (\frac{1}{b^J})^{1/154} \qquad \wedge$$

$$G(t_1,...,t_{J+1})^{235/154} \le F^*(t_1,...,t_{J+1})^{235/154} + k_2 \cdot (\frac{1}{b^J})^{1/154}$$

$$\forall\ J \in \mathbb{N},\ J \ge S_1(b),\ \forall\ t_1,...,t_{J+1} \in \{0,...,b-1\}$$

gilt.

II. Nach (50.7) und (50.8) in [17, S.178] gilt für jeden Eigenwert $\lambda$ von $M_t \in \mathbb{R}^{b^J \times b^J}$ die Abschätzung $|\lambda| \le \|M_t\|_Z = \max\limits_{1\le i\le b^J} \sum\limits_{j=1}^{b^J} |(M_t)_{i,j}|$, wobei $\|\ \|_Z$ die Zeilensummennorm einer Matrix bezeichnet. Dies liefert für die betragsmäßig größten Eigenwerte $\lambda_{b,a_0}(1,J) \in \mathbb{R}_0^+$ von $M_1$ und $\lambda_{b,a_0}(\frac{235}{154},J) \in \mathbb{R}_0^+$ von $M_{\frac{235}{154}}$ insbesondere

$$(14.1.3) \quad \lambda_{b,a_0}(1,J) \le \max_{1\le i\le b^J} \sum_{j=1}^{b^J} |(M_1)_{i,j}| \quad \wedge$$

$$\lambda_{b,a_0}(\frac{235}{154},J) \le \max_{1\le i\le b^J} \sum_{j=1}^{b^J} |(M_{\frac{235}{154}})_{i,j}| \quad \forall\ J \in \mathbb{N}.$$

Daher genügt der Nachweis von $\max\limits_{1\le i\le b^J} \sum\limits_{j=1}^{b^J} |(M_1)_{i,j}| \le b^{27/77}$ und $\max\limits_{1\le i\le b^J} \sum\limits_{j=1}^{b^J} |(M_{\frac{235}{154}})_{i,j}| \le b^{59/433}$ für ein nur von $(b,a_0)$ abhängiges $J = J(b,a_0) \in \mathbb{N}$, denn daraus folgt nach (14.1.3) direkt, dass $(b,a_0)$ ein ausgezeichnetes Paar ist.

Dazu sei $t \in \{1, \frac{235}{154}\}$ fixiert und die Zeile $i = (t_{J+1}...t_2)_b + 1$ $(1 \le i \le b^J)$ der Matrix $M_t$ mit $t_2,...,t_{J+1} \in \{0,...,b-1\}$ gegeben. Nach Definition von $M_t$ sind höchstens diejenigen Einträge $(M_t)_{i,j}$ in der $i$.-Zeile und $j$.-Spalte von $M_t$ von 0 verschieden und liefern einen Beitrag zur Summe $\sum\limits_{j=1}^{b^J} |(M_t)_{i,j}| = \sum\limits_{j=1}^{b^J} (M_t)_{i,j}$ (beachte: $M_t \ge 0 \Leftarrow$ Def. $G$), für die der Spaltenindex $1 \le j \le b^J$ die Bedingung $j = (t_J...t_2t_1)_b + 1$ mit $t_1 \in \{0,...,b-1\}$ erfüllt, wobei hier $t_2,...,t_J$ bereits über die Zeile $i$ festliegen. Dieser Beitrag ist dann gerade $G(t_1,...,t_{J+1})^t$, woraus

$$\sum_{j=1}^{b^J} |(M_t)_{i,j}| = \sum_{j=1}^{b^J} (M_t)_{i,j} = \sum_{t_1=0}^{b-1} G(t_1,...,t_{J+1})^t \le \sum_{t_1=0}^{b-1} [F^*(t_1,...,t_{J+1})^t + k_2 \cdot (\frac{1}{b^J})^{1/154}]$$

$$= \sum_{t_1=0}^{b-1} F^*(t_1,...,t_{J+1})^t + k_2 \cdot \frac{b}{b^{J/154}} \quad \forall\ J \in \mathbb{N},\ J \ge S_1(b)$$

nach (14.1.2) folgt. Nun sind bereits $t_2, ..., t_{J+1} \in \{0, ..., b-1\}$ über die $i$.-Zeile vorgegeben und folglich liegt auch $r = r_{i,J} = (0, 0t_2...t_{J+1})_b$ mit $r = r_{i,J} \in [0, \frac{1}{b}[$ fest, sodass

$$F^*(t_1, ..., t_{J+1}) = \frac{1}{b-1} \cdot |\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot (0, t_1...t_{J+1})_b)| = \frac{1}{b-1} \cdot |\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(n \cdot (t_1 \cdot \frac{1}{b} + r_{i,J}))|$$
$$= F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r_{i,J}) \quad \forall \ t_1 \in \{0, ..., b-1\}$$

gilt. Dies liefert insgesamt

$$(14.1.4) \qquad \sum_{j=1}^{b^J} |(M_t)_{i,j}| \leq \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r_{i,J})^t + k_2 \cdot \frac{b}{b^{J/154}} \text{ mit } r_{i,J} \in [0, \frac{1}{b}[, \ t \in \{1, \frac{235}{154}\},$$
$$\text{für alle Zeilen } 1 \leq i \leq b^J, \ \forall \, J \in \mathbb{N}, \ J \geq S_1(b).$$

Nach Voraussetzung des Lemmas ist

$$s_1 := \sup_{0 \leq r < \frac{1}{b}} \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) < b^{27/77} \quad \wedge \quad s_2 := \sup_{0 \leq r < \frac{1}{b}} \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^{235/154} < b^{59/433},$$

wobei $s_1$ und $s_2$ nur von $b$ und $a_0$ abhängen, wenn wir die Definition von $F$ beachten. Folglich existiert eine Schranke $S_2(b, a_0) \in \mathbb{N}$ mit $\min\{b^{27/77} - s_1, b^{59/433} - s_2\} \geq k_2 \cdot \frac{b}{b^{J/154}}$ für alle $J \in \mathbb{N}, J \geq S_2(b, a_0)$, denn $k_2 \cdot \frac{b}{b^{J/154}} = k_2 \cdot \frac{1}{b^{J/154-1}} \longrightarrow 0$ für $J \longrightarrow \infty$. Dies liefert

$$\sup_{0 \leq r < \frac{1}{b}} \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) + k_2 \cdot \frac{b}{b^{J/154}} \leq b^{27/77} \quad \text{und}$$
$$\sup_{0 \leq r < \frac{1}{b}} \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^{235/154} + k_2 \cdot \frac{b}{b^{J/154}} \leq b^{59/433}$$

für alle $J \in \mathbb{N}, \ J \geq \max\{S_2(b, a_0), S_1(b)\} := S_3(b, a_0) \in \mathbb{N}$. Aus (14.1.4) kommt daher

$$\max_{1 \leq i \leq b^J} \sum_{j=1}^{b^J} |(M_1)_{i,j}| \leq \sup_{0 \leq r < \frac{1}{b}} \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) + k_2 \cdot \frac{b}{b^{J/154}} \leq b^{27/77} \text{ sowie}$$
$$\max_{1 \leq i \leq b^J} \sum_{j=1}^{b^J} |(M_{\frac{235}{154}})_{i,j}| \leq \sup_{0 \leq r < \frac{1}{b}} \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^{235/154} + k_2 \cdot \frac{b}{b^{J/154}} \leq b^{59/433}$$

für alle $J \in \mathbb{N}, \ J \geq S_3(b, a_0)$, also insbesondere für $J = S_3(b, a_0)$. Nach der Bemerkung unter (14.1.3) ist damit Lemma 14.1 bewiesen.

$\square$

Wir setzen $\gamma := \frac{235}{154}$ und definieren für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ die stetigen Funktionen

$$G(r,b,a_0) := \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) = \sum_{\substack{0 \le t_1 \le b-1 \\ F(t_1 \cdot \frac{1}{b}+r) \neq 0}} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) \qquad \text{und}$$

$$H(r,b,a_0) := \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^\gamma = \sum_{\substack{0 \le t_1 \le b-1 \\ F(t_1 \cdot \frac{1}{b}+r) \neq 0}} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^\gamma,$$

wobei wir uns daran erinnern, dass $F$ stetig ist und von $(b, a_0)$ abhängt. Ferner ist $F(s)$ differenzierbar für alle $s \in \mathbb{R}$, $F(s) \neq 0$ und im Fall $F(s) = 0$ gilt formal $F^{'}(s) = 0$, woraus

$$G^{'}(r,b,a_0) = \sum_{\substack{0 \le t_1 \le b-1 \\ F(t_1 \cdot \frac{1}{b}+r) \neq 0}} F^{'}(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) = \sum_{t_1=0}^{b-1} F^{'}(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) \qquad \text{und}$$

$$H^{'}(r,b,a_0) = \sum_{\substack{0 \le t_1 \le b-1 \\ F(t_1 \cdot \frac{1}{b}+r) \neq 0}} (F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^\gamma)^{'} = \sum_{t_1=0}^{b-1} (F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^\gamma)^{'}$$

wegen $\frac{d\,(t_1 \cdot \frac{1}{b}+r)}{d\,r} = 1$ sowie $(F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^\gamma)^{'} = \gamma \cdot F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^{\gamma-1} \cdot F^{'}(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)$ folgt, für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$. Damit sind $G(r,b,a_0)$ und $H(r,b,a_0)$ insbesondere differenzierbar für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$. Wir erhalten folgendes Korollar zu Lemma 14.1, in dem wieder $\epsilon = 10^{-1000}$ gilt.

**Korollar 14.2**:
Das Paar $(b, a_0)$ ist ausgezeichnet, wenn $G(r,b,a_0) \le b^{27/77} - \epsilon$ und $H(r,b,a_0) \le b^{59/433} - \epsilon$ für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ gilt.

**Beweis**:
Dann ist insbesondere auch $\sup\limits_{0 \le r < \frac{1}{b}} G(r,b,a_0) \le b^{27/77} - \epsilon$ und $\sup\limits_{0 \le r < \frac{1}{b}} H(r,b,a_0) \le b^{59/433} - \epsilon$ nach Definition des Supremums, sodass Lemma 14.1 die Aussage liefert.

□

Mithilfe des Korollars ergibt sich eine weitere Möglichkeit, Theorem 1.1 für hinreichend große Basen $b$ zu zeigen.

**Lemma 14.3**:
Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \ge 10$ hinreichend groß. Dann gilt $G(r,b,a_0) \le b^{27/77} - \epsilon$ und $H(r,b,a_0) \le b^{59/433} - \epsilon$ für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$. Dabei ist die untere Schranke für $b$ effektiv berechenbar.

**Beweis**:

Verwenden wir wieder $|e(s)-1| \asymp \|s\|$ und $|e(bs)-1| \leq 2 \;\; \forall \;\; s \in \mathbb{R}$, so kommt

$$|\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(ns)| = |\sum_{n=0}^{b-1} e(ns) - e(a_0 s)| \leq 1 + |\sum_{n=0}^{b-1} e(ns)| = 1 + \frac{|e(bs)-1|}{|e(s)-1|} \ll 1 + \frac{1}{\|s\|}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ (beachte: $\frac{1}{0} = +\infty$). Offenbar gilt auch $|\sum\limits_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(ns)| \leq b-1 \; \forall \, s \in \mathbb{R}$, was insgesamt

$$(14.3.1) \quad F(s) \ll \frac{1}{b-1} \cdot \min\{b-1, 1 + \frac{1}{\|s\|}\} \quad \forall \;\; s \in \mathbb{R}$$

liefert. Wir leiten daraus zunächst die Abschätzung $G(r,b,a_0) \leq b^{27/77} - \epsilon \;\; \forall \;\; r \in [0, \frac{1}{b}[$ und hinreichend große $b$ her. Sei $r \in [0, \frac{1}{b}[$ fixiert. Aus (14.3.1) folgt

$$(14.3.2) \quad G(r,b,a_0) = \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r) \ll \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{t_1=0}^{b-1} \min\{b-1, 1 + \frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|}\}$$
$$\leq 2 + \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{t_1=1}^{b-2} 1 + \frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|} \leq 3 + \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{t_1=1}^{b-2} \frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|}.$$

Wir sehen, dass die Werte $\frac{t_1}{b} + r$ bzw. $1 - (\frac{t_1}{b} + r)$ für $t_1 = 1, ..., b-2$ im Intervall $[\frac{1}{b}, \frac{b-1}{b}]$ liegen ($\Leftarrow 0 \leq r < \frac{1}{b}$) und paarweise einen Abstand $\geq \frac{1}{b}$ besitzen. Dies liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{t_1=1}^{b-2} \frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|} &= \sum_{\substack{1 \leq t_1 \leq b-2\\ \frac{1}{b} \leq \frac{t_1}{b} + r \leq \frac{1}{2}}} \frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|} + \sum_{\substack{1 \leq t_1 \leq b-2\\ \frac{b-1}{b} \geq \frac{t_1}{b} + r > \frac{1}{2}}} \frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq t_1 \leq b-2\\ \frac{1}{b} \leq \frac{t_1}{b} + r \leq \frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{t_1}{b} + r} + \sum_{\substack{1 \leq t_1 \leq b-2\\ \frac{b-1}{b} \geq \frac{t_1}{b} + r > \frac{1}{2}}} \frac{1}{1 - (\frac{t_1}{b} + r)} \\
&\leq \sum_{1 \leq t_1 \leq b-2} \frac{1}{\frac{t_1}{b} + r} + \sum_{1 \leq t_1 \leq b-2} \frac{1}{1 - (\frac{t_1}{b} + r)} \\
&\leq 2 \cdot \sum_{1 \leq t \leq b-1} \frac{1}{\frac{t}{b}} = 2 \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{b-1} \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Ferner ist $\sum\limits_{t=1}^{b-1} \frac{1}{t} \leq 1 + \sum\limits_{t=2}^{b} \frac{1}{t} \leq 1 + \int\limits_1^b \frac{1}{x}\, dx \leq 1 + \log b$, wenn wir beachten, dass die Funktion $x \longmapsto \frac{1}{x}$ in $[1, \infty[$ streng monoton fällt. Nach (14.3.2) schließen wir auf

$$(14.3.3) \quad G(r,b,a_0) \ll 3 + \frac{1}{b-1} \cdot \sum_{t_1=1}^{b-2} \frac{1}{\|\frac{t_1}{b}+r\|} \leq 3 + \frac{1}{b-1} \cdot 2 \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{b-1} \frac{1}{t}$$
$$\leq 3 + \frac{1}{b-1} \cdot 2 \cdot b \cdot (1+\log b) \ll 1 + \log b,$$

denn $\frac{b}{b-1} \ll 1$. Damit existiert eine effektive Schranke $S_1 \in \mathbb{R}^+$, sodass für $b \geq S_1$ stets $G(r,b,a_0) \leq b^{27/77} - \epsilon \ \ \forall \ r \in [0, \frac{1}{b}[$ gilt.

Folgend zeigen wir $H(r,b,a_0) \leq b^{59/433} - \epsilon \ \ \forall \ r \in [0, \frac{1}{b}[$ und hinreichend große $b$ .
Sei $r \in [0, \frac{1}{b}[$ fixiert. Analog zur Herleitung von (14.3.2) erhalten wir mit (14.3.1)

$$(14.3.4) \quad H(r,b,a_0) = \sum_{t_1=0}^{b-1} F(t_1 \cdot \frac{1}{b} + r)^\gamma \ll (\frac{1}{b-1})^\gamma \cdot \sum_{t_1=0}^{b-1} \min\{b-1, 1 + \frac{1}{\|\frac{t_1}{b}+r\|}\}^\gamma$$
$$\leq 2 + (\frac{1}{b-1})^\gamma \cdot \sum_{t_1=1}^{b-2} (1 + \frac{1}{\|\frac{t_1}{b}+r\|})^\gamma.$$

Aus $(x+y)^{1/m} \leq x^{1/m} + y^{1/m}$ und $(x+y)^n \ll_n x^n + y^n$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_0^+,\ n, m \in \mathbb{N}$, wobei letzteres nach dem Binomischen Lehrsatz gilt, folgt $(x+y)^{n/m} \ll_{n,m} (x^n+y^n)^{1/m} \leq x^{n/m} + y^{n/m}$ und daher speziell $(x+y)^{235/154} \ll x^{235/154} + y^{235/154} \ \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}_0^+$. Somit kommt

$$\sum_{t_1=1}^{b-2} (1 + \frac{1}{\|\frac{t_1}{b}+r\|})^\gamma \ll \sum_{t_1=1}^{b-2} [1^\gamma + (\frac{1}{\|\frac{t_1}{b}+r\|})^\gamma] = b - 2 + \sum_{t_1=1}^{b-2} (\frac{1}{\|\frac{t_1}{b}+r\|})^\gamma.$$

Analog zur obigen Abschätzung von $\sum\limits_{t_1=1}^{b-2} \frac{1}{\|\frac{t_1}{b}+r\|}$ erhalten wir

$$\sum_{t_1=1}^{b-2} (\frac{1}{\|\frac{t_1}{b}+r\|})^\gamma = \sum_{\substack{1 \leq t_1 \leq b-2 \\ \frac{1}{b} \leq \frac{t_1}{b}+r \leq \frac{1}{2}}} (\frac{1}{\frac{t_1}{b}+r})^\gamma + \sum_{\substack{1 \leq t_1 \leq b-2 \\ \frac{b-1}{b} \geq \frac{t_1}{b}+r > \frac{1}{2}}} (\frac{1}{1-(\frac{t_1}{b}+r)})^\gamma$$
$$\leq \sum_{1 \leq t_1 \leq b-2} (\frac{1}{\frac{t_1}{b}+r})^\gamma + \sum_{1 \leq t_1 \leq b-2} (\frac{1}{1-(\frac{t_1}{b}+r)})^\gamma$$
$$\leq 2 \cdot \sum_{1 \leq t \leq b-1} (\frac{1}{\frac{t}{b}})^\gamma = 2 \cdot b^\gamma \cdot \sum_{t=1}^{b-1} \frac{1}{t^\gamma}.$$

Nun ist

$$\sum_{t=1}^{b-1} \frac{1}{t^\gamma} \leq 1 + \sum_{t=2}^{b} \frac{1}{t^\gamma} \leq 1 + \int_1^b \frac{1}{x^\gamma}\, dx = 1 + [\frac{1}{-\gamma+1} \cdot x^{-\gamma+1}]_1^b = 1 + \frac{1}{-\gamma+1} \cdot b^{-\gamma+1} - \frac{1}{-\gamma+1}$$
$$\ll 1,$$

weil $\gamma > 1$ gilt und die Funktion $x \longmapsto \frac{1}{x^\gamma}$ streng monoton fallend auf $[1, \infty[$ ist. Folglich ist

$$\sum_{t_1=1}^{b-2} (\frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|})^\gamma \ll b^\gamma \text{ und daher } \sum_{t_1=1}^{b-2} (1 + \frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|})^\gamma \ll b - 2 + b^\gamma \ll b^\gamma$$

wegen $\gamma > 1$, was in (14.3.4) eingesetzt die Abschätzung

$$(14.3.5) \quad H(r, b, a_0) \ll 2 + (\frac{1}{b-1})^\gamma \cdot \sum_{t_1=1}^{b-2} (1 + \frac{1}{\|\frac{t_1}{b} + r\|})^\gamma \ll 2 + (\frac{b}{b-1})^\gamma \ll 1$$

liefert, denn $\frac{b}{b-1} \ll 1$. Damit existiert eine effektive Schranke $S_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass für $b \geq S_2$ stets $H(r, b, a_0) \leq b^{59/433} - \epsilon \;\; \forall \; r \in [0, \frac{1}{b}[$ gilt.

