

Euklidische (Raum-)Geometrie

Eine Axiomatisierung für Mathematiklehrkräfte

von

Yannick Rüdiger Lauer

aus Losheim am See

Angenommene Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
Fachbereich 3: Mathematik/Naturwissenschaften
Universität Koblenz

Gutachter: Prof. Dr. Rolfdieter Frank
Prof. Dr. Peter Ullrich

Prüfungskommission: Prof. Dr. Bernhard Köppen (Vorsitzender)
Prof. Dr. Rolfdieter Frank
Prof. Dr. Peter Ullrich

Tag der mündlichen Prüfung: 9. August 2023

Zusammenfassung

Die Geometrie unseres Anschauungsraumes – die euklidische Geometrie – ist für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht im Sinne von Winters (1995) Grunderfahrungen elementar. Seitens der Mathematiklehrkraft stellt ihr Fachwissen grundsätzlich das Fundament des Unterrichtens mit seinen (fach-)didaktischen Anforderungen dar. Als Teil ihres Professionswissens sollten Mathematiklehrkräfte prinzipiell über ein Fachwissen verfügen, das in Bezug zur akademischen Mathematik den unterrichtlichen Anforderungen der schulischen Mathematik gerecht wird.

Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte respektive axiomatisierte mathematische Theorie des *metrisch-normalen euklidischen Raumes* charakterisiert sich in ihrer perspektivischen Dualität, der mathematischen Stringenz eines axiomatisch-deduktiven Vorgehens auf der einen und der Berücksichtigung der fachdidaktischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte auf der anderen Seite. Intention der vorliegenden Arbeit ist eine mathematische Grundlagenarbeit, auf der die Entwicklung eines adäquaten (geometrischen) Fachwissens von Mathematiklehrkräften fließend erfolgen kann. In Zusammenhang zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene versteht sich die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes als räumliche Erweiterung.

Die Axiomatisierung hebt sich in ihrer perspektivischen Dualität von bestehenden Axiomatisierungen der euklidischen Geometrie ab. Letztere sind weitestgehend rein mathematisch orientiert. Die Abgrenzung gilt insbesondere auch gegenüber der mathematischen (Re-)Konstruktion von Lerninhalten im Sinne der Stoffdidaktik. Die vorliegende Arbeit erhebt den Anspruch, die Aspekte des Lehrens und Lernens von Geometrie mit einer mathematisch stringenten Axiomatisierung der euklidischen (Raum-)Geometrie zu verknüpfen.

Abstract

The geometry of our visual space – Euclidean geometry – is elementary for general mathematics education in the sense of Winter’s (1995) basic experiences. On the part of the mathematics teacher, their content knowledge basically represents the foundation of teaching with its (subject) didactic requirements. As part of their professional knowledge, mathematics teachers should, in principle, have content knowledge that meets the teaching requirements of school mathematics in relation to academic mathematics.

The mathematical theory of “metrisch-normale euklidische Raum” developed or axiomatised in the present work is characterised by its perspective duality, the mathematical stringency of an axiomatic-deductive procedure on the one hand and the consideration of the subject didactic requirements for mathematics teachers on the other. The intention of the present work is to provide a mathematical foundation on which the development of an adequate (geometric) content knowledge of mathematics teachers can take place fluently. In connection with the theory of “metrisch-normale euklidische Ebene” developed in my master’s thesis (2018), the theory of “metrisch-normale euklidische Raum” is understood as a spatial extension.

The axiomatisation stands out from existing axiomatisations of Euclidean geometry in its perspective duality. The latter are largely purely mathematically oriented. The demarcation also applies in particular to the mathematical (re)construction of learning content in the sense of subject matter didactics. The present work claims to link the aspects of teaching and learning geometry with a mathematically stringent axiomatisation of Euclidean (spatial) geometry.

Danksagung

Meinen Dank an Herrn Professor Dr. Frank möchte ich nicht auf die wissenschaftliche Betreuung der vorliegenden Arbeit einschränken. All meine Anliegen fanden stets ein offenes Ohr und Unterstützung – insbesondere dafür, herzlichen Dank!

Für die Übernahme der Zweitbetreuung danke ich Herrn Professor Dr. Ullrich. Insbesondere möchte ich mich für das Ermöglichen der ersten Treffen am Mathematischen Institut in Koblenz bedanken.

Herrn Professor Dr. Mattner danke ich besonders dafür, mit der Betreuung meiner Masterarbeit bei mir grundlegend das Bewusstsein für den „nächsten Schritt“ geschafft zu haben.

Für mein erworbenes Stipendium bedanke ich mich bei der Friedrich-Ebert-Stiftung e.V.

Schließlich danke ich meiner Mutter Heike, meinem Vater Jörg und meiner Freundin Alice. Dabei gehört meiner Mutter und meinem Vater der abschließende Dank: Euch beiden möchte ich an dieser Stelle für die ausnahmslose Unterstützung auf meinem Lebensweg danken!

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	iii
Abstract	v
Danksagung	vii
1 Einleitung	1
2 Das Fundament – mathematisch/fachdidaktisch	9
2.1 Curriculare Richtlinien	9
2.2 Axiomatische Grundlegung	13
2.2.1 Das Axiomensystem	15
2.2.2 Räumliche Erweiterung	22
3 Grundbegriffe	33
3.1 Punkte, Geraden und Ebenen	34
3.1.1 Inzidenz	34
3.1.2 Parallelität und Orthogonalität	41
3.1.3 Zwischensein	48
3.2 Der Begriff „Figur“: ebene und räumliche Figuren	51
3.2.1 Strecken/Halbgeraden; Halbräume und -ebenen	51
3.2.2 Winkel	63
3.2.3 Polygone; Sphären und Kreise	69
Spezialfall: Polyeder und weitere geometrische Körper	73
3.3 Abstand – Linealfunktionen	74
3.4 Kongruenz	79
4 Räumliche Kontextualisierungen	89
4.1 Kongruenz – Teil I	90
4.1.1 Punktspiegelungen	90
4.1.2 Translationen	99

4.2	Parallele und Orthogonale Geraden/Ebenen	108
4.2.1	Parallele Geraden/Ebenen	108
4.2.2	Orthogonale Geraden/Ebenen	114
4.3	Kongruenz – Teil II	126
4.3.1	Ebenenspiegelungen	126
4.3.2	Kongruenzabbildungen – Verkettung von Ebenenspiegelungen	135
4.3.3	Kongruenz geometrischer Figuren	144
4.4	Ähnlichkeit	152
4.4.1	Zentrische Streckungen	152
4.4.2	Ähnlichkeit – Ähnlichkeitsabbildungen	163
5	Geometrie zwischen Axiomatik und Anschauung	173
5.1	Der euklidische Raum – extern-perspektivisch	174
5.2	Der euklidische Raum – intern-perspektivisch	186
6	Schlussbetrachtungen	211
6.1	Die Güte der Axiomatik	211
6.2	Fazit & Ausblick	214
	Quellenverzeichnis	217

1 Einleitung

„Die Geometrie ist eines der ältesten und faszinierendsten Teilgebiete der Mathematik. Sie weist eine Fülle staunenswerter Sätze auf und besticht durch Ideenreichtum in den Beweisführungen wie auch durch die Ästhetik zeichnerischer Realisierungen von Lehrsätzen. Sie vermag in besonderer Weise ein Gefühl für die Schönheit der Mathematik zu vermitteln. Zugleich bewirkt sie eine unübertreffliche Schulung des Anschauungsvermögens [...]“ (Schröder 2014a, S. 10).

Auch für den allgemeinbildenden Mathematikunterricht lässt sich der besondere Stellenwert der Geometrie als mathematisches Teilgebiet aufzeigen. In Anlehnung an Winter (1995) zeichnet sich ein allgemeinbildender Mathematikunterricht durch drei Grunderfahrungen aus (vgl. Weigand 2018b, S. 3 f.). (1) Mit Hilfe der Mathematik lassen sich Zusammenhänge in unserer Umwelt beschreiben, wobei neben der reinen Anwendung auch die Frage nach dem „wie“ und „was“ in Bezug zur Entwicklung eines adäquaten mathematischen Modells in den Fokus rückt. (2) Die Mathematik versteht sich diesbezüglich als eine eigens entwickelte, deduktiv aufgebaute Wissenschaft. (3) Zugleich stellt sie ein Übungsgebiet zur Entwicklung bzw. Erweiterung sowohl intra- als auch interdisziplinärer heuristischer Strategien und Problemlösefähigkeiten dar. Grundsätzlich bestehen zwischen den einzelnen Grunderfahrungen wechselseitige Beziehungen (vgl. Winter 1995, S. 37). Die Geometrie mit ihrer „Schulung des Anschauungsvermögens“ (Schröder 2014a, S. 10) ist gemeinhin für jede der drei Grunderfahrungen elementar (vgl. Winter 1995, S. 39–43). Ein genuin geometrisches Aufgabenfeld umfasst die Grunderfahrung (1). In Bezug zur Grunderfahrung (3) unterstützt die Möglichkeit zur Veranschaulichung einerseits die Erschließung von Problemstellungen und andererseits die Reflexion von eigenen Lösungsansätzen (vgl. Winter 1995, S. 38 u. 43). Im Hinblick auf die Grunderfahrung (2) nimmt die Geometrie nach Winter (1995, S. 41) eine „Leitfunktion“ ein. Mit dem Buch „Die Elemente“ legt Euklid (ca. 365–300 v. Chr.) die Geometrie unseres Anschauungsraumes erstmals als mathematische Theorie im Sinne eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus dar – die euklidische Geometrie (vgl. Schröder 2014a, S. 13–15).¹ Im Allgemeinen fasst Euklid mit seinem Werk das damalige mathematische Wissen zusammen,

¹Sprechen wir (in Zusammenhang mit der euklidischen Geometrie) vom Anschauungsraum, so wird Bezug auf den uns umgebenden Raum, wie wir ihn wahrnehmen, genommen. Dieser ist nicht mit dem Realraum gleichzusetzen, der eine nicht-euklidische Geometrie erfordert (vgl. Filler 1993, S. 59 f. u. 230–232).

wobei er mit seiner Vorgehensweise den Grundstein für das axiomatisch-deduktive Arbeiten in der Mathematik legt (vgl. Weigand 2018a, S. 261). Dies bedeutet, basierend auf einzelnen als wahr vorausgesetzten Grundaussagen, den Axiomen, mittels logischen Schließens die jeweilige (mathematische) Theorie zu entwickeln (vgl. Mitschka 1977, S. 11 f.).

Zur Motivation & Zielsetzung

Fachwissen sowie fachdidaktisches Wissen von Lehrkräften zählt (neben dem pädagogischen Wissen) anlehnd an Shulmans (1986) zahlreich rezipierte fachunspezifische Taxonomie des Professionswissens zu dessen Kernkomponenten (vgl. Krauss et al. 2008, S. 226). „*Fachwissen ist die Grundlage, auf der fachdidaktische Beweglichkeit entstehen kann* [Hervorhebung im Original]“ (Baumert/Kunter 2006, S. 496; vgl. auch Krauss et al. 2011, S. 137; vgl. auch Ableitinger/Steinbauer 2022, S. 120). Die Frage, was explizit unter dem Fachwissen von Mathematiklehrkräften (der Sekundarstufe) zu verstehen ist, ist nicht abschließend beantwortet (vgl. Dreher et al. 2022, S. 298 u. 312).

Exemplarisch für die bestehenden Ansätze in der Professionsforschung sei der Ansatz der COACTIV-Studie in dieser Frage skizziert. Die Studie erfährt allgemein in der einschlägigen deutschsprachigen Forschungsliteratur weite Berücksichtigung (siehe hierzu beispielsweise Halverscheid et al. 2022). Eingebunden in die PISA-Studie des Jahres 2003/04 wurde in der COACTIV-Studie unter anderem das Fachwissen von Mathematiklehrkräften untersucht und zugleich in Zusammenhang mit den schülerseitigen² Ergebnissen gesetzt (vgl. Krauss et al. 2008, S. 223 f.). Entsprechend stand zu Beginn die Frage, was unter dem Fachwissen von Mathematiklehrkräften zu verstehen ist (vgl. Krauss et al. 2008, S. 237). Grundlegend differenzieren Krauss et al. (2008, S. 237) „mathematisches Fachwissen“ in vier Kategorien, von einem mathematischen Alltagswissen bis hin zu einem akademischen Wissen. Das Fachwissen von Lehrkräften charakterisieren sie als ein Fachwissen zwischen einem rein schulischen und akademischen Wissen (vgl. Krauss et al. 2008, S. 237). Mathematiklehrkräfte sollten über ein Fachwissen verfügen, das sich an den mathematischen und didaktischen Anforderungen des Unterrichts orientiert, im Niveau jedoch über das des Unterrichts hinausgeht (vgl. Krauss et al. 2008, S. 237 f.).

²An dieser Stelle wie auch an weiteren Stellen der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich aus Gründen der besseren Lesbarkeit die Form des männlichen bzw. männlichen und weiblichen Genus verwendet. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass stets an alle Geschlechter gedacht wird.

Über die Professionsforschung hinaus nehmen Dreher et al. (2022) zur Untersuchung der Fragestellung, „Welches Fachwissen brauchen Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe“, auch die mathematikdidaktische Forschung zur Ausbildung von Mathematiklehrkräften in den Blick. Dreher et al. (2022) charakterisieren ein „schulbezogenes Fachwissen“, ein „berufsspezifische[s] Fachwissen über Zusammenhänge zwischen schulischer und akademischer Mathematik [...]“ (Dreher et al. 2022, S. 306). Die Zusammenhänge umfassen nach Dreher et al. (2022, S. 306–308) sowohl die „Top-down-Richtung“ als auch die „Bottom-up-Richtung“, also Zusammenhänge ausgehend von der akademischen Mathematik in Richtung der Schulmathematik und umgekehrt. Weiter schließen Dreher et al. (2022, S. 307) in diesem Zusammenhang ein „Curriculares Wissen“ in das Konzept mit ein, ein akademisch begründetes Wissen zur Struktur des schulischen Themenkanons. Gemeinhin stellt die akademische Mathematik stets den zentralen Bezugspunkt dar (vgl. Dreher et al. 2022, S. 309).

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es: einen axiomatisch-deduktiven Aufbau der euklidischen Geometrie unter Berücksichtigung der fachdidaktischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte der allgemeinbildenden Sekundarstufe I und II zu entwickeln, betont ohne die mathematische Stringenz eines axiomatisch-deduktiven Vorgehens aufzugeben. Intention ist, dass auf dieser Grundlage ein Übergang zu einem adäquaten (geometrischen) Fachwissen für Mathematiklehrkräfte fließend erfolgen kann, und letztlich Mathematiklehrkräfte in ihrem didaktischen Gestaltungsspielraum uneingeschränkt sind. In Bezug zur euklidischen Geometrie der Ebene liegt ein entsprechender axiomatisch-deduktiver Aufbau mit meiner Masterarbeit unter dem Titel „Ebene Euklidische Geometrie. Eine Grundlage für den Geometrieunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe I und II“ (Lauer 2018) vor. Hierauf basierend verfolgt die vorliegende Arbeit eine räumliche Erweiterung.

Grundsätzlich existieren zahlreiche (Forschungs-)Arbeiten, die verschiedene Möglichkeiten eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus der euklidischen Geometrie liefern (vgl. Filler 1993, S. 124). Die Gesamtheit widerzuspiegeln, wird dem vorliegenden Forschungsvorhaben nicht gerecht. Vielmehr soll in Bezug zur bestehenden Forschungsliteratur die Zielsetzung und hiermit die Singularität des Forschungsvorhabens, insbesondere im Hinblick auf die Berücksichtigung der fachdidaktischen Perspektive, verdeutlicht werden. Diesbezüglich sei die in weiten Teilen fachmathematische Orientierung der Forschungsliteratur mit Hilberts (1987)

„Grundlagen der Geometrie“ aufgegriffen. Dabei weist die Arbeit vor dem Hintergrund ihres historischen Aspekts eine besondere mathematische Strenge auf, und findet hier zugleich aufgrund ihrer historischen Bedeutung Berücksichtigung. Ferner sei mit Holland (1974; 1977) eine Arbeit aufgegriffen, die in ihrer Zielsetzung auf den ersten Blick im Vergleich zur vorliegenden Arbeit ähnlich erscheint, sich jedoch im Wesentlichen unterscheidet.

Die euklidische Geometrie ist wie eingangs aufgegriffen erstmals mit Euklids „Elementen“ als mathematische Theorie im Sinne eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus dargelegt. Allerdings wird die Vorgehensweise nicht den heutigen mathematisch-logischen Ansprüchen gerecht (vgl. Filler 1993, S. 55). Mitunter nutzt Euklid Aussagen, die nicht axiomatisch begründet oder deduktiv herzuleiten sind (vgl. Schröder 1985, S. 12). Zum anderen stützt Euklid grundlegende geometrische Begriffe allein auf unserer Anschauung (vgl. Filler 1993, S. 55 f.). Neben David Hilbert (*1862, †1943) bemühte sich insbesondere Moritz Pasch (*1843, †1930) um die Entwicklung einer euklidischen Geometrie, die mathematisch formalen und logischen Ansprüchen gerecht wird (vgl. Wußing 2009, S. 172 f.). Im Jahr 1899 legt David Hilbert schließlich mit seinem Buch „Grundlagen der Geometrie“ (Hilbert 1987; Erstauflage 1899) einen entsprechenden axiomatisch-deduktiven Aufbau der euklidischen Geometrie zugrunde (vgl. Filler 1993, S. 55). Die von Hilbert vertretene streng formalistische Auffassung zeichnet sich im Kern dadurch aus, dass sich die Theorie implizit-axiomatisch aufbaut; die Theorie entwickelt sich alleine aus sich heraus, ohne auf Bestehendes, andere mathematische Theorien zurückzugreifen (vgl. Wußing 2009, S. 172–177). Im Besonderen werden selbst die grundlegenden Begriffe mittels derer in den Axiomen beschriebenen Zusammenhänge charakterisiert, nicht explizit definiert (vgl. Wußing 2009, S. 172–177). Eine Folge seiner streng formalistischen Auffassung, verbunden mit seiner Zielsetzung die euklidische Geometrie erstmals mathematisch exakt darzulegen, ist unter anderem, dass Hilbert (1987) die Geometrie möglichst ohne Verwendung der Theorie der reellen Zahlen darlegt (vgl. auch Filler 1993, S. 130–133). Den Bezug zur Theorie der reellen Zahlen impliziert er aus der Geometrie heraus, in Zusammenhang mit der „Längenmessung“ am Ende seiner axiomatischen Grundlegung (vgl. auch Filler 1993, S. 132 f.). Exemplarisch für ein mathematisches Vorgehen, das unter fachdidaktischen Gesichtspunkten an dieser Stelle der vorliegenden Arbeit vorerst in Frage gestellt sei. Gleichwohl sei betont, dass die fachmathematische Forschung (die mitunter auch Bestrebungen in Richtung der Mathematiklehrkräfte erkennen lässt) zur Konzeption einer Axiomatisierung der euklidischen Geometrie unter fachdidaktischen Gesichtspunkten grundsätzlich die notwendige Basis darstellt. Diesbezüglich zeigen sich im Rahmen der vor-

liegenden Arbeit die Arbeiten von Schröder (1985; 2014a; 2014b) sowie Birkhoff (1932) als relevant. Insbesondere die erstgenannte bildet eine zentrale Grundlage meiner Masterarbeit (2018) sowie der vorliegenden Arbeit.

Explizit für Lehrkräfte der Sekundarstufe I entwickelt Holland (1974; 1977) unter dem Titel „Geometrie für Lehrer und Studenten“ in zwei Bänden einen axiomatisch-deduktiven Aufbau der euklidischen Geometrie der Ebene. Hollands (1974) Arbeit versteht sich als eine stoffdidaktische Arbeit im klassischen Sinne, einer mathematischen (Re-)Konstruktion einzelner Lernsequenzen (vgl. hierzu Biehler/Blum 2016, S. 2). In diesem Zusammenhang spricht Holland (1974, S. 7) von einer „Hintergrundstheorie“ des Geometrieunterrichts; Intention ist die Entwicklung von Lernsequenzen aus der Hintergrundstheorie heraus (vgl. Holland 1974, S. 8 f.). Die mathematische Stringenz fordert Holland (1974, S. 7–10) unter diesem Gesichtspunkt für sein axiomatisch-deduktives Vorgehen nicht in letzter Konsequenz. Das vorliegende Forschungsvorhaben erhebt im Vergleich den Anspruch, die Aspekte des Lernens *und* Lehrens der Geometrie (etwa nach Weigand et al. 2018) mit einem aus mathematischer Perspektive stringenten Aufbau der euklidischen Geometrie zu verknüpfen. Intention ist nicht die Entwicklung von Lernsequenzen aus der Theorie heraus. Ziel ist die Entwicklung einer mathematischen Grundlage für Mathematiklehrkräfte, in dem Sinne, dass diese ein adäquates Fachwissen ausbilden und letztlich in ihrem didaktischen Gestaltungsspielraum uneingeschränkt sind.

Zum Aufbau

Das Zusammendenken der fachdidaktisch-geometrischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte der allgemeinbildenden Sekundarstufe zum einen mit der Entwicklung einer stringenten Axiomatisierung der euklidischen (Raum-)Geometrie zum anderen durchzieht grundsätzlich den Aufbau der vorliegenden Arbeit, im Sinne ihrer Zielsetzung.

Das *Kapitel 2* stellt das „Fundament – mathematisch/mathematikdidaktisch“ dar. Auf der mathematikdidaktischen Seite erfolgt eine Analyse der jeweils geltenden Bildungsstandards für den Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe (siehe Kapitel 2.1). Im Einzelnen fachdidaktisch diskutiert wird diese im Fortgang der Arbeit, letztlich entsprechend in die Axiomatisierung integriert. Auf der mathematischen Seite wird die Theorie des „metrisch-normalen euklidischen Raumes“ – die in der vorliegenden Arbeit dargelegte Theorie – axiomatisch zugrunde gelegt (siehe Kapitel 2.2).

Gegenstand von *Kapitel 3* sind die „Grundbegriffe“. Dabei wird das Verständnis von dem, was unter einem Grundbegriff verstanden wird, vor dem fachdidaktischen Hintergrund der vorliegenden Arbeiten weiter gefasst als unter rein mathematischer Betrachtung.

Das *Kapitel 4* steht unter dem Leitgedanken der „Räumlichen Kontextualisierung“. Der Leitgedanke versteht sich, wie er sich auch für den Geometrieunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe als leitend zeigt; es werden weniger explizit raumgeometrische Frage- bzw. Problemstellungen eröffnet, vielmehr ausgehend von der ebenen Geometrie Zusammenhänge zur räumlichen Geometrie untersucht.

In *Kapitel 5* wird die „Geometrie zwischen Axiomatik und Anschauung“ beleuchtet. Zum einen erfolgt der Nachweis, dass die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie des „metrisch-normalen euklidischen Raumes“ eine Theorie der euklidischen (Raum-)Geometrie in dem Sinne ist, dass der Anschauungsraum (dessen mathematisches Modell) ein Modell der Theorie darstellt (siehe Kapitel 5.1). Zum anderen erfolgt der Nachweis, dass der Übergang zum euklidischen Anschauungsraum aus der Theorie selbst heraus möglich ist (siehe Kapitel 5.2). Die Untersuchung beider Perspektiven ist sowohl mathematisch als auch fachdidaktisch motiviert. Mathematisch eröffnet sich dies speziell erst mit der abschließenden Diskussion der vorliegenden Arbeit (*Kapitel 6*) in der Frage nach der Güte der entwickelten Axiomatisierung.

Bewusst wird in der vorliegenden Arbeit auf die Verwendung von Abbildungen zur Veranschaulichung von mathematischen Zusammenhängen bzw. Herleitungen der untersuchten mathematischen Theorie verzichtet. Der Grund: Mathematisch ist das Ziel der Arbeit eine stringente Axiomatisierung der euklidischen (Raum-)Geometrie, die zwar letztlich eine mathematische Theorie unseres Anschauungsraumes beschreibt, sich jedoch in der Argumentation rein logisch entwickelt. In der Verwendung von Abbildungen besteht diesbezüglich die Gefahr, dass die deduktive Stringenz durch eine anschauungsbasierte Argumentation ersetzt respektive in Teilen ersetzt wird. Gleichwohl sei auf die etwaige Unterstützung von eigens erstellten (Beweis-)Skizzen zum Verständnis deduktiver Schlussfolgerungen bzw. Zusammenhänge hingewiesen.

Die Axiomatisierung einer (mathematischen) Theorie bedingt, dass die für die Theorie relevanten Objekte und Zusammenhänge sukzessiv erarbeitet werden. Die mathematischen Voraussetzungen beschränken sich in der vorliegenden Arbeit hier auf die (universitären)

Grundlagen eines Mathematikstudiums bzw. eines Mathematikstudiums für das Lehramt der Sekundarstufe. Zur mathematischen Notation seien in Anlehnung an meine Masterarbeit (2018) zusätzlich zwei Anmerkungen getroffen. Für eine Funktion $f: A \rightarrow B$ werden zur Symbolisierung der Bilder und Urbilder von Mengen „eckige“ statt „runde“ Klammern verwendet: $f[X] := \{f(x) \in B: x \in X\}$ sowie $f^{-1}[Y] := \{x \in A: f(x) \in Y\}$ für $X \subseteq A, Y \subseteq B$. Zweitens wird für eine einelementige Menge A mit eben genau einem Element a das jeweilige Element mitunter wie folgt symbolisiert: $\{\cdot\}^{-1}(A) := a$.

2 Das Fundament – mathematisch/fachdidaktisch

Zur Entwicklung eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus der euklidischen (Raum-)Geometrie unter Berücksichtigung der fachdidaktischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte der allgemeinbildenden Sekundarstufe sind eingangs zwei Fragen zu erläutern: Wie gestaltet sich die „axiomatische Grundlage“? (Siehe Kapitel 2.2.) Welche curricularen Vorgaben (insbesondere im Hinblick auf die Raumgeometrie) bestehen, die letztlich im Speziellen fachdidaktisch einzuordnen sind? (Siehe Kapitel 2.1.)

2.1 Curriculare Richtlinien

Die Zuständigkeit für das allgemeinbildende Schulwesen folgt dem föderativen Aufbau der Bundesrepublik Deutschland (vgl. Sekretariat-KMK 2021, S. 23). Zum Zwecke der Qualitätsentwicklung und -sicherung verabschiedete die Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Kultusministerkonferenz; KMK) im Jahre 1997 den Konstanzer Beschluss (vgl. KMK 1997). Infolgedessen zeigten sich Leistungsunterschiede sowie allgemeine Leistungsdefizite der Schülerinnen und Schüler (vgl. KMK 2005, S. 5 u. 9 f.). Eine curricular normative Konsequenz bildeten die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Primarstufe (Grundschule), Sekundarstufe I und Sekundarstufe II (gymnasiale Oberstufe) des allgemeinbildenden Schulwesens (vgl. Blum et al. 2015, S. 12 f.). Die Bildungsstandards erläutern die Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler an den jeweiligen Übergangs- bzw. Abschlusstufen des allgemeinbildenden Schulwesens beherrschen sollten, sowie die Inhalte respektive Themen, anhand derer die Kompetenzen zu erwerben sind (vgl. KMK 2005, S. 9). Kompetenzen verstehen sich hier in erster Linie als Problemlösefähigkeiten (vgl. Blum 2015, S. 16; KMK 2005, S. 16). Die Vorgaben der Bildungsstandards stellen eine bindende Grundlage der länderspezifischen Lehrpläne dar (vgl. Sekretariat-KMK 2021, S. 246). Bezüglich der allgemeinbildenden Sekundarstufe I verabschiedete die Kultusminis-

terkonferenz in den Jahren 2003 bzw. 2004 Bildungsstandards für den Hauptschul- und Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik (vgl. KMK 2005, S. 5); im Jahr 2022 wurden diese zu den Bildungsstandards für den Ersten Schulabschluss und Mittleren Schulabschluss in einem Dokument zusammengefasst, weiterentwickelt und präzisiert (vgl. KMK 2022, S. 2 f.). Bezüglich der allgemeinbildenden Sekundarstufe II verabschiedete die Kultusministerkonferenz (2012) im Jahr 2012 Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife, die an die Bildungsstandards für die Sekundarstufe I anknüpfen (vgl. hierzu KMK 2012, S. 12).

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik differenzieren zwischen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen (vgl. Blum 2015, S. 18). Die prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife umfassen das mathematische Argumentieren, Kommunizieren, Modellieren, Lösen von Problemen sowie das Verwenden von mathematischen Darstellungen und den formalen Umgang mit der Mathematik (vgl. KMK 2012, S. 14–17), ergänzt in den Bildungsstandards für den Ersten Schul- und Mittleren Schulabschluss um das mathematische Arbeiten mit Medien (vgl. KMK 2022, S. 9–14). Die prozessbezogenen Kompetenzen verstehen sich als mathematische Kompetenzen in einem universellen Sinne (vgl. Blum 2015, S. 20). Sie sind in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten zu erwerben (vgl. Blum 2015, S. 18). Inhaltlich differenzieren die Bildungsstandards der KMK (2012, S. 18–21) und KMK (2022, S. 15–23) fünf Leitideen: Algorithmus und Zahl bzw. Zahl und Operation; Messen bzw. Größen und Messen; Raum und Form; Funktionaler Zusammenhang bzw. Strukturen und funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall. Dabei sind Leitideen und mathematische Fachgebiete zu unterscheiden (vgl. Blum 2015, S. 21). Vielmehr soll die Gliederung in Leitideen hier das Vernetzende unterstreichen (vgl. Roppelt et al. 2019, S. 28). Zwischen einzelnen Leitideen und Fachgebieten sind gleichwohl direktere Bezüge zu erkennen (vgl. Roppelt et al. 2019, S. 28). Die (Raum-)Geometrie ist nach den Bildungsstandards der KMK (2012, S. 18–21) und KMK (2022, S. 15–23) insbesondere in den Leitideen *Raum und Form* sowie *Messen* verankert.

Sofern nicht anders angemerkt liegen der nachfolgenden Analyse der curricularen Vorgaben für die allgemeinbildende Sekundarstufe I und II die jeweiligen Bildungsstandards der KMK (2012) und KMK (2022) zugrunde. Der Prozess der Analyse wurde von einer Gegenüberstellung der länderspezifischen Lehrpläne begleitet, um etwaige in der Umsetzung der Bildungsstandards konsensbildende, für die vorliegende Arbeit relevante Besonderheiten berücksichtigen zu können – was sich nicht zeigte. (Auf die Darlegung der Gegenüberstellung aller länderspezifischen Lehrpläne, die sich wiederum in verschiedene Schulformen differenzie-

ren, wird auch im Sinne der Übersichtlichkeit verzichtet. Zugriff auf die aktuellen Lehrpläne der Bundesländer ist über den Deutschen Bildungsserver (DBS 2022) möglich.)

Sekundarstufe I

Zentral für die Leitidee „Raum und Form“ ist die deskriptive Raumwahrnehmung hin zur Entwicklung eines räumlichen Vorstellungsvermögens (vgl. Roth/Wittmann 2018, S. 107). Räumlich-visuelle Wahrnehmungen als mental reproduzierbare Bilder zu generieren sowie die noch wesentlichere Fähigkeit, Variationen dieser Bilder gedanklich zu erzeugen, zeichnen das räumliche Vorstellungsvermögen aus (vgl. Maier 1999, S. 11–14; Roth/Wittmann 2018, S. 137 f.). In direktem Zusammenhang steht hierzu als weiterer zentraler Aspekt der Leitidee „Raum und Form“, die Auseinandersetzung mit geometrischen Objekten, deren Eigenschaften und Relationen in der (Anschauungs-)Ebene und im (Anschauungs-)Raum; dies gilt einerseits im Sinne der (Weiter-)Entwicklung und andererseits im Sinne der Vertiefung des räumlichen Vorstellungsvermögens (vgl. Roth/Wittmann 2018, S. 107). In Bezug zur Auseinandersetzung mit geometrischen Objekten, Relationen und Abbildungen lässt sich in den Bildungsstandards eine Differenzierung der Leitidee in eine eher „konstruierende“ sowie eine eher „analysierende“ Geometrie (Roppelt et al. 2019, S. 29) erkennen. Das Darstellen von geometrischen Abbildungen fordern die Bildungsstandards unter exemplarischer Nennung von Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und zentrischen Streckungen. Explizit in Bezug zur Raumgeometrie fordern die Bildungsstandards, dass Schülerinnen und Schülern geometrische Körper in verschiedenen Darstellungsformen darlegen sowie aus verschiedenen Darstellungsformen identifizieren. Unter den Darstellungsformen sind Netze, Schrägbilder und Modelle sowie exemplarisch als betreffende geometrische Körper das Prisma und die Pyramide genannt. Auf Seite der analysierenden Geometrie stehen die Charakteristika geometrischer Objekte, geometrische Eigenschaften und Relationen im Fokus. In diesem Zusammenhang hebt die KMK (2022, S. 21) stichpunktartig die Lagebeziehungen, Kongruenz und Ähnlichkeit hervor, in weiten Teilen die, die euklidische (Schul-)Geometrie charakterisierenden Elemente (vgl. hierzu Wußing 2009, S. 169 f.). Die Anforderungen für den Mittleren Schulabschluss der Bildungsstandards unterscheiden sich von denen für den Ersten Schulabschluss darin, dass gemeinhin das Begründen und Herleiten von geometrischen Zusammenhängen sowie der verstärkte Fokus auf Problemlösesituationen Bestandteil der Bildungsstandards ist.

Die Forderung „[...] Sätze der ebenen Geometrie [...] bei Berechnungen [...]“ (KMK 2022, S. 21) anzuwenden, sei an dieser Stelle zitiert. Die KMK (2022) schlägt damit innerhalb der Bildungsstandards eine Brücke von der Leitidee „Raum und Form“ zur Leitidee „Messen“. Die Auseinandersetzung mit Volumina und Oberflächeninhalten von geometrischen Körpern stehen hinsichtlich der Raumgeometrie im Mittelpunkt der Leitidee „Messen“. In diesem Zusammenhang spiegelt das angeführte Zitat zugleich einen Aspekt wider, der den Raumgeometrieunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe I in weiten Teilen charakterisiert, wie sich implizit an weiteren Stellen der Bildungsstandards sowie letztlich auch in deren Umsetzung innerhalb der länderspezifischen Curricula zeigt: In Bezug zur Raumgeometrie sind weniger explizit raumgeometrische Problem- und Fragestellungen zu eröffnen, vielmehr sind ausgehend von der (Anschauungs-)Ebene Zusammenhänge zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie zu diskutieren. Anhand der schleswig-holsteinischen Fachanforderungen (MSB-SH 2014) für die allgemeinbildende Sekundarstufe I sei dies exemplarisch erläutert. Laut den Fachanforderungen sollen Schülerinnen und Schüler des mittleren bzw. gymnasialen Bildungsganges die Kongruenzsätze für Dreiecke unter anderem zur Bestimmung von Streckenlängen in geometrischen Körpern nutzen (vgl. MSB-SH 2014, S. 26). Beispielsweise kann dies im Rahmen von Volumenbestimmungen notwendig werden. Dabei bedingt die Anwendung der Kongruenzsätze die Frage, ob die Kongruenzsätze an Dreiecken im räumlichen Kontext gelten, eine räumliche Kontextualisierung möglich ist.

Sekundarstufe II

Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife knüpfen an die der allgemeinbildenden Sekundarstufe I an, wobei sie sich in ein grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau differenzieren (vgl. KMK 2012, S. 12 f.). Das grundlegende Anforderungsniveau beschreibt den mathematischen Unterrichtskern der Sekundarstufe II, der in seiner Vertiefung und inhaltlichen Erweiterung das erhöhte Anforderungsniveau charakterisiert (vgl. KMK 2012, S. 13 u. 18). Grundsätzlich ist das Fach Mathematik nach Beschluss der Kultusministerkonferenz in einem der beiden Anforderungsniveaus zu belegen (vgl. KMK 2021, S. 8 f.). Die KMK (2012, S. 18) eröffnet zudem die Möglichkeit einer thematischen Schwerpunktsetzung, hinsichtlich der Geometrie stellt das Themenfeld „Matrizen“ eine Alternative dar. Anlehnend an die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit wird im Weiteren von einer (raum-)geometrischen Schwerpunktsetzung ausgegangen.

Den Geometrieunterricht der gymnasialen Oberstufe zeichnet nach den Bildungsstandards eine Geometrie aus, die die Geometrie der Sekundarstufe I aufgreift und mittels linear-algebraischer Methoden beschreibt. Treffend charakterisieren Henn/Filler (2015, S. 160) gemeinhin die Funktion der Analytischen Geometrie: „Die Analytische Geometrie [...] ist weniger ‚neuer Inhalt‘ als eine ‚neue Methode‘ [...]“. Die Beschreibung geometrischer Objekte und Relationen sowie im Allgemeinen der (Anschauungs-)Ebene und des (Anschauungs-)Raumes mittels linear-algebraischer Methoden steht entsprechend im Mittelpunkt der Leitidee „Raum und Form“, insbesondere unter dem Aspekt, dass die Schülerinnen und Schüler ihr in der Sekundarstufe I erworbenes räumliches Vorstellungsvermögen weiterentwickeln und vertiefen. Explizit nennen die Bildungsstandards die analytisch-geometrische Beschreibung von Geraden und Ebenen sowie die Untersuchung der Lagebeziehungen zwischen Geraden, für das erhöhte Anforderungsniveau zusätzlich die Untersuchung der Lagebeziehung zwischen Geraden und Ebenen. Weiter konzentriert sich die Leitidee „Messen“ in geometrischer Hinsicht auf die Größenbestimmung von ebenen-geometrischen Größen mittels des Skalarproduktes im raumgeometrischen Kontext; die Bildungsstandards führen die Längen- und Winkelgrößenbestimmung sowie für das erhöhte Anforderungsniveau zusätzlich die Abstandsbestimmung zwischen Punkten, Geraden und/oder Ebenen an. Ausdrücklich verweisen sie darauf, dass keine Raumwinkel zu thematisieren sind. Dies steht in Bezug zu dem Leitgedanken, der sich bereits für den Geometrieunterricht der Sekundarstufe I zeigt, und zwar dass weniger explizit raumgeometrische Problem- und Fragestellungen zu eröffnen, vielmehr ausgehend von der ebenen Geometrie Zusammenhänge zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie zu diskutieren sind.

2.2 Axiomatische Grundlegung

„[D]ie grundlegende Methode der Mathematik besteht im logischen Schließen: aus einer oder mehreren Aussagen (‚Sätzen‘) deduzieren wir allein nach den Gesetzen der Logik neue Aussagen (‚Sätze‘)“ (Mitschka 1977, S. 11). Mit Blick auf den Aufbau einer mathematischen Theorie stellt sich die Frage nach dem Fundament der logischen Deduktion. Welche Grundaussagen, *Axiome*, werden ohne Beweis als wahr vorausgesetzt und markieren als System, *Axiomensystem*, den Beginn des logisch-deduktiven Schließens? Entscheidend ist die mit der Axiomatisierung verfolgte Intention. (Vgl. zum Abschnitt Mitschka 1977, S. 12 u. 37.)

Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Axiomatisierung der euklidischen (Raum-)Geometrie unter Berücksichtigung der fachdidaktischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte der allgemeinbildenden Sekundarstufe; die Arbeit erhebt den Anspruch einen aus mathematischer Perspektive stringenten Aufbau der euklidischen (Raum-)Geometrie mit den Aspekten des Lehrens und Lernens von Geometrie zu verknüpfen. So ist etwa auf der einen Seite eine inhaltliche Auseinandersetzung basierend auf den „Curricularen Richtlinien“ (2.1) zentral. Gleichwohl ist auf der anderen die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems als zentrales (mathematisches) Kriterium zu berücksichtigen. Im Allgemeinen ist das zugrunde Legen des Axiomensystems durch ein gewisses „Vordenken“ geprägt, das ganzheitlich mitunter erst im Verlauf der Arbeit erläutert wird respektive erläutert werden kann.

Eine direkte Kausalität ergibt sich aus dem für den Geometrieunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe charakteristischen Perspektivwechsel zwischen (Anschauungs-)Ebene und (Anschauungs-)Raum (siehe Kapitel 2.1). Auch im Hinblick auf unsere Raumwahrnehmung spiegelt eine Raumgeometrie, die die ebene Geometrie integriert und zugleich die restriktive Betrachtung dieser erlaubt, den perspektivischen Wechsel wider. Schließlich ergibt sich für die euklidische Raumgeometrie der vorliegenden Arbeit in ihrer Beziehung zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene als eben-geometrisches Pendant die Anforderung, dass...

- innerhalb der euklidischen Raumgeometrie Ebenen mittels metrisch-normaler euklidischer Ebenen beschrieben sind,
- zum anderen die Restriktion innerhalb des Raumes auf eine (metrisch-normale euklidische) Ebene zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene strukturgleich ist.

Im Weiteren verstehen wir die vorliegende Arbeit in diesem Zusammenhang als „Räumliche Erweiterung“ (2.2.2) einer metrisch-normalen euklidischen Ebene. „Das Axiomensystem“ (2.2.1) findet entsprechend seine Grundlage in der Axiomatik einer metrisch-normalen euklidischen Ebene. Die aufgeführten Aspekte zur Raumerweiterung folgern wir in Kapitel 2.2.2 zum anderen recht direkt (ohne umfassenderes Deduzieren) aus dem konzipierten Axiomensystem, sodass die räumliche Erweiterung, zu ihrer Bedeutung für den Geometrieunterricht analog, als Teil der axiomatischen Grundlegung aufgefasst wird.

2.2.1 Das Axiomensystem

Die Axiomatik der euklidischen Raumgeometrie orientiert sich in der vorliegenden Arbeit an der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene. Grundsätzlich ist hier der Aspekt der „Räumlichen Erweiterung“ (2.2.2) elementar. Im vorliegenden Kapitel legen wir die in der vorliegenden Arbeit untersuchte Raumgeometrie, die Theorie des „*metrisch-normalen euklidischen Raumes*“, axiomatisch-definitiv fest.

Die metrisch-normale euklidische Ebene

In meiner Masterarbeit (2018) folgt die axiomatisch-definitivische Festlegung der Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene einem sukzessiven Aufbau. In der Reihenfolge ihrer Nennung erfolgt die definitivische Festlegung einer affinen Ebene, normalen euklidischen Ebene und letztlich einer metrisch-normalen euklidischen Ebene.

Affine Ebene: Es sei eine mindestens zweielementige Menge \mathcal{P} ($\#\mathcal{P} \geq 2$) sowie aus derer Potenzmenge eine Teilmenge \mathcal{G} gegeben; die Elemente der Menge \mathcal{P} werden als Punkte und die Elemente der Menge \mathcal{G} als Geraden bezeichnet. Das Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt affine Ebene, wenn das Reichhaltigkeits-, Verbindungs- und Parallelenaxiom erfüllt sind:

Reichhaltigkeitsaxiom: Die (mindestens zweielementige) Punktmenge \mathcal{P} ist keine Gerade, d.h. $\mathcal{P} \notin \mathcal{G}$.

Verbindungsaxiom: Für zwei verschiedene Punkte A und B existiert genau eine Gerade g , die durch die beiden Punkte geht, d.h. $A \wedge B \in g$.

Parallelenaxiom: Sei g eine Gerade und A ein nicht auf der Geraden liegender Punkt, so existiert genau eine Gerade h , die durch den Punkt A geht und zur Geraden g parallel ist, d.h. $A \in h$ mit $g \cap h = \emptyset$ ($A \notin g$).

Die durch das Verbindungsaxiom eindeutig bestimmte Gerade wird als die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ der Punkte A und B bezeichnet. Neben dieser Begrifflichkeit ist innerhalb einer affinen Ebene zur Darlegung einer normalen euklidischen Ebene im Folgenden die Festlegung des Begriffs des Paralle-

logramms relevant. Für vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C und D derart, dass je drei der Punkte nicht auf einer Geraden liegen, die Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und $\langle C, D \rangle$ sowie die Verbindungsgeraden $\langle B, C \rangle$ und $\langle A, D \rangle$ je zueinander disjunkt sind, wird das Quadrupel (A, B, C, D) als Parallelogramm bezeichnet.

Normale Euklidische Ebene: Es sei eine mindestens zweielementige Menge \mathcal{P} gegeben; die Elemente der Menge werden als Punkte bezeichnet. Weiter sei auf der Menge aller zweielementigen Teilmengen der Punktmenge \mathcal{P} eine Äquivalenzrelation \equiv gegeben.

Für zwei verschiedene Punkte A und B wird die Menge $m_{A,B} := \{X \in \mathcal{P} : \{A, X\} \equiv \{X, B\}\}$ als Gerade bezeichnet, die Menge aller Geraden mit dem Symbol \mathcal{G} charakterisiert.

Das Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$ heißt normale euklidische Ebene, wenn das Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene ist³ und auf dieser Grundlage das Zirkel- und Kongruenzaxiom erfüllt:

Zirkelaxiom: Die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte A und B besitzt mit der Punktmenge $\{X \in \mathcal{P} : \{A, B\} \equiv \{X, A\}\}$ neben dem Punkt B genau einen weiteren, zum Punkt B verschiedenen Punkt gemeinsam.

Kongruenzaxiom: Sei (A, B, C, D) ein Parallelogramm, so sind die Mengen $\{A, B\}$ und $\{C, D\}$ zueinander äquivalent, d.h. $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$.

Gegenüber einer normalen euklidischen Ebene zeichnet sich eine metrisch-normale euklidische Ebene entsprechend ihrer Bezeichnung im Besonderen durch die Integration des Abstandsbegriffs aus. Zur Darlegung einer metrisch-normalen euklidischen Ebene sei basierend auf dem in einer normalen euklidischen Ebene bzw. affinen Ebene geltenden Verbindungsaxiom mittels einer Metrik d vorab der Begriff der Strecke erklärt. Ein Punkt X liegt auf der Strecke der Punkte A und B , wenn der Punkt auf der Verbindungsgeraden der Punkte A und B liegt sowie die Summe aus den Abständen $d(A, X)$ und $d(B, X)$ zum Abstand $d(A, B)$ identisch ist ($X \in \langle A, B \rangle \wedge d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)$).

³Mit der Restriktion der Äquivalenzrelation \equiv auf die Menge aller zweielementigen Punktmenge ist das Reichhaltigkeitsaxiom aufgrund der definitorischen Festlegung einer Geraden stets erfüllt (vgl. auch Schröder 2014a, S. 24f.).

Metrisch-Normale Euklidische Ebene: Es sei eine mindestens zweielementige Menge \mathcal{P} gegeben; die Elemente der Menge werden als Punkte bezeichnet. Weiter sei auf der Punktmenge \mathcal{P} eine Metrik d gegeben. Auf der Menge aller zweielementigen Teilmengen sei damit eine Äquivalenzrelation \equiv_d betrachtet, und zwar die durch die Abstandsgleichheit induzierte: $\{A, B\} \equiv_d \{C, D\} :\Leftrightarrow d(A, B) = d(C, D)$ für $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B \wedge C \neq D$.

Für zwei verschiedene Punkte A und B wird die Menge $m_{A,B} := \{X \in \mathcal{P} : \{A, X\} \equiv_d \{X, B\}\}$ als Gerade bezeichnet, die Menge aller Geraden mit dem Symbol \mathcal{G} charakterisiert.

Das Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv_d)$ heißt metrisch-normale euklidische Ebene, wenn das Tripel eine normale euklidische Ebene ist und auf dieser Grundlage das Lineal- und Teilungsaxiom erfüllt:⁴

Linealaxiom: Für jede Gerade g existiert eine bijektive Funktion $f: g \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass der Abstand $d(A, B)$ zweier Punkte A und B der Geraden g gleich der Betragsmetrik ihrer Bilder unter der Funktion f ist, d.h. $d(A, B) = |f(A) - f(B)|$.

Teilungsaxiom: Für eine Gerade g ist die Menge $\mathcal{P} \setminus g$ gleich der Vereinigung zweier nichtleerer, disjunkter Mengen derart, dass (i) die Strecke zweier unterschiedlicher Mengen angehörender Punkte genau einen Punkt sowie (ii) die Strecke zweier derselben Menge angehörender Punkte keine Punkte mit der Geraden g gemeinsam besitzt.