Wählen wir nun $S_3 := \max\{S_1, S_2\} \in \mathbb{R}^+$, so haben wir $G(r, b, a_0) \leq b^{27/77} - \epsilon$ sowie $H(r, b, a_0) \leq b^{59/433} - \epsilon$ für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ und $b \geq S_3$ gezeigt, wobei $S_3$ effektiv ist.

$\square$

**Bemerkung zu Lemma 14.3**:
Dem Beweis von Lemma 14.3 entnehmen wir, dass $G(r, b, a_0) \ll \log b$ und $H(r, b, a_0) \ll 1$ für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ gilt. Dabei sind die Konstanten in $\ll$ absolut sowie unabhängig von $r, b$ und $a_0$. Bestimmen wir in obigem Beweis alle impliziten Konstanten und verwenden zudem eine schärfere Abschätzung als $(x + y)^{235/154} \ll x^{235/154} + y^{235/154} \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}_0^+$, so finden wir

$$G(r, b, a_0) \leq 4 + \frac{10}{9} \cdot \log b \quad \text{und} \quad H(r, b, a_0) \leq 7.56$$

für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$. Somit gilt $G(r, b, a_0) \leq b^{27/77} - \epsilon$ und $H(r, b, a_0) \leq b^{59/433} - \epsilon$ für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ und $b \geq S = 2.8 \cdot 10^6$. Also sind nach Korollar 14.3 bereits alle Paare $(b, a_0)$ mit $b \geq S = 2.8 \cdot 10^6$ ausgezeichnet, was natürlich keine befriedigende Aussage darstellt.

Wir zeigen noch folgenden Satz über die Ableitung von $G(r, b, a_0)$ und $H(r, b, a_0)$.

**Lemma 14.4**:

Es gilt $G^{'}(\frac{1}{2b}, b, a_0) = 0$ und $H^{'}(\frac{1}{2b}, b, a_0) = 0$.

**Beweis**:

Wegen $e(z+y) = e(y)$ und $e(zy) = \overline{e(z \cdot (-y))}\ \ \forall\ z \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(ns) = \sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} \overline{e(n\cdot(-s))} = \overline{\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(n\cdot(-s))} = \overline{\sum_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(n\cdot(1-s))}\quad \forall\ s \in \mathbb{R},$$

was $|\sum\limits_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(ns)| = |\sum\limits_{\substack{n=0\\n\neq a_0}}^{b-1} e(n\cdot(1-s))|\ \ \forall\ s\in\mathbb{R}$ impliziert ($\Leftarrow |z| = |\overline{z}|\ \ \forall\ z \in \mathbb{C}$). Daher ist

$$(14.4.1)\quad F(s) = F(1-s)\quad \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

Sei $t \in \{1, \gamma\}$ fixiert. Wir vereinbaren $(F(x)^t)^{'} := \frac{d\,F(x)^t}{d\,x} = t\cdot F(x)^{t-1}\cdot F^{'}(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$ und sehen $F(s)^t = F(1-s)^t\ \ \forall\ s\in\mathbb{R}$, sodass

$$(F(s)^t)^{'} = \frac{d\,F(s)^t}{d\,s} = \frac{d\,F(1-s)^t}{d\,s} = \frac{d\,F(1-s)^t}{d\,(1-s)}\cdot\frac{d\,(1-s)}{d\,s} = -(F(1-s)^t)^{'}$$

für alle $s\in\mathbb{R}$ mit $F(s)\neq 0$ kommt, denn für diese $s$ gilt $F(s) = F(1-s) \neq 0$ nach (14.4.1) und daher ist $F$ bzw. $F^t$ an den Stellen $s$ sowie $1-s$ differenzierbar.

Für $s \in \mathbb{R}$ mit $F(s) = 0$ ist $F(1-s) = 0$ und daher formal $F^{'}(s) = F^{'}(1-s) = 0$, was direkt wieder $(F(s)^t)^{'} = -(F(1-s)^t)^{'} = 0$ liefert. Daraus folgt $(F(s)^t)^{'} = -(F(1-s)^t)^{'}\ \ \forall\ s\in\mathbb{R}$.

Setzen wir $\alpha(s) := F(s)^t\ \ \forall\ s\in\mathbb{R}$ und $\sum(r) := \sum\limits_{t_1=0}^{b-1}\alpha(\frac{t_1}{b}+r)\ \ \forall\ r\in[0,\frac{1}{b}[$, so gilt

$$(14.4.2)\quad \alpha^{'}(s) = -\alpha^{'}(1-s)\quad\forall\ s\in\mathbb{R}.$$

Nutzen wir $\frac{d\,(\frac{t_1}{b}+r)}{d\,r} = 1$, also $\frac{d\,\alpha(\frac{t_1}{b}+r)}{d\,r} = \frac{d\,\alpha(\frac{t_1}{b}+r)}{d\,(\frac{t_1}{b}+r)} = \alpha^{'}(\frac{t_1}{b}+r)$ für alle $r\in[0,\frac{1}{b}[$ und $0\leq t_1\leq b-1$, so kommt $\sum^{'}(r) = \frac{d\sum(r)}{d\,r} = \sum\limits_{t_1=0}^{b-1}\alpha^{'}(\frac{t_1}{b}+r)\ \ \forall\ r\in[0,\frac{1}{b}[$, was nach (14.4.2) insbesondere

$$\begin{aligned}2\cdot\sum\nolimits^{'}(\frac{1}{2b}) &= 2\cdot\sum_{t_1=0}^{b-1}\alpha^{'}(\frac{t_1}{b}+\frac{1}{2b}) = \sum_{t_1=0}^{b-1}\alpha^{'}(\frac{t_1}{b}+\frac{1}{2b}) + \sum_{t_1=0}^{b-1}-\alpha^{'}(1-(\frac{t_1}{b}+\frac{1}{2b}))\\ &= \sum_{t_1=0}^{b-1}\alpha^{'}(\frac{t_1}{b}+\frac{1}{2b}) - \sum_{t_1=0}^{b-1}\alpha^{'}(\frac{b-1-t_1}{b}+\frac{1}{2b}) = 0\end{aligned}$$

liefert. Also ist $\sum^{'}(\frac{1}{2b}) = 0$, woraus sich für $t=1$ gerade $G^{'}(\frac{1}{2b}, b, a_0) = 0$ und für $t=\gamma$ die

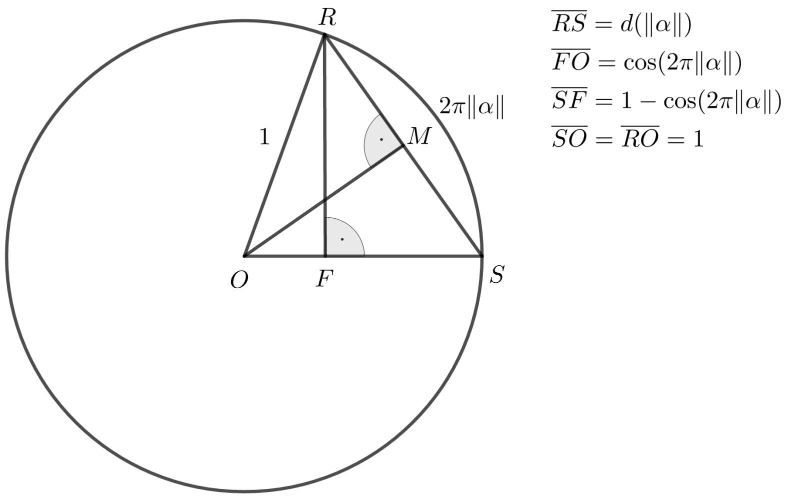
Gültigkeit von $H'(\frac{1}{2b}, b, a_0) = 0$ ergibt.

$\square$

Im Folgenden haben wir es häufig mit Funktionen der Form $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ zu tun, deren Definitionslücken aus $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0\}$ stetig hebbar sind. Für eine solche Definitionslücke $x_0$ existiert in diesen Anwendungsfällen stets der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und wir setzen $f(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, sodass sich der Definitionsbereich von $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ erweitert. Ein erstes Beispiel für eine solche Funktion ist in folgender Proposition 14.5 enthalten.

**Proposition 14.5**:
Es gilt $(\frac{1-\cos(2\pi bs)}{1-\cos(2\pi s)})^{1/2} = \frac{\sin(\pi \cdot \|bs\|)}{\sin(\pi \cdot \|s\|)}$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

**Beweis**:




Skizze : Dreieck SOR und Einheitskreis

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(2\pi\alpha) = \cos(2\pi\|\alpha\|)$ aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kosinus. In obiger Skizze habe die Strecke $\overline{FO}$ negatives Vorzeichen, falls $\cos(2\pi\|\alpha\|) < 0$ ist.
Bezeichnen wir mit $d(\|\alpha\|)$ die Länge der Kreissehne über dem Kreisbogen der Länge $2\pi\|\alpha\|$ im Einheitskreis, so folgt aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke $SFR$ und $SMO$ insbesondere

$$\frac{1-\cos(2\pi\|\alpha\|)}{d(\|\alpha\|)} = \frac{\overline{SF}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SO}} = \frac{d(\|\alpha\|)/2}{1}, \text{ also } 1-\cos(2\pi\alpha) = \frac{d(\|\alpha\|)^2}{2} = 2 \cdot (\frac{d(\|\alpha\|)}{2})^2,$$

denn es gilt $\overline{SM} = \frac{\overline{RS}}{2}$, weil das Dreieck $SOR$ gleichschenklig ist. Letzteres liefert auch

$\sphericalangle SOM = \sphericalangle ROM = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle SOR = \pi \cdot \|\alpha\|$, was wegen $\overline{SO} = 1$ und $\sphericalangle SMO = \frac{\pi}{2}$ insgesamt

$$\frac{d(\|\alpha\|)}{2} = \overline{SM} = \sin \sphericalangle SOM = \sin(\pi \cdot \|\alpha\|)$$

impliziert. Folglich ist $1 - \cos(2\pi\alpha) = 2 \cdot (\frac{d(\|\alpha\|)}{2})^2 = 2 \cdot \sin^2(\pi \cdot \|\alpha\|)$ bzw.
$(1 - \cos(2\pi\alpha))^{1/2} = \sqrt{2} \cdot \sin(\pi \cdot \|\alpha\|) \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$, denn $\sin(\pi \cdot \|\alpha\|) \geq 0$ ($\Leftarrow \|\alpha\| \in [0, \frac{1}{2}]$).
Damit ergibt sich die Behauptung.

$\square$

Wir wollen nun eine möglichst scharfe Abschätzung von $G(r, b, a_0)$ und $H(r, b, a_0)$ für Basen $b \geq 100$ konstruieren und damit Theorem 1.2 beweisen. Dazu halten wir folgend $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 100$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ fest, sodass $G(r, b, a_0) = G(r)$ und $H(r, b, a_0) = H(r)$ für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ gilt.

Setzen wir $f_1(s) := \frac{\sin(\pi \cdot \|bs\|)}{\sin(\pi \cdot \|s\|)} \in \mathbb{R}_0^+ \ \forall \ s \in \mathbb{R}$ (beachte: $\lim\limits_{s \to 0} \frac{\sin(\pi \cdot \|bs\|)}{\sin(\pi \cdot \|s\|)} = b$), so gilt nach Proposition 14.5 und der Dreiecksungleichung insbesondere

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{b-1} \cdot |\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq a_0}}^{b-1} e(ns)| = \frac{1}{b-1} \cdot |\sum_{n=0}^{b-1} e(ns) - e(a_0 s)| \leq \frac{1}{b-1} \cdot (1 + |\sum_{n=0}^{b-1} e(ns)|) \\ &= \frac{1}{b-1} \cdot (1 + |\frac{e(bs)-1}{e(s)-1}|) = \frac{1}{b-1} \cdot (1 + (\frac{1-\cos(2\pi bs)}{1-\cos(2\pi s)})^{1/2}) = \\ &= \frac{1}{b-1} \cdot (1 + \frac{\sin(\pi \cdot \|bs\|)}{\sin(\pi \cdot \|s\|)}) = \frac{1}{b-1} \cdot (1 + f_1(s)) := F_1(s) \quad \forall \ s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei wir $|\frac{e(bs)-1}{e(s)-1}| = (\frac{1-\cos(2\pi bs)}{1-\cos(2\pi s)})^{1/2}$ durch Verwendung von $e(a) = \cos(2\pi\alpha) + i \cdot \sin(2\pi\alpha)$ und $\cos^2(2\pi\alpha) + \sin^2(2\pi\alpha) = 1 \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$ erhalten. Wir finden $f_1(s) = f_1(1-s)$, wenn wir $\|n - s\| = \|s\|$ für $n \in \mathbb{N}$ nutzen und schließen daraus direkt $F_1(s) = F_1(1-s)$, für alle $s \in \mathbb{R}$. Zusammenfassend haben wir

$$\begin{aligned} &(1) \quad f_1(s) = f_1(1-s) && \forall \ s \in \mathbb{R}, \\ &(2) \quad F_1(s) = F_1(1-s) && \forall \ s \in \mathbb{R}, \\ &(3) \quad F(s) \leq F_1(s) && \forall \ s \in \mathbb{R}, \\ &(4) \quad G(r) \leq G_1(r) := \sum_{k=0}^{b-1} F_1(\frac{k}{b} + r) && \forall \ r \in [0, \frac{1}{b}[, \\ &(5) \quad H(r) \leq H_1(r) := \sum_{k=0}^{b-1} F_1(\frac{k}{b} + r)^\gamma && \forall \ r \in [0, \frac{1}{b}[ \end{aligned}$$

gezeigt, wobei sich (4) und (5) direkt aus (3) ergibt. Nach den Eigenschaften (4) und (5) konstruieren wir folgend eine obere Schranke für $G_1(r)$ sowie $H_1(r)$, die sich in Lemma 14.11 darstellt, wobei hierzu noch einige Werkzeuge benötigt werden.

**Proposition 14.6**:
Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq b-1$, $\frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$. Definiere $f_2(t) := \frac{\sin(\pi bt)}{\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b}+t))} \in \mathbb{R}_0^+ \;\; \forall\; t \in [0, \frac{1}{b}]$.
Dann gibt es ein $\alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[$, sodass gilt

(i) $f_2$ ist auf $[0, \alpha[$ streng monoton steigend,

(ii) $f_2'(\alpha) = 0$,

(iii) $f_2$ ist auf $]\alpha, \dfrac{1}{b}]$ streng monoton fallend,

(iv) $f_2'(t) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; b \cdot \tan(\pi \cdot (\dfrac{k}{b} + t)) \leq \tan(\pi bt) \quad \forall\; t \in [0, \dfrac{1}{2b}]$.

**Beweis**:
Die Funktionen $t \longmapsto \sin(\pi bt)$ und $t \longmapsto \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))$ sind in $[\frac{1}{2b}, \frac{1}{b}]$ streng monoton fallend bzw. streng monoton steigend, denn $bt \in [\frac{1}{2}, 1]$ und $0 \leq \frac{k}{b} + t \leq \frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$ für $t \in [\frac{1}{2b}, \frac{1}{b}]$, was

(14.6.1) $\quad f_2$ ist auf $[\dfrac{1}{2b}, \dfrac{1}{b}]$ streng monoton fallend

liefert. Wir sehen leicht, dass

$$(14.6.2) \quad f_2'(t) = \pi \cdot \frac{b \cdot \cos(\pi bt)\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - \sin(\pi bt)\cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\sin^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))} \quad \forall\; t \in [0, \frac{1}{b}]$$

gilt und $f_2$ auf $[0, \frac{1}{b}]$ stetig differenzierbar ist. Offenbar ist $f_2'(0) > 0$, $f_2'(\frac{1}{2b}) < 0$ und $f_2'(\frac{1}{b}) < 0$ ($\Leftarrow$ (14.6.2) $\wedge$ $0 < \frac{k}{b} + \frac{1}{2b} < \frac{1}{2}$) sowie $f_2'$ auf $[0, \frac{1}{b}]$ stetig, sodass $f_2'$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $\alpha \in [0, \frac{1}{b}]$ besitzt. Aus (14.6.1) kommt $\alpha \notin ]\frac{1}{2b}, \frac{1}{b}]$, also $\alpha \in [0, \frac{1}{2b}]$, was aufgrund von $f_2'(0) > 0$ sowie $f_2'(\frac{1}{2b}) < 0$ sogar $\alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[$ zur Folge hat. Insgesamt gilt daher

$$(14.6.3) \quad \exists\, \alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[ :\; f_2'(\alpha) = 0.$$

Wir zeigen nun, dass $\alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[$ die einzige Nullstelle von $f_2'$ in $[0, \frac{1}{b}]$ ist. Nach (14.6.1) sowie $f_2'(\frac{1}{2b}) < 0$ besitzt $f_2'$ höchstens auf $[0, \frac{1}{2b}[$ Nullstellen. Angenommen $f_2'$ hätte zwei Nullstellen $\alpha_0,\ \alpha_1 \in [0, \frac{1}{2b}[$, $\alpha_0 \neq \alpha_1$, wobei wir o.B.d.A. $\alpha_0 < \alpha_1$ annehmen dürfen, also $\alpha_1 \in ]\alpha_0, \frac{1}{2b}[$.

Für $t \in [0, \frac{1}{2b}]$ ist $0 \leq bt \leq \frac{1}{2}$ und $0 < \frac{k}{b} + t \leq \frac{2k+1}{2b} < \frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$, also auch $\cos(\pi bt) \geq 0$, $\cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) > 0$ und $\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) > 0$, sodass nach (14.6.2) insbesondere

$$\begin{aligned} f_2'(t) \leq 0 \;&\Leftrightarrow\; b \cdot \cos(\pi bt) \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - \sin(\pi bt) \cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow\; b \cdot \cos(\pi bt) \tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \leq \sin(\pi bt) \\ &\Leftrightarrow\; b \cdot \tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \leq \tan(\pi bt) \quad \forall\ t \in [0, \frac{1}{2b}] \end{aligned}$$

gilt, wobei wir zuletzt durch $\cos(\pi bt) \geq 0$ dividieren und im Fall $\cos(\pi bt) = 0$ bzw. $t = \frac{1}{2b}$ sehen, dass das letzte Äquivalenzzeichen ebenfalls gilt, wenn wir $\tan(\frac{\pi}{2}) := +\infty$ vereinbaren.
Damit haben wir bereits (iv) gezeigt. Gilt ferner Gleichheit auf einer Seite, so auch auf der anderen Seite des Äquivalenzzeichens, was im Speziellen

$$(14.6.4) \quad f_2'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; h_1(t) := b \cdot \tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) = \tan(\pi bt) := h_2(t) \quad \forall\ t \in [0, \frac{1}{2b}[$$

impliziert. Ferner gilt $f_2'(\alpha_0) = 0$ mit $\alpha_0 \in [0, \frac{1}{2b}[$, also insbesondere $h_1(\alpha_0) = h_2(\alpha_0)$ und $0 < \tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + \alpha_0)) < \tan(\pi b \alpha_0)$ nach (14.6.4) und $b > 1$, woraus aufgrund des strengen monotonen Wachstums von $x \longmapsto \tan(\pi x)$ auf $[0, \frac{1}{2}[$ auch $\frac{k}{b} + \alpha_0 < b \cdot \alpha_0$ gilt. Letzteres impliziert $0 < \frac{k}{b} + s < b \cdot s < \frac{1}{2} \;\; \forall\ s \in [\alpha_0, \frac{1}{2b}[$, sodass wir wegen dem strengen monotonen Wachstum von $x \longmapsto \tan'(\pi x)$ auf $[0, \frac{1}{2}[$ zunächst $\tan'(\pi \cdot (\frac{k}{b} + s)) < \tan'(\pi bs) \;\; \forall\ s \in [\alpha_0, \frac{1}{2b}[$ und damit

$$b \cdot \int_{\alpha_0}^{t} \pi \cdot \tan'(\pi \cdot (\frac{k}{b} + s))\, ds < b \cdot \int_{\alpha_0}^{t} \pi \cdot \tan'(\pi bs)\, ds \quad \forall\ t \in ]\alpha_0, \frac{1}{2b}[$$

erhalten. Wegen $f_2'(\alpha_1) = 0$ gilt $h_1(\alpha_1) = h_2(\alpha_1)$ nach (14.6.4) und folglich auch

$$\begin{aligned} h_1(\alpha_1) = h_1(\alpha_1) - h_1(\alpha_0) + h_1(\alpha_0) &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} h_1'(s)\, ds + h_2(\alpha_0) \\ &= b \cdot \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \pi \cdot \tan'(\pi \cdot (\frac{k}{b} + s))\, ds + h_2(\alpha_0) < b \cdot \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \pi \cdot \tan'(\pi bs)\, ds + h_2(\alpha_0) \\ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} h_2'(s)\, ds + h_2(\alpha_0) = h_2(\alpha_1) - h_2(\alpha_0) + h_2(\alpha_0) = h_2(\alpha_1), \end{aligned}$$

denn $\alpha_1 \in ]\alpha_0, \frac{1}{2b}[$, was $h_1(\alpha_1) = h_2(\alpha_1)$ widerspricht. Damit hat $f_2'$ keine zwei Nullstellen auf $[0, \frac{1}{2b}[$, sodass $\alpha$ die einzige Nullstelle von $f_2'$ im Intervall $[0, \frac{1}{b}]$ ist. Zusammenfassend gilt

$$(14.6.5) \quad f_2' \text{ hat genau eine Nullstelle } \alpha \in [0, \frac{1}{b}] \text{ und diese liegt in } ]0, \frac{1}{2b}[.$$

Also ist $f_2'(\alpha) = 0$ und $f_2'(0) > 0$ (s.o.) mit $\alpha \neq 0$, sodass $f_2'(t) > 0 \ \forall \ t \in [0, \alpha[$ gilt, denn gäbe es ein $t_1 \in [0, \alpha[$ mit $f_2'(t_1) \leq 0$, so muss nach (14.6.5) sogar strenger $f_2'(t_1) < 0$ sein. Dann gibt es aber aufgrund der Stetigkeit von $f_2'$ und des Zwischenwertsatzes eine weitere Nullstelle $\neq \alpha$ von $f_2'$ im Intervall $[0, t_1]$, was wiederum (14.6.5) widerspricht. Damit ist bereits (i) und (ii) gezeigt.

Wäre $f_2'(t_2) \geq 0$ für ein $t_2 \in ]\alpha, \frac{1}{b}]$, so gilt nach (14.6.5) insbesondere $f_2'(t_2) > 0$ und daher gibt es wegen $f_2'(\frac{1}{b}) < 0$ (s.o) nach dem Zwischenwertsatz ein $t_3 \in [t_2, \frac{1}{b}]$ mit $f_2'(t_3) = 0$, was (14.6.5) widerspricht, denn $\alpha < t_2 \leq t_3$. Also ist auch (iii) nachgewiesen.

$\square$

Die folgende Proposition umfasst die wichtigsten Eigenschaften der Ableitung $f_2'$ der in Proposition 14.6 erklärten Funktion $f_2$. Dabei beachten wir die Konvention $\tan(\frac{\pi}{2}) := +\infty$.

**Proposition 14.7**:
Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq b-1$, $\frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$ und $f_2$ wie in Proposition 14.6 definiert. Dann gilt

(i) $$f_2''(t) \leq 0 \ \Leftrightarrow \ (b^2-1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)} - 2 \geq 0 \quad \forall \ t \in ]0, \frac{1}{b}[,$$

(ii) $\exists \, \alpha \in ]0, \dfrac{1}{2b}[$ :

(1) $f_2'(t) \leq 0 \quad \forall \ t \in [\alpha, \dfrac{1}{b}]$ und Gleichheit nur für $t = \alpha$,

(2) $f_2''(t) \leq 0 \quad \forall \ t \in [\alpha, \dfrac{1}{b} - \alpha]$,

(3) $f_2'(t)^2 + f_2''(t) \cdot (1 + f_2(t)) \leq 0 \quad \forall \ t \in [\alpha, \dfrac{1}{b} - \alpha]$,

wobei dieses $\alpha$ gerade jenes aus Proposition 14.6 ist.

**Beweis**:
Die Aussage (ii) (1) kommt direkt aus Proposition 14.6 (ii) und (iii). Wir erinnern uns an

$$f_2'(t) = \pi \cdot \frac{b \cdot \cos(\pi b t) \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - \sin(\pi b t) \cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\sin^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))} \quad \forall \ t \in [0, \frac{1}{b}],$$

was gemäß (14.6.2) gilt, und definieren die Zählerfunktion

$$g(t) := b \cdot \cos(\pi bt)\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - \sin(\pi bt)\cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \quad \forall\ t \in [0, \frac{1}{b}],$$

welche die Ableitung

$$\begin{aligned} g^{'}(t) &= b \cdot -\pi b \sin(\pi bt)\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + b \cdot \cos(\pi bt) \cdot \pi \cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \\ &\quad -[\pi b \cos(\pi bt)\cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - \sin(\pi bt) \cdot \pi \cdot \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))] \\ &= -\pi \cdot (b^2 - 1) \cdot \sin(\pi bt)\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \quad \forall\ t \in [0, \frac{1}{b}] \end{aligned}$$

besitzt. Damit ist $f_2^{'}(t) = \pi \cdot \frac{g(t)}{\sin^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}\ \ \forall\ t \in [0, \frac{1}{b}]$, sodass

$$\begin{aligned} (14.7.1) \quad f_2^{''}(t) &= \pi \cdot \frac{g^{'}(t) \cdot \sin^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - g(t) \cdot 2 \cdot \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \cdot \cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \cdot \pi}{\sin^4(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))} \\ &= \pi \cdot \frac{g^{'}(t) \cdot \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - 2\pi \cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \cdot g(t)}{\sin^3(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))} \quad \forall\ t \in [0, \frac{1}{b}] \end{aligned}$$

gilt. Für $t \in ]0, \frac{1}{b}[$ ist $bt \in ]0, 1[$ sowie $0 < \frac{k}{b} + t < \frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$, sodass

$$(14.7.2) \quad \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) > 0 \quad \wedge \quad \sin(\pi bt)\cos^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) > 0 \quad \forall\ t \in ]0, \frac{1}{b}[$$

gilt. Dies liefert nach (14.7.1) und (14.7.2) die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & f_2^{''}(t) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ g^{'}(t) \cdot \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - 2\pi \cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \cdot g(t) \leq 0 \ \Leftrightarrow \\ & -\pi \cdot (b^2 - 1) \cdot \sin(\pi bt)\sin^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \\ & -2\pi \cdot [b \cdot \cos(\pi bt)\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))\cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) - \sin(\pi bt)\cos^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))] \leq 0 \ \Leftrightarrow \\ & (b^2 - 1) \cdot \sin(\pi bt)\sin^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \cos(\pi bt)\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))\cos(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \\ & -2 \cdot \sin(\pi bt)\cos^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \geq 0 \ \Leftrightarrow \\ & (b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 2 \geq 0 \quad \forall\ t \in ]0, \frac{1}{b}[, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt durch $\sin(\pi bt) \cdot \cos^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) > 0$ dividieren. Damit haben wir bereits (i) gezeigt.

Wir weisen $(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))+2b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}{\tan(\pi bt)}\geq 3\ \ \forall\ t\in[\alpha,\frac{1}{b}-\alpha]$ nach, wobei dieses $\alpha\in\,]0,\frac{1}{2b}[$ aus der Aussage (ii) bzw. Proposition 14.6 stammt und wir nun stillschweigend unsere Konvention $\tan(\frac{\pi}{2}):=+\infty$ benutzen. Sei $t\in[\alpha,\frac{1}{b}-\alpha]$ fixiert.

Für $t\in\,]0,\frac{1}{2b}]$ ist $bt\in\,]0,\frac{1}{2}]$ und $0<\frac{1}{b}<\frac{k}{b}+t<\frac{k+1}{b}\leq\frac{1}{2}$, womit $\tan(\pi bt)>0$ sowie $\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))>0$ und daher $2b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}{\tan(\pi bt)}\geq 0$ gilt. Aus dem strengen monotonen Wachstum von $x\longmapsto\tan(\pi x)$ in $[0,\frac{1}{2}]$ kommt zunächst $\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))>\tan(\frac{\pi}{b})\geq\frac{\pi}{b}$ und insgesamt

$$(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))+2b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}{\tan(\pi bt)}\geq\frac{b^2-1}{b^2}\cdot\pi^2\geq\frac{100^2-1}{100^2}\cdot\pi^2>3$$

für alle $t\in\,]0,\frac{1}{2b}]$, wobei wir die Abschätzung $\tan(\pi x)\geq\pi x\ \ \forall\ x\in[0,\frac{1}{2}]$ verwenden, die wir leicht mithilfe $\tan'(\pi x)=\pi\cdot(1+\tan^2(\pi x))\geq\pi\ \ \forall\ x\in[0,\frac{1}{2}]$ erhalten.

Also darf $t\in\,]\frac{1}{2b},\frac{1}{b}-\alpha]$ angenommen werden, denn $[\alpha,\frac{1}{2b}]\subseteq\,]0,\frac{1}{2b}]$, was $t=\frac{1}{b}-r$ mit $r\in[\alpha,\frac{1}{2b}[$ liefert. Wegen $\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))=\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))$ und
$\tan(\pi bt)=\tan(\pi b\cdot(\frac{1}{b}-r))=\tan(\pi-\pi br)=\tan(-\pi br)=-\tan(\pi br)$ ist die noch zu zeigende Aussage äquivalent zu

$$(*)_1\quad(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))-2b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{\tan(\pi br)}\geq 3\quad\forall\ r\in[\alpha,\frac{1}{2b}[.$$

Aus (ii) (1) folgt $f_2'(r)\leq 0\ \ \forall\ r\in[\alpha,\frac{1}{2b}[$ und nach Proposition 14.6 (iv) erhalten wir somit für $r\in[\alpha,\frac{1}{2b}[\,\subseteq\,]0,\frac{1}{2b}[$ insbesondere $0<b\cdot\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))\leq\tan(\pi br)$ sowie

$$0\leq 2b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{\tan(\pi br)}\leq 2\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))},$$

wenn wir $0<\frac{k}{b}+r<\frac{k+1}{b}-r<\frac{1}{2}$ für diese $r\in[\alpha,\frac{1}{2b}[\,\subseteq\,]0,\frac{1}{2b}[$ beachten. Folglich genügt es,

$$(*)_2\quad(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))-2\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))}\geq 3\quad\forall\ r\in[\alpha,\frac{1}{2b}[$$

zu zeigen, denn $(*)_2$ ist hinreichend für $(*)_1$. Dazu fixieren wir $r\in[\alpha,\frac{1}{2b}[\,\subseteq\,]0,\frac{1}{2b}[$ und dürfen $\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))>3\cdot\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))(>0)$ annehmen, denn andernfalls ist $\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))}\leq 3$ und wir erhalten mit $\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))>\tan(\frac{\pi}{b})\geq\frac{\pi}{b}$ (s.o. $\wedge\ \frac{k+1}{b}-r\in\,]\frac{1}{b},\frac{1}{2}]$) die Abschätzung

$$3+2\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))}\leq 9<\frac{100^2-1}{100^2}\cdot\pi^2\leq\frac{b^2-1}{b^2}\cdot\pi^2\leq(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r)),$$

sodass $(*)_2$ für das fixierte $r$ bereits erfüllt ist. Aus $\frac{1}{2} \geq \frac{k+1}{b} > \frac{k+1}{b} - r > \frac{k}{b} + r > \frac{k}{b} > 0$ kommt

$$\tan(\pi \cdot \frac{k+1}{b}) > \tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) > 3 \cdot \tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + r)) > 3 \cdot \tan(\pi \cdot \frac{k}{b}),$$

denn $x \longmapsto \tan(\pi x)$ ist streng monoton wachsend auf $[0, \frac{1}{2}]$. Wir setzen $x := \frac{k+1}{b} \in [0, \frac{1}{2}]$, sodass $x \geq \frac{1}{50}$ sein muss, denn für $x < \frac{1}{50}$ gilt insbesondere $0 < \frac{k}{b} < \frac{k+1}{b} < \frac{1}{50}$ und wegen $\tan(\pi t) \approx \pi t$ für kleine $0 < t < \frac{1}{50}$ (genauer: $\pi t < \tan(\pi t) < 1.0014 \cdot \pi t \ \ \forall \ t \in ]0, \frac{1}{50}[$) erhalten wir mit

$$\pi \cdot \frac{k+1}{b} \approx \tan(\pi \cdot \frac{k+1}{b}) > 3 \cdot \tan(\pi \cdot \frac{k}{b}) \approx 3 \cdot \pi \cdot \frac{k}{b}$$

den Widerspruch $k + 1 > 3k$ für $k \geq 1$. Aus $\frac{1}{2} > \frac{k}{b} = \frac{k+1}{b} - \frac{1}{b} = x - \frac{1}{b} \geq x - \frac{1}{100} \geq \frac{1}{100} > 0$ folgt

$$\tan(\pi x) > 3 \cdot \tan(\pi \cdot (x - \frac{1}{b})) \geq 3 \cdot \tan(\pi \cdot (x - \frac{1}{100})) = 3 \cdot \tan(\pi x - \frac{\pi}{100})$$

und daraus $x \geq 0.4$, wenn wir in [20] den Graphen der Funktion
$f : [\frac{1}{50}, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \tan(\pi x) - 3 \cdot \tan(\pi x - \frac{\pi}{100})$ mit der $x$-Achse vergleichen.
Folglich ist $\frac{k+1}{b} = x \geq 0.4$ und $\frac{k}{b} = x - \frac{1}{b} \geq x - \frac{1}{100} \geq 0.39$, was

$$\tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) > \tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + r)) > \tan(\pi \cdot \frac{k}{b}) \geq \tan(\pi \cdot 0.39) > 2.77 > 2$$

liefert, weil $0 < 0.39 \leq \frac{k}{b} < \frac{k}{b} + r < \frac{k+1}{b} - r < \frac{1}{2}$ (s.o) ist. Daraus schließen wir

$$\begin{aligned}
&(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) - 2 \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r))}{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + r))} \geq \\
&(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) - \tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) \geq \\
&(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) - \tan^2(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) = \\
&(b^2 - 2) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) \geq \frac{b^2 - 2}{b^2} \cdot \pi^2 \geq \frac{100^2 - 2}{100^2} \cdot \pi^2 > 3,
\end{aligned}$$

indem wir wieder $\tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) > \tan(\frac{\pi}{b}) \geq \frac{\pi}{b}$ (s.o) verwenden.
Damit haben wir $(*)_2$ und insgesamt

$$(14.7.3) \quad (b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)} \geq 3 \quad \forall \ t \in [\alpha, \frac{1}{b} - \alpha]$$

gezeigt. Folglich ergibt sich (ii) (2) direkt aus (i) und (14.7.3).

Es verbleibt somit der Nachweis von (ii) (3). Dazu erinnern wir uns an $f_2(t) = \frac{\sin(\pi bt)}{\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}$, $f_2^{'}(t) = \pi \cdot \frac{g(t)}{\sin^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}$, die Darstellungen von $g(t)$, $g^{'}(t)$ $\forall\ t \in [0, \frac{1}{b}]$ auf S.331 sowie (14.7.1), was insbesondere für alle $t \in\, ]0, \frac{1}{b}[$ die Äquivalenz

$$
\begin{aligned}
&f_2^{'}(t)^2 + f_2^{''}(t) \cdot (1 + f_2(t)) \leq 0 \ \Leftrightarrow \\
&\pi^2 \cdot \frac{g(t)^2}{\sin^4(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))} + \pi \cdot \frac{g^{'}(t)\cdot \sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) - 2\pi\cos(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cdot g(t)}{\sin^3(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))} \cdot (1+f_2(t)) \leq 0 \ \Leftrightarrow \\
&\pi \cdot g(t)^2 + [\sin(\pi bt) + \sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))]\cdot[g^{'}(t)\cdot\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) - 2\pi\cos(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cdot g(t)] \leq 0
\end{aligned}
$$

liefert, wobei wir $\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) > 0$ für diese $t$ beachten. Für $t \in\, ]0, \frac{1}{b}[$ ist $0 < bt < 1$ und $0 < \frac{k}{b} + t < \frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$, sodass $\sin(\pi bt) > 0$ sowie $\cos(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) > 0$ gilt. Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
&g^{'}(t)\cdot\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) - 2\pi\cos(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cdot g(t) = \\
&-\pi\cdot(b^2-1)\cdot\sin(\pi bt)\sin^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) \\
&-2\pi\cdot[b\cdot\cos(\pi bt)\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cos(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) - \sin(\pi bt)\cos^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))] = \\
&-\pi\cdot[(b^2-1)\cdot\sin(\pi bt)\sin^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) + 2b\cdot\cos(\pi bt)\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cos(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) \\
&\qquad -2\cdot\sin(\pi bt)\cos^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))] = \\
&-\pi\cdot\sin(\pi bt)\cos^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cdot[(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) + 2b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}{\tan(\pi bt)} - 2]
\end{aligned}
$$

für alle $t \in\, ]0, \frac{1}{b}[$, was eingesetzt in obige Äquivalenz die Gültigkeit von

$$
\begin{aligned}
&f_2^{'}(t)^2 + f_2^{''}(t)\cdot(1+f_2(t)) \leq 0 \ \Leftrightarrow \\
&\pi\cdot g(t)^2 - \pi\cdot\sin(\pi bt)\cos^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cdot[\sin(\pi bt) + \sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))] \\
&\cdot[(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) + 2b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}{\tan(\pi bt)} - 2] \leq 0 \ \Leftrightarrow \\
&g(t)^2 - \sin(\pi bt)\cos^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cdot[\sin(\pi bt) + \sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))] \\
&\cdot[(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) + 2b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}{\tan(\pi bt)} - 2] \leq 0 \quad \forall\ t \in\, ]0, \frac{1}{b}[
\end{aligned}
$$

impliziert. Wegen $\sin(\pi bt) > 0$ und $\cos(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) > 0$ für $t \in\, ]0, \frac{1}{b}[$ ist

$$
\begin{aligned}
g(t)^2 &= [b\cdot\cos(\pi bt)\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t)) - \sin(\pi bt)\cos(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))]^2 \\
&= \sin^2(\pi bt)\cos^2(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))\cdot(b\cdot\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}{\tan(\pi bt)} - 1)^2 \quad \forall\ t \in\, ]0, \frac{1}{b}[,
\end{aligned}
$$

womit wir auf

$$\begin{aligned}
&f_2^{'}(t)^2 + f_2^{''}(t) \cdot (1 + f_2(t)) \leq 0 \;\Leftrightarrow \\
&\sin^2(\pi bt)\cos^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \cdot (b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 1)^2 - \sin(\pi bt)\cos^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \\
&\cdot [\sin(\pi bt) + \sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))] \cdot [(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 2] \leq 0 \;\Leftrightarrow \\
&(b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 1)^2 \\
&-(1 + \frac{\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\sin(\pi bt)}) \cdot [(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 2] \leq 0 \quad \forall\ t \in ]0, \frac{1}{b}[
\end{aligned}$$

schließen, indem wir zuletzt durch $\sin^2(\pi bt)\cos^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) > 0$ dividieren. Setzen wir

$$\begin{aligned}
h(t) := (b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 1)^2 \\
-(1 + \frac{\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\sin(\pi bt)}) \cdot [(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 2]
\end{aligned}$$

für alle $t \in ]0, \frac{1}{b}[$, so haben wir wegen $[\alpha, \frac{1}{b} - \alpha] \subseteq ]0, \frac{1}{b}[$ ($\Leftarrow \alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[$) insgesamt

$$(14.7.4) \quad f_2^{'}(t)^2 + f_2^{''}(t) \cdot (1 + f_2(t)) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; h(t) \leq 0 \quad \forall\ t \in [\alpha, \frac{1}{b} - \alpha]$$

gezeigt. Damit verbleibt der Nachweis von $h(t) \leq 0\ \ \forall\ t \in [\alpha, \frac{1}{b} - \alpha]$. Sei $t \in [\alpha, \frac{1}{b} - \alpha]$ fixiert.