Maßgebende Grundlage für die in meiner Masterarbeit (2018) entwickelte Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene ist die Arbeit Schröders (1985; 2014a) respektive dessen Theorie der normalen euklidischen Ebene. Im Kern (ohne spezifisch auf die Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene im Vergleich/Unterschied zu Schröder (1985;2014a) einzugehen) sei dies erläutert:

Die euklidische (Schul-)Geometrie, die Geometrie unseres Anschauungsraumes lässt sich grundlegend als „Kongruenz“geometrie auffassen, d.h. die Invarianten betreffend dieser Relation charakterisieren die Geometrie (vgl. Quaisser 1989, S. 121). Die Frage nach der Einbettung der Kongruenz in eine Axiomatisierung der euklidischen Geometrie ist folglich eine zentrale. Im Allgemeinen stehen sich zwei mathematische Ansätze gegenüber, der kongruenz- und abbildungsgeometrische (vgl. Kirsche 2006, S. 5). Der kongruenzgeometrische Ansatz

⁴In meiner Masterarbeit (2018, S. 76 f.) erfolgt entsprechend des sukzessiven Aufbaus eine Differenzierung in eine metrisch-normale euklidische Ebene mit und ohne Teilungsaxiom. In der vorliegenden Arbeit verstehen wir unter einer metrisch-normalen euklidischen Ebene stets eine Ebene, in der das Teilungsaxiom gilt.

legt den Begriff der Kongruenz axiomatisch zugrunde, der abbildungsgeometrische Ansatz baut axiomatisch hingegen auf den sogenannten Kongruenzabbildungen auf (vgl. Filler 1993, S. 124–137). Der mathematikdidaktische Konsens besteht darin, dass sich die Methodiken beider Ansätze für den Geometrieunterricht ergänzen, keine der beiden Methoden bestimmend ist (vgl. hierzu Weigand et al. 2018, S. 194 f. u. 267–270). Schröders (2014a, S. 23) Kongruenzaxiom charakterisiert „eine Verträglichkeitsbedingung zwischen Parallelitätsrelation und Kongruenzrelation“. Auf dieser Grundlage ergibt sich anlehnend an Schröder (2014a) in meiner Masterarbeit (2018) die Möglichkeit, die Kongruenz in Bezug zu den Kongruenzabbildungen, ohne explizit den Begriff der Kongruenz oder Kongruenzabbildung (axiomatisch) zugrunde zu legen, zu untersuchen – beide Ansätze als ergänzend im Sinne der Mathematikdidaktik aufzufassen (siehe auch Kapitel 3.4).

Die von Schröder (1985; 2014a) allgemein verfolgte Intention, den Aufbau der euklidischen Geometrie weitestgehend ohne anordnungsgeometrische Aspekte darzulegen, zeigt sich hingegen in mathematikdidaktischer Hinsicht als inadäquat. Für den Geometrieunterricht grundlegende Begriffe wie die der „Strecke“ oder „Halbgerade“ stehen vorerst nicht zur Verfügung. Zentraler noch, eine anordnungsfreie bedingt eine euklidische Geometrie, die auf die Verwendung des Abstandsbegriffs in weiten Teilen verzichtet (vgl. hierzu Filler 1993, S. 76 u. 126 f.). Das Bestimmen und Messen von Abständen (mit standardisierten Messwerkzeugen) ist jedoch zur Lösung geometrischer Frage- und Problemstellungen ein elementares (Hilfs-)Mittel im Geometrieunterricht der Sekundarstufe (siehe hierzu Kapitel 3.3).

Die in meiner Masterarbeit (2018) entwickelte Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene integriert abstands- bzw. anordnungsgeometrische Aspekte (gemeinhin unter der verfolgten Zielsetzung, einer Axiomatisierung der ebenen-euklidischen Geometrie unter Berücksichtigung der fachbezogenen und fachdidaktischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte). Eine zentrale Bedeutung nimmt das Linealaxiom (engl.: Ruler Postulat) ein. Das Axiom geht allgemein auf Birkhoff (1932) zurück (vgl. Millman/Parker 1991, S. 27–29). Basierend auf dem Axiom lässt sich jede in der Ebene liegende Gerade anschaulich gesprochen als reelle Zahlengerade auffassen, der Abstand zweier Punkte sich in der Folge (mit Hilfe des Verbindungsaxioms) anhand einer entsprechenden Zahlengerade bestimmen (vgl. auch Millman/Parker 1991, S. 29 f.). In diesem Zusammenhang interpretieren wir die Linealfunktion als „Mathematisches Mess-Lineal“ (siehe auch Kapitel 3.3). Aus dem Linealaxiom resultiert zugleich, dass sich Fragen zur geometrischen Anordnung der Punkte auf einer Geraden mit Hilfe der Linealfunktionen auf die Anordnung der reellen Zahlen zurückführen lassen (sie-

he auch Kapitel 3.1.3; vgl. zusätzlich Filler 1993, S. 126). Als Äquivalent zum Pasch-Axiom ergänzt das Teilungsaxiom die lineare Anordnung um die Anordnung der Punkte in der gesamten Ebene (vgl. auch Filler 1993, S. 81 u. 127; Moise 1990, S. 72–80).

Der metrisch-normale euklidische Raum

Mit Blick auf die Darlegung der Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene sei zusätzlich zu meiner Masterarbeit (2018) als zentrale Grundlage der Theorie des „metrisch-normalen euklidischen Raumes“ das raumgeometrischen Pendant zur normalen euklidischen Ebene in Schröder (1985; 2014b) sowie die Arbeit von Birkhoff (1932) angeführt.

Metrisch-Normaler Euklidischer Raum: Es sei eine mindestens zweielementige Menge \mathcal{P} gegeben ($\#\mathcal{P} \geq 2$); die Elemente der Menge werden als Punkte bezeichnet. Weiter sei auf der Punktmenge \mathcal{P} eine Metrik d gegeben. Die Relation „abstandsgleich \equiv_d “ sei damit auf der Menge aller ungeordneten Punktepaare wie folgt definiert, wobei die Wohldefiniertheit bzw. Repräsentantenunabhängigkeit aufgrund der Symmetrie der Metrik gilt: $\{A, B\} \equiv_d \{C, D\} :\Leftrightarrow d(A, B) = d(C, D)$ für $A, B, C, D \in \mathcal{P}$.⁵

Für zwei verschiedene Punkte A und B wird die Menge $m_{A,B} := \{X \in \mathcal{P} : \{A, X\} \equiv_d \{X, B\}\}$ als Ebene bezeichnet. Der Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen wird als Gerade bezeichnet. Die Menge aller Ebenen ist mit dem Symbol \mathcal{E} sowie die Menge aller Geraden mit dem Symbol \mathcal{G} charakterisiert.

Zu einer einfacheren sprachlichen Darlegung der Axiome eines „metrisch-normalen euklidischen Raumes“ erfolgt zuvor die Einführung einzelner Sprechweisen. Besitzt eine Gerade g einen Punkt A als Element ($A \in g$), so sagen wir „ A liegt auf g “ oder auch „ g geht durch A “; Punkte, die gemeinsam auf einer Geraden liegen, werden als *kollinear* bezeichnet. Analog verwenden wir für den Fall, dass ein Punkt A ein Element einer Ebene ϵ darstellt ($A \in \epsilon$), die Sprechweise „ ϵ geht durch A “ oder „ A liegt in ϵ “; Punkte bezeichnen wir als *komplanar*, wenn sie gemeinsam in einer Ebene liegen. Besitzt eine Ebene ϵ eine Gerade g als Teilmenge ($g \subseteq \epsilon$), so sagen wir „ g liegt in ϵ “; Geraden, die gemeinsam in einer Ebene liegen, werden ebenfalls als *komplanar* bezeichnet.

⁵Die Betrachtung je zweier identischer Punkte ist als Spezialfall inbegriffen.

Das Quadrupel $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ heißt **metrisch-normaler euklidischer Raum**, wenn die folgenden Axiome gelten:

Verbindungsaxiom-Geraden ($V_{\mathcal{G}}$)

Durch zwei verschiedene Punkte A und B geht genau eine Gerade.

Sie wird als die *Verbindungsgerade* $\langle A, B \rangle$ der beiden Punkte bezeichnet.

Verbindungsaxiom-Ebenen ($V_{\mathcal{E}}$)

Durch drei nicht kollineare Punkte geht stets eine Ebene.

Parallelenaxiom

Es sei eine Gerade g und ein nicht auf der Geraden g liegender Punkt A gegeben. Dann existiert genau eine durch den Punkt A gehende Gerade h , sodass die Geraden g und h komplanar und disjunkt sind.

Linealaxiom

Für jede Gerade g existiert eine bijektive Funktion $f: g \rightarrow \mathbb{R}$, die sogenannte *Linealfunktion*, sodass der Abstand $d(A, B)$ zweier Punkte A und B der Geraden g gleich der Betragsmetrik ihrer Bilder unter der Funktion f ist, d.h. es gilt die sogenannte *Lineal-Gleichung*: $d(A, B) = |f(A) - f(B)|$.

Teilungsaxiom

Es sei ϵ eine (beliebige) Ebene. Für jede in der Ebene liegende Gerade g ist die Menge $\epsilon \setminus g$ gleich der Vereinigung zweier disjunkter Mengen derart, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- i) Für zwei verschiedene, derselben Menge angehörende Punkte A und B ist der Schnitt der Menge $\{X \in \langle A, B \rangle: d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)\}$ und der Geraden g gleich der leeren Menge.
- ii) Für zwei verschiedene, unterschiedlichen Mengen angehörende Punkte A und B ist der Schnitt der Menge $\{X \in \langle A, B \rangle: d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)\}$ und der Geraden g eine einelementige Punktmenge.

Kongruenzaxiom

Es sei ein Quadrupel (A, B, C, D) bestehend aus vier paarweise verschiedenen Punkten A, B, C und D derart gegeben, dass die Punkte komplanar, je drei der Punkte nicht kollinear und die Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und $\langle C, D \rangle$ sowie $\langle B, C \rangle$ und $\langle A, D \rangle$ disjunkt sind. Dann ist der Abstand $d(A, B)$ der Punkte A und B gleich dem Abstand $d(C, D)$ der Punkte C und D .

Hinsichtlich der axiomatisch-definitiven Festlegung sind im Vergleich eines metrisch-normalen euklidischen Raumes und einer metrisch-normalen euklidischen Ebene drei Aspekte charakteristisch. Erstens erweitert sich im raumeometrischen Kontext die Betrachtung der Geraden- um eine Ebenenmenge, samt eines entsprechenden Verbindungsaxioms. Zweitens wird die Abstandsgleichheit der zugrunde liegenden Abstandsfunktion als solche charakterisiert (nicht vorab, eingeschränkt als Äquivalenzrelation auf der Menge aller zweielementigen Punktemengen); das zugrunde Liegen der Abstandsfunktion wird in diesem Zusammenhang innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mittels des Symbols d_{\equiv} unterstrichen. Drittens besitzt mit Ausnahme des Zirkelaxioms jedes der Axiome ein raumeometrisches bzw. eben-geometrisches Pendant. Bezüglich des letztgenannten Aspekts erweist sich die Aussage des Axioms (sowohl im ebenen als auch räumlichen Kontext) als nachweisbar. Ebenso zeigt sich im Laufe der vorliegenden Arbeit, dass bezüglich des Teilungsaxioms die Forderung nach der Nichtleere nachweisbar ist.

Im Vergleich zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene erschwert der Verzicht auf eine sukzessiv erfolgende axiomatisch-definitive Festlegung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Formulierung der Axiomatik, da zugrunde liegende Begrifflichkeiten (vorerst) nicht zur Verfügung stehen. Gleichwohl ist die Verträglichkeit auf semantischer Ebene gegeben. Ein Aspekt, der vor dem Hintergrund der „Räumlichen Erweiterung“ (2.2.2) gemeinhin in der vorliegenden Arbeit Berücksichtigung findet. Nicht zuletzt erfordert der Nachweis der „Räumlichen Erweiterung“ in Kapitel 2.2.2 den Bezug zur Gesamtheit der Axiomatik und somit deren ganzheitliche Darlegung zu Beginn der Arbeit.

2.2.2 Räumliche Erweiterung

Axiomatisch baut die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes auf der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene auf (siehe Kapitel 2.2.1). Elementar ist die Forderung nach der räumlichen Erweiterung, genauer wie eingangs dargelegt, dass ein metrisch-normaler euklidischer Raum in seiner Beziehung zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene die Anforderung erfüllt, dass...

- (i) innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ jede Ebene eine metrisch-normale euklidische Ebene beschreibt,
- (ii) zum anderen die Restriktion innerhalb des Raumes auf eine (metrisch-normale euklidische) Ebene zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene strukturgleich ist.

Zur Anforderung (i)

Ziel ist der Nachweis des Satzes 2.2.2.6, dass innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ jede Ebene ϵ mit der Menge $\mathcal{G}|_{\epsilon} := \{g \in \mathcal{G} : g \subseteq \epsilon\}$ aller in ϵ enthaltenen Geraden und der Restriktion $\equiv_{d|_{\epsilon}}$ der Abstandsgleichheit \equiv_d auf die Menge aller höchstens zweielementigen Teilmengen der Punktmenge der Ebene ϵ eine metrisch-normale euklidische Ebene beschreibt.

Für eine Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ existieren per definitionem zwei verschiedene Punkte A und B derart, dass die Ebene gleich der Menge $m_{A,B} := \{X \in \mathcal{P} : \{A, X\} \equiv_d \{X, B\}\}$ ist. Die zugrunde liegenden Punkte A und B enthält die Ebene indes nicht, da der Abstand $d(A, B)$ der beiden Punkte als zueinander verschiedene Punkte zur reellen Zahl 0 und somit zum Abstand $d(A, A)$ bzw. $d(B, B)$ verschieden ist. Mit der nach Voraussetzung geltenden Zweielementigkeit der Punktmenge \mathcal{P} des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ folgt daraus, dass der Raum grundsätzlich nicht auf eine seiner Ebenen zu reduzieren ist.

In Bezug zur Ebene $m_{A,B}$ und der nach dem Axiom V_G eindeutig bestimmten Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ zeigen wir im Weiteren mit dem Satz 2.2.2.2, dass die Ebene und Gerade genau einen (von dem Punkt A und B verschiedenen) Punkt gemeinsam besitzen. Zuvor zeigen wir mit dem Satz 2.2.2.1, dass eine Ebene und eine nicht in der Ebene liegende Gerade im Allgemeinen höchstens einen Punkt gemeinsam haben; nach dem Satz 2.2.2.1 liegt

eine Gerade bereits in einer Ebene, wenn die Gerade und Ebene zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben. Zahlreiche Axiomatisierungen der euklidischen (Raum-)Geometrie wie etwa die von Schröder (2014b, S. 11) legen diese Aussage als Axiom zugrunde. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ wurde der Nachweis der Aussage in Zusammenarbeit mit meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Frank, entwickelt.

Satz 2.2.2.1. Besitzen eine Ebene und eine Gerade mindestens zwei verschiedene Punkte gemeinsam, so liegt die Gerade in der Ebene.

Beweis: (Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. Frank)

Es sei eine Ebene ϵ und eine Gerade g mit $\#(g \cap \epsilon) \geq 2$ gegeben; es seien A und B die beiden verschiedenen in der Ebene sowie auf der Geraden liegenden Punkte. Die Gerade g ist innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen η_1 und η_2 identisch. Ist eine dieser beiden Ebenen gleich der Ebene ϵ , so ist die Behauptung bereits gezeigt.

Es sei also im Weiteren die paarweise Verschiedenheit der Ebenen angenommen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir die Ebenen η_1 und ϵ . Zwar sind die Ebenen verschieden, aber nicht disjunkt, denn beide Ebenen gehen durch die Punkte A und B . Folglich stellt ihre Schnittmenge per definitionem innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes eine Gerade dar. Dabei liegt die Gerade in der Ebene ϵ und geht ebenso wie die Gerade g durch die zueinander verschiedenen Punkte A und B . Hieraus folgt mit dem Verbindungsaxiom-Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes das zu Zeigende, dass die Gerade g in der Ebene ϵ liegt. \square

Satz 2.2.2.2. (vgl. Schröder 2014b, S. 26; vgl. auch Lauer 2018, S. 51 f.) Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Dann ist die Schnittmenge der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und der Ebene $m_{A,B}$ einelementig, d.h. $|\langle A, B \rangle \cap m_{A,B}| = 1$.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Lauer 2018, S. 51 f.; Schröder 2014b, S. 26)

Zunächst zeigen wir die Existenz eines Punktes, der sowohl auf der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ als auch in der Ebene $m_{A,B}$ liegt, und abschließend dessen Eindeutigkeit.

Existenz: Es sei f eine nach dem Linealaxiom existierende Linealfunktion der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ mit $a := f(A)$ und $b := f(B)$, wobei die reellen Zahlen a und b aufgrund der Bijektivität der Funktion f ebenso wie die Punkte A und B verschieden sind.

Für die reelle Zahl $m := ((a + b)/2)$ erhalten wir wiederum mit der Bijektivität der Linealfunktion f , dass die Punkte A , B und $M := f^{-1}(m)$ drei verschiedene Punkte der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ sind. Zudem gilt die Gleichheit der Betragsmetriken $|a - m|$ und $|b - m|$. Hieraus folgt mit der Lineal-Gleichung bezüglich der Funktion f , dass die Abstände $d(A, M)$ und $d(B, M)$ identisch sind. Damit liegt der Punkt M neben seiner Lage auf der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ ebenfalls in der Ebene $m_{A,B}$.

Eindeutigkeit: Hierzu erfolgt ein Widerspruchsbeweis mit der Annahme, dass neben dem Punkt M ein weiterer von M verschiedener Punkt M' sowohl auf der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ als auch in der Ebene $m_{A,B}$ liegt.

Nach dem soeben bewiesenen Satz 2.2.2.1 liegt die Verbindungsgerade der Punkte M und M' in der Ebene $m_{A,B}$. Zugleich ist die Verbindungsgerade aufgrund des Axioms V_G zur Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ identisch. Folglich liegt ein Widerspruch vor; denn die Ebene $m_{A,B}$ enthält innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes aufgrund der definitorischen Festlegung der Ebenen in keinem Fall die ihr zugrunde liegenden Punkte A und B . \square

Um innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ überhaupt (basierend auf dem zu zeigenden Satz 2.2.2.6) im Sinne der Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene von einer *Ebene* sprechen zu können, begründen wir im Weiteren mit dem Satz 2.2.2.5, dass jede Ebene mindestens drei nicht kollineare paarweise verschiedene Punkte besitzt; jede Ebene unterscheidet sich somit von einer Geraden oder einem Punkt. Der Satz stellt ähnlich wie der Satz 2.2.2.1 eine Aussage dar, die in Schröder (2014b, S. 11) eine weitestgehend axiomatische Forderung ist, die wir aber innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ beweisen. Wir greifen hierzu neben dem soeben bewiesenen Satz 2.2.2.2 darauf zurück, dass zwei Geraden in keinem Fall eine echte Teilmengenbeziehung eingehen. Anlehnend an die Vorgehensweise in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene bzw. affinen Ebene (vgl. Lauer 2018, S. 31 f.; Schröder 1991, S. 9), versteht sich diese Aussage wiederum als Korollar des Satzes 2.2.2.3. Der Satz 2.2.2.3 zur Mächtigkeit der Geraden resultiert im Folgenden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ aus der Idee des auf Birkhoff (1932) zurückgehenden Linealaxioms.

Satz 2.2.2.3. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ besitzt jede Gerade überabzählbar viele verschiedene Punkte. Je zwei Geraden innerhalb des Raumes sind zueinander gleichmächtig.

Beweis: (siehe zuvor, Eigener Beweis)

Es seien zwei Geraden g und h gegeben. Nach dem Linealaxiom existiert sowohl für die Gerade g eine bijektive Linealfunktion f_1 als auch für die Gerade h eine bijektive Linealfunktion f_2 von der jeweiligen Punktmenge der Geraden auf die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen. Aufgrund der Bijektivität besitzt jede Linealfunktion eine bijektive Umkehrabbildung. Mit der Verkettung $(f_2^{-1} \circ f_1)$ der Umkehrabbildung f_2^{-1} der Linealfunktion f_2 und der Linealfunktion f_1 erhalten wir eine Bijektion von der Punktmenge der Geraden g auf die der Geraden h . Damit ist die Gleichmächtigkeit der beiden Geraden gezeigt. Aus der Mächtigkeit der Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen, ihrer überabzählbaren Unendlichkeit, folgt mit der Bijektivität einer Linealfunktion umgehend, dass jede Gerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes überabzählbar viele verschiedene Punkte besitzt. \square

Korollar 2.2.2.4. Ist eine Gerade eine Teilmenge einer anderen Geraden, so sind die beiden Geraden bereits zueinander identisch.

Beweis: (siehe zuvor, Lauer 2018; Schröder 1991)

Es seien g und h zwei Geraden mit $g \subseteq h$. Zusammen mit dem soeben bewiesenen Satz 2.2.2.3 besitzen die Geraden g und h mindestens zwei verschiedene Punkte gemeinsam. Hieraus folgt mit dem Axiom $V_{\mathcal{G}}$ umgehend, dass die Gerade g zur Geraden h identisch ist. \square

Satz 2.2.2.5. In jeder Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ liegen mindestens drei nicht kollineare paarweise verschiedene Punkte.

Beweis: (Eigener Beweis)

Es sei eine Ebene ϵ gegeben. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes existieren für die Ebene per definitionem zwei verschiedene Punkte A und B derart, dass die Ebene gleich der Ebene $m_{A,B}$ ist. Die Verbindungsgerade der Punkte A und B entspricht per definitionem wiederum dem Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen η_1 und η_2 . Auf der Grundlage des Satzes 2.2.2.2 erhalten wir, dass die Ebenen η_1 und η_2 jeweils

nicht disjunkt zur Ebene ϵ sind. Die Ebene ϵ als die zur Ebene $m_{A,B}$ identische Ebene geht per definitionem nicht durch die Punkte A und B , im Gegensatz zu den Ebenen η_1 und η_2 , sodass die beiden Ebenen zugleich jeweils zur Ebene ϵ verschieden sind.

Zusammenfassend gilt mit der definitiven Festlegung der Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes, dass der Schnitt der Ebene ϵ und η_1 sowie der Schnitt der Ebene ϵ und η_2 jeweils eine zur Verbindungsgerade der Punkte A und B verschiedene Gerade, also zum Schnitt der Ebenen η_1 und η_2 verschiedene Gerade ist. Damit folgt aus dem Korollar 2.2.2.4, dass die beiden Geraden selbst zueinander verschieden sind. Schließlich existieren innerhalb der Ebene ϵ zwei zueinander verschiedene Geraden. Jede Gerade innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes besitzt nach dem Satz 2.2.2.3 mindestens zwei verschiedene Punkte, sodass mit dem Axiom V_G das zu Zeigende gilt. \square

Wir betrachten nun innerhalb des metrisch-normalen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine Ebene ϵ respektive deren Punktmenge orientierend an Schröder (1985, S. 220) zusammen mit der Menge $\mathcal{G}|_{\epsilon} := \{g \in \mathcal{G} : g \subseteq \epsilon\}$ aller in ϵ enthaltenen Geraden sowie der Restriktion $\equiv_{d|_{\epsilon}}$ der Abstandsgleichheit \equiv_d auf die Menge aller höchstens zweielementigen Teilmengen der Ebene ϵ ; und wir zeigen, dass das Tripel $(\epsilon, \mathcal{G}|_{\epsilon}, \equiv_{d|_{\epsilon}})$ nach der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie eine metrisch-normale euklidische Ebene beschreibt (siehe hierzu auch Kapitel 2.2.1). Dabei greifen wir selbst auf ein Ergebnis meiner Masterarbeit (2018, S. 32 f.) zurück, und zwar auf den basierend auf Schröder (2014a, S. 30) innerhalb einer affinen Ebene nachgewiesenen Parallelogrammergänzungssatz:

Satz-Masterarbeit 4.1.22. (Parallelogrammergänzungssatz) Es seien drei nicht kollineare Punkte A , B und C innerhalb einer affinen Ebene gegeben. Dann existiert innerhalb der affinen Ebene genau ein Punkt D derart, dass das Quadrupel (A, B, C, D) ein Parallelogramm ist.

Satz 2.2.2.6. Das Tripel $(\epsilon, \mathcal{G}|_{\epsilon}, \equiv_{d|_{\epsilon}})$ ist eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Schröder 1985, S. 212 u. 220)

Wir gliedern den Nachweis in insgesamt vier Beweisschritte. Mit dem ersten Beweisschritt zeigen wir zunächst innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, dass das Paar $(\epsilon, \mathcal{G}|_{\epsilon})$ eine affine Ebene beschreibt (siehe hierzu Kapitel 2.2.1).

1. Beweisschritt: Die Ebene ϵ ist innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes aufgrund des Satzes 2.2.2.5 eine mindestens zweielementige (Punkte-)Menge. Die Menge $\mathcal{G}|_\epsilon$ stellt per definitionem eine Teilmenge der Potenzmenge der Punktmenge der Ebene ϵ dar. Zum Nachweis, dass das Paar $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon)$ eine affine Ebene ist, bleibt zu zeigen, dass das Paar $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon)$ das Reichhaltigkeits-, Verbindungs- und Parallelenaxiom einer affinen Ebene erfüllt (siehe hierzu Kapitel 2.2.1):

Die Gültigkeit des Verbindungsaxioms für das Paar $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon)$ folgt mit dem Satz 2.2.2.1 umgekehrt aus der Gültigkeit des Verbindungsaxioms-Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Das Reichhaltigkeitsaxiom für das Paar $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon)$, also dass die Ebene ϵ als Punktmenge nicht in der Menge $\mathcal{G}|_\epsilon$ liegt, gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes mit dem Satz 2.2.2.5.