Für $t \in [\alpha, \frac{1}{2b}]$ ist insbesondere $f_2^{'}(t) \leq 0$ ($\Leftarrow$ (ii) (1)) und nach Proposition 14.6 (iv) auch $0 < b \cdot \tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \leq \tan(\pi bt)$ (beachte: $0 < \frac{k}{b} + t < \frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$), woraus $0 \leq b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} \leq 1$ und daher $(b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 1)^2 \leq 1$ folgt. Somit kommt

$$\begin{aligned}
h(t) &\leq 1 - (1 + \frac{\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\sin(\pi bt)}) \cdot [(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 2] \\
&\leq 1 - 1 \cdot [(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi bt)} - 2] \leq 0 \quad \forall\ t \in [\alpha, \frac{1}{2b}],
\end{aligned}$$

indem wir $\frac{\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\sin(\pi bt)} \geq 0$ sowie (14.7.3) für alle $t \in [\alpha, \frac{1}{2b}] \subseteq [\alpha, \frac{1}{b} - \alpha]$ verwenden ($\Leftarrow \alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[$), denn damit ist insbesondere der Ausdruck in [...] positiv und größer gleich 1.

Folglich darf $t \in ]\frac{1}{2b}, \frac{1}{b} - \alpha]$ angenommen werden und für diese $t$ gilt

$$\frac{\sin(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\sin(\pi b t)} \geq 0 \quad \wedge \quad (b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)} - 2 \geq 0$$

nach (14.7.3) sowie $]\frac{1}{2b}, \frac{1}{b} - \alpha] \subseteq [\alpha, \frac{1}{b} - \alpha] \subseteq ]0, \frac{1}{b}[$, sodass wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} h(t) &\leq (b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)} - 1)^2 - [(b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) + 2b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)} - 2] \\ &= (b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)})^2 - 4b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)} + 4 - 1 - (b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \\ &= (b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)} - 2)^2 - 1 - (b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \quad \forall \ t \in ]\frac{1}{2b}, \frac{1}{b} - \alpha] \end{aligned}$$

mithilfe der binomischen Formeln erhalten. Damit genügt der Nachweis von

$$(*)_3 \quad (b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t))}{\tan(\pi b t)} - 2)^2 - 1 \leq (b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) \quad \forall \ t \in ]\frac{1}{2b}, \frac{1}{b} - \alpha],$$

denn daraus folgt direkt $h(t) \leq 0 \ \forall \ t \in ]\frac{1}{2b}, \frac{1}{b} - \alpha]$ nach der letzten Abschätzung.

Für $t \in ]\frac{1}{2b}, \frac{1}{b} - \alpha]$ gilt $t = \frac{1}{b} - r$ mit $r \in [\alpha, \frac{1}{2b}[$, sodass $(*)_3$ wegen $\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + t)) = \tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r))$ und $\tan(\pi b t) = \tan(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - r)) = \tan(\pi - \pi b r) = \tan(-\pi b r) = -\tan(\pi b r)$ äquivalent ist zu

$$(*)_4 \quad (b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r))}{\tan(\pi b r)} + 2)^2 - 1 \leq (b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) \quad \forall \ r \in [\alpha, \frac{1}{2b}[.$$

Aus (ii) (1) folgt $f_2'(r) \leq 0 \ \forall \ r \in [\alpha, \frac{1}{2b}[$ und nach Proposition 14.6 (iv) erhalten wir somit für $r \in [\alpha, \frac{1}{2b}[ \subseteq ]0, \frac{1}{2b}[$ insbesondere $0 < b \cdot \tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + r)) \leq \tan(\pi b r)$ sowie

$$0 \leq b \cdot \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r))}{\tan(\pi b r)} \leq \frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r))}{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + r))},$$

wenn wir $0 < \frac{k}{b} + r < \frac{k+1}{b} - r < \frac{1}{2}$ für diese $r \in [\alpha, \frac{1}{2b}[ \subseteq ]0, \frac{1}{2b}[$ beachten. Also ist

$$(*)_5 \quad (\frac{\tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r))}{\tan(\pi \cdot (\frac{k}{b} + r))} + 2)^2 - 1 \leq (b^2 - 1) \cdot \tan^2(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) \quad \forall \ r \in [\alpha, \frac{1}{2b}[$$

hinreichend für $(*)_4$ bzw. $(*)_3$.

Nun zeigen wir $(*)_5$. Dazu sei $r \in [\alpha, \frac{1}{2b}[$ fixiert. Dann ist $0 < 1.5 \cdot \frac{1}{b} = \frac{2}{b} - \frac{1}{2b} < \frac{k+1}{b} - r < \frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$ und folglich $\tan(\pi \cdot (\frac{k+1}{b} - r)) > \tan(\pi \cdot 1.5 \cdot \frac{1}{b}) \geq 1.5 \cdot \frac{\pi}{b}$, weil $x \longmapsto \tan(\pi x)$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ streng monoton wächst, sodass insbesondere

$$(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))\geq\frac{b^2-1}{b^2}\cdot 2.25\cdot\pi^2\geq\frac{100^2-1}{100^2}\cdot 2.25\cdot\pi^2>22.2$$

gilt. Somit darf $(\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))}+2)^2-1>22.2$ bzw. $\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))>2.8\cdot\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))$ angenommen werden, denn es gilt $\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))>0$ und $\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))>0$ wegen $0<\frac{k}{b}+r<\frac{k+1}{b}-r<\frac{1}{2}$ ($\Leftarrow r\in[\alpha,\frac{1}{2b}[$) sowie $\sqrt{22.2+1}-2>2.8$.

Analog zu S.333 beginnend bei „Aus $\frac{1}{2}\geq\frac{k+1}{b}>$...” erhalten wir

$$\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))>\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))>\tan(\pi\cdot\frac{k}{b})\geq\tan(\pi\cdot 0.39)>2.77>2,$$

indem wir in der Argumentation dort die 3 durch 2.8 ersetzen und beachten, dass gemäß [20] die Funktion $f:[\frac{1}{50},\frac{1}{2}]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\tan(\pi x)-2.8\cdot\tan(\pi x-\frac{\pi}{100})$ nur für $x\geq 0.4$ positiv sein kann. Dies liefert

$$\begin{aligned}&(\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{\tan(\pi\cdot(\frac{k}{b}+r))}+2)^2-1\leq(\frac{\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))}{2}+2)^2-1=\\&3+2\cdot\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))+0.25\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))\leq\\&3+2.25\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))\leq(b^2-1)\cdot\tan^2(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r)),\end{aligned}$$

wenn wir zuletzt $b\geq 100$ und $\tan(\pi\cdot(\frac{k+1}{b}-r))>2$ nutzen. Damit haben wir $(*)_5$ bzw. $h(t)\leq 0\ \ \forall\ t\in[\alpha,\frac{1}{b}-\alpha]$ und nach (14.7.4) insgesamt (ii) (3) gezeigt.

□

Nun verfügen wir über genügend Mittel, um die folgenden Abschätzungen für die Funktionen $F_1$ bzw. $F_1^\gamma$ nachzuweisen.

**Lemma 14.8**:

Sei $k\in\mathbb{N}$ mit $1\leq k\leq b-2$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad F_1(\frac{k}{b}+t)+F_1(\frac{k+1}{b}-t)\leq 2\cdot F_1(\frac{2k+1}{2b})\qquad\forall\ t\in[0,\frac{1}{b}],\\&\text{(ii)}\quad F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma+F_1(\frac{k+1}{b}-t)^\gamma\leq 2\cdot F_1(\frac{2k+1}{2b})^\gamma\quad\forall\ t\in[0,\frac{1}{b}].\end{aligned}$$

**Beweis**:

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

<u>1.Fall</u>: $\frac{k+1}{b} \leq \frac{1}{2}$

Nach den Definitionen von $F_1, f_1$ auf S.327 sowie $f_2$ in Proposition 14.6 gilt

$$\begin{aligned}(14.8.1)\quad F_1(\frac{k}{b}+t) &= \frac{1}{b-1}\cdot(1+f_1(\frac{k}{b}+t)) = \frac{1}{b-1}\cdot(1+\frac{\sin(\pi\cdot\|b\cdot(\frac{k}{b}+t)\|)}{\sin(\pi\cdot\|\frac{k}{b}+t\|)})\\ &= \frac{1}{b-1}\cdot(1+\frac{\sin(\pi\cdot\|bt\|)}{\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}) = \frac{1}{b-1}\cdot(1+\frac{\sin(\pi bt)}{\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))})\\ &= \frac{1}{b-1}\cdot(1+f_2(t)) \quad \forall\ t\in[0,\frac{1}{b}],\end{aligned}$$

denn für $t\in[0,\frac{1}{b}]$ ist $0\leq\frac{k}{b}+t\leq\frac{k+1}{b}\leq\frac{1}{2}$ bzw. $\|\frac{k}{b}+t\|=\frac{k}{b}+t$ und

$$\|bt\| = \begin{cases} bt & \text{, falls } t\in[0,\frac{1}{2b}] \\ 1-bt & \text{, falls } t\in\,]\frac{1}{2b},\frac{1}{b}] \end{cases},$$

woraus wegen $\sin(\pi\cdot(1-bt))=\sin(\pi-\pi bt)=\sin(\pi bt)$ insbesondere $\sin(\pi\cdot\|bt\|)=\sin(\pi bt)$ folgt. Wir sehen leicht, dass $F_1'(\frac{k}{b}+t)=\frac{1}{b-1}\cdot f_2'(t)$ und $F_1''(\frac{k}{b}+t)=\frac{1}{b-1}\cdot f_2''(t)$ für alle $t\in[0,\frac{1}{b}]$ gilt, sodass sich aus den Aussagen über $f_2'$ und $f_2''$ in Proposition 14.6 und 14.7 direkt

$$\begin{aligned}(14.8.2)\quad \exists\,\alpha\in\,]0,\frac{1}{2b}[:\ & F_1'(\frac{k}{b}+t)>0 \quad \forall\ t\in[0,\alpha[,\quad F_1'(\frac{k}{b}+\alpha)=0,\\ & F_1'(\frac{k}{b}+t)<0 \quad \forall\ t\in\,]\alpha,\frac{1}{b}],\\ & F_1''(\frac{k}{b}+t)\leq 0 \quad \forall\ t\in[\alpha,\frac{1}{b}-\alpha]\end{aligned}$$

ergibt. Nach (14.8.1) gilt auch $F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma=\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot(1+f_2(t))^\gamma\ \ \forall\ t\in[0,\frac{1}{b}]$, also

$$(F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma)' = \frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot\gamma\cdot(1+f_2(t))^{\gamma-1}\cdot f_2'(t) \quad \forall\ t\in[0,\frac{1}{b}]$$

und wegen $f_2(t)\in\mathbb{R}_0^+$ (beachte: $\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))>0\ \Leftarrow\ 0<\frac{k}{b}+t\leq\frac{k+1}{b}\leq\frac{1}{2}$) bzw. $\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot\gamma\cdot(1+f_2(t))^{\gamma-1}>0$ für alle $t\in[0,\frac{1}{b}]$ erhalten wir aus Proposition 14.6 (i)-(iii) sowie Proposition 14.7 (ii) (3) die Gültigkeit von

$$(14.8.3) \quad \exists\, \alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[: \; (F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma)' > 0 \quad \forall\; t \in [0,\alpha[, \quad (F_1(\frac{k}{b}+\alpha)^\gamma)' = 0,$$
$$(F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma)' < 0 \quad \forall\; t \in ]\alpha, \frac{1}{b}],$$
$$f_2'(t)^2 + f_2''(t)\cdot(1+f_2(t)) \leq 0 \quad \forall\; t \in [\alpha, \frac{1}{b}-\alpha].$$

Nun wollen wir noch $(F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma)'' \leq 0 \;\; \forall\; t \in [\alpha, \frac{1}{b}-\alpha]$ für dieses $\alpha$ aus (14.8.3) zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
(F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma)'' &= [\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot\gamma\cdot(1+f_2(t))^{\gamma-1}\cdot f_2'(t)]' = \frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot\gamma\cdot[(1+f_2(t))^{\gamma-1}\cdot f_2'(t)]' \\
&= \frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot\gamma\cdot[(\gamma-1)\cdot(1+f_2(t))^{\gamma-2}\cdot f_2'(t)^2 + (1+f_2(t))^{\gamma-1}\cdot f_2''(t)] \\
&= \frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot\gamma\cdot(1+f_2(t))^{\gamma-2}\cdot[(\gamma-1)\cdot f_2'(t)^2 + (1+f_2(t))\cdot f_2''(t)] \\
&\leq \frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot\gamma\cdot(1+f_2(t))^{\gamma-2}\cdot[f_2'(t)^2 + (1+f_2(t))\cdot f_2''(t)] \leq 0
\end{aligned}$$

für alle $t \in [\alpha, \frac{1}{b}-\alpha] \subseteq [0, \frac{1}{b}]$ nach (14.8.3), denn für diese $t$ ist der Faktor $\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot\gamma\cdot(1+f_2(t))^{\gamma-2}$ stets positiv ($\Leftarrow f_2(t) \in \mathbb{R}_0^+$ s.o.) und es gilt zudem $(\gamma-1)\cdot f_2'(t)^2 \leq f_2'(t)^2$ wegen $\gamma = \frac{235}{154} < 2$. Zusammenfassend erhalten wir

$$(14.8.4) \quad \exists\, \alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[: \; (F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma)' > 0 \quad \forall\; t \in [0,\alpha[, \quad (F_1(\frac{k}{b}+\alpha)^\gamma)' = 0,$$
$$(F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma)' < 0 \quad \forall\; t \in ]\alpha, \frac{1}{b}],$$
$$(F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma)'' \leq 0 \quad \forall\; t \in [\alpha, \frac{1}{b}-\alpha].$$

Sei $F_2 : [0, \frac{1}{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad \exists\, \alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[: \; F_2'(t) > 0 \quad \forall\; t \in [0,\alpha[, \quad F_2'(\alpha) = 0,$$
$$F_2'(t) < 0 \quad \forall\; t \in ]\alpha, \frac{1}{b}],$$
$$F_2''(t) \leq 0 \quad \forall\; t \in [\alpha, \frac{1}{b}-\alpha],$$

also etwa $F_2(t) = F_1(\frac{k}{b}+t)$ oder $F_2(t) = F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma \;\; \forall\; t \in [0, \frac{1}{b}]$ nach (14.8.2) und (14.8.4). Wir zeigen, dass dann $F_2(t) + F_2(\frac{1}{b}-t) \leq 2\cdot F_2(\frac{1}{2b}) \;\; \forall\; t \in [0, \frac{1}{b}]$ gilt, welches uns bei der vorigen Wahl von $F_2$ die zu beweisenden Aussagen (i) und (ii) liefert.

Nach $(*)$ gilt $F_2(t) \leq F_2(\alpha)\ \ \forall\ t \in [0,\alpha]$ und $F_2(\frac{1}{b}-\alpha) \geq F_2(s)\ \ \forall\ s \in [\frac{1}{b}-\alpha, \frac{1}{b}] \subseteq [\alpha, \frac{1}{b}]$ $(\Leftarrow \alpha \in ]0, \frac{1}{2b}[)$, wobei letzteres mit $s = \frac{1}{b} - t$ zunächst $F_2(\frac{1}{b}-\alpha) \geq F_2(\frac{1}{b}-t)\ \ \forall\ t \in [0,\alpha]$ und insgesamt die Abschätzung

$$(14.8.5) \quad F_2(t) + F_2(\frac{1}{b} - t) \leq F_2(\alpha) + F_2(\frac{1}{b} - \alpha) \quad \forall\ t \in [0,\alpha]$$

impliziert. Ferner ist $F_2'$ in $[\alpha, \frac{1}{b}-\alpha]$ monoton fallend $(\Leftarrow (*))$, sodass

$$\int_{t_1}^{t_2} F_2'(s)\, ds \geq \int_{\frac{1}{b}-t_2}^{\frac{1}{b}-t_1} F_2'(s)\, ds \quad \forall\ t_1, t_2 \in [\alpha, \frac{1}{2b}],\ t_1 \leq t_2$$

gilt. Daraus folgt für alle $t_1, t_2 \in [\alpha, \frac{1}{2b}],\ t_1 \leq t_2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} F_2(t_1) + F_2(\frac{1}{b} - t_1) &= F_2(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} F_2'(s)\, ds + F_2(\frac{1}{b} - t_2) + \int_{\frac{1}{b}-t_2}^{\frac{1}{b}-t_1} F_2'(s)\, ds \\ &\leq F_2(t_2) + F_2(\frac{1}{b} - t_2), \end{aligned}$$

also insbesondere $F_2(t) + F_2(\frac{1}{b}-t) \leq 2 \cdot F_2(\frac{1}{2b})\ \ \forall\ t \in [\alpha, \frac{1}{2b}]$ $(t_1 = t\ \wedge\ t_2 = \frac{1}{2b})$. Zusammen mit (14.8.5) schließen wir auf $F_2(t) + F_2(\frac{1}{b}-t) \leq 2 \cdot F_2(\frac{1}{2b})\ \ \forall\ t \in [0, \frac{1}{2b}]$ bzw. aufgrund der Symmetrie auch für alle $t \in [0, \frac{1}{b}]$, was nach obiger Bemerkung bereits die Aussagen (i) und (ii) im ersten Fall liefert.