Zum Nachweis der Gültigkeit des Parallelenaxioms für das Paar $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon)$ sei innerhalb der Ebene ϵ eine Gerade g und ein nicht auf der Geraden liegender Punkt A gegeben. Aufgrund des Satzes 2.2.2.3 existiert nach dem Verbindungsaxiom-Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes neben der Geraden g keine weitere durch die Punktmenge der Geraden g gehende Gerade. Hiermit gilt aufgrund der definitorischen Festlegung der Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes, dass die Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes die einzige Ebene ist, die die Gerade g und den Punkt A enthält. Schließlich erhalten wir die Gültigkeit des Parallelenaxioms für das Paar $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon)$ damit, dass das entsprechende Axiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gilt.

2. Beweisschritt: Wir weisen nach, dass mit der Restriktion $\equiv_{d|_\epsilon}$ der Abstandsgleichheit \equiv_d eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller höchstens zweielementigen Teilmengen der Ebene ϵ definiert ist. Hierzu zeigen wir im Allgemeinen, dass mit der Abstandsgleichheit \equiv_d innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_\equiv)$ auf der Menge aller höchstens zweielementigen Teilmengen der Punktmenge \mathcal{P} eine Äquivalenzrelation definiert ist. Per definitionem gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes die Äquivalenz

$$\{A, B\} \equiv_d \{C, D\} \Leftrightarrow d(A, B) = d(C, D) \quad \text{für } A, B, C, D \in \mathcal{P},$$

wobei die Wohldefiniertheit aufgrund der Symmetrieeigenschaft der zugrunde liegenden Abstandsfunktion gilt. Die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Relation \equiv auf der

Menge aller höchstens zweielementigen Teilmengen der Punktmenge \mathcal{P} ergibt sich umgehend damit, dass die Gleichheitsrelation „ \equiv “ die entsprechenden Eigenschaften auf der Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen erfüllt.

Im Rahmen des dritten Beweisschrittes erfolgt der Nachweis, dass die Menge $\mathcal{G}|_\epsilon$ des Tripels $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon, \equiv_{d|_\epsilon})$ eine Geradenmenge entsprechend der definitorischen Festlegung einer metrisch-normalen euklidischen Ebene darstellt.

3. Beweisschritt: Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_\equiv)$ zeigen wir, dass die Menge $\{m_{A,B}|_\epsilon : A, B \in \epsilon \wedge A \neq B\}$, wobei $m_{A,B}|_\epsilon := \{X \in \epsilon : \{A, X\} \equiv_{d|_\epsilon} \{X, B\}\}$ für zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene ϵ , zur Menge $\mathcal{G}|_\epsilon$ identisch ist; wir zeigen also die Gleichung: $\mathcal{G}|_\epsilon = \{m_{A,B}|_\epsilon : A, B \in \epsilon \wedge A \neq B\}$.

„ \supseteq “: Für zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene ϵ sei die Menge $m_{A,B}|_\epsilon$ gegeben. Mit der definitorischen Festlegung der Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes erhalten wir die Gleichung

$$m_{A,B}|_\epsilon = \{X \in \epsilon : \{A, X\} \equiv_{d|_\epsilon} \{X, B\}\} = \{X \in \epsilon : \{A, X\} \equiv_d \{X, B\}\} = \epsilon \cap m_{A,B},$$

also dass die Menge $m_{A,B}|_\epsilon$ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Schnitt der beiden Ebenen ϵ und $m_{A,B}$ identisch ist. Die Punkte A und B liegen in der Ebene ϵ , aber nicht in der Ebene $m_{A,B}$, sodass die beiden Ebenen zueinander verschieden sind. Die Verbindungsgerade der Punkte A und B liegt nach dem Satz 2.2.2.1 vollständig in der Ebene ϵ und besitzt nach dem Satz 2.2.2.2 mit der Ebene $m_{A,B}$ genau einen gemeinsamen Punkt. Folglich sind die Ebenen ϵ und $m_{A,B}$ nicht disjunkt. Zusammenfassend erhalten wir, dass die Menge $m_{A,B}|_\epsilon$ zum Schnitt zweier nicht disjunkter, verschiedener Ebenen identisch ist. Damit stellt sie innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem eine Gerade des Raumes dar, wobei jeder ihrer Punkte nach ihrer definitorischen Festlegung in der Ebene ϵ liegt. Demnach ist die Gerade $m_{A,B}|_\epsilon$ in der Menge $\mathcal{G}|_\epsilon$ enthalten.

„ \subseteq “: Es sei eine Gerade g der Menge $\mathcal{G}|_\epsilon$ gegeben. Als eine in der Ebene ϵ liegende Gerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes liegen auf der Geraden g nach dem Satz 2.2.2.3 zwei verschiedene in der Ebene ϵ liegende Punkte A und B ; aufgrund des Axioms V_G ist die Gerade zur Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ der beiden Punkte identisch.

Die Menge $m_{A,B}|_\epsilon$ für die Punkte A und B stellt nach der soeben gezeigten Teilmengenbeziehung eine weitere Gerade der Menge $\mathcal{G}|_\epsilon$ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes dar. Aufgrund des Satzes 2.2.2.2 erhalten wir mit dem Satz 2.2.2.3 die Existenz eines Punktes C , der auf der Geraden $m_{A,B}|_\epsilon$, aber nicht auf der Verbindungsgeraden der Punkte A und B liegt. Mit den Punkten A , B und C existieren innerhalb der Ebene ϵ also drei nicht kollineare Punkte. Nach dem ersten Beweisschritt stellt das Paar $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon)$ eine affine Ebene dar. Der Parallelogrammergänzungssatz liefert innerhalb der Ebene ϵ die Existenz eines Punkt D derart, dass das Quadrupel (A, C, B, D) ein Parallelogramm darstellt. Die definitorische Festlegung eines Parallelogramms in der affinen Ebene erlaubt die Anwendung des Kongruenzaxioms innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes (siehe hierzu Kapitel 2.2.1). Ferner liefert die definitorische Festlegung, dass auch jedes Quadrupel, das durch zyklisches Vertauschen der Punkte A , B , C und D entsteht, ein Parallelogramm darstellt. Unter Berücksichtigung, dass der Punkt C auf der Geraden $m_{A,B}|_\epsilon$ liegt und die Relation $\equiv_{d|_\epsilon}$ per definitionem eine Restriktion der Relation \equiv auf die Ebene ϵ ist, erhalten wir die Beziehung

$$\{B, D\} \equiv_d \{A, C\} \equiv_d \{C, B\} \equiv_d \{A, D\}$$

und zusammen mit der soeben in dem zweiten Beweisschritt nachgewiesenen Transitivität der Relation \equiv_d als Äquivalenzrelation die Beziehungen

$$\{C, A\} \equiv_{d|_\epsilon} \{A, D\} \quad \text{und} \quad \{C, B\} \equiv_{d|_\epsilon} \{B, D\}.$$

Die Punkte A und B sind also Elemente der Menge $m_{C,D}|_\epsilon$. Mit der soeben gezeigten Teilmengenbeziehung stellt diese Menge innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes eine Gerade der Menge $\mathcal{G}|_\epsilon$ dar. Schließlich erhalten wir mit dem Axiom $V_{\mathcal{G}}$, dass die Gerade g als die Verbindungsgerade der Punkte A und B gleich der Menge $m_{C,D}|_\epsilon$ ist; es gilt somit die hier zu zeigende Teilmengenbeziehung.

4. Beweisschritt: Zum Nachweis, dass das Tripel $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon, \equiv_{d|_\epsilon})$ eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist, bleibt schließlich zu zeigen, dass das Tripel das Kongruenz-, Lineal- und Teilungsaxiom einer metrisch-normalen euklidischen Ebene erfüllt. Dabei folgt die Gültigkeit der Axiome für das Tripel $(\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon, \equiv_{d|_\epsilon})$ umgehend daraus, dass die entsprechenden Axiome bzw. deren Aus-

sagen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gelten (siehe definitorische Grundlegung des metrisch-normalen euklidischen Raumes bzw. auch die Bemerkung 2.2.2.8 im Folgenden). \square

Korollar 2.2.2.7. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist mit der Abstandsgleichheit \equiv_d eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller höchstens zweielementigen Punktemengen definiert.

Beweis:

Die Aussage ist mit dem zweiten Beweisschritt des Satzes 2.2.2.6 bereits nachgewiesen. \square

Bemerkung 2.2.2.8. Greifen wir basierend auf dem soeben nachgewiesenen Satz 2.2.2.6 innerhalb eines metrisch-normalen euklidischen Raumes auf die Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene zurück, dann eingebettet in die axiomatische Grundlage des Raumes, ohne die Verwendung der in meiner Masterarbeit (2018) erfolgten Untersuchung einschränken zu müssen. Im Spezifischen stehen in diesem Zusammenhang die Aussage des Zirkelaxioms sowie die Forderung nach der Nichtleere bezüglich des Teilungsaxioms im Fokus; beides sind Aussagen, die in der vorliegenden Arbeit sowohl im räumlichen als auch ebenen Kontext bewiesen, nicht axiomatisch gefordert werden (siehe hierzu Kapitel 2.2.1).

Die Untersuchung der Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene respektive einzelne Untersuchungsergebnisse meiner Masterarbeit (2018) greifen wir in der vorliegenden Arbeit explizit an den jeweils relevanten Stellen auf. Die Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene meiner Masterarbeit (2018) versteht sich wie auch die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes der vorliegenden als das spezifische Produkt der jeweiligen Arbeit. In dieser Hinsicht sei bezüglich der Angabe von Quellen angemerkt, dass diese im Wortsinne der *indirekten* Quellenübernahme speziell für die jeweilige Theorie genutzt bzw. nutzbar gemacht werden.

Bemerkung 2.2.2.9. Auf der Grundlage des Satzes 2.2.2.6 sprechen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ im Allgemeinen davon, dass eine Ebene ϵ des Raumes eine metrisch-normale euklidische Ebene darstellt, wenngleich Bezug auf

das Tripel $(\epsilon, \mathcal{G}|_{\epsilon}, \equiv_{d|_{\epsilon}})$ genommen wird. Jede in einer solchen Ebene ϵ liegende Gerade kann als eine Gerade der metrisch-normalen euklidischen Ebene oder als eine Gerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes aufgefasst werden. Diesbezüglich liefert der dritte Beweisschritt des Satzes 2.2.2.6, dass eine Gerade $\{X \in \epsilon: \{A, X\} \equiv_{d|_{\epsilon}} \{X, B\}\}$ für zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene ϵ zum Schnitt der Ebenen ϵ und $m_{A,B}$ identisch ist. Entsprechend sei die Menge $\{X \in \epsilon: \{A, X\} \equiv_{d|_{\epsilon}} \{X, B\}\}$ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit dem Symbol $m_{A,B}|_{\epsilon}$ charakterisiert.

Zur Anforderung (ii)

Auf der Grundlage des Satzes 2.2.2.6 beschreibt jede Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine metrisch-normale euklidische Ebene. Demzufolge sind die Untersuchungsergebnisse zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene, die Untersuchungsergebnisse meiner Masterarbeit (2018) auf jede Ebene des Raumes anwendbar. In Bezug zum Aspekt der räumlichen Erweiterung ist damit ein Erfordernis von insgesamt zwei gezeigt, die es in dem vorliegenden Kapitel nachzuweisen gilt. Das zweite ist aufbauend auf dem ersten das, dass innerhalb des Raumes die Restriktion auf eine metrisch-normale euklidische Ebene zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene strukturgleich ist. Zunächst sei in diesem Zusammenhang die Bedeutung von „strukturgleich“ erläutert.

Allgemein ist der beschriebene Zusammenhang zwischen der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes in der vorliegenden Arbeit zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene fachdidaktisch motiviert (siehe eingangs von Kapitel 2.2). Für den Geometrieunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe ist ein Perspektivwechsel zwischen (Anschauungs-)Ebene und (Anschauungs-)Raum in der Art charakteristisch, dass ausgehend von der ebenen Geometrie Zusammenhänge zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie im Fokus der Untersuchung stehen (siehe Kapitel 2.1). Dies schließt neben dem Aspekt, dass die in der Anschauungsebene geltenden Eigenschaften und Relationen in jeder Ebene des Anschauungsraumes angewendet werden können, den Aspekt ein, dass umgekehrt die innerhalb des Anschauungsraumes in einer Ebene getroffenen eben-geometrischen Untersuchungen auf die Anschauungsebene übertragen werden können. Ein solcher Perspektivwechsel spiegelt zugleich unsere Raumanschauung wider. Sallopp gesagt: Die Ebenen des Anschauungsraumes und die Anschauungsebene verstehen sich als gegenseitige Kopien.

Mathematisch drückt sich dies in der Isomorphie aus. Für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes begründen wir mit dem Kapitel 5 in der vorliegenden Arbeit, dass jedes ihrer Modelle zum Anschauungsraum respektive zu dessen mathematisches Modell, wobei dieses selbst ein Modell eines metrisch-normalen euklidischen Raumes darstellt, isomorph ist (siehe hierzu Kapitel 6.1). Analoges lässt sich für die Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene in Bezug zur Anschauungsebene respektive zu deren mathematischen Modell folgern. (Auf diesen expliziten Nachweis sei in der vorliegenden Arbeit verzichtet.) Schließlich erhalten wir, dass jede Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit dem Satz 2.2.2.6 zu jedem weiteren Modell einer metrisch-normalen euklidischen Ebene isomorph ist, also dass jede Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes bis auf Isomorphie die Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene repräsentiert.

3 Grundbegriffe

Ein streng formalistischer Aufbau wie ihn etwa Hilbert (1987) mit seinen „Grundlagen der Geometrie“ für die euklidische Geometrie verfolgt, zeichnet sich im Kern dadurch aus, dass die Theorie implizit aus sich selbst heraus, ohne Rückgriff auf bereits Bekanntes entwickelt wird (vgl. Wußing 2009, S. 173–177). Im Besonderen sind selbst Grundbegriffe nicht explizit definiert, sondern implizit-axiomatisch beschrieben; sie werden durch die in den Axiomen beschriebenen Zusammenhänge charakterisiert (vgl. Wußing 2009, S. 173–177). Dementsprechend ist die oft zitierte Aussage Hilberts zutreffend: „Man muß [sic!] jederzeit an Stelle von ‚Punkte, Geraden, Ebenen‘ ‚Tische, Stühle, Bierseidel‘ sagen können“ (zitiert nach Blumenthal 1935, S. 403).

In Anlehnung an Meschkowski (1966, S. 13–17) lässt sich die Auffassung darüber, was unter Grundbegriffen zu verstehen ist, weiter fassen. Theorien wie etwa die der reellen Zahlen oder die der Mengenlehre lassen sich als mathematische „Fertigteile“ auffassen. Auf dieser Basis verstehen sich die Grundbegriffe einer Theorie als diejenigen Begriffe, die der Theorie explizit zugrunde liegen. Angewendet auf die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ bedeutet dies, dass die Grundbegriffe die elementaren mathematischen Begriffe der Theorie umfassen, die *Punkte, Ebenen, Geraden* sowie den *Abstandsbegriff*.

Vor dem Hintergrund des fachdidaktischen Anspruchs an die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes ist in Anlehnung an Sträßer (2015, S. 1 f.) die Frage nach den Grundbegriffen noch weiter zu fassen, weniger aus rein mathematischer Perspektive zu beantworten. Grundbegriffe verstehen sich im Rahmen der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes als die mathematisch notwendigen Begriffe für das Lehren/Lernen der (Raum-)Geometrie. Die Orientierung an den KMK-Bildungsstandards (2012; 2022) stützt sich hierbei im Besonderen durch die Gymnasiallehrpläne des Bundeslandes Bayern und des Saarlandes für die Klassenstufen fünf und sechs (vgl. hierzu ISB 2022a/ISB 2022b; MBK-SL 2014a/MBK-SL 2014b).

3.1 Punkte, Geraden und Ebenen

Allgemein stellen Ebenen und Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ Teilmengen der Punktmenge \mathcal{P} dar. Eine Ebene des Raumes ist durch die Menge $m_{A,B} := \{X \in \mathcal{P} : \{A, X\} \equiv_d \{X, B\}\}$ für zwei verschiedene Punkte A und B definiert, eine Gerade als die Schnittmenge zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen. Für eine Gerade gilt damit basierend auf dem Satz 2.2.2.6, dass sie stets in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ des Raumes liegt. In diesem Zusammenhang lässt sich eine Gerade als die zur Menge $m_{A,B}|_{\epsilon} := \{X \in \epsilon : \{A, X\} \equiv_{d|_{\epsilon}} \{X, B\}\}$ für zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene ϵ identische Menge beschreiben (siehe hierzu Bemerkung 2.2.2.9).

Auf der Grundlage ihrer definatorischen Festlegung beschreibt eine Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine Punktmenge, die in Bezug zu zwei beliebigen verschiedenen, aber festen Punkten, einen jeden Punkt umfasst, der zu den beiden Punkten einen identischen Abstand besitzt. Entsprechend beschreibt eine Gerade als Teilmenge einer Ebene des Raumes eine Punktmenge, die in Bezug zu zwei beliebigen verschiedenen, aber festen Punkten, der jeweiligen Ebene einen jeden Punkt umfasst, der zu den Punkten einen identischen Abstand besitzt. Bezüglich der Geraden teilt bereits G. W. Leibniz (*1646, †1716) die Idee einer solchen Charakterisierung (vgl. Schröder 1985, S. 15). Die Möglichkeit dieser geometrischen Beschreibung der Ebenen und Geraden mittels der Relation der Abstandsgleichheit sei an dieser Stelle mit Blick auf den Geometrieunterricht explizit hervorgehoben: Sie ergänzt die anschaulich-deskriptive Beschreibung von Ebenen und Geraden, die im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I mit dem Funktionsbegriff sowie im Geometrieunterricht der Sekundarstufe II mit der analytischen Geometrie verknüpft wird (vgl. hierzu Henn/Filler 2015, S. 150–155), um eine geometrische Beschreibung. (Im Geometrieunterricht ist die geometrische Beschreibung meines Erachtens jedoch weniger präsent.)

3.1.1 Inzidenz

Die Inzidenz beschreibt die grundlegende Beziehung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, und zwar deren gegenseitige Verknüpfung (vgl. zusätzlich Filler 1993, S. 62). Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ drückt sich diese in der Element- bzw. Teilmengenbeziehung aus. Axiomatisierungen, die auf eine mengentheoretische Formalisierung verzichten, nutzen Relationsbegriffe wie „Zusammengehören“ oder wie die „Inzidenz“

selbst (vgl. Filler 1993, S. 124 f.; Hilbert 1987, S. 2–4). Ferner beginnen zahlreiche Axiomatisierungen der euklidischen (Raum-)Geometrie mit den Axiomen zur Inzidenz und untergliedern sich daraufhin in weitere Axiomengruppen, etwa Axiomatisierungen wie die von Hilbert (1987) oder Moise (1990). Ein solch sukzessives Vorgehen ist in der Regel mathematisch motiviert (vgl. Filler 1993, S. 64). Vor dem Hintergrund des fachdidaktischen Anspruchs der vorliegenden Arbeit ist ein sukzessiver Aufbau für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes nicht adäquat (siehe auch Kapitel 2.2). Von (mathematischen) Interesse, ist die Untersuchung von Geometrien, die sich entsprechend des sukzessiven Aufbaus auf einzelne Axiomengruppen reduzieren (vgl. hierzu Filler 1993, S. 64). In diesem Zusammenhang verdeutlichen insbesondere Modelle der Inzidenzgeometrie die Unvollkommenheit solcher Geometrien in Bezug zur euklidischen Geometrie; die Modelle sind zu unserer intuitiven Vorstellung der euklidischen Geometrie mitunter recht ambivalent. Allgemein ist die Ambivalenz desto größer, je weniger Axiome zugrunde liegen (vgl. Filler 1993, S. 64). Anhand eines Modells der Inzidenzgeometrie sei der Leser hierfür sensibilisiert. Das dem Beispiel zugrunde liegende Modell orientiert sich an Moise (1990, S. 47).

Ein Modell der Inzidenzgeometrie

Es sei eine vierelementige Menge \mathcal{P}_I gegeben. Die Elemente der Menge werden als Punkte bezeichnet. Jede zweielementige Punktmenge wird weiter als Gerade sowie jede dreielementige Punktmenge als Ebene bezeichnet. Die Menge aller Ebenen sei mit dem Symbol \mathcal{E}_I und die aller Geraden mit dem Symbol \mathcal{G}_I charakterisiert:

$$\mathcal{E}_I = \{\{X_1, X_2, X_3\} \subseteq \mathcal{P} : |\{X_1, X_2, X_3\}| = 3\} \quad \text{mit } |\mathcal{E}_I| = \binom{4}{3} = 4.$$

$$\mathcal{G}_I = \{\{X_1, X_2\} \subseteq \mathcal{P} : |\{X_1, X_2\}| = 2\} \quad \text{mit } |\mathcal{G}_I| = \binom{4}{2} = 6.$$

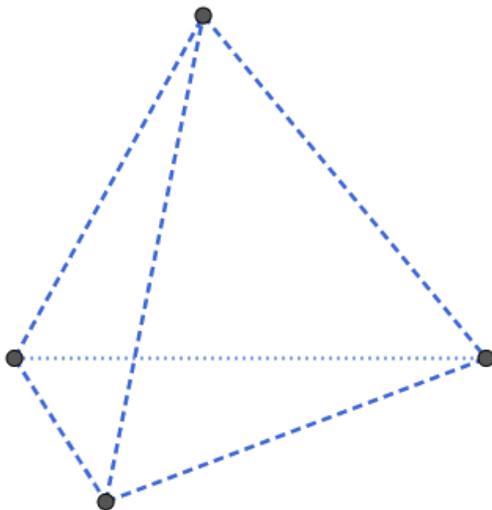
Das Modell $(\mathcal{P}_I, \mathcal{E}_I, \mathcal{G}_I)$ beschreibt eine räumliche Inzidenzgeometrie im Sinne Hilberts (1987); es erfüllt die Axiome der Inzidenz nach Hilbert (1987, S. 2–4): (Die Formulierung der Axiome wurde an die Sprechweisen der vorliegenden Arbeit angepasst.)

- 1) *Es gibt mindestens vier verschiedene, nicht komplanare sowie mindestens drei verschiedene, nicht kollineare Punkte, weiter enthält jede Gerade mindestens zwei verschiedene sowie jede Ebene mindestens einen Punkt* — Im Modell $(\mathcal{P}_I, \mathcal{E}_I, \mathcal{G}_I)$ gilt dies per definitionem.

- 2) *Drei verschiedene, nicht kollineare Punkte liegen stets in genau einer Ebene* — Die Ebenenmenge \mathcal{E}_I des Modells $(\mathcal{P}_I, \mathcal{E}_I, \mathcal{G}_I)$ ist gleich der Menge aller dreielementigen Kombinationen aus der Punktmenge \mathcal{P}_I , sodass das Modell die Aussage des Axioms erfüllt.
- 3) *Zwei verschiedene Punkte liegen stets auf genau einer Geraden* — Die Geradenmenge \mathcal{G}_I des Modells $(\mathcal{P}_I, \mathcal{E}_I, \mathcal{G}_I)$ ist gleich der Menge aller zweielementigen Kombinationen aus der Punktmenge \mathcal{P}_I , sodass das Modell die Aussage des Axioms erfüllt.
- 4) *Der Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen ist eine mindestens zweielementige Punktmenge* — Im Modell $(\mathcal{P}_I, \mathcal{E}_I, \mathcal{G}_I)$ besitzt der Schnitt zweier verschiedener Ebenen stets genau zwei Punkte (und ist somit eine Gerade).
- 5) *Liegen zwei verschiedene Punkte einer Geraden in einer Ebene, so liegt die gesamte Gerade in dieser Ebene* — Per definitionem enthält jede Gerade im Modell $(\mathcal{P}_I, \mathcal{E}_I, \mathcal{G}_I)$ lediglich zwei verschiedene Punkte, womit die Aussage des Axioms gilt.

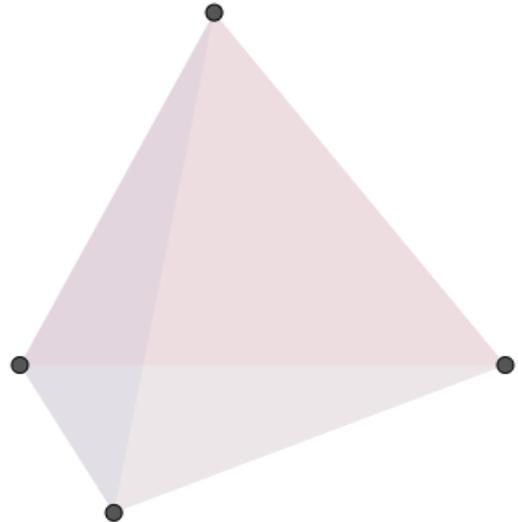
In den Abbildungen 3.1 und 3.2 ist das Modell $(\mathcal{P}_I, \mathcal{E}_I, \mathcal{G}_I)$ veranschaulicht. Hier gilt es zu beachten, dass das Modell ausschließlich aus den Eckpunkten der dargestellten Pyramide besteht, die gestrichelten Kanten und farbig unterlegten Flächen die *Geraden und Ebenen* als zwei- bzw. dreielementige Punktmenge symbolisieren (vgl. zusätzlich Moise 1990, S. 47).