<u>2. Fall</u>: $\frac{1}{2} < \frac{k+1}{b}$

Nach dem ersten Fall gilt für alle $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k_0 \leq b-2,\ \frac{k_0+1}{b} \leq \frac{1}{2}$ insbesondere

$$\begin{aligned} (14.8.6) \quad & F_1(\frac{k_0}{b} + t) + F_1(\frac{k_0+1}{b} - t) \leq 2 \cdot F_1(\frac{2k_0+1}{2b}) && \forall\ t \in [0, \frac{1}{b}], \\ & F_1(\frac{k_0}{b} + t)^\gamma + F_1(\frac{k_0+1}{b} - t)^\gamma \leq 2 \cdot F_1(\frac{2k_0+1}{2b})^\gamma && \forall\ t \in [0, \frac{1}{b}]. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden weiter die folgenden Fälle :

<u>2.1 Fall</u>: $\frac{1}{2} \leq \frac{k}{b} < \frac{k+1}{b}$

Wir definieren $k_0 := b - k - 1 \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k_0 \leq b-2$ $(\Leftarrow 1 \leq k \leq b-2)$. Aus $\frac{1}{2} \leq \frac{k}{b}$ folgt $k \geq \frac{b}{2}$ und $b - k \leq b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$ bzw. $\frac{k_0+1}{b} = \frac{b-k}{b} \leq \frac{1}{2}$. Also erfüllt $k_0 = b-k-1$ die Voraussetzungen von (14.8.6), sodass wir daraus nach Eigenschaft (2) $F_1(s) = F_1(1-s)\ \ \forall\ s \in \mathbb{R}$ insbesondere

$$2\cdot F_1(\frac{2k+1}{2b}) = 2\cdot F_1(\frac{2b-2k_0-1}{2b}) = 2\cdot F_1(\frac{2k_0+1}{2b}) \geq F_1(\frac{k_0}{b}+t)+F_1(\frac{k_0+1}{b}-t)$$
$$= F_1(1-\frac{k_0}{b}-t)+F_1(1-\frac{k_0+1}{b}+t) = F_1(\frac{k+1}{b}-t)+F_1(\frac{k}{b}+t)$$

für alle $t\in[0,\frac{1}{b}]$ erhalten. Analog dazu kommt mit der zweiten Aussage in (14.8.6)

$$2\cdot F_1(\frac{2k+1}{2b})^\gamma \geq F_1(\frac{k+1}{b}-t)^\gamma + F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma \quad \forall\ t\in[0,\frac{1}{b}],$$

sodass Lemma 14.8 auch im Fall 2.1 gilt.

<u>2.2 Fall</u>: $\frac{k}{b}<\frac{1}{2}<\frac{k+1}{b}$

Dann ist $2k<b<2k+2$, also $b=2k+1$. Wir zeigen zunächst $f_1(\frac{k}{b}+t)\leq f_1(\frac{2k+1}{2b})\ \forall\ t\in[0,\frac{1}{2b}]$.

Sei $t\in[0,\frac{1}{2b}]=[0,\frac{1}{4k+2}]$ fixiert. Dann ist $0<\frac{k}{b}+t\leq\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{4k+2}=\frac{1}{2}$, also $\|\frac{k}{b}+t\|=\frac{k}{b}+t$ und $0\leq bt\leq\frac{1}{2}$ bzw. $\|bt\|=bt$, woraus

$$f_1(\frac{k}{b}+t) = \frac{\sin(\pi\cdot\|b\cdot(\frac{k}{b}+t)\|)}{\sin(\pi\cdot\|\frac{k}{b}+t\|)} = \frac{\sin(\pi\cdot\|bt\|)}{\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))} = \frac{\sin(\pi\cdot bt)}{\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))}$$

folgt. Ferner ist $f_1(\frac{2k+1}{2b})=f_1(0.5)=\frac{\sin(\pi\cdot\|b\cdot 0.5\|)}{\sin(\pi\cdot\|0.5\|)}=1$, denn $\|b\cdot 0.5\|=\|(2k+1)\cdot 0.5\|=\|0.5\|$. Wegen $0\leq t\leq\frac{1}{4k+2}$ ist auch $bt=(2k+1)\cdot t\leq 2k\cdot\frac{1}{4k+2}+t=\frac{k}{2k+1}+t=\frac{k}{b}+t$, also $0\leq bt\leq\frac{k}{b}+t\leq\frac{1}{2}$, sodass $0\leq\sin(\pi\cdot bt)\leq\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))$ und aufgrund $\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))>0$ ($\Leftarrow\frac{1}{2}\geq\frac{k}{b}+t>0$) die Abschätzung

$$f_1(\frac{k}{b}+t) = \frac{\sin(\pi\cdot bt)}{\sin(\pi\cdot(\frac{k}{b}+t))} \leq 1 = f_1(\frac{2k+1}{2b}) \quad \forall\ t\in[0,\frac{1}{2b}]$$

gilt. Nach der Definition $F_1(s)=\frac{1}{b-1}\cdot(1+f_1(s))\geq 0\ \ \forall\ \ s\in\mathbb{R}$ schließen wir somit auf

$$\text{(14.8.7)}\quad \begin{aligned} &F_1(\frac{k}{b}+t)\leq F_1(\frac{2k+1}{2b}) \qquad \forall\ t\in[0,\frac{1}{2b}] \quad\wedge \\ &F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma\leq F_1(\frac{2k+1}{2b})^\gamma \quad \forall\ t\in[0,\frac{1}{2b}]. \end{aligned}$$

Wegen $F_1(\frac{k+1}{b}-t)=F_1(1-\frac{k+1}{b}+t)=F_1(\frac{2k+1-k-1}{2k+1}+t)=F_1(\frac{k}{b}+t)$ erhalten wir daraus

$$F_1(\frac{k}{b}+t)+F_1(\frac{k+1}{b}-t)=2\cdot F_1(\frac{k}{b}+t)\leq 2\cdot F_1(\frac{2k+1}{2b}) \qquad \wedge$$
$$F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma+F_1(\frac{k+1}{b}-t)^\gamma=2\cdot F_1(\frac{k}{b}+t)^\gamma\leq 2\cdot F_1(\frac{2k+1}{2b})^\gamma$$

für alle $t\in[0,\frac{1}{2b}]$, aufgrund der Symmetrie sogar für alle $t\in[0,\frac{1}{b}]$, womit Lemma 14.8 auch in diesem Fall gilt.

Damit ist die Fallunterscheidung abgeschlossen und Lemma 14.8 nachgewiesen.

□

**Proposition 14.9**:
Setze $f_3(s):=(\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma+(\frac{\sin(\pi bs)}{\pi\cdot(\frac{1}{b}-s)})^\gamma\in\mathbb{R}_0^+\ \ \forall\ s\in[0,\frac{1}{b}]$. Dann gilt für alle $s\in[0,\frac{1}{b}]$ mit $s_0\approx 0.190885\cdot\frac{1}{b}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}F_1(s)^\gamma+F_1(\frac{1}{b}-s)^\gamma&=\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot[(1+f_1(s))^\gamma+(1+f_1(\frac{1}{b}-s))^\gamma]\\&\leq 1.00026\cdot\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot(f_3(s_0)+2\gamma\cdot(b+1)^{\gamma-1}).\end{aligned}$$

**Beweis**:
Wir erinnern uns an die Definition $f_1(s):=\frac{\sin(\pi\cdot\|bs\|)}{\sin(\pi\cdot\|s\|)}\ \ \forall\ s\in\mathbb{R}$, wobei für $s\in[0,\frac{1}{b}]$ stets $\|s\|=s$ gilt und aus $\|bs\|=\begin{cases}bs & ,\text{ falls } s\in[0,\frac{1}{2b}]\\ 1-bs & ,\text{ falls } s\in\,]\frac{1}{2b},\frac{1}{b}]\end{cases}$ bzw. $\sin(\pi\cdot(1-bs))=\sin(\pi-\pi bs)=\sin(\pi bs)$ insgesamt

$$(14.9.1)\quad f_1(s)=\frac{\sin(\pi bs)}{\sin(\pi s)}\quad\forall\ s\in[0,\frac{1}{b}]$$

folgt. Definieren wir $h(s):=(1+\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma$ und $g(s):=h(s)+h(\frac{1}{b}-s)\ \ \forall\ s\in[0,\frac{1}{b}]$, so kommt

$$(14.9.2)\quad g(s)=(1+\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma+(1+\frac{\sin(\pi b\cdot(\frac{1}{b}-s))}{\pi\cdot(\frac{1}{b}-s)})^\gamma\quad\forall\ s\in[0,\frac{1}{b}]$$

und wir schätzen $g(s)$ für $s\in[0,\frac{1}{b}]$ nun nach oben ab.

Dazu setzen wir $\beta(z) := z^\gamma \ \forall \ z \in \mathbb{R}_0^+$, sodass $\beta'(z) = \gamma \cdot z^{\gamma-1} \ \forall \ z \in \mathbb{R}_0^+$ ist.
Sei $x \in \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Nun ist $\beta$ auf $[x, x+1]$ stetig und differenzierbar und es gilt

$$\beta(x+1) - \beta(x) = \frac{\beta(x+1) - \beta(x)}{x+1-x} = \beta'(x_0) = \gamma \cdot x_0^{\gamma-1} \quad \text{für ein } x_0 \in [x, x+1]$$

nach dem Mittelwertsatz, also insbesondere $\beta(x+1) - \beta(x) = \gamma \cdot x_0^{\gamma-1} \leq \gamma \cdot (x+1)^{\gamma-1}$, denn $\gamma > 1$ und $0 \leq x_0 \leq x+1$. Setzen wir in diese Abschätzung $x = \frac{\sin(\pi bs)}{\pi s} \in \mathbb{R}_0^+$ für $s \in ]0, \frac{1}{b}[$ ein, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}(1 + \frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma - (\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma = \beta(x+1) - \beta(x) \leq \gamma \cdot (x+1)^{\gamma-1} = \gamma \cdot (\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s} + 1)^{\gamma-1} \\ \leq \gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1} \quad \forall \ s \in ]0, \frac{1}{b}[,\end{aligned}$$

indem wir zuletzt $0 \leq \frac{\sin(\pi bs)}{\pi s} \leq b \ \forall \ s \in ]0, \frac{1}{b}[$ verwenden, welches wir leicht durch Vergleich von $\sin(\pi bs)$ mit dem Kreisbogen der Länge $\pi bs$ am Einheitskreis folgern.
Substituieren wir in der Abschätzung $s$ durch $\frac{1}{b} - s$ für $s \in ]0, \frac{1}{b}[$, so kommt

$$(1 + \frac{\sin(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s))}{\pi \cdot (\frac{1}{b} - s)})^\gamma - (\frac{\sin(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s))}{\pi \cdot (\frac{1}{b} - s)})^\gamma \leq \gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1} \quad \forall \ s \in ]0, \frac{1}{b}[.$$

Daraus erhalten wir zusammen mit (14.9.2) insgesamt

$$\begin{aligned}(14.9.3) \quad g(s) &\leq (\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma + (\frac{\sin(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s))}{\pi \cdot (\frac{1}{b} - s)})^\gamma + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1} \\ &= f_3(s) + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1} \quad \forall \ s \in ]0, \frac{1}{b}[,\end{aligned}$$

wenn wir bemerken, dass $\sin(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s)) = \sin(\pi - \pi bs) = \sin(\pi bs)$ ist. Graphisch ist diese Abschätzung in [21] erkennbar.

Wir ermitteln nun den Wert des globalen Maximums von $f_3$ über dem Intervall $]0, \frac{1}{b}[$.

Wegen $\sin(\pi bs) = \sin(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s))$ ist auch $f_3(s) = f_3(\frac{1}{b} - s) \ \forall \ s \in ]0, \frac{1}{b}[$, sodass wir die Suche nach Extrema auf das Intervall $]0, \frac{1}{2b}]$ beschränken können.
Aus $f_3(s) = (\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma + (\frac{\sin(\pi bs)}{\pi \cdot (\frac{1}{b} - s)})^\gamma \ \forall \ s \in [0, \frac{1}{b}]$ folgt

$$
\begin{aligned}
f_3'(s) &= \gamma\cdot(\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^{\gamma-1}\cdot(\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})' + \gamma\cdot(\frac{\sin(\pi bs)}{\pi\cdot(\frac{1}{b}-s)})^{\gamma-1}\cdot(\frac{\sin(\pi bs)}{\pi\cdot(\frac{1}{b}-s)})' \\
&= \gamma\cdot\frac{1}{\pi^{\gamma-1}}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{s^{\gamma-1}}\cdot\frac{\pi b\cos(\pi bs)\cdot\pi s-\sin(\pi bs)\cdot\pi}{\pi^2 s^2}+ \\
&\quad \gamma\cdot\frac{1}{\pi^{\gamma-1}}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{b}-s)^{\gamma-1}}\cdot\frac{\pi b\cos(\pi bs)\cdot\pi\cdot(\frac{1}{b}-s)-\sin(\pi bs)\cdot\pi\cdot(-1)}{\pi^2\cdot(\frac{1}{b}-s)^2} \\
&= \gamma\cdot\frac{1}{\pi^{\gamma+1}}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{s^{\gamma+1}}\cdot[\pi^2 b\cos(\pi bs)\cdot s-\sin(\pi bs)\cdot\pi]+ \\
&\quad \gamma\cdot\frac{1}{\pi^{\gamma+1}}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{b}-s)^{\gamma+1}}\cdot[\pi^2 b\cos(\pi bs)\cdot(\frac{1}{b}-s)+\sin(\pi bs)\cdot\pi] \\
&= \gamma\cdot\frac{1}{\pi^{\gamma+1}}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{b}-s)^{\gamma+1}}\cdot \\
&\quad [\pi^2 b\cos(\pi bs)\cdot(\frac{1}{b}-s)+\sin(\pi bs)\cdot\pi-(\frac{\frac{1}{b}-s}{s})^{\gamma+1}\cdot(\sin(\pi bs)\cdot\pi-\pi^2 b\cos(\pi bs)\cdot s)] \\
&= \gamma\cdot\frac{1}{\pi^{\gamma+1}}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{b}-s)^{\gamma+1}}\cdot(\sin(\pi bs)\cdot\pi-\pi^2 b\cos(\pi bs)\cdot s)\cdot \\
&\quad [\frac{\pi^2 b\cos(\pi bs)\cdot(\frac{1}{b}-s)+\sin(\pi bs)\cdot\pi}{\sin(\pi bs)\cdot\pi-\pi^2 b\cos(\pi bs)\cdot s}-(\frac{\frac{1}{b}-s}{s})^{\gamma+1}] \\
&= \gamma\cdot\frac{1}{\pi^{\gamma+1}}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{b}-s)^{\gamma+1}}\cdot(\sin(\pi bs)\cdot\pi-\pi^2 b\cos(\pi bs)\cdot s)\cdot \\
&\quad [\frac{\sin(\pi bs)+\pi b\cos(\pi bs)\cdot(\frac{1}{b}-s)}{\sin(\pi bs)-\pi b\cos(\pi bs)\cdot s}-(\frac{\frac{1}{b}-s}{s})^{\gamma+1}] \\
&= \gamma\cdot\frac{1}{\pi^{\gamma}}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{b}-s)^{\gamma+1}}\cdot(\sin(\pi bs)-\pi b\cos(\pi bs)\cdot s)\cdot \\
&\quad [\frac{\sin(\pi bs)+\pi b\cos(\pi bs)\cdot(\frac{1}{b}-s)}{\sin(\pi bs)-\pi b\cos(\pi bs)\cdot s}-(\frac{\frac{1}{b}-s}{s})^{\gamma+1}] \quad \forall\ s\in\,]0,\frac{1}{2b}],
\end{aligned}
$$

wobei $f_3'$ stetig auf $]0,\frac{1}{2b}]$ ist und wir bemerken, dass für diese $s$ der Nenner $\sin(\pi bs)-\pi b\cos(\pi bs)\cdot s$ positiv ist, denn für $s=\frac{1}{2b}$ ist dies offensichtlich und für $s\in]0,\frac{1}{2b}[$ verwenden wir dazu $\cos(\pi x)>0$ sowie $\tan(\pi x)>\pi x\ \ \forall\ x\in\,]0,\frac{1}{2}[$. Ferner ist $\gamma\cdot\frac{1}{\pi^\gamma}\cdot\sin(\pi bs)^{\gamma-1}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{b}-s)^{\gamma+1}}>0\ \ \forall\ s\in\,]0,\frac{1}{2b}]$, was insgesamt

$$
(14.9.4)\quad f_3'(s)\geq 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\sin(\pi bs)+\pi\cos(\pi bs)\cdot(1-bs)}{\sin(\pi bs)-\pi\cos(\pi bs)\cdot bs}-(\frac{1-bs}{bs})^{\gamma+1}\geq 0 \quad \forall\ s\in\,]0,\frac{1}{2b}]
$$

liefert. Dabei gilt im Falle der Gleichheit auf einer Seite diese auch auf der anderen Seite des Äquivalenzzeichens. Für $s\in\,]0,\frac{1}{2b}]$ setzen wir $x:=s\cdot b\in\,]0,\frac{1}{2}]$ und

$$
\alpha(x):=\frac{\sin(\pi x)+\pi\cos(\pi x)\cdot(1-x)}{\sin(\pi x)-\pi\cos(\pi x)\cdot x}-(\frac{1-x}{x})^{\gamma+1} \quad \forall\ x\in\,]0,\frac{1}{2}],
$$

sodass sich nach (14.9.4) insbesondere

$$(14.9.5)\quad f_3'(s) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha(x) \geq 0 \;\text{ mit }\; x = s \cdot b \quad \forall\; s \in ]0, \frac{1}{2b}]$$

ergibt, wobei im Falle der Gleichheit auf einer Seite diese auch auf der anderen Seite des Äquivalenzzeichens gilt.

Nach [22] hat die Funktion $\alpha$ im Intervall $]0, \frac{1}{2}]$ nur die Nullstellen $x_0 \approx 0.190885$ und $x_1 = 0.5$, wobei $\alpha$ in der Umgebung von $x_0$ bzw. $x_1$ einen VZW von $+$ nach $-$ bzw. von $-$ nach $+$ hat, wenn wir $\alpha$ wie oben auch für alle $x \in ]0, 1]$ erklären. Dazu bemerken wir noch, dass $\alpha(x)$ für $x \longrightarrow 0 + 0$ gegen $+\infty$ geht, also insbesondere im Intervall $]0, 0.1]$ keine Nullstellen aufweist. Aus (14.9.5) folgt daher, dass $f_3'$ im Intervall $]0, \frac{1}{2b}]$ nur die Nullstellen $s_0 := x_0 \cdot \frac{1}{b} \approx 0.190885 \cdot \frac{1}{b}$ und $s_1 := x_1 \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{2b}$ besitzt und ferner in der Umgebung von $s_0$ bzw. $s_1$ einen VZW von $+$ nach $-$ bzw. von $-$ nach $+$ hat, wobei sich der letzte VZW aus der Symmetrie von $f_3$ ergibt. Folglich besitzt $f_3$ an der Stelle $s_0$ ein globales Maximum und bei $s_1$ ein lokales Minimum im Intervall $]0, \frac{1}{2b}]$, welches auch in [21] erkennbar ist, wobei hier der obere Graph die um $2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1}$ nach oben verschobene Funktion $f_3$ verdeutlicht $\forall\; s \in [0, \frac{1}{b}]$.
Dies liefert $f_3(s) \leq f_3(s_0)$ für alle $s \in ]0, \frac{1}{2b}]$ und aufgrund der Symmetrie auch $f_3(s) \leq f_3(s_0)$ für alle $s \in ]0, \frac{1}{b}[$, was eingesetzt in (14.9.3) die Gültigkeit von

$$(14.9.6)\quad g(s) \leq f_3(s_0) + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1} \quad \forall\; s \in ]0, \frac{1}{b}[ \;\text{ mit }\; s_0 \approx 0.190885 \cdot \frac{1}{b}$$

impliziert. Die Definitionslücke von $g$ bei $s = 0$ ist stetig hebbar, d.h. es gilt insbesondere $\lim\limits_{s \to 0+0} g(s) = (1+b)^\gamma + 1 = g(0)$ nach (14.9.2). Aus (14.9.6) folgt dann direkt $g(0) = \lim\limits_{s \to 0+0} g(s) \leq f_3(s_0) + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1}$ und somit $g(0) = g(\frac{1}{b}) \leq f_3(s_0) + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1}$ wegen der Symmetrie von $g$. Dies ergibt insgesamt

$$(14.9.7)\quad g(s) \leq f_3(s_0) + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1} \quad \forall\; s \in [0, \frac{1}{b}] \;\text{ mit }\; s_0 \approx 0.190885 \cdot \frac{1}{b}.$$

Nach (14.9.1) erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned}(14.9.8)\quad f_1(s) &= \frac{\sin(\pi b s)}{\sin(\pi s)} = \frac{\sin(\pi b s)}{\pi s} \cdot \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \leq \frac{\sin(\pi b s)}{\pi s} \cdot \frac{\pi/b}{\sin(\pi/b)} \\ &\leq \frac{\sin(\pi b s)}{\pi s} \cdot \frac{\pi/100}{\sin(\pi/100)} \leq c \cdot \frac{\sin(\pi b s)}{\pi s} \quad \forall\; s \in [0, \frac{1}{b}]\end{aligned}$$

mit $c = 1.000165$, indem wir verwenden, dass die Funktion $x \longmapsto \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$ auf $[0, \frac{1}{100}]$ monoton steigend ist. Dabei hat dieses $c = 1.000165$ natürlich nichts mit dem $c = \frac{\log(b-1)}{\log b}$ der vorigen Kapitel zu tun. Aus (14.9.8), (14.9.7) und (14.9.2) folgt

$$(1+f_1(s))^\gamma + (1+f_1(\frac{1}{b}-s))^\gamma \leq (1+c\cdot\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma + (1+c\cdot\frac{\sin(\pi b\cdot(\frac{1}{b}-s))}{\pi\cdot(\frac{1}{b}-s)})^\gamma \leq$$
$$c^\gamma\cdot[(1+\frac{\sin(\pi bs)}{\pi s})^\gamma + (1+\frac{\sin(\pi b\cdot(\frac{1}{b}-s))}{\pi\cdot(\frac{1}{b}-s)})^\gamma] = c^\gamma\cdot g(s) \leq c^\gamma\cdot[f_3(s_0)+2\gamma\cdot(b+1)^{\gamma-1}]$$

für alle $s \in [0, \frac{1}{b}]$ mit $s_0 \approx 0.190885\cdot\frac{1}{b}$, sodass sich wegen $c^\gamma \leq 1.00026$ nach Division durch $(b-1)^\gamma$ das gewünschte Resultat ergibt.

□

**Folgerung aus Proposition 14.9**:
Dem obigen Beweis entnehmen wir $s_0 = x_0\cdot\frac{1}{b}$, wobei $x_0 \approx 0.190885$ eine der beiden Nullstellen der Funktion $\alpha(x)$ im Intervall $]0, \frac{1}{2}]$ ist. Durch einfache Umformungen kommt für alle $s \in [0, \frac{1}{b}]$

$$\begin{aligned} F_1(s)^\gamma + F_1(\frac{1}{b}-s)^\gamma &\leq 1.00026\cdot\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot(f_3(x_0\cdot\frac{1}{b})+2\gamma\cdot(b+1)^{\gamma-1}) \\ &= 1.00026\cdot\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot 2\gamma\cdot(b+1)^{\gamma-1} + \frac{1.00026}{\pi^\gamma}\cdot(\frac{b}{b-1})^\gamma\cdot v(x_0) \end{aligned}$$

mit $v(x) := (\frac{\sin(\pi x)}{x})^\gamma + (\frac{\sin(\pi x)}{1-x})^\gamma \in \mathbb{R}_0^+ \;\; \forall \; x \in [0, \frac{1}{2}]$. Dabei ist $v$ offenbar stetig differenzierbar auf $]0, \frac{1}{2}]$ und wird in [23] graphisch dargestellt.

Nähern wir $x_0$ durch einen Wert $x_N \approx x_0$ mit $x_0 = x_N + \delta$ und möglichst betragsmäßig kleinem $\delta \in \mathbb{R}$ an, so liefert der Mittelwertsatz und der Satz über das Minimum und Maximum $v(x_0) = v(x_N+\delta) = v(x_N) + O(|\delta|)$ und daraus nach Einsetzen in obige Abschätzung

$$\begin{aligned} F_1(s)^\gamma + F_1(\frac{1}{b}-s)^\gamma &\leq 1.00026\cdot\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot(f_3(x_N\cdot\frac{1}{b})+2\gamma\cdot(b+1)^{\gamma-1}) \\ &\quad +\frac{1.00026}{\pi^\gamma}\cdot(\frac{b}{b-1})^\gamma\cdot O(|\delta|) \\ &= 1.00026\cdot\frac{1}{(b-1)^\gamma}\cdot(f_3(x_N\cdot\frac{1}{b})+2\gamma\cdot(b+1)^{\gamma-1}) + O(|\delta|). \end{aligned}$$

für alle $s \in [0, \frac{1}{b}]$, indem wir zur Berechnung des letzten $O(|\delta|)$-Glieds die Abschätzung $\frac{1.00026}{\pi^\gamma}\cdot(\frac{b}{b-1})^\gamma \leq 0.18$ für $b \geq 100$ nutzen. Bei hinreichend guter Näherung von $x_0$ durch $x_N$ bzw. betragsmäßig sehr kleinem $\delta$ ist auch das letzte $O(|\delta|)$-Glied ebenfalls sehr klein und im Wesentlichen gegenüber dem Hauptterm zu vernachlässigen.

Im Folgenden benutzen wir die Näherung $x_N = 0.190885$ für $x_0$.

Aus [22] folgt $x_0 \in [0.190884, 0.190886]$ und gemäß [24] ergibt sich $|v(x_0) - v(x_N)| < 10^{-11}$.

Setzen wir dies in die erste Abschätzung ein, so kommt

$$(*) \quad F_1(s)^\gamma + F_1(\frac{1}{b} - s)^\gamma \leq 1.00026 \cdot \frac{1}{(b-1)^\gamma} \cdot (f_3(x_N \cdot \frac{1}{b}) + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma - 1}) + 10^{-11}$$

für alle $s \in [0, \frac{1}{b}]$, indem wir wieder $\frac{1.00026}{\pi^\gamma} \cdot (\frac{b}{b-1})^\gamma \leq 0.18$ verwenden.

Dabei stellt sich der Fehlerterm $10^{-11}$ als klein genung für unsere weiteren Abschätzungen heraus.

**Proposition 14.10**:

Für alle $s \in [0, \frac{1}{b}]$ gilt

$$F_1(s) + F_1(\frac{1}{b} - s) = \frac{1}{b-1} \cdot (1 + f_1(s) + 1 + f_1(\frac{1}{b} - s)) \leq \frac{1}{b-1} \cdot 1.000165 \cdot (2 + \frac{4b}{\pi}).$$

**Beweis**:

Wir setzen $h(s) := 1 + \frac{\sin(\pi b s)}{\pi s} \ \forall \ s \in [0, \frac{1}{b}]$, wobei $h$ auf $[0, \frac{1}{b}]$ stetig ist, denn $s = 0$ ist stetig hebbare Definitionslücke von $h$. Wir zeigen $h(s) + h(\frac{1}{b} - s) \leq 2 \cdot h(\frac{1}{2b}) \ \forall \ s \in ]0, \frac{1}{b}[$.

Dazu weisen wir zunächst $h'(s) \geq h'(\frac{1}{b} - s) \ \forall \ s \in ]0, \frac{1}{2b}]$ nach. Wir finden

$$(14.10.1) \quad h'(s) = \frac{\pi b \cos(\pi b s) \cdot \pi s - \sin(\pi b s) \cdot \pi}{\pi^2 s^2} = \frac{\pi b s \cos(\pi b s) - \sin(\pi b s)}{\pi s^2} \quad \forall \ s \in ]0, \frac{1}{b}],$$

sodass insbesondere für $s \in ]0, \frac{1}{2b}]$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
& h'(s) \geq h'(\frac{1}{b} - s) \Leftrightarrow \\
& \frac{\pi b s \cos(\pi b s) - \sin(\pi b s)}{\pi s^2} \geq \frac{\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s) \cos(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s)) - \sin(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s))}{\pi \cdot (\frac{1}{b} - s)^2} \Leftrightarrow \\
& \frac{\pi b s \cos(\pi b s) - \sin(\pi b s)}{s^2} \geq \frac{-\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s) \cos(\pi b s) - \sin(\pi b s)}{(\frac{1}{b} - s)^2} \Leftrightarrow \\
& \pi b s \cos(\pi b s) \cdot (\frac{1}{b} - s)^2 - \sin(\pi b s)(\frac{1}{b} - s)^2 \geq -\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s) \cos(\pi b s) s^2 - \sin(\pi b s) s^2 \Leftrightarrow \\
& \pi b s \cos(\pi b s) \cdot (\frac{1}{b} - s) \cdot (\frac{1}{b} - s + s) \geq \sin(\pi b s) \cdot ((\frac{1}{b} - s)^2 - s^2) \Leftrightarrow \\
& \cos(\pi b s) \cdot (\pi s - \pi b s^2) \geq \sin(\pi b s) \cdot (\frac{1}{b} - 2s)
\end{aligned}$$

gilt. Setzen wir $g(s) := \cos(\pi b s) \cdot (\pi s - \pi b s^2) - \sin(\pi b s) \cdot (\frac{1}{b} - 2s) \ \forall \ s \in [0, \frac{1}{2b}]$, so haben wir

$$(14.10.2)\quad h^{'}(s) \geq h^{'}(\frac{1}{b} - s) \;\Leftrightarrow\; g(s) \geq 0 \quad \forall\ s \in \,]0, \frac{1}{2b}]$$

nachgewiesen. Nun zeigen wir $g(s) \geq 0 \;\forall\; s \in [0, \frac{1}{2b}]$. Es gilt $g(0) = g(\frac{1}{2b}) = 0$ und

$$\begin{aligned}
g^{'}(s) &= (\pi - 2\pi bs) \cdot \cos(\pi bs) + (\pi s - \pi bs^2) \cdot \pi b \cdot - \sin(\pi bs) \\
&\qquad -[\pi b \cos(\pi bs) \cdot (\frac{1}{b} - 2s) + \sin(\pi bs) \cdot (-2)] \\
&= -(\pi^2 bs - \pi^2 b^2 s^2 - 2) \cdot \sin(\pi bs) = (2 - \pi^2 bs + \pi^2 b^2 s^2) \cdot \sin(\pi bs) \\
&= [(\frac{\pi}{2} - \pi bs)^2 + 2 - (\frac{\pi}{2})^2] \cdot \sin(\pi bs)
\end{aligned}$$

für alle $s \in [0, \frac{1}{2b}]$. Damit ist $g^{'}(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
&g^{'}(s) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (\frac{\pi}{2} - \pi bs)^2 + 2 - (\frac{\pi}{2})^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{2} - \pi bs \geq \sqrt{(\frac{\pi}{2})^2 - 2} \;\Leftrightarrow \\
&s \leq \frac{1}{\pi b} \cdot (\frac{\pi}{2} - \sqrt{(\frac{\pi}{2})^2 - 2}) := c_b
\end{aligned}$$

für alle $s \in \,]0, \frac{1}{2b}]$, denn für diese $s$ ist $\sin(\pi bs) > 0$ sowie $\frac{\pi}{2} - \pi bs \geq 0$. Dabei ist $c_b \in \,]0, \frac{1}{2b}]$. Folglich gilt $g^{'}(s) \geq 0 \;\forall\; s \in \,]0, c_b]$ und $g^{'}(s) < 0 \;\forall\; s \in \,]c_b, \frac{1}{2b}]$. Wegen $g(0) = 0$ liefert dies

$$g(t) = \int\limits_0^t g^{'}(s)\, ds \geq 0 \quad \forall\ t \in \,]0, c_b] \quad \wedge \quad g(\frac{1}{2b}) - g(t) = \int\limits_t^{\frac{1}{2b}} g^{'}(s)\, ds \leq 0 \quad \forall\ t \in \,]c_b, \frac{1}{2b}],$$

wobei letzteres $0 = g(\frac{1}{2b}) \leq g(t) \;\forall\; t \in \,]c_b, \frac{1}{2b}]$ und insgesamt $g(t) \geq 0 \;\forall\; t \in \,]0, \frac{1}{2b}]$ impliziert. Aus (14.10.2) kommt

$$(14.10.3)\quad h^{'}(s) \geq h^{'}(\frac{1}{b} - s) \quad \forall\ s \in \,]0, \frac{1}{2b}].$$

Also ist insbesondere

$$h(\frac{1}{2b}) - h(t) = \int\limits_t^{\frac{1}{2b}} h^{'}(s)\, ds \geq \int\limits_t^{\frac{1}{2b}} h^{'}(\frac{1}{b} - s)\, ds = \int\limits_{\frac{1}{2b}}^{\frac{1}{b}-t} h^{'}(s)\, ds = h(\frac{1}{b} - t) - h(\frac{1}{2b})$$

und daher $h(t) + h(\frac{1}{b} - t) \leq 2 \cdot h(\frac{1}{2b})$ für alle $t \in \,]0, \frac{1}{2b}]$, was aufgrund der Symmetrie

$$(14.10.4)\quad h(t) + h(\frac{1}{b} - t) \leq 2 \cdot h(\frac{1}{2b}) \quad \forall\ t \in \,]0, \frac{1}{b}[$$

liefert. Da $h$ auf ganz $[0, \frac{1}{b}]$ stetig ist, trifft dies auch auf $t \longmapsto h(t) + h(\frac{1}{b} - t)$ zu, sodass $h(0) + h(\frac{1}{b}) = \lim_{t \to 0+0} [h(t) + h(\frac{1}{b} - t)] \leq 2 \cdot h(\frac{1}{2b})$ gilt. Folglich erhalten wir (14.10.4) auch für $t = 0$ und $t = \frac{1}{b}$. Nutzen wir ferner (14.9.8) $f_1(s) \leq c \cdot \frac{\sin(\pi bs)}{\pi s} \;\; \forall \; s \in [0, \frac{1}{b}]$ mit $c = 1.000165$ aus dem Beweis von Proposition 14.9, so kommt

$$1 + f_1(s) + 1 + f_1(\frac{1}{b} - s) \leq 1 + c \cdot \frac{\sin(\pi bs)}{\pi s} + 1 + c \cdot \frac{\sin(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s))}{\pi \cdot (\frac{1}{b} - s)} \leq$$
$$c \cdot [1 + \frac{\sin(\pi bs)}{\pi s} + 1 + \frac{\sin(\pi b \cdot (\frac{1}{b} - s))}{\pi \cdot (\frac{1}{b} - s)}] = c \cdot (h(s) + h(\frac{1}{b} - s)) \leq c \cdot 2 \cdot h(\frac{1}{2b}) =$$
$$c \cdot 2 \cdot (1 + \frac{2b}{\pi}) = 1.000165 \cdot (2 + \frac{4b}{\pi}) \quad \forall \; s \in [0, \frac{1}{b}]$$

nach (14.10.4). Division durch $b - 1$ liefert das gewünschte Resultat.

□

**Lemma 14.11**:

Mit den Definitionen von $f_3$ in Proposition 14.9 sowie $x_N = 0.190885$ in deren Folgerung auf S.346-347 gelten für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ die Abschätzungen

(i) $\quad G_1(r) \leq 1.000165 \cdot \frac{1}{b-1} \cdot (2 + \frac{4b}{\pi}) + \sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b}) =: G_2(b)$

(ii) $\quad H_1(r) \leq 1.00026 \cdot \frac{1}{(b-1)^\gamma} \cdot (f_3(x_N \cdot \frac{1}{b}) + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma - 1}) + 10^{-11} + \sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b})^\gamma$

$=: H_2(b)$.

**Beweis**:

Verwenden wir (2) $F_1(s) = F_1(1 - s) \;\; \forall \; s \in \mathbb{R}$ und die Definition von $G_1$ in (4), so gilt

$$2 \cdot G_1(r) = \sum_{k=0}^{b-1} F_1(\frac{k}{b} + r) + \sum_{k=0}^{b-1} F_1(\frac{b-1-k}{b} + r) = \sum_{k=0}^{b-1} [F_1(\frac{k}{b} + r) + F_1(\frac{k+1}{b} - r)] =$$
$$F_1(r) + F_1(\frac{1}{b} - r) + F_1(\frac{b-1}{b} + r) + F_1(1 - r) + \sum_{k=1}^{b-2} [F_1(\frac{k}{b} + r) + F_1(\frac{k+1}{b} - r)] \leq$$
$$2 \cdot F_1(r) + 2 \cdot F_1(\frac{1}{b} - r) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b})$$

für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ nach Lemma 14.8 (i), also aufgrund Proposition 14.10 weiter

$$G_1(r) \leq F_1(r) + F_1(\frac{1}{b} - r) + \sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b})$$
$$\leq 1.000165 \cdot \frac{1}{b-1} \cdot (2 + \frac{4b}{\pi}) + \sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b}) = G_2(b)$$

für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$. Damit haben wir (i) gezeigt. Analog dazu ergibt sich (ii), wenn wir in der obigen Argumentation einfach $F_1$ durch $F_1^\gamma$ ersetzen und die Definition von $H_1$ in (5), Lemma 14.8 (ii) sowie die Abschätzung (∗) in der Folgerung aus Proposition 14.9 nutzen.