Abbildung 3.1: Inzidenzmodell–I



Quelle: Eigene Darstellung (mit GeoGebra)

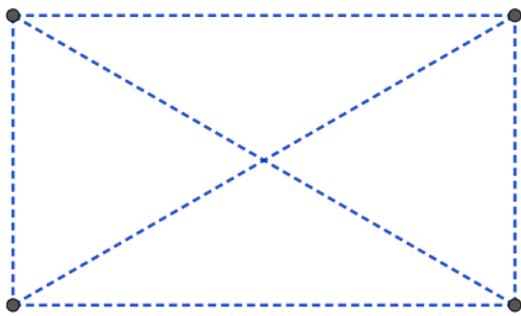
Abbildung 3.2: Inzidenzmodell–II



Quelle: Eigene Darstellung (mit GeoGebra)

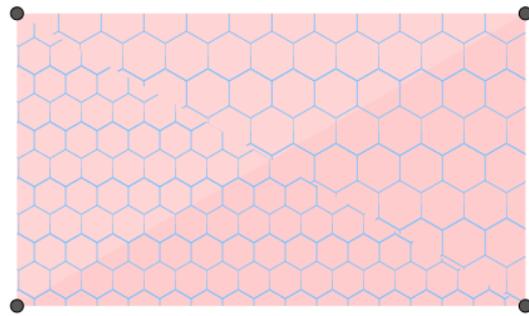
Entgegen der raumperspektivischen Visualisierung des Modells kann das Modell wie in den Abbildungen 3.3 und 3.4 auch aus einer ebenen Perspektive visualisiert werden. Auf mathematischer Seite ist zugleich eine ebene-geometrische Interpretation gegeben, und zwar stellt das Tripel $(\mathcal{P}_I, \mathcal{E}_I, \mathcal{G}_I)$ ohne die Betrachtung der Ebenenmenge \mathcal{E}_I (also das Paar $(\mathcal{P}_I, \mathcal{G}_I)$) das kleinstmögliche Modell einer affinen Ebene dar (vgl. Karzel et al. 1973, S. 13; siehe auch Kapitel 2.2.1).

Abbildung 3.3: Inzidenzmodell–III



Quelle: Eigene Darstellung (mit GeoGebra)

Abbildung 3.4: Inzidenzmodell–IV



Quelle: Eigene Darstellung (mit GeoGebra)

Schließlich zeigt sich anhand der Visualisierung in den Abbildungen 3.1–3.4 und den verschiedenen mathematischen Interpretationsmöglichkeiten, dass eine auf einzelne Axiomengruppen der euklidischen Geometrie (unserer Anschauung) eingeschränkte Geometrie, hier die Inzidenzgeometrie nach Hilbert (1987), mitunter recht unvollkommen ist. Des Weiteren zeigt sich insbesondere im Hinblick auf die verschiedenen mathematischen Interpretationsmöglichkeiten, dass unsere Anschauung zu mathematischen Fehlschlüssen führen kann, geometrische Schlussfolgerungen (auch im Geometrieunterricht) keinesfalls alleine auf unserer Anschauung basieren sollten respektive können.

Inzidenzgeometrische Betrachtung in $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$

Zwei Aussagen zur Inzidenz sind in dem metrisch-normalen euklidischen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ bereits mit den Verbindungsaxiomen $V_{\mathcal{G}}$ und $V_{\mathcal{E}}$ für Geraden bzw. Ebenen dargelegt. Zahlreiche Axiomatisierungen der euklidischen (Raum-)Geometrie fordern in Bezug zur Aussage des Verbindungsaxioms $V_{\mathcal{E}}$ neben der Existenz auch die Eindeutigkeit axiomatisch, etwa Axiomatisierungen wie die von Hilbert (1987) oder Moise (1990). Innerhalb des metrisch-

normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ erweitern wir das Axiom mit dem Satz 3.1.1.1 um die Eindeutigkeit. Ein entsprechender Nachweis zeigt sich auch in der Axiomatisierung Schröders (1985, S. 212). Gleiches gilt in Bezug zur inzidenzgeometrischen Aussage des darauffolgenden Satzes 3.1.1.2, sodass auch diese Aussage innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ nicht axiomatisch zu fordern ist.

Satz 3.1.1.1. Durch drei nicht kollineare Punkte geht innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ genau eine Ebene.

Beweis: (vgl. Schröder 1985, S. 212)

Es seien drei nicht kollineare Punkte A , B und C innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gegeben. Das Verbindungsaxiom-Ebenen liefert umgehend die Existenz einer Ebene ϵ , die durch die Punkte A , B und C geht.

Die Eindeutigkeit zeigen wir mittels eines Widerspruchsbeweises. Hierzu sei η eine von ϵ verschiedene Ebene, die durch die Punkte A , B und C geht. Die Ebenen ϵ und η sind verschieden, aber nicht disjunkt. Ihre Schnittmenge ist innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes eine durch die Punkte A , B und C gehende Gerade, was allerdings im Widerspruch zur Nichtkollinearität der Punkte steht. \square

Anlehnend an das Verbindungsaxiom $V_{\mathcal{G}}$ bezeichnen wir die nach dem soeben bewiesenen Satz 3.1.1.1 (in Erweiterung des Axioms $V_{\mathcal{E}}$) eindeutig existierende Ebene als die *Verbindungsebene* $\langle A, B, C \rangle$ der Punkte.

Satz 3.1.1.2. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ existieren mindestens vier nicht komplanare Punkte.

Beweis: (vgl. Schröder 1985, S. 212)

Mit der definitorischen Festlegung der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes existieren innerhalb des Raumes mindestens zwei verschiedene Punkte A und B . Die durch die beiden Punkte innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes charakterisierte Ebene $m_{A,B}$ enthält nach dem Satz 2.2.2.5 mindestens drei nicht kollineare paarweise verschiedene Punkte. Diese Punkte liegen gemeinsam ausschließlich in der Ebene $m_{A,B}$ nach

dem Satz 3.1.1.1, wobei diese Ebene per definitionem weder den Punkt A noch den Punkt B enthält. Schließlich ist das zu Zeigende nachgewiesen. \square

Bemerkung 3.1.1.3. Für je drei von vier nicht komplanaren Punkten innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gilt stets die Nicht-Kollinearität, da anderenfalls die vier Punkte im Gesamten aufgrund des Satzes 3.1.1.1 bzw. aufgrund der definitorischen Festlegung der Geraden innerhalb des Raumes komplanar sind, was ein Widerspruch darstellt. Für drei nicht kollineare Punkte innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ wiederum gilt aufgrund des Axioms V_G (unter Berücksichtigung der Zweielementigkeit der Punktmenge \mathcal{P} im Falle, dass die drei Punkte identisch sind), dass die Punkte paarweise zueinander verschieden sind. Für vier nicht komplanare Punkte erhalten wir damit zugleich weiter, dass diese ebenfalls zueinander paarweise verschieden sind.

Angemerkt sei hier, dass wenn wir von „zwei Punkten (A und B)“ sprechen, diese sowohl identisch als auch verschieden sein können. Zur Charakterisierung des Letztgenannten sprechen wir explizit von „zwei verschiedenen“, bei einer größeren Anzahl teilweise auch von „paarweise verschiedenen“. Für weitere Untersuchungsobjekte wie Geraden oder Ebenen gilt entsprechendes. In der Fachliteratur zeigt sich hinsichtlich der Sprechweise kein einheitliches Vorgehen (vgl. Martin 1975, S. 34f.). Es existieren durchaus Axiomatisierungen, die eine Unterscheidung wie in der vorliegenden Arbeit nicht treffen, sondern die Gleichheit der Untersuchungsobjekte bereits durch die Nennung der Anzahl ausschließen (vgl. Martin 1975, S. 34f.). Meines Erachtens ist die Vorgehensweise der vorliegenden Arbeit mit Blick auf die definitorische Festlegung solcher Relationen wie der „Parallelität“ oder „Kongruenz“ stringenter. Parallele bzw. kongruente Geraden etwa – es wird in der Mehrzahl gesprochen – können durchaus zueinander identisch sein (siehe hierzu Kapitel 3.1.2 und 3.4). Das Vorgehen in der vorliegenden Arbeit wird (vor dem Hintergrund des fachdidaktischen Aspekts ihrer Zielsetzung) mit Blick auf die analytische Geometrie (der Sekundarstufe II) unterstrichen; so lässt sich eine Gerade/Ebene beispielsweise mittels „verschiedener“ algebraischer Gleichungen beschreiben.

In dem Nachweis des vorangegangenen Satzes 3.1.1.2 nutzen wir mit dem Satz 2.2.2.5 eine Aussage, die selbst eine inzidenzgeometrische Aussage innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ darstellt. Das Kapitel 2.2.2 erfordert gemeinhin in Be-

zug zu dem vorliegenden Kapitel ein Vorgreifen auf einzelne inzidenzgeometrische Aussagen. Das vorliegende Kapitel zur Inzidenz innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ schließen wir mit den Sätzen 3.1.1.4 und 3.1.1.5. Diese erweitern im Hinblick auf den Satz 3.1.1.1 die Fälle, in denen eine eindeutig bestimmte Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ existiert.

Satz 3.1.1.4. (vgl. Mitschka 1977, S. 160) Für eine Gerade und einen nicht auf dieser Gerade liegenden Punkt existiert innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ genau eine Ebene, sodass die Gerade und der Punkt gemeinsam in der Ebene liegen.

Beweis: (vgl. Mitschka 1977, S. 160)

Es sei eine Gerade g und ein nicht auf der Geraden liegender Punkt A innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gegeben. Aufgrund des Satzes 2.2.2.3 liegen auf der Geraden g zwei verschiedene Punkte B und C . Nach dem Verbindungsaxiom-Geraden gibt es innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes neben der Geraden g keine weitere zur Geraden g verschiedene Gerade, die durch die Punkte B und C geht. Zusammenfassend existieren mit den Punkten A , B und C innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes drei nicht kollineare Punkte. Nach dem Satz 3.1.1.1 liegen die Punkte gemeinsam in einer eindeutig bestimmten Ebene, die aufgrund des Satzes 2.2.2.1 zugleich die Gerade g als die Verbindungsgerade der Punkte B und C enthält. Damit gilt das zu Zeigende. \square

Satz 3.1.1.5. (vgl. Moise 1990, S. 46) Für zwei Geraden, die genau einen gemeinsamen Punkt besitzen, existiert innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine eindeutig bestimmte Ebene, in der die beiden Geraden gemeinsam liegen.

Beweis: (vgl. Moise 1990, S. 46)

Es seien zwei Geraden g und h mit genau einem gemeinsamen Punkt A innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gegeben. Aufgrund des Satzes 2.2.2.3 existiert auf beiden Geraden jeweils ein von dem Punkt A verschiedener Punkt, der nicht auf der jeweils anderen Gerade liegt. Zusammen mit dem Satz 2.2.2.1 folgt umgekehrt aus dem Satz 3.1.1.4, dass die Gerade g und h innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gemeinsam in einer eindeutig bestimmten Ebene liegen. \square

3.1.2 Parallelität und Orthogonalität

Die Betrachtung der „Inzidenz“ (3.1.1) als die gegenseitige Verknüpfung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen ist von der Betrachtung der Lagebeziehung von Geraden/Ebenen nicht trennscharf abzugrenzen, vielmehr herrscht ein fließender Übergang.

Basierend auf der inzidenzgeometrischen Aussage des Verbindungsaxioms-Geraden schränken sich die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf drei Fälle ein (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 9f.):

Definition 3.1.2.1. Es seien zwei Geraden g und h gegeben. Die beiden Geraden...

- a) ...heißen zueinander **parallel**, wenn sie identisch sind ($g = h$) oder gemeinsam in einer Ebene liegen und keine Punkte gemeinsam haben ($g \cap h = \emptyset$); *in Zeichen: $g \parallel h$.*
- b) ...heißen **windschief**, wenn sie nicht komplanar und als Punktemengen disjunkt sind.
- c) ...**schneiden sich** im (Schnitt-)Punkt A , das heißt, die beiden Geraden g und h besitzen genau einen Punkt A gemeinsam ($g \cap h = \{A\}$).

Beachtet sei, dass aufgrund des Satzes 2.2.2.3 die Menge aller sich schneidender Geraden und die Menge aller paralleler (identischer) Geraden zueinander disjunkt sind. Entsprechend der Definition 3.1.2.1 sind zwei Geraden g und h genau dann nicht parallel ($g \not\parallel h$), wenn die beiden Geraden einen Schnittpunkt besitzen oder zueinander windschief sind.

Der Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen stellt per definitionem innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine Gerade dar. Auf dieser Grundlage lassen sich die möglichen Lagebeziehungen zweier Ebenen wie folgt charakterisieren (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 10f.):

Definition 3.1.2.2. Es seien zwei Ebenen ϵ und η gegeben. Die beiden Ebenen...

- a) ...heißen zueinander **parallel**, wenn sie identisch sind ($\epsilon = \eta$) oder keine gemeinsamen Punkte besitzen ($\epsilon \cap \eta = \emptyset$); *in Zeichen: $\epsilon \parallel \eta$.*
- b) ...**schneiden sich** in einer (Schnitt-)Geraden g , das heißt, die beiden Ebenen ϵ und η besitzen genau eine Gerade g gemeinsam ($\epsilon \cap \eta = g$).

Eine Ebene und eine nicht in der Ebene liegende Gerade besitzen aufgrund des Satzes 2.2.2.1 höchstens einen Punkt gemeinsam, womit sich innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die möglichen Lagebeziehungen einer Geraden und Ebene ebenfalls auf zwei Fälle beschränken (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 10):

Definition 3.1.2.3. Es sei eine Gerade g und Ebene ϵ gegeben. Die Gerade und Ebene...

- a) ...heißen zueinander **parallel**, wenn sie keine gemeinsamen Punkte besitzen ($g \cap \epsilon = \emptyset$) oder die Gerade in der Ebene liegt ($g \subseteq \epsilon$); *in Zeichen:* $g \parallel \epsilon$.
- b) ...**schneiden sich** im (Schnitt-)Punkt A , das heißt, die Gerade g und die Ebene ϵ besitzen genau einen Punkt A gemeinsam ($g \cap \epsilon = \{A\}$).

Parallelität

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ erweitert sich der Parallelitätsbegriff im Vergleich zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene um die Parallelität zwischen zwei Ebenen sowie zwischen einer Geraden und Ebene. Zwei Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ sind genau dann zueinander parallel (unter Berücksichtigung der definitorischen Festlegung einer Geraden, in dem Falle, dass die Geraden zueinander identisch sind), wenn sie in einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes parallel sind (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 19). Im Allgemeinen steht die Komplanarität zweier (disjunkter) Geraden hinsichtlich ihrer Parallelität innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes nicht zur Disposition.

Die Komplanarität bezüglich zweier aus dem Parallelenaxiom resultierender paralleler Geraden ist innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit Satz 3.1.1.4 eindeutig auf eine Ebene festgelegt. Nach dem Satz 3.1.1.4 existiert innerhalb des Raumes für eine Gerade und einen nicht auf der Geraden liegenden Punkt genau eine Ebene, in der der Punkt und die Gerade gemeinsam liegen. Basierend auf dem Satz 3.1.1.4, dessen Nachweis ohne jegliche (auch vorherige) Anwendung des Parallelenaxioms erfolgt, beschreibt die Aussage des Parallelenaxioms innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ letztlich ein ebenes Axiom (vgl. Hilbert 1987, S. 28 f.; Mitschka 1977, S. 170 f.). Ohnehin gilt die Aussage des Parallelenaxioms wie auch dessen Verallgemeinerung aufgrund des Satzes 2.2.2.6 in jeder Ebene des Raumes, eben als eine metrisch-normale euklidische Ebene des

Raumes (vgl. hierzu Lauer 2018). Das verallgemeinerte Parallelenaxiom zeigen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit dem

Satz 3.1.2.4. (*Verallgemeinertes Parallelenaxiom*; vgl. auch Schröder 1985, S. 16 u. 213) Es sei eine Gerade g und ein Punkt A gegeben. Dann existiert genau eine durch den Punkt A gehende, zur Geraden g parallele Gerade.

Beweis: (vgl. Schröder 1991, S. 8f.)

Liegt der Punkt A nicht auf der Geraden g , so gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes die Behauptung mit dem Parallelenaxiom. Anderenfalls erhalten wir aufgrund des Verbindungsaxioms-Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes, dass jede durch den Punkt A gehende Gerade entweder die Gerade g schneidet oder zur Geraden g identisch ist, womit in diesem Fall mit der Geraden g eine eindeutig bestimmte durch den Punkt A gehende, zur Geraden g parallele Gerade existiert. \square

Korollar 3.1.2.5. Es sei eine Gerade g gegeben. Jede zur Geraden g Parallele, die durch einen Punkt der Geraden geht, ist zur Geraden g identisch.

Beweis:

Die Aussage folgt umgekehrt aus dem soeben erfolgten Nachweis des Satzes 3.1.2.4, des verallgemeinerten Parallelenaxioms. \square

Die mit dem Satz 3.1.2.4 eindeutig bestimmte Parallele bezeichnen wir als die *Parallele* $(A \parallel g)$ durch A zu g . Basierend auf dem (verallgemeinerten) Parallelenaxiom erhalten wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ weiter den

Satz 3.1.2.6. (vgl. Schröder 2014b, S. 16) Es seien eine zueinander parallele Ebene ϵ und Gerade g gegeben. Dann liegt jede zur Geraden g Parallele, die durch einen Punkt der Ebene ϵ geht, in der Ebene ϵ .

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: Schröder 2014b, S. 16)

Es sei $(A \parallel g)$ die Parallele zur Geraden g durch einen Punkt A der Ebene ϵ . Die Ebene ϵ und Gerade g sind nach Voraussetzung zueinander parallel. Zum Nachweis, dass die Parallele $(A \parallel g)$ in der Ebene ϵ liegt, unterscheiden wir hiermit zwei Fälle.

Es gelte $g \subseteq \epsilon$: Liegt der Punkt A innerhalb der Ebene ϵ auf der Geraden g , so liefert das Korollar 3.1.2.5 die Behauptung. Anderenfalls betrachten wir mit dem Satz 2.2.2.6 die Ebene ϵ als metrisch-normale euklidische Ebene. Jede metrisch-normale euklidische Ebene erfüllt die Aussage des Parallelenaxioms (siehe hierzu Kapitel 2.2), womit aus dem Parallelenaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes wiederum das zu Zeigende folgt.

Es gelte $g \cap \epsilon = \emptyset$: Dann ist die Gerade g zu ihrer durch den Punkt A der Ebene ϵ gehenden Parallelen ($A \parallel g$) disjunkt parallel. Gleichwohl liegen die Geraden als zueinander parallele Geraden gemeinsam in einer Ebene η . Die Ebenen ϵ und η sind zueinander verschieden, aber nicht disjunkt; denn beide Ebenen gehen durch den Punkt A , aber die Ebene ϵ durch keinen Punkt der Geraden g . Der Schnitt beider Ebenen stellt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem eine Gerade dar. Diese Gerade geht durch den Punkt A , liegt gemeinsam mit der Geraden g in der Ebene η , ist jedoch aufgrund der geltenden Voraussetzung zur Geraden g disjunkt. Hieraus folgt mit dem Satz 3.1.2.4, dass die Parallele ($A \parallel g$) zur Schnittgeraden der Ebenen ϵ und η identisch ist, also in der Ebene ϵ liegt. \square

In einer metrisch-normalen euklidischen Ebene stellt die Parallelität auf der Menge aller Geraden eine Äquivalenzrelation, also eine reflexive, symmetrische und transitive Relation dar (vgl. Lauer 2018, S. 30). Entsprechendes zeigen wir mit dem Satz 3.1.2.7 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf der Menge \mathcal{G} aller Geraden und auf der Menge \mathcal{E} aller Ebenen. Den Nachweis des Satzes orientieren wir, differenzierter und mitunter ausführlicher, an der Beweisführung Schröders (2014b, S. 16f.).

Satz 3.1.2.7. Die Parallelität stellt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf der Menge \mathcal{G} aller Geraden sowie auf der Menge \mathcal{E} aller Ebenen eine Äquivalenzrelation dar.

Beweis: (siehe zuvor, Schröder 2014b)

Per definitionem beschreibt die Parallelität auf der Menge \mathcal{G} aller Geraden sowie auf der Menge \mathcal{E} aller Ebenen eine reflexive und symmetrische Relation, womit zum Nachweis des zu Zeigenden die Transitivität nachzuweisen bleibt. Diesbezüglich gliedern wir den Nachweis in zwei Schritte.

Transitivität auf \mathcal{G} : Es seien drei Geraden g , h und k derart gegeben, dass die Gerade h zur Geraden g und k parallel ist. Wir zeigen, dass hieraus die Parallelität der Geraden g und k folgt: $g \parallel h \wedge h \parallel k \Rightarrow g \parallel k$.

Ist die Gerade h zur Geraden g oder k identisch, so ergibt sich die Parallelität der Geraden g und k umgehend. Mit der Definition 3.1.2.1 bleibt der Fall zu betrachten, dass die Geraden g und h gemeinsam in einer Ebene ϵ liegen und zueinander disjunkt sind sowie die Geraden h und k gemeinsam in einer Ebene η liegen und ebenfalls zueinander disjunkt sind. Hier differenzieren, ob die Gerade g zur Ebene η disjunkt oder eben nicht disjunkt ist:

Es gelte $g \cap \eta = \emptyset$: Damit ist die Gerade g zur Ebene η parallel. Auf der in der Ebene η liegenden Geraden k existiert nach dem Satz 2.2.2.3 mindestens ein Punkt A . Durch den Punkt A betrachten wir die nach dem Satz 3.1.2.4 eindeutig bestimmte Parallele zur Geraden g . Zusammen mit dem Satz 3.1.2.6 gilt, dass die Parallele ($A \parallel g$) in der Ebene η liegt, wie nach Voraussetzung die Geraden h und k . Dabei geht die Parallele ($A \parallel g$) durch den Punkt A der Geraden k , die nach Voraussetzung wiederum zur Geraden h disjunkt parallel ist. Wir erhalten, dass die Parallele ($A \parallel g$) und die Gerade h innerhalb der Ebene η zwei verschiedene Geraden darstellen. Im Weiteren zeigen wir, dass die Parallele ($A \parallel g$) zur Geraden h disjunkt, also nach dem Satz 3.1.2.4 zur Geraden k identisch ist und somit das zu Zeigende, die Parallelität der Geraden g und k , gilt.

Die Gerade g und die Parallele ($A \parallel g$) liegen aufgrund ihrer Parallelität gemeinsam in einer Ebene δ . Im Gegensatz zu ihrer Parallelen liegt die Gerade g nach Voraussetzung allerdings nicht in der Ebene η , sodass mit der definitorischen Festlegung der Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gilt, dass die Ebenen δ und η sich in der Parallelen ($A \parallel g$) schneiden. Wie bereits gezeigt ist die Parallele zur Geraden h verschieden; wir erhalten, dass die Gerade h nicht in der Ebene δ liegt, im Gegensatz zur Geraden g . Die Geraden g und h wiederum liegen nach Voraussetzung gemeinsam in der Ebene ϵ . Folglich schneiden sich die Ebenen ϵ und δ in der Geraden g . Zugleich sind die Geraden g und h nach Voraussetzung zueinander disjunkt parallel. Schließlich erhalten wir zusammenfassend, dass die Gerade h zur Ebene δ und somit zur Parallelen ($A \parallel g$) disjunkt ist, also das zu Zeigende gilt.

Es gelte $g \cap \eta \neq \emptyset$: Dann existiert mindestens ein Punkt A , der sowohl in der Ebene η als auch auf der Geraden g liegt. Dabei ist die Gerade g nach Voraussetzung zur Geraden h parallel, wobei die Gerade h zudem in der Ebene η liegt. Zusammen mit dem Satz 3.1.2.6

erhalten wir, dass die Gerade g ebenfalls eine Gerade der Ebene η darstellt. Innerhalb der Ebene η als eine nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes ist die Parallelität auf der Menge aller Geraden eine transitive Relation. Schließlich folgt aus der Voraussetzung, dass die Geraden h und k innerhalb der Ebene η parallel sind, zusammen mit der Verträglichkeit der Parallelität in Ebene und Raum, dass Geraden g und h innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zueinander parallel sind. Damit ist das zu Zeigende nachgewiesen.