□

**Lemma 14.12**:
Mit den Definitionen von $G_2(b)$ und $H_2(b)$ in Lemma 14.11 erhalten wir für $b \geq 100$

$$G_2(b) \leq 2.2 + 0.65 \cdot \log b \quad \wedge \quad H_2(b) \leq 1.97.$$

**Beweis**:
Wir finden leicht $f_3(x_N \cdot \frac{1}{b}) \leq 1.01219 \cdot b^\gamma$ mithilfe der Definition von $f_3$ in Proposition 14.9 und $x_N = 0.190885$. Nach Definition von $F_1$ auf S.327 sowie $\sin(\pi t) = \sin(\pi - \pi t)\ \forall\ t \in [0, 1]$ kommt

$$(14.12.1) \quad F_1(\frac{2k+1}{2b}) = \frac{1}{b-1} \cdot (1 + \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{2k+1}{2b})}) \quad \forall\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq b-2.$$

Damit können wir die beiden Summen $\sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b})$ und $\sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b})^\gamma$, welche in die Definition von $G_2$ und $H_2$ einfließen, geeignet darstellen und nach oben abschätzen. Unter Verwendung der Eigenschaft (2) $F_1(s) = F_1(1-s)\ \forall\ s \in \mathbb{R}$ und (14.12.1) folgt

$$\sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b}) \leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} F_1(\frac{2k+1}{2b}) = \frac{2}{b-1} \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} (1 + \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{2k+1}{2b})}) \qquad \text{sowie}$$
$$\sum_{k=1}^{b-2} F_1(\frac{2k+1}{2b})^\gamma \leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} F_1(\frac{2k+1}{2b})^\gamma = \frac{2}{(b-1)^\gamma} \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} (1 + \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{2k+1}{2b})})^\gamma.$$

Setzen wir dies und $f_3(x_N \cdot \frac{1}{b}) \leq 1.01219 \cdot b^\gamma$ in die Definitionen von $G_2$ und $H_2$ ein, finden wir

$$\begin{aligned} (14.12.2) \quad G_2(b) &\leq 1.000165 \cdot \frac{1}{b-1} \cdot (2 + \frac{4b}{\pi}) + \frac{2}{b-1} \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} (1 + \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{2k+1}{2b})}) \\ H_2(b) &\leq 1.00026 \cdot \frac{1}{(b-1)^\gamma} \cdot (1.01219 \cdot b^\gamma + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1}) + 10^{-11} \\ &\quad + \frac{2}{(b-1)^\gamma} \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} (1 + \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{2k+1}{2b})})^\gamma. \end{aligned}$$

Demnach verbleibt die Abschätzung der beiden Summen über $k$. Dazu definieren wir die Funktion $f_4(x) := 1 + \frac{1}{\sin(\pi x)} \in \mathbb{R}^+$ für alle $x \in ]0, \frac{1}{2}]$, wobei $f_4$ und damit auch $f_4^\gamma$ auf dem Intervall $]0, \frac{1}{2}]$ streng monoton fällt. Wegen $0 < \frac{2k+1}{2b} \leq \frac{1}{2}$ für $1 \leq k \leq \lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor$ sind die abzuschätzenden Summen aus (14.12.2) also gerade $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} f_4(\frac{2k+1}{2b})$ sowie $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} f_4^\gamma(\frac{2k+1}{2b})$.

Da $f_4 : ]0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ streng monoton fällt und die Schrittweite zwischen benachbarten Stützstellen $\frac{2k+1}{2b}$ jeweils $\frac{1}{b}$ beträgt, schließen wir durch Vergleich mit dem entsprechenden Integral

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} f_4(\frac{2k+1}{2b}) \cdot \frac{1}{b} = f_4(\frac{3}{2b}) \cdot \frac{1}{b} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} f_4(\frac{2k+1}{2b}) \cdot \frac{1}{b} \leq f_4(\frac{3}{2b}) \cdot \frac{1}{b} + \int_{3/2b}^{1/2} f_4(x)\, dx,$$

denn $\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} f_4(\frac{2k+1}{2b}) \cdot \frac{1}{b}$ können wir als Untersumme des besagten Integrals auffassen.
Die gleiche Abschätzung erhalten wir auch für $f_4^\gamma$ anstatt $f_4$, was zusammenfassend

$$\begin{aligned} (14.12.3) \quad \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} f_4(\frac{2k+1}{2b}) &\leq f_4(\frac{3}{2b}) + b \cdot \int_{3/2b}^{1/2} f_4(x)\, dx \quad \text{sowie} \\ \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-1}{2} \rfloor} f_4^\gamma(\frac{2k+1}{2b}) &\leq f_4^\gamma(\frac{3}{2b}) + b \cdot \int_{3/2b}^{1/2} f_4^\gamma(x)\, dx \end{aligned}$$

ergibt. Da $x \longmapsto \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$ auf $]0, \frac{1}{2}]$ streng monoton steigt, gilt wegen $b \geq 100$ insbesondere $\frac{\pi \cdot \frac{3}{2b}}{\sin(\pi \cdot \frac{3}{2b})} \leq \frac{\pi \cdot \frac{3}{200}}{\sin(\pi \cdot \frac{3}{200})} = 1.000371$, also auch

$$(14.12.4) \quad \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{3}{2b})} \leq 0.21229 \cdot b.$$

Dies liefert direkt $f_4(\frac{3}{2b}) \leq 1 + 0.21229 \cdot b$, was nach (14.12.2) und (14.12.3) die Abschätzungen

$$(14.12.5) \quad G_2(b) \leq 1.000165 \cdot \frac{1}{b-1} \cdot (2 + \frac{4b}{\pi}) + \frac{2}{b-1} \cdot [1 + 0.21229 \cdot b + b \cdot \int_{3/2b}^{1/2} f_4(x)\,dx]$$

$$H_2(b) \leq 1.00026 \cdot \frac{1}{(b-1)^\gamma} \cdot (1.01219 \cdot b^\gamma + 2\gamma \cdot (b+1)^{\gamma-1}) + 10^{-11}$$

$$+2 \cdot (\frac{b}{b-1})^\gamma \cdot [(\frac{1}{b} + 0.21229)^\gamma + b^{1-\gamma} \cdot \int_{3/2b}^{1/2} f_4^\gamma(x)\,dx]$$

impliziert. Das Integral über $f_4$ lässt sich noch recht einfach über die Stammfunktion

$$\int_{3/2b}^{1/2} f_4(x)\,dx = [x - \frac{\log(|\frac{1}{\sin(\pi x)} + \frac{1}{\tan(\pi x)}|)}{\pi}]_{3/2b}^{1/2} \leq 0.22732 - \frac{3}{2b} + \frac{1}{\pi} \cdot \log b$$

abschätzen. Setzen wir dies in (14.12.5) ein und beachten $b \geq 100$ bzw. $\frac{b}{b-1} \leq \frac{100}{99}$, so erhalten wir nach konservativer Berechnung aller Konstanten die gewünschte Abschätzung von $G_2$.

Die Abschätzung von $H_2$ gestaltet sich dagegen wesentlich schwieriger, weil das Integral über $f_4^\gamma$ bzw. der Wert $b^{1-\gamma} \cdot \int_{3/2b}^{1/2} f_4^\gamma(x)\,dx$ nur numerisch approximiert werden kann. Wir setzen zunächst

$$I(t) := \int_{3/2t}^{1/2} f_4^\gamma(x)\,dx = \int_{3/2t}^{1/2} (1 + \frac{1}{\sin(\pi x)})^\gamma\,dx \quad \text{sowie} \quad h(t) := t^{1-\gamma} \cdot I(t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R},\ t \geq 3$$

und skizzieren den Nachweis von $h(100) \geq h(t)\ \ \forall\ t \in \mathbb{R},\ t \geq 100$. Dazu genügt es, $h'(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R},\ t \geq 100$ zu zeigen. Aus der Definition von $I(t)$ kommt $I(3) = 0$ und es gilt

$$I(t) = I(t) - I(3) = \int_{3/2t}^{1/2} (1 + \frac{1}{\sin(\pi x)})^\gamma\,dx = \int_{3}^{t} \frac{3}{2} \cdot (1 + \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{3}{2s})})^\gamma \cdot s^{-2}\,ds$$

nach der Substitution $x = \frac{3}{2s}$, was uns direkt

$$I'(t) = \frac{3}{2} \cdot (1 + \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{3}{2t})})^\gamma \cdot t^{-2} \quad \forall\ t \in \mathbb{R},\ t \geq 3$$

liefert. Also ist $h'(t) = (1-\gamma) \cdot t^{-\gamma} \cdot I(t) + t^{1-\gamma} \cdot I'(t) = t^{-\gamma} \cdot [t \cdot I'(t) - (\gamma - 1) \cdot I(t)]$ und daher

$$h'(t) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ t \cdot I'(t) \leq (\gamma - 1) \cdot I(t) \ \Leftrightarrow\ (*)\ \alpha(t) \leq (\gamma - 1) \cdot I(t)$$

mit $\alpha(t) := \frac{3}{2} \cdot (1 + \frac{1}{\sin(\pi \cdot \frac{3}{2t})})^{\gamma} \cdot t^{-1}$, für alle $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 3$.

Im Fall $t = 100$ ist die Ungleichung $(*)$ erfüllt, denn es gilt $\alpha(100) \leq 1.704$ und wir finden numerisch $I(100) = 3.8973$. Um $(*)$ nun für alle $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 100$ zu erhalten, reicht der Nachweis von $(**)$ $\alpha^{'}(t) \leq (\gamma - 1) \cdot I^{'}(t)$ für jene $t$ aus. Dies können wir mit einfachen Umformungen und Abschätzungen zeigen, zumal wir jetzt beide Seiten von $(**)$ explizit schreiben können. Damit ist $(**)$ bzw. $(*)$ bzw. $h^{'}(t) \leq 0$ und folglich $h(t) \leq h(100) = 100^{1-\gamma} \cdot I(100) = 0.3458$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 100$ nachgewiesen. Setzen wir dies in unsere Abschätzung von $H_2$ in (14.12.5) ein und berechnen alle Konstanten konservativ (beachte: $b \geq 100$), so folgt schließlich die gewünschte Schranke für $H_2$. Somit ist Lemma 14.12 bewiesen.

$\square$

**Folgerung aus Lemma 14.12**:
Für $b \geq 145$ finden wir leicht

$$G_2(b) \leq 2.2 + 0.65 \cdot \log b \leq b^{27/77} - \epsilon \quad \text{und} \quad H_2(b) \leq 1.97 \leq b^{59/433} - \epsilon.$$

Nun besitzen wir genügend Mittel, um Theorem 1.2 zu beweisen.

**Theorem 1.2**:
Jedes Paar $(b, a_0)$ mit $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 102$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ ist ausgezeichnet.

**Beweis**:
Wir erinnern uns, dass die Eigenschaften (4) und (5) auf S.327 sowie Lemma 14.11 für jedes $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 100$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ gelten, was insbesondere

$$(1.2.1) \quad G(r, b, a_0) = G(r) \leq G_1(r) \leq G_2(b) \quad \wedge \quad H(r, b, a_0) = H(r) \leq H_1(r) \leq H_2(b)$$

für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ liefert. Nach [25] und [26] ist $G_2(b) \leq b^{27/77} - \epsilon$ und $H_2(b) \leq b^{59/433} - \epsilon$ für alle $b \in [102, 700]$, wobei wir dies für $b \geq 120$ am Graphen und für $102 \leq b \leq 119$ durch eine direkte True-False-Abfrage überprüfen. Der Verlauf der Funktionen $G_2$ und $H_2$ als obere Schranken für $G$ bzw. $H$ entspricht dabei für große $b$ einer logarithmischen bzw. konstanten Funktion, was mit der Bemerkung zu Lemma 14.3 auf S.324 korrespondiert. Daher gilt

$$(1.2.2) \quad G(r,b,a_0) \leq G_2(b) \leq b^{27/77} - \epsilon \quad \wedge \quad H(r,b,a_0) \leq H_2(b) < b^{59/433} - \epsilon$$

für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ und $b \in [102, 700]$ sowie $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$. Wir erinnern daran, dass (1.2.2) nach der Folgerung aus Lemma 14.12 für $b \geq 145$ bereits korrekt ist. Somit erhalten wir (1.2.2) für alle $b \geq 102$. Aus Korollar 14.2 folgt der Rest.

Würden wir dagegen anstatt mit 145 nur mit der aus Lemma 14.3 herrührenden unteren Schranke $S = 2.8 \cdot 10^6$ für $b$ argumentieren, so müsste das Intervall in [25] und [26] zur Überprüfung von (1.2.2) auf $b \in [102, 2.8 \cdot 10^6]$ vergrößert werden, welches für Mathematica einen erheblich höheren Reichenaufwand bedeutet. Daher verringert Lemma 14.12 den Rechenaufwand erheblich, obgleich das Resultat natürlich auch ohne Lemma 14.12 dasselbe bleibt.

□

Nun stellt sich noch die Frage, ob ein Paar $(b, a_0)$ mit $b \in \mathbb{N}$, $10 \leq b \leq 101$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ ausgezeichnet ist oder nicht. Die Antwort darauf können wir nun nicht mehr durch einen sauberen Beweis wie den von Theorem 1.2 geben, sondern müssen einige Annahmen machen, die an dieser Stelle nicht mehr analytisch bewiesen werden können, da die auftretenden Funktionen sehr unhandlich sind. Um anzuzeigen, dass ein Satz auf solchen Annahmen beruht, stellen wir ein $*$ darüber. Wir weisen also Theorem 1.3$^*$ nach.

**Theorem 1.3**$^*$:
Jedes Paar $(b, a_0)$ mit $b \in \mathbb{N}$, $50 \leq b \leq 101$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ ist ausgezeichnet.

**Beweis**:
Im Folgenden sei stets $b \in \mathbb{N}$, $50 \leq b \leq 101$ und $a_0 \in \{0, .., , b-1\}$. Nach Lemma 14.4 verschwinden die Ableitungen $G^{'}(r, b, a_0)$ und $H^{'}(r, b, a_0)$ für $r = \frac{1}{2b}$, womit die notwendigen Bedingungen für Extrema der Funktionen $G(r, b, a_0)$ und $H(r, b, a_0)$ an der Stelle $r = \frac{1}{2b}$ erfüllt sind.
Für verschiedene Paare $(b, a_0)$ finden wir mithilfe [27], dass $G(r, b, a_0)$ und $H(r, b, a_0)$ bei $r = \frac{1}{2b}$ ihr globales Maximum besitzen, können dies aber wegen der unhandlichen Funktion $F$, die in der Definition von $G$ und $H$ enthalten ist, nicht analytisch zeigen. Wir nehmen daher

$$(1.3.1) \quad G(r,b,a_0) \leq G(\frac{1}{2b}, b, a_0) \quad \wedge \quad H(r,b,a_0) \leq H(\frac{1}{2b}, b, a_0) \quad \forall\ r \in [0, \frac{1}{b}[$$

an. Nun betrachten wir die Funktionen $(b, a_0) \longmapsto G(\frac{1}{2b}, b, a_0)$ und $(b, a_0) \longmapsto H(\frac{1}{2b}, b, a_0)$ in [28]. Für fixiertes $b \in \mathbb{N}$, $50 \leq b \leq 101$ und verschiedene $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ liegen die Werte von $G(\frac{1}{2b}, b, a_0)$ und $H(\frac{1}{2b}, b, a_0)$ in einem schmalen Streifen der Breite $\approx 0.1$ um einen Hauptwert, unterscheiden sich damit nur unwesentlich in Abhängigkeit von $a_0$. Die Abweichung von diesem Hauptwert können wir nicht analytisch in Abhängigkeit von $a_0$ kontrollieren, sodass wir nur

$$(1.3.2) \quad G(\frac{1}{2b}, b, a_0) \text{ und } H(\frac{1}{2b}, b, a_0) \quad \text{hängen nicht/unwesentlich von } a_0 \text{ ab}$$

für alle $50 \leq b \leq 101$ annehmen können. Für diese $b$ entnehmen wir aus [29] die Abschätzungen

$$(1.3.3) \quad G(\frac{1}{2b}, b, a_0) < b^{27/77} - \epsilon \quad \wedge \quad H(\frac{1}{2b}, b, a_0) < b^{59/433} - \epsilon$$

für alle $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$, wobei wir nach (1.3.2) die Gültigkeit von (1.3.3) nicht mehr für alle $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ überprüfen müssen, sondern uns ein beliebiges $a_0$, z.B. $a_0 = 0$, auswählen können, wodurch unser Rechenaufwand wesentlich geringer wird. Ohne Aussage (1.3.2) müssten wir nämlich für jedes Paar $(b, a_0)$ mit $50 \leq b \leq 101$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$, also insgesamt $\sum_{b=50}^{101} b = [102 \cdot 101 - 50 \cdot 49]/2 = 3926$ mal, die Gültigkeit von (1.3.3) überprüfen. Mithilfe (1.3.2) dagegen nur für jedes $50 \leq b \leq 101$ bei fixiertem $a_0 = 0$, also insgesamt 52 mal.
Aus (1.3.3) und (1.3.1) kommt

$$(1.3.4) \quad G(r, b, a_0) < b^{27/77} - \epsilon \quad \wedge \quad H(r, b, a_0) < b^{59/433} - \epsilon$$

für alle $r \in [0, \frac{1}{b}[$ sowie $50 \leq b \leq 101$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$, womit sich nach Korollar 14.2 die Aussage ergibt.

$\square$

Je weiter wir die Schranke 50 in Theorem 1.3* nach unten verbessern wollen, desto schwächer wird vor allem die Annahme (1.3.2), d.h. für kleinere $b$ hängen die Werte von $G(\frac{1}{2b}, b, a_0)$ und $H(\frac{1}{2b}, b, a_0)$ doch immer wesentlicher von $a_0$ ab und die Breite des Streifens um einen Hauptwert, in dem diese Werte liegen, wird größer als 0.1. Dabei stellt die Annahme (1.3.1) nicht das Problem dar, den diese können wir bereits für $b \geq 10$ in [27] erkennen. Erstaunlich ist zudem, dass unter (1.3.1) und (1.3.2) nach [29] die Abschätzungen in (1.3.3) sogar für alle $b \geq 20$ gelten. Die Schranke 50 in Theorem 1.3* könnte mit etwas mehr Aufwand noch nach unten korrigiert werden. Wir belassen es aber dabei, da Theorem 1.3* ohnehin keinen Beweis darstellt.

Zur Bestimmung der ausgezeichneten Paare $(b, a_0)$ mit $10 \leq b \leq 49$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ können wir nun nicht mehr mithilfe Korollar 14.2 argumentieren. Wir müssen jedes der $\sum_{b=10}^{49} b = [50 \cdot 49 - 10 \cdot 9]/2 = 1180$ Paare einzeln untersuchen und entscheiden, ob die Definition 4.1 erfüllt ist. Ein entsprechender Code für $b = 10$ ist in [30], für $b = 11$ in [31] enthalten. Daraus folgt, dass alle Paare $(b, a_0)$ mit $b = 10$ oder $b = 11$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ ausgezeichnet sind. Der interessierte Leser möge die Vorgehensweise in diesen Codes nutzen, um gegebenenfalls weitere ausgezeichnete Paare $(b, a_0)$ mit $12 \leq b \leq 49$ zu ermitteln.

Für $b \in \{2, ..., 9\}$ können wir Theorem 1.1 nicht ohne Weiteres mit den vorgestellten Ideen nachweisen. Um nur eine Hürde zu nennen, weisen wir auf Lemma 4.7 hin, indem wir die Abschätzung $\frac{\log(b-1)}{\log b} > \frac{20}{21}$ verwenden, die nur für $b \geq 10$ gilt. Ein weiteres Hindernis ergibt sich aus der von Lemma 4.2-4.4 herrührenden Idee der Abschätzung der betragsmäßig größten Eigenwerte $\lambda_{b,a_0}(1, J)$ und $\lambda_{b,a_0}(\frac{235}{154}, J)$ für $J \in \mathbb{N}$. Wir müssen davon ausgehen, dass

$$\lambda_{b,a_0}(1, J) \leq b^{27/77} \quad \wedge \quad \lambda_{b,a_0}(\frac{235}{154}, J) \leq b^{59/433}$$

auch für hinreichend großes $J = J(b, a_0) \in \mathbb{N}$ nicht beide erfüllt sind, wenn $b \in \{2, ..., 9\}$ gilt. Im Fall $b = 10$, $J = 4$ und $a_0 = 4$ ist nämlich insbesondere die zweite Abschätzung mit $5 \cdot 10^{-6} > 10^{59/433} - \lambda_{10,a_0}(\frac{235}{154}, 4) > 0$ schon sehr scharf (vgl. dazu [30]). Dementsprechend müssten wohl die Exponenten 27/77 und 59/433 für $b \in \{2, ..., 9\}$ geändert werden, wodurch sich wiederum ein vollkommen anderer, womöglich kleinerer Typ II-Bereich in Kap. 6 ergibt und damit auch wesentlich andere Siebzerlegungen im Beweis von Theorem 1.1 nötig werden. Ob dieser veränderte Typ II-Bereich dann noch ausreichend groß für den Beweis von Theorem 1.1 ist, bleibt ungewiss. Die Frage, ob und in welchen Fällen Theorem 1.1 auch für Paare $(b, a_0)$ mit $b \in \{2, ..., 9\}$ Gültigkeit besitzt, wird in einem seperaten Artikel von mir behandelt.