Transitivität auf \mathcal{E} : Es seien drei Ebenen ϵ , η und δ derart gegeben, dass die Ebene η zur Ebene ϵ und δ parallel ist. Wir zeigen, dass hieraus die Parallelität der Ebenen ϵ und δ folgt: $\epsilon \parallel \eta \wedge \eta \parallel \delta \Rightarrow \epsilon \parallel \delta$.

Ist die Ebene η zur Ebene ϵ oder δ identisch, so gilt die Parallelität der Ebenen ϵ und δ umgekehrt. Mit der Definition 3.1.2.2 bleibt der Fall zu betrachten, dass die Ebene η zur Ebene ϵ und δ disjunkt ist. Hier bleibt unter der Annahme, dass die Ebenen ϵ und δ nicht disjunkt sind, die Gleichheit der beiden Ebenen zu zeigen; denn sind die Ebenen ϵ , δ und η paarweise disjunkt, so gilt bereits das zu Zeigende.

Als zwei zueinander nicht disjunkte Ebenen besitzen die Ebene ϵ und δ mindestens eine gemeinsame Gerade g (siehe Definition 3.1.2.2). Beide Ebenen sind nach Voraussetzung zur Ebene η disjunkt, sodass ebenfalls die Gerade g zur Ebene η disjunkt ist. Innerhalb der Ebene η existieren aufgrund des Satzes 2.2.2.5 mit dem Axiom V_G mindestens zwei sich in einem Punkt A schneidende Geraden. Zusammen mit dem Satz 3.1.1.5 erhalten wir, dass eine dieser beiden Geraden zur Geraden g disjunkt ist; es sei h die in der Ebene η liegende zur Geraden g windschiefe Gerade. Die Gerade g geht nach dem Satz 2.2.2.3 durch mindestens einen Punkt B . Durch den Punkt B betrachten wir im Weiteren die nach dem Satz 3.1.2.4 eindeutig bestimmte Parallele zur Geraden h . Wir zeigen, dass die Parallele ($B \parallel h$) zur Geraden g verschieden und ebenso wie die Gerade g in der Ebene ϵ und δ liegt, also die beiden Ebenen aufgrund des Satzes 3.1.1.4 bzw. 3.1.1.5 zueinander identisch sind und somit das zu Zeigende gilt.

Mit der Geraden h existiert eine zur Geraden g windschiefe, in der Ebene η liegende Gerade. Dabei ist die Ebene η nach Voraussetzung zur Ebene ϵ und δ disjunkt. Ferner liegt die Gerade g in den Ebenen ϵ und δ . Zusammen mit dem Satz 3.1.2.6 erhalten wir, dass die durch den Punkt B der Geraden g gehende Parallele ($B \parallel h$) zur Geraden h ebenfalls in den Ebenen ϵ und δ liegt. Die Verschiedenheit der Parallelen zur Geraden ergibt sich umgekehrt mit der

Windschiefe der Geraden h zur Geraden g . Zusammenfassend erhalten wir schließlich das zu Zeigende. \square

Der Satz 3.1.2.7 wirft die Frage auf, ob die Parallelität innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ im übertragenen Sinne auch zwischen Geraden und Ebenen reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die beiden erstgenannten Aspekte folgen umgekehrt aus der jeweiligen definatorischen Festlegung der Parallelität. Eingebettet in eine spezifische Untersuchung der Parallelität in Kapitel 4.2.1 zeigt sich jedoch, dass die Transitivität im übertragenen Sinne gemeinhin nicht gilt.

Orthogonalität

Den Begriff der „Orthogonalität“ führen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ausgehend von dem in einer Ebene, einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene, des Raumes geltenden Orthogonalitätsbegriff bezüglich zweier Geraden ein (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 28):

Definition 3.1.2.8. Eine Gerade g heißt orthogonal zu einer Geraden h , wenn die Geraden gemeinsam in einer Ebene ϵ liegen und auf der Geraden g zwei verschiedene Punkte A und B existieren, sodass die Gerade h gleich der Geraden $m_{A,B}|_{\epsilon}$ innerhalb der Ebene ϵ ist; *in Zeichen:* $g \perp h$.

Definition 3.1.2.9. Eine Gerade g und eine Ebene ϵ heißen zueinander orthogonal, wenn die Ebene ϵ gleich der Ebene $m_{A,B}$ für zwei verschiedene Punkte A und B der Geraden g ist; *in Zeichen:* $g \perp \epsilon$.

Mit der Definition 3.1.2.9 erfolgt die definatorische Festlegung der Orthogonalität zweier Ebenen anlehnd an Quaisser/Sprengel (1989, S. 27) innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit der

Definition 3.1.2.10. Eine Ebene ϵ heißt orthogonal zu einer Ebene η , wenn innerhalb der Ebene ϵ eine zur Ebene η orthogonale Gerade existiert; *in Zeichen:* $\epsilon \perp \eta$.

Neben dem Begriff „orthogonal“ ist auch der Begriff „senkrecht“ gebräuchlich (vgl. auch Quaisser/Sprengel 1989, S. 26), im Sinne einer einheitlichen Sprechweise verwenden wir den Begriff der „Orthogonalität“. Auf der Grundlage des Satzes 2.2.2.2 folgt aus der definitiven Festlegung der Orthogonalität, dass diese eine spezielle Lagebeziehung sich schneidender Geraden/Ebenen charakterisiert. Eine spezifische Untersuchung der Orthogonalität innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ steht in enger Beziehung zur spezifischen Untersuchung der Parallelität, worauf wir in Kapitel 4.2.2 eingehen.

3.1.3 Zwischensein

Punkte, die gemeinsam auf einer Geraden liegen, lassen sich mittels der Beziehung des „Zwischenseins“ näher charakterisieren. Grundsätzlich nimmt die Lagebeziehung eine elementare Bedeutung ein, um weitere grundlegende Begriffe wie der „Halbgerade“ darzulegen (vgl. Millman/Parker 1991, S. 47; siehe auch Kapitel 3.2.1). Die definitiven Festlegung der Lagebeziehung erfolgt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ anlehnend an das metrische Vorgehen von Birkhoff (1932) mit der

Definition 3.1.3.1. Ein Punkt B liegt **zwischen** zwei Punkten A und C , wenn für die Punkte die Gleichung

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

gilt und die Punkte drei verschiedene, kollineare Punkte darstellen; symbolisiert wird die Beziehung mit der Symbolik $[ABC]$.

Die Verschiedenheit der Punkte A und C folgt aufgrund der Definitheit des Abstandes bereits daraus, dass der Punkt B je zum Punkt A und C verschieden ist (vgl. Lauer 2018, S. 24). Weiter liefert die Symmetrie der Abstandsfunktion, dass aus der Beziehung $[ABC]$ umgehend die Beziehung $[CBA]$ folgt (vgl. auch Moise 1990, S. 60). Dabei liefert die Kollinearität der Punkte aufgrund der definitiven Festlegung der Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, dass die Punkte stets in einer Ebene des Raumes liegen. Ein Punkt liegt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ genau dann zwischen zwei Punkten, wenn der Punkt in einer nach dem

Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes zwischen den beiden Punkten liegt (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 24).

In einer metrisch-normalen euklidischen Ebene ergibt sich basierend auf dem Linealaxiom, dass die Beziehung des Zwischenseins verträglich zur Beziehung des Zwischenseins für reelle Zahlen ist (vgl. Lauer 2018, S. 25–27). Dabei gilt für drei reelle Zahlen a , b und c , dass die reelle Zahl „ b zwischen a und c liegt“, wenn bezüglich der Kleinerrelation $<$ (eine Striktordnung auf der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen) die Ungleichung $a < b < c$ oder $c < b < a$ gilt (vgl. auch Millman/Parker 1991, S. 49).

Satz-Masterarbeit 4.1.12 (a). (vgl. Lauer 2018, S. 25) Es sei eine Gerade g mit einer Linealfunktion f gegeben. Auf der Geraden g liegt ein Punkt B genau dann zwischen zwei Punkten A und C , wenn das Bild $f(B)$ zwischen den Bildern $f(A)$ und $f(C)$ der Punkte A bzw. C liegt.

Die Aussage des Linealaxioms gilt in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene gleichermaßen wie in einem metrisch-normalen euklidischen Raum (siehe Kapitel 2.2.1), sodass sich die Verträglichkeit des Zwischenseins analog innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ nachweisen ließe (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 25–27). Ein entsprechender Nachweis der Aussage zeigt sich im räumlichen Kontext etwa auch in der Axiomatisierung von Moise (1990, S. 61). Wir führen den Nachweis im Rahmen des folgenden Satzes 3.1.3.2 hingegen mittels des Satzes 2.2.2.6 auf die Gültigkeit in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene zurück.

Satz 3.1.3.2. Es sei eine Gerade g mit einer Linealfunktion f gegeben. Für drei Punkte A , B und C der Geraden g liegt der Punkt B genau dann zwischen den Punkten A und C , wenn das Bild $f(B)$ des Punktes B unter der Linealfunktion f zwischen den Bildern $f(A)$ und $f(C)$ der Punkte A bzw. C liegt.

Beweis: (Eigener Beweis)

Die Gerade g ist innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen identisch. Nach dem Satz 2.2.2.6 beschreibt jede Ebene des Raumes eine metrisch-normale euklidische Ebene. In einer metrisch-normalen euklidischen Ebene ist die Aussage des Linealaxioms gleichermaßen wie in einem metrisch-normalen euklidischen Raum erfüllt (siehe Kapitel 2.2.1). Ferner gilt

in jeder metrisch-normalen euklidischen Ebene die zu zeigende Äquivalenzaussage (siehe Masterarbeit-Satz 4.1.12). Zusammenfassend erhalten wir, dass die zu zeigende Äquivalenz ebenfalls innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gilt. \square

Der Satz 3.1.3.2 eröffnet innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Möglichkeit, Fragen bezüglich des Zwischenseins auf die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen zurückzuführen (vgl. auch Millman/Parker 1991, S. 49). So zeigen wir basierend auf dem Satz 3.1.3.2 im Weiteren mit dem Satz 3.1.3.3, dass für zwei verschiedene Punkte innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ stets ein Punkt zwischen den beiden Punkten existiert.

Satz 3.1.3.3. (vgl. Moise 1990, S. 63) Für zwei verschiedene Punkte A und B existiert innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$...

- i) ein Punkt C , sodass der Punkt B zwischen den Punkten A und C liegt, sowie
- ii) ein Punkt D , der zwischen den Punkten A und B liegt.

Beweis: (vgl. Moise 1990, S. 63)

Nach dem Verbindungsaxiom $V_{\mathcal{G}}$ liegen die Punkte A und B auf genau einer Geraden, ihrer Verbindungsgeraden, für die aufgrund des Linealaxioms eine Linealfunktion f existiert. Mit der Bijektivität der Funktion f folgt aus der Verschiedenheit der Punkte A und B , dass deren Bilder $a := f(A)$ und $b := f(B)$ ebenfalls verschieden sind; ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte, dass die reelle Zahl a kleiner als die reelle Zahl b ist ($a < b$).

Wir betrachten die reelle Zahl $c := (b+1)$ und $d := ((a+b)/2)$. Mit der reellen Zahl c existiert eine reelle Zahl derart, dass die reelle Zahl b zwischen den reellen Zahlen a und c liegt, und mit der reellen Zahl d eine reelle Zahl zwischen den reellen Zahlen a und b . Aufgrund der Bijektivität der Linealfunktion f sind die beiden Urbilder $C := f^{-1}(c)$ und $D := f^{-1}(d)$ ebenfalls Punkte der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$, sodass wir mit dem Satz 3.1.3.2 das zu Zeigende erhalten. \square

3.2 Der Begriff „Figur“: ebene und räumliche Figuren

Unter dem Begriff der *geometrischen Figur* fassen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ Teilmengen der Punktmenge \mathcal{P} , Teilmengen derer Potenzmenge und auch Mengensysteme von Teilmengen der Potenzmenge zusammen (vgl. auch Mitschka et al. 1998, S. 76). Im Kontext der Mathematikdidaktik steht der Begriff der Figur in der Regel für ebene geometrische Figuren als Pendant zum räumlichen Begriff der geometrischen Körper (vgl. IQ-MV 2013, S. 9–11; Roth/Wittmann 2018). Im Vorliegenden fassen wir die Begriffe *ebene und räumliche Figur* weiter; gegenüber dem universellen Begriff der geometrischen Figur sind die Begriffe hier hingegen einschränkender. Wir schließen aus der Menge der geometrischen Figuren neben den für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ elementaren Begriffe der Punkte, Geraden und Ebenen, geometrische Figuren aus, die keiner expliziten Definition unterliegen. Dabei unterscheiden sich die ebenen von den räumlichen Figuren darin, dass diese als geometrische Figuren sich explizit auf eine Ebene des Raumes beschränken. Im Weiteren diskutieren wir für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes grundlegende ebene und räumliche Figuren.

3.2.1 Strecken/Halbgeraden; Halbräume und -ebenen

Dem Teilungsaxiom entsprechend teilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ jede in einer (beliebigen) Ebene liegende Gerade die jeweilige Ebene in zwei disjunkte Mengen (siehe hierzu Kapitel 2.2.1). Die Nichtleere der beiden Mengen zeigen wir in dem vorliegenden Kapitel. Des Weiteren charakterisieren wir mit Hilfe der in dem Kapitel 3.1.3 dargelegten Beziehung des „Zwischenseins“ (3.1.3) innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ „Strecken“ und „Halbgeraden“. In Bezug zur Aussage des Teilungsaxioms ergibt sich der Nachweis, dass jeder auf einer Geraden liegende Punkt die jeweilige Gerade in zwei disjunkte Halbgeraden teilt. Weiter charakterisieren wir die durch eine Ebene erfolgende Teilung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$.

Strecken/Halbgeraden

Jede Gerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ entspricht aufgrund des Satzes 2.2.2.3 nach dem Verbindungsaxiom V_G der Verbindungsgeraden zweier verschiedener auf der Geraden liegender Punkte. Für diese beiden Punkte existiert nach dem

Satz 3.1.3.3 auf der jeweiligen Geraden stets ein Punkt zwischen den beiden Punkten sowie ein Punkt derart, dass einer der beiden Punkte zwischen diesem und dem übrigen der beiden Punkte liegt. Auf dieser Grundlage erfolgt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die definitorische Festlegung des Begriffs der „Strecke“ sowie „Halbgerade“ mit der

Definition 3.2.1.1. (vgl. Venema 2012, S. 37 f.; siehe im Weiteren auch Bemerkung 3.2.1.5)

Es seien zwei verschiedene Punkte A und B gegeben.

- a) Die Menge aller Punkte X , die zwischen den Punkten A und B liegen, vereinigt mit den beiden Punkten A und B ,

$$[A, B] := \{A, B\} \cup \{X \in \mathcal{P} : [AXB]\},$$

wird als die **Strecke** der Punkte A und B bezeichnet.

- b) Die Menge aller Punkte X , für die der Punkt B zwischen den Punkten A und X liegt, vereinigt mit der Strecke der Punkte A und B ,

$$[A, B) := [A, B] \cup \{X \in \mathcal{P} : [ABX]\},$$

wird als die **Halbgerade** durch den Punkt B mit dem Anfangspunkt A bezeichnet.

Die Strecke sowie Halbgerade bezüglich zweier verschiedener Punkte A und B stellt per definitionem aufgrund des Verbindungsaxioms $V_{\mathcal{G}}$ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine Teilmenge der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ der Punkte A und B dar. Eine Gerade innerhalb des Raumes wiederum entspricht dem Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen. Jede Strecke und Halbgerade innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist zugleich eine Strecke bzw. Halbgerade einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes, und umgekehrt (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 27).

Neben den beiden zugrunde liegenden Punkte besitzt jede Strecke und Halbgerade aufgrund des Satzes 3.1.3.3 mindestens einen weiteren Punkt. In Anlehnung an den Nachweis des Satzes 2.2.2.3 zeigen wir im Weiteren, dass jede Strecke und Halbgerade als die Teilmenge einer Geraden ebenfalls überabzählbar viele verschiedene Punkte besitzt.

Satz 3.2.1.2. Jede Strecke sowie jede Halbgerade innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ besitzt überabzählbar viele verschiedene Punkte.

Beweis: (siehe zuvor, Eigener Beweis)

Es sei innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes die Strecke $[A, B]$ und die Halbgerade $[A, B\rangle$ für zwei verschiedene Punkte A und B gegeben. Aufgrund des Axioms $V_{\mathcal{G}}$ stellt sowohl die Strecke als auch die Halbgerade eine Teilmenge der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ dar. Für diese Gerade existiert nach dem Linealaxiom eine Linealfunktion f . Mit Bijektivität der Funktion f folgt aus der Verschiedenheit der Punkte A und B , dass deren Bilder $a := f(A)$ und $b := f(B)$ ebenfalls zueinander verschieden sind; ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte, dass die reelle Zahl a kleiner als die reelle Zahl b ist ($a < b$).

Zusammen mit der definitorischen Festlegung der Strecken und Halbgeraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes folgt aus dem Satz 3.1.3.2, dass die Linealfunktion f die Strecke der Punkte A und B auf das abgeschlossene Intervall $[a; b]$ sowie die Halbgerade durch den Punkt B mit dem Anfangspunkt A auf das halboffene Intervall $[a; \infty)$ der reellen Zahlen abbildet. Schließlich liefert die Mächtigkeit der jeweiligen Intervalle, ihre überabzählbare Unendlichkeit, aufgrund der Bijektivität der Linealfunktion f , dass die betrachtete Strecke und Halbgerade überabzählbar viele verschiedene Punkte besitzt. \square

Korollar 3.2.1.3. (vgl. Moise 1990, S. 66) Es seien zwei verschiedene Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben. Dann sind...

- i) die Strecken $[A, B]$ und $[B, A]$ zueinander identisch sowie
- ii) für einen von dem Punkt A verschiedenen Punkt C der Halbgeraden $[A, B\rangle$ die beiden Halbgeraden $[A, B\rangle$ und $[A, C\rangle$.

Beweis: (Eigener Beweis)

Analog zum Beweis des Satzes 3.2.1.2 betrachten wir für die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ die Linealfunktion f mit $f(A) =: a < b := f(B)$. Der Beweis des Satzes 3.2.1.2 liefert zum einen, dass das Bild des Punktes C unter der Linealfunktion f ebenfalls zur reellen Zahl a größer ist. Zum anderen erhalten wir hiermit analog zum Beweis des Satzes 3.2.1.2, dass die Linealfunktion f die Strecken $[A, B]$ und $[B, A]$ auf das abgeschlossene Intervall $[a; b]$ sowie die Halbgeraden $[A, B\rangle$ und $[A, C\rangle$ auf das halboffene Intervall $[a; \infty)$ der reellen Zahlen abbildet. Aufgrund der Bijektivität der Linealfunktion f gilt letztlich das zu Zeigende. \square

Korollar 3.2.1.4. (vgl. Moise 1990, S. 66) Sind zwei Strecken $[A, B]$ und $[C, D]$ zueinander identisch, so sind ebenfalls die Mengen $\{A, B\}$ und $\{C, D\}$ der jeweils zugrunde liegenden Punkte identisch.

Beweis: (Eigener Beweis)

Analog zum Beweis des Satzes 3.2.1.2 betrachten wir für die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ die Linealfunktion f mit $f(A) =: a < b := f(B)$; und wir erhalten, dass die Linealfunktion f die Strecke $[A, B]$ auf das abgeschlossene Intervall $[a; b]$ der reellen Zahlen abbildet. Entsprechend liefert die Linealfunktion f mit ihrer Bijektivität aufgrund der nach Voraussetzung geltenden Gleichheit der Strecken $[A, B]$ und $[C, D]$, dass das Bild der Strecke $[C, D]$ zum Intervall $[a; b]$ identisch ist, wobei das Bild des Punktes C zur reellen Zahl a oder b und das des Punktes D zur jeweils übrigen reellen Zahl identisch ist. Folglich erhalten wir wiederum mit der Bijektivität der Linealfunktion f das zu Zeigende. \square

Bemerkung 3.2.1.5. Im Impliziten liefert der Nachweis des Satzes 3.2.1.2, dass jede Strecke des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zu einem abgeschlossenen Intervall der reellen Zahlen sowie jede Halbgerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zu einem halboffenen, links- bzw. rechtsseitig unbeschränkten Intervall der reellen Zahlen gleichmächtig ist. In Orientierung an Schröder (2014a, S. 184 f.) sei damit nun die verwendete (etwaig im schulischen Kontext ungewohnte) Symbolik für eine Strecke $[A, B]$ sowie Halbgerade $[A, B)$ bezüglich zweier verschiedener Punkte A und B begründet. In diesem Zusammenhang sei explizit darauf hingewiesen, dass die Reihenfolge der Punkte A und B keine „links- bzw. rechtsseitige Anordnung“ impliziert; die Halbgerade $[A, B)$ ist zu einem links- oder rechtsseitigen Intervall gleichmächtig, die Strecken $[A, B]$ und $[B, A]$ je zu dem gleichen abgeschlossenen Intervall.

Die Punktmenge der Strecke $[A, B]$ ohne den Punkt A und B sowie die Punktmenge der Halbgeraden $[A, B)$ ohne den Punkt A wird als die *offene Strecke* (A, B) bzw. *offene Halbgerade* (A, B) bezeichnet (vgl. Benölken et al. 2018, S. 89 f.); in diesem Zusammenhang kann für eine Strecke und Halbgerade entsprechend der Zusatz „abgeschlossen“ ergänzt werden (vgl. Filler 1993, S. 77).

Satz 3.2.1.6. (vgl. Filler 1993, S. 78 f.) Es sei g eine (beliebige) Gerade innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Für jeden auf der Geraden g liegenden Punkt A ist die Menge $g \setminus \{A\}$ gleich der Vereinigung zweier zueinander disjunkter offener Halbgeraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt A , sodass die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Zwischen je zwei verschiedenen auf derselben Halbgerade liegenden Punkten liegt der Punkt A nicht.
- (ii) Zwischen je zwei verschiedenen auf unterschiedlichen Halbgeraden liegenden Punkten liegt der Punkt A .

Beweis: (Eigener Beweis)

Für die Gerade g betrachten wir eine nach dem Linealaxiom existierende Linealfunktion f mit $a := f(A)$. Die beiden offenen Intervalle $(-\infty; a)$ und $(a; \infty)$ stellen zwei zueinander disjunkte, nicht leere Intervalle der reellen Zahlen dar. Die Linealfunktion f besitzt aufgrund ihrer Bijektivität wiederum eine bijektive Umkehrabbildung. Zusammen mit der definitiven Festlegung der Halbgeraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes liefert der Satz 3.1.3.2, dass mit den Bildern der offenen Intervalle $(-\infty; a)$ und $(a; \infty)$ unter der Umkehrabbildung der Linealfunktion f zwei zueinander disjunkte offene Halbgeraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt A existieren, sodass die Vereinigung beider Halbgeraden zur Menge $g \setminus \{A\}$ identisch ist und zugleich die beiden zu zeigenden Eigenschaften (i) und (ii) gelten. \square

Für einen auf einer Geraden liegenden Punkt A liefert Satz 3.2.1.6 die Existenz zweier offener zueinander disjunkter Halbgeraden, die bezüglich des Punktes A die jeweilige Gerade teilen. Für eine abgeschlossene Halbgerade $[A, B)$ bzw. offene Halbgerade (A, B) wird die übrige Halbgerade als die zur jeweiligen Halbgerade *komplementäre Halbgerade* $(A, B)_k$ bzw. $[A, B)_k$ bezeichnet (vgl. Benölken et al. 2018, S. 89 f.). Aufgrund des Korollars 3.2.1.3 sind die Halbgeraden durch ihren gemeinsamen Anfangspunkt und einen weiteren Punkt auf der jeweiligen Halbgeraden eindeutig bestimmt (vgl. zusätzlich Benölken et al. 2018, S. 89 f.).

Halbebenen

Dem Teilungsaxiom entsprechend teilt sich jede Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ durch eine in ihr liegende Gerade in zwei disjunkte Mengen derart, dass die Strecke zweier je in einer verschiedenen Menge liegender Punkte die jeweilige Gerade schneidet, im Gegensatz zur Strecke zweier in derselben Menge liegender Punkte (siehe hierzu Kapitel 2.2.1). Die Forderung nach der Nichtleere ist kein Bestandteil der Aussage des Teilungsaxioms. Sie wird im Weiteren mit dem Satz 3.2.1.7 nachgewiesen. Gleichwohl existieren axiomatische Ansätze, die die Forderung axiomatisch integrieren; exemplarisch sei Filler (1993, S. 76–81) genannt. Gerade im Vergleich zu Filler (1993, S. 76–81) zeigt sich anhand des Beweises von Satz 3.2.1.7, dass die Möglichkeit zum Nachweis der Nichtleere insbesondere im Zusammenhang mit den Möglichkeiten des Linealaxioms steht. Die Idee zum Nachweis in der vorliegenden Arbeit entwickelte sich im Austausch mit meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr. Frank, über die in meiner Masterarbeit (2018) entwickelte Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene als zentrale Grundlage der vorliegenden Arbeit (siehe hierzu Kapitel 2.2). Im Rahmen meiner Masterarbeit (2018) ist die Forderung nach der Nichtleere ebenfalls Bestandteil des Teilungsaxioms; die Möglichkeiten des Linealaxioms blieben hier unerkannt. Wir zeigen nun in Satz 3.2.1.7, dass die beiden durch das Teilungsaxiom beschriebenen Teilmengen einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ nichtleer sind, womit aufgrund der in Kapitel 2.2.2 nachgewiesenen Strukturgleichheit der (metrisch-normalen euklidischen) Ebenen des Raumes zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene die Aussage gemeinhin in jeder metrisch-normalen euklidischen Ebene gilt.

Satz 3.2.1.7. Es sei eine metrisch-normale euklidische Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben. Dann sind die beiden durch das Teilungsaxiom beschriebenen Mengen jeweils nichtleer.

Beweis: (siehe zuvor, Eigener Beweis; vgl. auch Martin 1975, S. 133 f.)

Es seien H_1 und H_2 die für eine in der Ebene ϵ liegende Gerade g durch das Teilungsaxiom beschriebenen Mengen. In der Ebene ϵ liegen nach dem Satz 2.2.2.5 mindestens drei nicht kollineare Punkte. Folglich existiert ein Punkt innerhalb der Ebene ϵ , der nicht auf der Geraden g und somit aufgrund des Teilungsaxioms in einer der Mengen H_1 oder H_2 liegt. Ohne

Beschränkung der Allgemeinheit sei A ein Punkt der Menge H_1 . Die Gerade g geht aufgrund des Satzes 2.2.2.3 durch mindestens einen Punkt B . Für die Punkte A und B wiederum existiert nach dem Satz 3.1.3.3 ein Punkt C , sodass der Punkt B zwischen den beiden Punkten A und C liegt. Folglich schneidet die Strecke der Punkte A und C die Gerade g in dem Punkt B . Zusammen mit der Lage des Punktes A in der Menge H_1 liefert das Teilungsaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes, dass der Punkt C in der Menge H_2 liegt. Schließlich gilt, dass sowohl die Menge H_1 als auch die Menge H_2 zur leeren Menge verschieden ist, das zu Zeigende. \square

Die Bezeichnung der beiden entsprechend dem Teilungsaxiom beschriebenen, nach dem soeben bewiesenen Satz 3.2.1.7 nichtleeren Teilmengen einer (metrisch-normalen euklidischen) Ebene orientiert sich innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ an Schröder (2014a, S. 185) und Filler (1993, S. 80) mit der

Definition 3.2.1.8. Die beiden entsprechend dem Teilungsaxiom beschriebenen, nichtleeren Teilmengen einer (metrisch-normalen euklidischen) Ebene bezüglich einer in der Ebene liegenden Gerade g werden als die Halbebenen mit der **Randgeraden** g der jeweiligen Ebene bezeichnet.

Je nach Kontext können die Halbebenen als *offen* bzw. *geschlossen* aufgefasst werden, abhängig davon, ob die Randgerade als Teil einer Vereinigung verstanden wird. Im Allgemeinen unterscheiden sich die Bezeichnung innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes nicht von der in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 76). Für jede Randgerade gilt aufgrund des Satzes 2.2.2.3 nach dem Verbindungsaxiom $V_{\mathcal{G}}$, dass sie gleich der Verbindungsgerade zweier verschiedener auf der Geraden liegender Punkte A und B ist. Nach dem Satz 3.2.1.7 existiert in jeder Halbebene der Randgeraden mindestens ein Punkt C bzw. D . Die zugrunde liegende Ebene wiederum ist nach dem Satz 3.1.1.1 oder Satz 3.1.1.4 eindeutig durch die Punkte A , B und C bzw. A , B und D bestimmt. Es sei für die Halbebene mit Randgeraden $\langle A, B \rangle$ und dem Punkt C als Element die Symbolik $\mathfrak{H}\langle AB_C \rangle$ bzw. $\mathfrak{H}\langle AB_{\bar{D}} \rangle$ verwendet sowie entsprechend die Symbolik $\mathfrak{H}\langle AB_D \rangle$ bzw. $\mathfrak{H}\langle AB_{\bar{C}} \rangle$ für die übrige Halbebene (vgl. zusätzlich Filler 1993, S. 80). Das Teilungsaxiom liefert mit den Eigenschaften (i) und (ii) umgehend, dass die definatorische Festlegung der Symbolik repräsentan-

tenunabhängig ist, vielmehr dass die Halbebenen einer Geraden eindeutig durch einen in der Halbebene liegenden Punkt bestimmt sind. Entsprechend kann nach Millman/Parker (1991, S. 65) in diesem Zusammenhang explizit von *den* Halbebenen bezüglich einer Randgeraden gesprochen werden.

Halbräume

Das Teilungsaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ließe sich durch eine äquivalente, analoge axiomatische Forderung ersetzen, die die Teilung des Raumes mittels einer Ebene sichert (vgl. auch Filler 1993, S. 137 f.). Vor dem Hintergrund der „Räumlichen Erweiterung“ (2.2.2) fiel in der vorliegenden Arbeit die Wahl auf das verwendete Teilungsaxiom. Die Äquivalenz sei im Weiteren nicht diskutiert. Gleichwohl zeigen wir mit dem Satz 3.2.1.9, dass jede Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ den Raum in zwei nichtleere, disjunkte Mengen teilt (vgl. hierzu zusätzlich Moise 1990, S. 85 f.).

Satz 3.2.1.9. Für jede Ebene ϵ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist die Menge $\mathcal{P} \setminus \epsilon$ gleich der Vereinigung zweier disjunkter, nichtleerer Mengen, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Die Strecke zweier beliebiger Punkte, welche Elemente derselben Menge sind, schneidet die Ebene ϵ nicht.
- (ii) Die Strecke zweier beliebiger Punkte, welche nicht derselben Menge angehören, schneidet die Ebene ϵ .

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Schröder 1985, S. 153 u. 156)

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes existiert nach dem Satz 3.1.1.2 mindestens ein Punkt A , der nicht in der Ebene ϵ liegt. In der Ebene ϵ liegen nach dem Satz 2.2.2.5 mindestens drei verschiedene, nicht kollineare Punkte; es sei B ein Punkt der Ebene. Für die Punkte A und B liefert der Satz 3.1.3.3 ein Punkt C , sodass der Punkt B zwischen den Punkten A und C liegt. Folglich schneidet die Strecke der Punkte A und C die Ebene ϵ in dem Punkt B . Damit betrachten wir die beiden verschiedenen Mengen

$$H_1 := \{A\} \cup \{X \in \mathcal{P} \setminus \epsilon : [A, X] \cap \epsilon = \emptyset\} \quad \text{und} \quad H_2 := \{C\} \cup \{X \in \mathcal{P} \setminus \epsilon : [C, X] \cap \epsilon = \emptyset\}.$$

Wir differenzieren den Nachweis nun in drei Teile. Wir zeigen, dass die beiden Mengen jeweils nichtleer und zueinander disjunkt sind, dass die Vereinigung beider Mengen zur Menge $\mathcal{P} \setminus \epsilon$ identisch ist sowie, dass die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt sind:

Teil I: Mit der Existenz der Punkte A und C gilt bereits, dass die Mengen H_1 und H_2 jeweils nichtleer sind. Zum Nachweis der Disjunktheit der Mengen H_1 und H_2 betrachten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Punkt X der Menge H_1 und zeigen, dass dieser nicht in der Menge H_2 liegt:

Sind die Punkte A , C und X nicht kollinear, so existiert nach dem Satz 3.1.1.1 genau eine Ebene η , in der die Punkte gemeinsam liegen. Mit dem Satz 2.2.2.1 liegt auch die Strecke je zweier Punkte in dieser Ebene. Damit liegt der Punkt B als der Schnittpunkt der Strecke $[A, C]$ und der Ebene ϵ sowohl in dieser als auch in der Ebene η , im Gegensatz zu den Punkten A , C und X , die als Punkte der Mengen H_1 bzw. H_2 nicht in der Ebene ϵ liegen. Die Ebenen ϵ und η sind also zwei zueinander verschiedene, nicht disjunkte Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes, sodass sich aufgrund der definitorischen Festlegung der Geraden innerhalb des Raumes beide Ebene in einer Geraden schneiden. Mit der Anwendung des Teilungsaxioms bezüglich der Schnittgeraden in der Ebene η erhalten wir aufgrund der Lage des Punktes X in der Menge H_1 , dass die Punkte C und X in verschiedenen Halbebenen liegen. Zusammenfassend gilt, dass die Strecke der beiden Punkte die Ebene ϵ schneidet, also der Punkt X kein Element der Menge H_2 darstellt.

Sind die Punkte A , C und X kollinear, so liegen die Punkte aufgrund des Axioms V_G gemeinsam auf der Verbindungsgeraden der Punkte A und C . Der Punkt B , der Schnittpunkt der Strecke $[A, C]$ und der Ebene ϵ , teilt die Verbindungsgerade der Punkte A und C entsprechend dem Satz 3.2.1.6. Dabei ist die zur Halbgeraden $[B, A)$ komplementäre Halbgerade aufgrund des Korollars 3.2.1.3 gleich der Halbgeraden $[B, C)$. Mit der Lage des Punktes X in der Menge H_1 liefert der Satz 3.2.1.6 weiter, dass der Punkt X auf der Halbgeraden $[B, A)$, nicht auf der Halbgeraden $[B, C)$ liegt. Folglich liegt der Punkt B zwischen den Punkten C und X . Zusammenfassend erhalten wir, dass die Strecke der beiden Punkte die Ebene ϵ im Punkt B schneidet, also der Punkt X kein Element der Menge H_2 darstellt.

Teil II: Mit einer zum ersten Beweisteil analogen Beweisführung erhalten wir, dass ein in der Menge $\mathcal{P} \setminus \epsilon$ liegender Punkt X , der nicht in der Menge H_1 liegt, ein Element der Menge H_2 darstellt. Damit gilt, dass die Vereinigung der Mengen H_1 und H_2 gleich der Menge $\mathcal{P} \setminus \epsilon$ ist.

Teil III: Abschließend zeigen wir mit dem dritten Teil des vorliegenden Beweises, dass die Eigenschaften (i) und (ii) des zu zeigenden Satzes erfüllt sind. Dabei orientiert sich die Beweisführung an dem bereits erfolgten ersten Teil des Beweises. Wir zeigen zunächst, dass die Strecke zweier derselben Mengen angehörender Punkte die Ebene ϵ nicht schneidet:

zu (i): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien zwei verschiedene Punkte X und X' gegeben, die Elemente der Menge H_1 darstellen.

Sind die Punkte A , X und X' nicht kollinear, so existiert nach dem Satz 3.1.1.1 genau eine Ebene η , in der die Punkte gemeinsam liegen. Aufgrund der Lage der Punkte A , X und X' in der Menge H_1 gilt für die Ebenen η und ϵ , dass sie disjunkt sind oder sich in einer Geraden schneiden, nicht identisch sind. Ist das Erstgenannte zutreffend, schneidet die Strecke der Punkte X und X' die Ebene ϵ nicht. Ist das Zweitgenannte zutreffend, erhalten wir mit der Anwendung des Teilungsaxioms bezüglich der jeweiligen Schnittgeraden in der Ebene η , dass die Punkte X und X' in derselben Halbebene wie der Punkt A liegen. Zusammenfassend gilt, dass die Strecke der Punkte X und X' die Ebene ϵ in jedem Fall nicht schneidet.

Sind die Punkte A , X und X' kollinear, so gilt für die gemeinsame Gerade der Punkte mit derer Lage in der Menge H_1 aufgrund des Satzes 2.2.2.1, dass die Gerade zur Ebene ϵ disjunkt ist oder die Ebene in genau einem Punkt schneidet, die Gerade nicht in der Ebene liegt. Ist das Erstgenannte zutreffend, schneidet die Strecke der Punkte X und X' die Ebene ϵ nicht. Ist das Zweitgenannte zutreffend, teilt der Schnittpunkt die gemeinsame Gerade der Punkte A , X und X' in eine Halbgerade durch den Punkt A und deren komplementäre Halbgerade entsprechend dem Satz 3.2.1.6. Mit der Lage der Punkte X und X' in der Menge H_1 liefert der Satz 3.2.1.6 weiter, dass die Punkte auf der Halbgeraden durch den Punkt A liegen, nicht auf der komplementären Halbgeraden. Zusammenfassend erhalten wir, dass die Strecke der Punkte X und X' die Ebene ϵ in jedem Fall nicht schneidet.

zu (ii): Es seien zwei verschiedene Punkte X und X' gegeben, die bezüglich der Mengen H_1 und H_2 Elemente unterschiedlicher Mengen darstellen. Dann sind in Bezug zum soeben erfolgten Beweis der Eigenschaft (i) die Fälle zutreffend, dass die Gerade bzw. Ebene die Ebene ϵ schneidet. Hiermit erhalten wir analog zu dieser Beweisführung, dass die Strecke der Punkte X und X' die Ebene ϵ stets schneidet. \square

Orientierend an Filler (1993, S. 137 f.), anlehnend an die Bezeichnung der Halbebenen erfolgt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Bezeichnung der bei-

den entsprechend dem Satz 3.2.1.9 beschriebenen Teilmengen des Raumes. Zugrunde liegt hier die

Definition 3.2.1.10. Die beiden entsprechend dem Satz 3.2.1.9 beschriebenen Teilmengen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ bezüglich einer Ebene ϵ werden als die **Halbräume mit der Randebenen ϵ** bezeichnet.

Je nach Kontext können die Halbräume als *offen* bzw. *geschlossen* aufgefasst werden, abhängig davon, ob die Randebene als Teil einer Vereinigung verstanden wird.

Für jede Randebene als eine Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gilt aufgrund des Satzes 2.2.2.5 nach dem Satz 3.1.1.1, dass sie gleich der Verbindungsebene dreier paarweise verschiedener, nicht kollinearere Punkte A , B und C ist. Nach dem Satz 3.2.1.9 existiert in jedem der beiden Halbräume der Randebene mindestens ein Punkt D bzw. E . Der Halbraum mit der Randebene $\langle A, B, C \rangle$ und dem Punkt D als Element sei mittels der Symbolik $\mathfrak{H}\langle ABC_D \rangle$ bzw. $\mathfrak{H}\langle ABC_{\bar{E}} \rangle$ charakterisiert sowie der übrige Halbraum entsprechend mittels der Symbolik $\mathfrak{H}\langle ABC_E \rangle$ bzw. $\mathfrak{H}\langle ABD_{\bar{D}} \rangle$. Der Satz 3.2.1.9 liefert mit den Eigenschaften (i) und (ii), dass die Symbolik repräsentantenunabhängig ist, vielmehr dass die Halbräume einer Ebene eindeutig bestimmt sind. Entsprechend kann, wie auch für die Halbebenen bezüglich einer Randgeraden mit dem vorherigen Abschnitt dargelegt, explizit von *den* Halbräumen einer Randebene gesprochen werden.

Im Vergleich zur Forderung (i) in Satz 3.2.1.9 beschreibt die *Konvexität*, in dem Sinne (vgl. hierzu Moise 1990, S. 72–74 u. 85 f.), dass die Strecke zweier verschiedener, demselben Halbraum angehörender Punkte eine Teilmenge des jeweiligen Halbraumes darstellt, eine stärkere Forderung. Wir diskutieren im Weiteren basierend auf dem Satz 3.2.1.11 die Konvexität nicht zuletzt im Hinblick auf die Einführung des Begriffs „Winkel“ (3.2.2). Der Satz 3.2.1.11 sowie dessen Korollar orientieren sich im Rahmen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ an Mitschka et al. (1998, S. 24) sowie Moise (1990, S. 76 f. u. 85).

Satz 3.2.1.11. Es sei eine Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben, und es sei X ein Punkt in einer der beiden offenen Halbräume.

- a) Für einen Punkt A der Ebene ϵ liegt sowohl die offene Strecke (A, X) als auch die offene Halbgerade $\langle A, X \rangle$ in demselben Halbraum wie der Punkt X .

- b) Liegt der Punkt A in demselben Halbraum wie der Punkt X , so liegt jeder Punkt der Strecke $[A, X]$ in diesem Halbraum.

Beweis: (Eigener Beweis;

Beweisansatz: vgl. Mitschka et al. 1998, S. 24 u. 278; Moise 1990, S. 76 f.)

a) Es ist ausreichend die Aussage bezüglich der offenen Halbgeraden (A, X) nachzuweisen, da per definitionem die offene Strecke (A, X) eine Teilmenge dieser Halbgeraden darstellt. Die Lage des Punktes X in einem offenen Halbraum der Ebene ϵ liefert aufgrund des Satzes 2.2.2.1, dass die Verbindungsgerade $\langle A, X \rangle$ neben dem Punkt A mit der Ebene ϵ keine weiteren Punkte gemeinsam hat. Für den Punkt A gilt aufgrund der definitiven Festlegung einer Halbgeraden, dass dieser nicht zwischen dem Punkt X und einem weiteren Punkt der Halbgeraden (A, X) liegt. Zusammenfassend erhalten wir mit dem Satz 3.2.1.9, dass jeder Punkt der Halbgerade (A, X) in demselben Halbraum wie der Punkt X liegt und damit gleiches für jeden Punkt der Strecke (A, X) gilt. \square

b) Für einen auf der offenen Strecke der Punkte A und X liegenden Punkt B erhalten wir mit dessen Lage zwischen den Punkten A und X basierend auf dem Satz 3.1.3.2, dass die Strecke $[A, B]$ eine Teilmenge der Strecke $[A, X]$ darstellt. Aufgrund der geltenden Voraussetzung besitzen die Strecke der Punkte A und X und die Ebene ϵ nach dem Satz 3.2.1.9 keine Punkte gemeinsam, sodass dies ebenfalls für die Strecke der Punkte A und B gilt. Zusammenfassend folgt hieraus wiederum mit dem Satz 3.2.1.9 das zu Zeigende. \square

Korollar 3.2.1.12. Es sei eine Gerade g innerhalb einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben, und es sei X ein Punkt in einer der beiden offenen Halbebenen mit der Randgeraden g innerhalb der jeweiligen Ebene.

- a) Für einen Punkt A der Geraden g liegt sowohl die offene Strecke (A, X) als auch die offene Halbgerade (A, X) in derselben Halbebene wie der Punkt X .
- b) Liegt der Punkt A in derselben Halbebene wie der Punkt X , so liegt jeder Punkt der Strecke $[A, X]$ in dieser Halbebene.

Beweis: (Eigener Beweis)

Basierend auf dem Satz 2.2.2.1 folgen die zu zeigenden Aussagen a) und b) mit Hilfe des Axioms $V_{\mathcal{G}}$ und des Teilungsaxioms innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes umgehend aus dem Beweis der entsprechenden Aussagen des Satzes 3.2.1.11, wenn „Halbraum“ durch „Halbebene“ sowie „Gerade g “ durch „Ebene ϵ “ ersetzt wird. \square

3.2.2 Winkel

Mit dem Begriff „Winkel“ sind diverse Vorstellungen verbunden, geknüpft an verschiedene Winkelsituationen (vgl. Etzold 2017, S. 35). Auf mathematischer Seite hingegen liegt je nach verfolgter Theorie *eine* für die jeweilige Theorie adäquate definitorische Festlegung zugrunde (vgl. Dohrmann/Kuzle 2015, S. 30 f.). Letztlich herrscht zwischen der mathematischen Begriffsdefinition und der Entwicklung einer umfassenden Begriffsvorstellung eine gewisse Ambivalenz. Im Kern trifft dies Krainers (1990, S. 25–43 u. 98 f.) Kritik an einem stoffdidaktischen Diskurs. Etzold (2017) rückt in didaktischer Hinsicht die Frage nach den Informationen in den Mittelpunkt, die zur Darlegung diverser Winkelsituationen notwendig sind. Basierend auf einem dreistufigen Lernentwicklungsmodell zum Winkelbegriff nach Mitchellmore/White (1998) legt Etzold (2017) die Idee des informatorischen Winkelbegriffs dar. Ein Winkelbegriff, dessen grundlegender Informationsgehalt zur Beschreibung verschiedener Winkelsituationen angepasst werden kann (vgl. Etzold 2017, S. 40–43). Nach Etzold (2017, S. 40 f.) besteht dieser aus zwei Informationen, einer Halbgeraden ausgehend von einem Scheitelpunkt und einer Abweichung in eine zweite (beliebige) „Richtung“ – ohne explizit die „Erst- und Zweitrichtung“ festzulegen.

Der Winkelbegriff innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ versteht sich *mathematisch-informatorisch*. Der mathematisch-informatorische Winkelbegriff erhebt nicht den Anspruch selbst eine mathematische Repräsentation „der“ verschiedenen Winkelsituation darzustellen. In diesem Zusammenhang ist Krainers (1990, S. 37–43) Kritik an Strehl (1983) zu unterstreichen, wenngleich rein mathematisch eine Orientierung an Strehl (1983, S. 143–145) bzw. Mitschka et al. (1998, S. 26–37) in der Darlegung des mathematisch-informatorischen Winkelbegriffs erkennbar ist. Grundsätzlich beschreibt der mathematisch-informatorische Winkelbegriff eine für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ adäquate Begriffsdefinition. Anlehnend an Etzold (2017), eingerahmt in die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit versteht er sich als mathematische

(Informations-)Grundlage für Lehrkräfte, um im didaktischen Kontext der Darlegung verschiedener Winkelsituationen bzw. -vorstellungen gerecht zu werden:

- Zentral ist die sogenannte *Winkellage*, die Menge zweier Halbgeraden $[B, A)$ und $[B, C)$ mit einem gemeinsamen Anfangspunkt B .
- Sind die beiden Halbgeraden verschieden und nicht komplementär, so bestimmen sie aufgrund des Satzes 3.1.1.5 genau eine Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Bezüglich dieser Ebene lässt sich ein sogenanntes *inneres und äußeres Winkelfeld* auszeichnen. Die Schnittmenge $int(\mathcal{W}_{ABC}) := \mathfrak{H}(AB_C) \cap \mathfrak{H}(BC_A)$ der offenen Halbebenen $\mathfrak{H}(AB_C)$ und $\mathfrak{H}(BC_A)$ beschreibt das innere Winkelfeld und die Vereinigung $ext(\mathcal{W}_{ABC}) := \mathfrak{H}(AB_{\bar{C}}) \cup \mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ der offenen Halbebenen $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ und $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ das äußere Winkelfeld. (Eine wie bei Strehl (1983, S. 144) durch die Auszeichnung eines „Erst- bzw. Zweitschenkels“ beschriebene Orientierung ist kein mathematisch festzulegendes Normativ, sondern vielmehr bereits eine anschauungsbasierte kontextspezifische Charakterisierung (vgl. auch Krainer 1990, S. 40; Etzold 2017, S. 40).)

Sind die Halbgeraden $[B, A)$ und $[B, C)$ zueinander komplementär oder identisch, so liegen die Halbgeraden aufgrund der definitorischen Festlegung einer Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes ebenfalls gemeinsam in einer Ebene des Raumes, aber nicht in einer eindeutig bestimmten.

Definition 3.2.2.1. Für zwei Halbgeraden $[B, A)$ und $[B, C)$ mit einem gemeinsamen Anfangspunkt B werden die Mengen

$$\{\{[B, A), [B, C)\}, int(\mathcal{W}_{ABC})\} \quad \text{und} \quad \{\{[B, A), [B, C)\}, ext(\mathcal{W}_{ABC})\}$$

als innerer bzw. äußerer Winkel bezeichnet. Die zugrunde liegenden Halbgeraden werden als Schenkel und deren gemeinsamer Anfangspunkt als Scheitel des Winkels bezeichnet.

Sind die Schenkel zueinander verschieden und nicht komplementär, so zeigen wir im Weiteren mit dem Satz 3.2.2.2, dass die inneren und äußeren Winkelfelder jeweils nicht leer sind. Sind die Schenkel identisch oder komplementär, liegt je ein Sonderfall vor, in dem das innere und äußere Winkelfeld gleich der leeren Menge ist. Im erstgenannten Fall sprechen wir von einem *Nullwinkel* und im zweitgenannten Fall von einem *gestreckten Winkel*. Explizit

von einem *inneren und äußeren* Winkel sowie von einem *inneren bzw. äußeren* Winkelfeld sprechen wir letztlich, wenn die zugrunde liegenden Schenkel zwei verschiedene nicht komplementäre Halbgeraden darstellen. Zwecks einer einfacheren Notation verwenden wir die Symbolik $\angle_i ABC$ für einen inneren, die Symbolik $\angle_e ABC$ für einen äußeren Winkel. Ist die Existenz respektive Gestalt eines Winkelfeldes zunächst irrelevant, verwenden wir die obigen Notationen ohne den Zusatz „e“ und „i“.