Für eine fixierte Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 3$ und eine vorgegebene Ziffer $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ untersuchen wir nun die im Vergleich zu Theorem 1.1 schwächere Aussage

(∗) Die Menge $\mathcal{A}(x) := \{n < x \mid n \in \mathbb{N}_0$ hat in $b$-adischer Darstellung nur Ziffern $\neq a_0\}$ enthält für $x \longrightarrow \infty$ auch unendlich viele Primzahlen.

Unter stochastischen Aspekten können wir uns folgendes überlegen. Wir fixieren zunächst $x \in \mathbb{R}^+,\ x \geq b^b$, sodass ein $k \in \mathbb{N},\ k \geq 3$ mit $b^k \leq x < b^{k+1}$ existiert. Wegen

$$\mathcal{A}(x) \supseteq \mathcal{A}(b^k) \supseteq \{(n_{k-1}...n_0)_b \mid n_i \in \{0,...,b-1\}\backslash\{a_0\}\ \forall\ 0 \leq i \leq k-1\}$$

gilt nach einfacher Kombinatorik

$$\#\mathcal{A}(x) \geq (b-1)^k = (b^k)^{\frac{\log\,(b-1)}{\log\,b}} > (\frac{x}{b})^{\frac{\log(b-1)}{\log b}} = \exp(\log x \cdot \frac{\log\,(b-1)}{\log b} - \log(b-1)).$$

Dabei tritt im letzten $\supseteq$-Zeichen Gleichheit für $a_0 \neq 0$ ein, während für $a_0 = 0$ nur $\supset$ gilt.
Die Funktion $b \longmapsto \log x \cdot \frac{\log\,(b-1)}{\log b} - \log(b-1)$ ist streng monoton wachsend für $b \geq 3,\ x \geq b^b$, wobei wir dies mithilfe $x \geq b^b$ und der gleichen Aussage über die Funktion $b \longmapsto \frac{\log\,(b-1)}{\log b}$ erhalten.
mit wachsendem $b \geq 3,\ x \geq b^b$ zunimmt. Folglich steigt für größere $b$ die Wahrscheinlichkeit, dass viele Primzahlen aus $\mathbb{N}_0 \cap [0,x[$ auch in $\mathcal{A}(x)$ liegen, ebenso. Wir gehen somit davon aus, dass für größere $b$ die Aussage $(*)$ eher gilt als für kleinere.

Weiter können wir uns plausibel machen, dass die Gültigkeit von $(*)$ nur unwesentlich von der Wahl der ausgeschlossenen Ziffer $a_0$ abhängt. Sei also $a_0 \in \{0,...,b-1\}$ beliebig gewählt.
Eine Primzahl $p \in \mathcal{A}(x)$ mit der $b$-adischen Zifferndarstellung $p = (n_s....n_0)_b$ und $n_s \neq 0$ hat eine Einerziffer $n_0 \in \{n \in \{0,...,b-1\} \mid n \neq a_0,\ ggT(n,b) = 1\}$. Im Fall $ggT(a_0,b) \neq 1$ kommen also genau $\varphi(b)$ Werte für $n_0$ in Frage, im Fall $ggT(a_0,b) = 1$ sogar nur $\varphi(b) - 1$ Werte und dies sind in beiden Fällen größenordnungsmäßig gleich viele ($\Leftarrow \varphi(b) \asymp \varphi(b) - 1$ für $b \geq 3$).
Für alle anderen Ziffern $n_1,...,n_s$ ergeben sich aus der Primzahleigenschaft von $p$ keine (direkten) weiteren Einschränkungen, sodass für die Ziffern $n_i$ mit $1 \leq i \leq s-1$ jeweils $b-1$ Werte

und für die Ziffer $n_s$ genau $\begin{cases} b-2 & ,\ \text{falls } a_0 \neq 0 \\ b-1 & ,\ \text{falls } a_0 = 0 \end{cases}$ Werte zur Verfügung stehen.

Nach einfacher Kombinatorik kommen daher für $p = (n_s....n_0)_b \in \mathcal{A}(x)$ größenordnungsmäßig stets gleich viele $b$-adische Zifferndarstellungen in Frage ($\Leftarrow b-2 \asymp b-1$). Somit sollte die Zahl der Primzahlen in $\mathcal{A}(x)$ für $x \longrightarrow \infty$ und folglich $(*)$ nur unwesentlich von $a_0$ abhängen.

Diese beiden stochastischen Resultate decken sich mit unseren Ergebnissen in der Bestimmung ausgezeichneter Paare $(b, a_0)$ und damit dem Gültigkeitsbereich von Theorem 1.1, denn für

$b = 10$ oder $b = 11$ oder größere $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 102$ ist direkt jedes Paar $(b, a_0)$ mit $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ ausgezeichnet. In Analogie zu unseren stochastischen Resultaten bzgl. $(*)$ ist es ebenso wahrscheinlich, dass jedes Paar $(b, a_0)$ mit $b \geq 10$ und $a_0 \in \{0, ..., b-1\}$ insbesondere Theorem 1.1 genügt, denn die letzte Aussage gilt für $b = 10$.

Ferner erwarten wir, dass es eine kleinste untere Schranke $t_1 \in \mathbb{N}$, $t_1 \geq 3$ gibt, sodass alle Paare $(b, a_0)$ mit $b \geq t_1$ stets der Aussage $(*)$ genügen. Nach dem vorletzten Satz vermuten wir $t_1 \leq 10$, denn gilt Theorem 1.1 für eine Basis $b$ und eine Ziffer $a_0$, so folgt daraus direkt $(*)$.

Im noch übrigen Fall $b = 2$ liegen für $a_0 = 1$ in der Menge $\mathcal{A}(x)$ nur gerade Zahlen, denn als letzte Ziffer $n_0$ kommt nur 0 in Frage. Damit ist $(*)$ falsch und die Gültigkeit von $(*)$ hängt wesentlich von der Wahl von $a_0$ ab. Für $a_0 = 0$ gilt $\mathcal{A}(x) = \{2^s - 1 < x \mid s \in \mathbb{N}\}$ aufgrund der geometrischen Summenformel. Folglich ist $(*)$ gerade die Frage nach der Existenz unendlich vieler Primzahlen der Form $2^s - 1$, also der Existenz unendlich vieler Mersenne-Primzahlen. Letzteres konnte bisher noch nicht bewiesen werden. H.W.Lenstra und C.Pomerance vermuten jedoch, dass es $\asymp \exp(\gamma) \cdot \log_2(\log_2(x)) + O(1)$ Mersenne-Primzahlen $\leq x$ gibt.

# 15. Ausblick

Interessant erscheint die Frage nach einer Verallgemeinerung von Theorem 1.1 auf zwei oder mehr ausgeschlossene Ziffern. Eine solche könnte folgendes Theorem 2.1 sein.

**Theorem 2.1**:
Sei $b \in \mathbb{N},\ b \geq 3$ und $\mathcal{B} \subseteq \{0, ..., b-1\}$ mit $\#\mathcal{B} = s \in \mathbb{N},\ s \geq 2$ gegeben.
Für $X = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) = \{\sum_{i=0}^{k-1} n_i b^i < X \mid n_i \in \{0, ..., b-1\} \backslash \mathcal{B}\ \forall\ 0 \leq i \leq k-1\}.$$

Dann gilt

$$\#\{p \in \mathcal{A}(X)\} \asymp \frac{\#\mathcal{A}(X)}{\log X} \asymp \frac{X^{\log(b-s)/\log b}}{\log X}.$$

Eine etwas schwächere Version von Theorem 2.1 stellt Theorem 1.2 in [1, S.2] dar. Darin sind die einschränkenden Voraussetzungen, dass die Basis $b$ hinreichend groß und die Menge $\mathcal{B}$ bzw. $s = \#\mathcal{B}$ nicht zu groß in Abhängigkeit von $b$ gewählt ist, enthalten. Schließen wir dabei die Spezialfälle $\mathcal{B} = \{0, 1, ..., s-1\}$ oder $\mathcal{B} = \{b-s, b-s+1, ..., b-1\}$ aus, so muss $s \leq b^{23/80}$ gelten, um die entsprechende Aussage mit den vorgestellten Ideen nachweisen zu können.

Wir betrachten wieder für eine fixierte Basis $b \in \mathbb{N},\ b \geq 3$ und eine gegebene Menge $\mathcal{B} \subseteq \{0, ..., b-1\}$ mit $\#\mathcal{B} = s \geq 2$ die im Vergleich zu Theorem 2.1 schwächere Aussage

(∗∗) Die Menge $\mathcal{A}(x) := \{n < x \mid n \in \mathbb{N}_0$ hat in $b$-adischer Darstellung keine Ziffer aus $\mathcal{B}\}$ enthält für $x \longrightarrow \infty$ auch unendlich viele Primzahlen

unter stochastischen Aspekten. Analog zu Kap. 14 sehen wir, dass für ein fixiertes $x \in \mathbb{R}^+,\ x \geq b^b$ mit $b^k \leq x < b^{k+1}$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 3)$ und ein fest vorgegebenes $s \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq s = \#\mathcal{B} \leq b-1$ insbesondere die Abschätzung

$$\#\mathcal{A}(x) \geq (b-s)^k = (b^k)^{\frac{\log(b-s)}{\log b}} > (\frac{x}{b})^{\frac{\log(b-s)}{\log b}} = \exp(\log x \cdot \frac{\log(b-s)}{\log\ b} - \log(b-s))$$

gilt. Die Funktion $b \longmapsto \log x \cdot \frac{\log(b-s)}{\log b} - \log(b-s)$ ist ebenso streng monoton wachsend für $b \geq s+1$, $x \geq b^b$, weil dies auf $b \longmapsto \frac{\log(b-s)}{\log b}$ zutrifft und $x \geq b^b$ ist. Somit können wir annehmen, dass auch die Anzahl der Elemente in $\mathcal{A}(x)$ mit wachsendem $b \geq s+1$, $x \geq b^b$ zunimmt und folglich wohl ebenso die Anzahl der Primzahlen in $\mathcal{A}(x)$. Dies lässt Aussage $(**)$ für gegenüber $s$ größere $b$ wahrscheinlicher werden als für kleinere $b$ . Vermutlich existiert eine von $s$ abhängige untere Schranke für $b$, ab der Aussage $(**)$ erst wahr sein kann und die nicht aus der trivialen Abschätzung $b \geq s+1$ herrührt.

Damit wird auch die oben genannte Voraussetzung für Theorem 2.1, dass $s = \#\mathcal{B}$ nicht zu groß gegenüber $b$ sein darf bzw. $b$ hinreichend groß gegenüber $s$ sein muss, plausibel, denn dieses Theorem impliziert die Gültigkeit von $(**)$.

Ferner vermuten wir, ebenso wie in Kap. 14 für $s = 1$, die Existenz einer kleinsten unteren Schranke $t_s \in \mathbb{N}$, sodass für alle $b \in \mathbb{N}$, $b \geq t_s$ und alle Teilmengen $\mathcal{B} \subseteq \{0, ..., b-1\}$ mit $s = \#\mathcal{B}$ Elementen stets $(**)$ gilt. Dabei muss $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq ...$ sein.

Eine kurze Beweisskizze zur abgeschwächten Version von Theorem 2.1, also Theorem 1.2 in [1, S.2], findet sich in [1, S.42-43]. Dieser Nachweis verwendet ähnliche Abschätzungen wie der Beweis von Lemma 14.3.

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Peter Ullrich für die kompetente fachliche Betreuung während der Promotionsphase. In zahlreichen Fällen konnte er mir durch Gespräche neue Denkanstöße geben und so die Motivation wieder erhöhen. Außerdem bedanke ich mich bei Herrn Dr. James Maynard für den freundlichen Austausch per E-Mail über den Gültigkeitsbereich von Proposition 12.1 und das zur Verfügung stellen seiner beiden Mathematica-Codes.
Ebenso gilt mein Dank Herrn Dr. Christoph Heidrich, der mir während des einmonatigen Ausfalls meines Laptops seinen privaten zur Überbrückung auslieh und mir die Möglichkeit gab, in unregelmäßigen Abständen bei der Unfallkasse Rheinland-Pfalz zu arbeiten.

# Anhang

Die Lemmata und Propositionen in den Kapiteln 4-13 dieser Arbeit, welche hier für beliebige $b \geq 10$ formuliert sind, tragen die gleichen Bezeichnungen und Nummerierungen wie jene in [1], die dort den Spezialfall $b = 10$ behandeln. Es liegen die folgenden Querverbindungen zwischen den Aussagen in [18] und jenen in dieser Arbeit bzw. [1] vor:

| Aussage in [18] | Aussage in dieser Arbeit |
|---|---|
| Proposition 6.1 | Propostion 13.1 |
| Proposition 6.2 | Proposition 13.2 |
| Proposition 7.1 | Proposition 5.1 |
| Proposition 7.2 | Proposition 6.1 |
| Lemma 7.3 | Proposition 13.2 und 13.3 |
| Lemma 7.4 | Lemma 12.2 |
| Lemma 8.1 | Lemma 4.5 |
| Lemma 8.2 | Lemma 4.1 |
| Proposition 9.1 | Proposition 6.2 |
| Proposition 9.2 | Proposition 6.3 |
| Proposition 9.3 | Proposition 6.4 |
| Lemma 10.i | Lemma 4.i für i=1,...,7 |
| Lemma 12.1 | Lemma 8.1 |
| Lemma 12.2 | Lemma 8.2 |
| Lemma 13.1 | Lemma 9.1 |
| Lemma 13.2 | Lemma 9.2 |
| Proposition 13.3 | Proposition 9.3 |
| Proposition 13.4 | Proposition 9.4 |
| Lemma 14.1 | Lemma 10.1 |
| Lemma 15.1 | Lemma 11.1 |
| Lemma 15.2 | Lemma 11.2 |

Die Lemmata 14.2-4 aus [18] werden in dieser Arbeit direkt in den Nachweis von Proposition 9.3 eingebaut. Im folgenden Literaturverzeichnis haben sämtliche Internetquellen den Stand von August 2018, die Quelle [1] von April 2016.

# Literaturverzeichnis


[1] Primes with restricted Digits, James Maynard
https://www.arxiv.org/abs/1604.01041

[2] Analytische Zahlentheorie, Jörg Brüdern

[3] Opera de Cribro, volume 57 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*, John Friedlander and Henryk Iwaniec

[4] Multiplicative Number Theory Third Edition, Harold Davenport

[5] Funktionentheorie 1, 4.,korrigierte und erweiterte Auflage, E.Freitag R.Busam

[6] Digits of Primes, James Maynard

[7] Zahlentheoretische Funktionen und Primzahlen, Fabian Karwatowski

[8] Skript zur Vorlesung Lineare Algebra (4std.) WS 2014/15, Prof. Dr. Martin Möller
https://www.uni-frankfurt.de/52307848/LineareAlgebra_Skript.pdf

[9] https://lp.uni-goettingen.de/get/text/1089

[10] Diskrete Geometrie (3.1 Polytope und polyedrische Mengen), Rudolf Scharlau
http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~ algebra/DiskrGeom_2011-12/Materialien_DG/dg_kap3-1.pdf

[11] Gitter und Codes (3.1), Rudolf Scharlau 4.Juni 2009
http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~ scharlau/SoSe09/GC_Mat/gc3_1.pdf

[12] Gitter und Kryphtographie, Prof. Dr.C.P. Schnoor
https://www.math.uni-frankfurt.de/~ dmst/teaching/WS2011/Vorlesung/gitterAKTUELL.pdf

[13] Low-Dimensional Lattice Basis Reduction Revisited, Phong Q. Nguyen INRIA/Ecole Normale Superieure and Damien Stehle CNRS/Universities of Macquarie, Sydney and Lyon/ENS Lyon/INRIA
http://perso.ens-lyon.fr/damien.stehle/downloads/lowdim-final.pdf

[14] https://terrytao.wordpress.com/2008/09/23/the-divisor-bound/

[15] Der Dirichletsche Approximationssatz, Lukas-Fabian Moser
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~ lfmoser/ss13/dirichlet.pdf

[16] Sieve methods, Dimitris Koukoulopoulos University of Montreal
http://dms.umontreal.ca/~ koukoulo/documents/notes/sievemethods.pdf

[17] https://resources.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ss10/MFI2/kap50.pdf

[18] Primes with restricted Digits, Inventiones Mathematica, James Maynard

In den folgenden Mathematica-Codes entsprechen [19] sowie [30] im Wesentlichen denen in [18] unter Footnotes aufgeführten Codes und wurden von James Maynard für den Spezialfall $b = 10$ entwickelt.

## Liste der Mathematica-Codes

[19] Integral Estimates2, James Maynard

[20] Tangensabschätzung für Proposition 14.7

[21] analytisch beweisbare Abschätzung Teil 2a) (neu)

[22] analytisch beweisbare Abschätzung Teil 2b) (neu)

[23] graphische Darstellung der Funktion $v(x)$

[24] Wertetabelle der Funktion $v(x)$ für $x \in [0.190884, 0.190886]$

[25] analytisch beweisbare Abschätzung Teil 1) (neu)

[26] analytisch beweisbare Abschätzung Teil 3) (neu)

[27] Abschätzungen überprüfen für beliebige Basen Teil 1 (neu)

[28] Unabhängigkeit von der Wahl der fehlenden Ziffer

[29] Abschätzungen überprüfen für beliebige Basen Teil 2 (neu)

[30] Eigenwertberechnung Basis 10, James Maynard

[31] Eigenwertberechnung Basis 11

[32] Approximation der Maxima für Gneu (Basis 10)

[33] Approximation der Maxima für Gneu (Basis 11)

**Erklärung:**

Die eingereichte Dissertation habe ich selbstständig verfasst und alle relevanten Hilfsmittel und Quellen angegeben. Die Anteile externer Personen habe ich klar gekennzeichnet. Ich habe weder die Hilfe eines Beratungsdienstes in Anspruch genommen noch die Arbeit in einer anderen Hochschule im In- oder Ausland eingereicht. Zudem habe ich sie nicht als Prüfungsarbeit für eine staatliche oder wissenschaftliche Prüfung im In- oder Ausland verfasst. Mir ist bewusst, dass ein Verstoß gegen einen der aufgeführten Punkte ein Verlust des Doktortitels bedeuten und weitere rechtliche Konsequenzen nach sich ziehen.