Satz 3.2.2.2. (vgl. Mitschka et al. 1998, S. 33) Es sei $\{[B, A), [B, C)\}$ eine Winkellage bezüglich zweier verschiedener, nicht komplementärer Halbgeraden. Dann sind das innere Winkelfeld $\text{int}(\mathcal{W}_{ABC})$ sowie das äußere Winkelfeld $\text{ext}(\mathcal{W}_{ABC})$ jeweils zur leeren Menge verschieden.

Beweis: (vgl. Mitschka et al. 1998, S. 33)

Aufgrund des Satzes 3.1.1.5 liegen die beiden verschiedenen, nicht komplementären Halbgeraden $[B, A)$ und $[B, C)$ gemeinsam in genau einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Per definitionem ist das innere Winkelfeld $\text{int}(\mathcal{W}_{ABC})$ gleich dem Schnitt der offenen Halbebenen $\mathfrak{H}(AB_C)$ und $\mathfrak{H}(BC_A)$ innerhalb der Ebene sowie das äußere Winkelfeld $\text{ext}(\mathcal{W}_{ABC})$ gleich der Vereinigung der offenen Halbebenen $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ und $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$. Nach dem Satz 3.2.1.7 ist jede der Halbebenen nichtleer, sodass das äußere Winkelfeld ungleich der leeren Menge ist. Die offene Strecke der Punkte A und C liegt nach dem Korollar 3.2.1.12 sowohl in der Halbebene $\mathfrak{H}(AB_C)$ als auch in der Halbebene $\mathfrak{H}(BC_A)$, sodass das innere Winkelfeld mit dem Satz 3.2.1.2 ebenfalls zur leeren Menge verschieden ist. \square

Jeder innere und äußere Winkel wie auch jeder Nullwinkel und gestreckte Winkel beschreibt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ entsprechend der definitorischen Darlegung eine ebene-geometrische Figur, einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normale euklidische Ebene des Raumes, wenn auch bezüglich der beiden letztgenannten die jeweils zugrunde liegende Ebene nicht eindeutig bestimmt ist.

In Bezug zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene stellt die mathematisch-informativische Auffassung des Winkelbegriffs eine ganzheitliche Erweiterung dar. Mathematisch reduziert sich dies im Allgemeinen auf die Erweiterung um die Winkelfelder (vgl. Lauer 2018, S. 28). Die bereits mit dem Satz 3.2.2.2

nachgewiesenen Eigenschaften der Winkelfelder ergänzen wir mit dem Satz 3.2.2.3 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Der Satz 3.2.2.3 orientiert sich an Mitschka et al. (1998, S. 26 u. 33). Zum Zwecke einer einfacheren Formulierung bzw. eines einfacheren Verständnisses des Satzes erklären wir vorab die „Verbindbarkeit“ zweier Punkte mittels eines „Streckenzugs“; hier orientieren wir uns an Hilbert (1987, S. 9):

Es seien Strecken $S_i := [A_i, A_{i+1}]$ mit $1 \leq i \leq n$ gegeben ($n \in \mathbb{N}$). Dann wird die Menge $\{S_1, \dots, S_n\}$ der Strecken als *Streckenzug* bezeichnet, der den Punkt A_1 mit dem Punkt A_{n+1} *verbindet*.

Satz 3.2.2.3. Es sei $\{[B, A], [B, C]\}$ eine Winkellage bezüglich zweier verschiedener, nicht komplementärer Halbgeraden, und ϵ die durch die beiden Halbgeraden eindeutig bestimmte Ebene. Dann erfüllen das innere Winkelfeld $\text{int}(\mathcal{W}_{ABC})$ bzw. äußere Winkelfeld $\text{ext}(\mathcal{W}_{ABC})$ die folgenden Eigenschaften:

- i) Die Winkelfelder sind zueinander disjunkte Mengen und ihre Vereinigung ist zur Menge $\epsilon \setminus ([B, A] \cup [B, C])$ identisch.
- ii) Zwei verschiedene Punkte des inneren Winkelfeldes wie auch des äußeren Winkelfeldes sind derart miteinander verbindbar, dass jede Strecke des jeweiligen Streckenzugs innerhalb der Ebene ϵ liegt, wobei die Strecke weder mit der Halbgeraden $[B, A]$ noch mit der Halbgeraden $[B, C]$ einen Punkt gemeinsam besitzt.
- iii) Zwei verschiedene Punkte unterschiedlicher Winkelfelder sind nicht wie in ii) beschrieben miteinander verbindbar.

Beweis: (vgl. Mitschka et al. 1998, S. 33–35)

Per definitionem ist das innere Winkelfeld $\text{int}(\mathcal{W}_{ABC})$ gleich dem Schnitt der offenen Halbebenen $\mathfrak{H}(AB_C)$ und $\mathfrak{H}(BC_A)$ der Ebene ϵ sowie das äußere Winkelfeld $\text{ext}(\mathcal{W}_{ABC})$ gleich der Vereinigung der offenen Halbebenen $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ und $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$. Zusätzlich sei basierend auf dem Satz 2.2.2.1 berücksichtigt, dass die Strecke zweier verschiedener in der Ebene ϵ liegender Punkte vollständig in dieser Ebene liegt:

zu i): Nach dem Teilungsaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes stellt die Vereinigung der offenen Halbebenen $\mathfrak{H}(BA_C)$ und $\mathfrak{H}(BA_{\bar{C}})$ wie auch die der offenen

Halbebenen $\mathfrak{H}(BC_A)$ und $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ eine disjunkte Vereinigungsmenge dar, die gleich der Punktmenge der Ebene ϵ ohne die Punkte der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ bzw. $\langle B, C \rangle$ ist. Die beiden Verbindungsgeraden schneiden sich in dem Punkt B , da nach Voraussetzung die Halbgeraden $[B, A)$ und $[B, C)$ zueinander verschieden und nicht komplementär sind.

Für einen Punkt der Menge $(\epsilon \setminus ([B, A) \cup [B, C)))$ erhalten wir, dass der Punkt stets in einer, aber nicht zugleich in der Halbebene $\mathfrak{H}(BA_C)$ und $\mathfrak{H}(BA_{\bar{C}})$ bzw. $\mathfrak{H}(BC_A)$ und $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ liegt. Zusammen mit der definitorischen Festlegung der Winkelfelder $int(\mathcal{W}_{ABC})$ und $ext(\mathcal{W}_{ABC})$ gilt, dass die Vereinigung beider Winkelfelder eine zur Menge $(\epsilon \setminus ([B, A) \cup [B, C)))$ identische, disjunkte Vereinigungsmenge ist.

zu ii): Per definitionem liegen zwei verschiedene Punkte des inneren Winkelfeldes $int(\mathcal{W}_{ABC})$ sowohl in der Halbebene $\mathfrak{H}(AB_C)$ als auch in der Halbebene $\mathfrak{H}(BC_A)$, sodass nach dem Teilungsaxiom die Strecke beider Punkte weder die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ noch die Verbindungsgerade $\langle B, C \rangle$ schneidet. Damit gilt bereits die zu zeigende Verbindbarkeit für zwei verschiedene Punkte des inneren Winkelfeldes. Bezüglich des äußeren Winkelfeldes $ext(\mathcal{W}_{ABC})$ als die Vereinigung der offenen Halbebenen $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ und $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ ist die Verbindbarkeit analog begründet, wenn die Punkte gemeinsam in einer der beiden Halbebenen liegen. Es bleibt die Voraussetzung, dass ein Punkt X_1 in der Halbebene $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ und ein Punkt X_2 in der Halbebene $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ liegt:

Hierzu betrachten wir einen Punkt A_* auf der zur Halbgeraden $[B, A)$ komplementären Halbgeraden sowie einen Punkt C_* auf der zur Halbgeraden $[B, C)$ komplementären Halbgeraden. Die Halbgeraden sind nach Voraussetzung zueinander verschieden und nicht komplementär, womit sich die zugrunde liegenden Verbindungsgeraden in dem Punkt B schneiden. Aufgrund des Satzes 3.2.1.6 gilt mit dem Teilungsaxiom, dass der Punkt A_* zugleich in der Halbebene $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ und der Punkt C_* zugleich in der Halbebene $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ liegt.

Das Korollar 3.2.1.12 liefert zum einen, dass die offene Strecke der Punkte A_* und C_* in der offenen Halbebene $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ und $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ liegt. Im Gegensatz liegen die Halbgeraden $[B, A)$ und $[B, C)$ mit dem Korollar bzw. Teilungsaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes in keiner der beiden Halbebenen. Zum anderen liefert das Korollar, dass die Strecke der Punkte X_1 und C_* in der Halbebene $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ und die Strecke der Punkte X_2 und A_* in der Halbebene $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ liegen. Zusammenfassend erhalten wir, dass keine der Strecken $[X_1, C_*]$, $[X_2, A_*]$ und $[A_*, C_*]$ die Halbgerade $[B, A)$ oder $[B, C)$ schneidet, sodass mit den Strecken die zu zeigende Verbindbarkeit der Punkte X_1 und X_2 gilt.

zu *iii*): Wäre ein Punkt des inneren Winkelfeldes $\text{int}(\mathcal{W}_{ABC})$ mit einem Punkt des äußeren Winkelfeldes $\text{ext}(\mathcal{W}_{ABC})$ verbindbar, so müsste mindestens eine Strecke zweier in unterschiedlicher Winkelfelder liegender Punkte existieren, die weder mit der Halbgeraden $[B, A)$ noch mit der Halbgeraden $[B, C)$ einen Punkt gemeinsam hat. Wir zeigen, dass hieraus ein Widerspruch resultiert:

Es sei also die Existenz einer entsprechenden Strecke für einen Punkt Y_1 des inneren Winkelfeldes $\text{int}(\mathcal{W}_{ABC})$ und einen Punkt Y_2 des äußeren Winkelfeldes $\text{ext}(\mathcal{W}_{ABC})$ angenommen. Der Punkt Y_1 als ein Punkt des inneren Winkelfeldes liegt per definitionem sowohl in der offenen Halbebene $\mathfrak{H}(AB_C)$ als auch in der offenen Halbebene $\mathfrak{H}(BC_A)$ und der Punkt Y_2 als ein Punkt des äußeren Winkelfeldes in der Halbebene $\mathfrak{H}(AB_{\bar{C}})$ oder $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$. Folglich erhalten wir mit dem Teilungsaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes, dass die Strecke der Punkte Y_1 und Y_2 mindestens eine der beiden Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und $\langle B, C \rangle$ schneidet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte, dass die Strecke $[Y_1, Y_2]$ die Verbindungsgerade der Punkte A und B in einem Punkt X schneidet.

Mit der Widerspruchsannahme gilt aufgrund des Satzes 3.2.1.6, dass der Schnittpunkt X auf der zur Halbgeraden $[B, A)$ komplementären Halbgeraden liegt. Die Halbgerade $[B, A)$ ist nach Voraussetzung zur Halbgeraden $[B, C)$ verschieden und nicht komplementär, womit sich die jeweils zugrunde liegenden Verbindungsgeraden in dem Punkt B schneiden. Aufgrund des Satzes 3.2.1.6 gilt mit dem Teilungsaxiom, dass der Schnittpunkt X neben seiner Lage auf der zur Halbgeraden $[B, A)$ komplementären Halbgeraden zugleich in der offenen Halbebene $\mathfrak{H}(BC_{\bar{A}})$ liegt.

Das Korollar 3.2.1.12 liefert, dass die offene Strecke der Punkte X und Y_1 in der Halbebene $\mathfrak{H}(BA_C)$ liegt, ebenso wie die Halbgerade $[B, C)$. Zum anderen liefert das Teilungsaxiom, dass die Strecke der Punkte X und Y_1 die Verbindungsgerade $\langle B, C \rangle$ schneidet. Zusammenfassend erhalten wir aufgrund des Satzes 3.2.1.6, dass die Strecke der Punkte X und Y_1 die Halbgerade $[B, C)$ schneidet. Dabei liegt der Punkt X auf der Strecke $[Y_1, Y_2]$, eben als der Schnittpunkt der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ und der Strecke $[Y_1, Y_2]$, sodass aufgrund des Korollars 3.2.1.4 die Strecke $[X, Y_1]$ eine Teilmenge der Strecke $[Y_1, Y_2]$ ist. Schließlich schneidet die Strecke der Punkte Y_1 und Y_2 die Halbgerade $[B, C)$, womit ein Widerspruch zur getroffenen Annahme vorliegt. \square

Der Satz 3.2.2.3 liefert zusammen mit dem Satz 3.2.2.2, dass die Winkellage bezüglich zweier verschiedener, nicht komplementärer Halbgeraden die durch die beiden Halbgeraden eindeu-

tig bestimmte Ebene in das jeweilige innere und äußere Winkelfeld teilt. In diesem Zusammenhang lassen sich für einen gestreckten Winkel mit zwei zueinander komplementären Schenkeln $[B, A)$ und $[B, C)$, die Halbebenen bezüglich der durch die Punkte A , B und C gehenden Gerade als Winkelfelder auffassen (vgl. Mitschka et al. 1998, S. 27).

3.2.3 Polygone; Sphären und Kreise

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ beschreiben „Sphären“ räumliche Figuren und „Kreise“ deren eben-geometrisches Pendant. Analog beschreiben „Polyeder“ in Bezug zu den „Polygonen“ räumliche Figuren, wobei erstere als ein „Spezialfall: Polyeder und weitere geometrische Körper“ im nachfolgenden Abschnitt der vorliegenden Arbeit diskutiert werden.

Sphären und Kreise

In der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene beschreibt die Menge aller Punkte, die von einem beliebigen, aber festen Punkt je den gleichen (festen) Abstand besitzen, einen Kreis (vgl. Lauer 2018, S. 21–23). Übertragen wir die definitorische Festlegung auf den metrisch-normalen euklidischen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ erhalten wir den Begriff der „Sphäre“ (vgl. hierzu Schröder 2014b, S. 10; Walz 2017, S. 225):

Definition 3.2.3.1. Für zwei verschiedene Punkte A und M wird die Menge

$$s_M(A) := \{X \in \mathcal{P} : \{M, A\} \equiv_d \{M, X\}\}$$

als Sphäre um den Mittelpunkt M durch den Punkt A bezeichnet.

Geht innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine Ebene ϵ bezüglich einer Sphäre $s_M(A)$ sowohl durch deren Mittelpunkt M als auch durch den Punkt A , so gilt für die Schnittmenge der Ebene ϵ und der Sphäre $s_M(A)$ die Gleichung

$$s_M(A) \cap \epsilon = \{X \in \epsilon : \{M, A\} \equiv_d \{M, X\}\} = \{X \in \epsilon : \{M, A\} \equiv_{d|_{\epsilon}} \{M, X\}\}.$$

Die Schnittmenge der Sphäre $s_M(A)$ und der Ebene ϵ beschreibt innerhalb der nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ des Raumes einen Kreis, entsprechend der Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene (vgl. Lauer 2018, S. 21–23). Auf dieser Grundlage legen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ den Begriff „Kreis“ definitorisch fest, sodass letztlich jeder Kreis innerhalb des Raumes ein Kreis in einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene darstellt, womit umgekehrtes nach dem Vorherigen ohnehin gilt:

Definition 3.2.3.2. Für zwei verschiedene Punkte A und M innerhalb einer Ebene ϵ wird der Schnitt der Ebene ϵ und der Sphäre $s_M(A)$, die Menge

$$k_M^\epsilon(A) := s_M(A)|_\epsilon := s_M(A) \cap \epsilon = \{X \in \epsilon : \{M, A\} \equiv_d |_\epsilon \{M, X\}\},$$

als Kreis um den Mittelpunkt M durch den Punkt A bezüglich der Ebene ϵ bezeichnet.

Polygone

Mathematisch ist der Begriff „Polygon“ im Allgemeinen umfassender als das, was darunter zum Unterrichtsgegenstand der Sekundarstufe I und II zählt. Unter diesem Gesichtspunkt erfolgt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine sukzessive Charakterisierung des Begriffs. Hierzu nutzen wir die Arbeit von Hilbert (1987, S. 9 f.) und Smoczyk (2019, S. 53 f.) als Grundlage. Der Begriff des „Streckenzugs“ bildet den Ausgangspunkt der sukzessiven Darlegung:

Es seien Strecken $S_i := [A_i, A_{i+1}]$ mit $1 \leq i \leq n$ gegeben ($n \in \mathbb{N}$). Dann wird die Menge $\{S_1, \dots, S_n\}$ der Strecken als *Streckenzug* bezeichnet, der den Punkt A_1 mit dem Punkt A_{n+1} *verbindet*.

(In der Fachliteratur finden sich auch Definitionen, die einen Streckenzug als Vereinigung der jeweiligen Strecken definieren. Die Wahl auf die in der vorliegenden Arbeit getroffene Definition ist darin begründet, dass die Elemente des Streckenzugs, die Strecken, hervorgehoben sind.)

Ein „Polygon“ beschreibt einen speziellen Streckenzug, der sich durch zwei Eigenschaften auszeichnet, und zwar durch die Komplanarität und Geschlossenheit:

Es sei ein Streckenzug $\{S_1, \dots, S_n\}$ mit $S_i := [A_i, A_{i+1}]$ für $1 \leq i \leq n$ gegeben ($n \in \mathbb{N}$). Sind die Punkte A_1 und A_{n+1} identisch und hiermit die der Menge $\{A_i: 1 \leq i \leq n\}$ komplanar, so wird der Streckenzug $\{S_1, \dots, S_n\}$ als Polygon bezeichnet; die Punkte A_i heißen *Ecken*, die Strecken S_i *Seiten* sowie die Geraden $\langle A_i, A_{i+1} \rangle$ *Seitengeraden*.

Mit der Komplanarität der Eckpunkte liefert der Satz 2.2.2.1, dass die Seiten des Polygons gemeinsam in einer Ebene liegen, das Polygon als Streckenzug somit eine ebene-geometrische Figur darstellt. Die Ecken eines Polygons sind nicht zwingend verschieden. Ferner ist ein Eckpunkt nicht eindeutig als der Schnittpunkt zweier zyklisch aufeinander folgender Seiten bestimmt. Diese weiteren Eigenschaften zeichnen ein Polygon orientierend an der Sprechweise Schröders (2014a, S. 21) als ein „echtes Polygon“ bzw. „n-Eck“ aus:

Sind die Ecken eines Polygons paarweise zueinander verschieden und je drei zyklisch aufeinanderfolgende Ecken nicht kollinear, so wird das Polygon als *echtes Polygon* bzw. *n-Eck* bezeichnet.

Bezüglich eines echten Polygons sind weiterhin zwei nicht zyklisch aufeinanderfolgende Seiten nicht zwingend zueinander disjunkt. Entsprechende Seiten können durchaus sogar eine Teilmengenbeziehung eingehen, wenngleich die jeweiligen Eckpunkte verschieden sind. Nicht zuletzt im Hinblick auf den Geometrieunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe I und II ist unter der Menge der echten Polygone nochmals zu differenzieren; es sind solche echten Polygone relevant, deren jeweils nicht zyklisch aufeinanderfolgende Seiten zueinander disjunkt sind (vgl. auch Smoczyk 2019, S. 54). Schließlich legen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ explizit definitorisch den Begriff des „einfachen Polygons“ fest:

Definition 3.2.3.3. Sind je zwei nicht zyklisch aufeinanderfolgende Seiten eines echten Polygons zueinander disjunkt, so wird das echte Polygon als einfaches Polygon bzw. einfaches n-Eck bezeichnet.

Auch wenn wir, zwecks einer einfacheren sprachlichen Gestaltung, lediglich von Polygonen bzw. n -Ecken sprechen, betrachten wir im Weiteren stets einfache Polygone/ n -Ecke.

In der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene konzentriert sich die Untersuchung auf Drei- und Vierecke, begründet in dem für den Geometrieunterricht zentralen Stellenwert (vgl. hierzu zusätzlich Roth/Wittmann 2018). Unter einem Drei- und Viereck versteht sich hier ein Quadrupel von vier verschiedenen Punkten, von denen je drei nicht kollinear sind, bzw. ein Tripel von drei verschiedenen Punkten. Im Vergleich dazu ist die definitorische Festlegung innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in erster Linie raumgeometrisch motiviert, wie im folgenden Abschnitt „Spezialfall: Polyeder und weitere geometrische Körper“ deutlich wird. Die Verträglichkeit beider definitorischen Auffassungen lässt sich in Bezug zum metrisch-normalen euklidischen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ wie folgt charakterisieren: Es sei $\{[A, B], [B, C], [C, D], [D, A]\}$ ein Viereck. Als ein Viereck innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ beschreibt dieses per definitionem eine ebene-geometrische Figur bezüglich einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes. Durch die Eckpunkte des Polygons geht aufgrund des Axioms V_G genau eine Gerade und somit genau eine Strecke. Letztlich charakterisiert das Quadrupel (A, B, C, D) sowie jedes weitere Tupel, das durch zyklisches Vertauschen der vier Eckpunkte A, B, C und D entsteht, das gegebene Viereck. Da unter anderem die Strecken $[A, B]$ und $[B, A]$ zueinander identisch sind (siehe Korollar 3.2.1.3), trifft entsprechendes auf die Tupel zu, die durch antizyklisches Vertauschen der vier Eckpunkte entstehen. Es gilt, dass das Quadrupel (A, B, C, D) sowie jedes weitere Tupel, das durch zyklisches oder antizyklisches Vertauschen der vier Eckpunkte entsteht, dasselbe Viereck als Mengensystem charakterisiert. Die Verschiedenheit bezüglich der ersten und letzten Komponenten hebt zusätzlich die Gestalt des Vierecks als Streckenzug hervor, der je zwei verschiedene Punkte miteinander verbindet. Die Schreibweise als Tupel greifen wir in dem beschriebenen Sinne innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf. Ein Viereck (A, B, C, D) , dessen Seitengeraden $\langle A, B \rangle$ und $\langle C, D \rangle$ sowie $\langle B, C \rangle$ und $\langle A, D \rangle$ parallel sind, wird als *Parallelogramm* innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ bezeichnet. Als ebene-geometrische Figur unterscheidet sich dieses per definitionem nicht von einem Parallelogramm in einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes (siehe hierzu Kapitel 2.2). Nicht zuletzt im Hinblick auf das Kongruenzaxiom nimmt das Parallelogramm eine exponierte Stellung als spezielles Viereck ein, weshalb die definitorische Festlegung hier explizit aufgegriffen wird.

Spezialfall: Polyeder und weitere geometrische Körper

Polygone, insbesondere Drei- und Vierecke, verstehen sich im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I und II explizit als geometrische Untersuchungsobjekte. Dies bedeutet, dass Eigenschaften und Relationen der Polygone sowie Sätze über Drei- und Vierecke Gegenstand der Untersuchung sind, auch im Kontext der Raumgeometrie (siehe Kapitel 2.1). Im Vergleich dazu sind geometrische Körper nicht in diesem Sinne als geometrische Untersuchungsobjekte aufzufassen (siehe Kapitel 2.1). Im Mittelpunkt steht die räumlich-visuelle Darstellung und Identifikation der Körpergrundformen in Zusammenhang mit der Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Nach Meschkowski (1966, S. 48) lässt sich ein Polyeder mathematisch als ein Mengensystem bestehend aus endlich vielen (verschiedenen) abgeschlossenen Polygonflächen von der Art beschreiben, dass...

- jede Seite in genau zwei verschiedenen Polygonflächen enthalten ist,
- zwei verschiedene Polygonflächen ansonsten keine Punkte gemeinsam haben
- und das System dabei minimal ist, erstgenannte Eigenschaften für keine Teilmenge gelten.

„Polygonflächen“ lassen sich hier in Anlehnung an Meschkowski (1966, S. 35–41) mit Hilfe der in Kapitel 3.2.2 eingeführten Begriffe des inneren und äußeren Winkelfeldes charakterisieren. Analog wie jede Winkellage bezüglich zweier verschiedener, nicht komplementärer Halbgeraden teilt jedes Polygon als ebene-geometrische Figur die jeweilig zugrunde liegende Ebene in ein Inneres und Äußeres. Dabei beschreibt das Innere die Fläche des Polygons.

Die Herleitung der Existenz des Inneren und Äußeren eines Polygons erfordert, wie bei Meschkowski (1966, S. 35–41) deutlich wird, eine mathematisch umfassende, mathematisch tiefgreifende Untersuchung (vgl. zusätzlich Mitschka et al. 1998, S. 40). Der Bezug zu den fachdidaktischen Anforderungen hinsichtlich der Körpergeometrie, die sich weitestgehend auf die Identifikation und Darstellung der Körpergrundformen reduziert (siehe Kapitel 2.1), fehlt an dieser Stelle. Schließlich ist vor dem Hintergrund der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit, einer Axiomatisierung der euklidischen (Raum-)Geometrie unter Berücksichtigung der fachbezogenen und -didaktischen Anforderungen des Geometrie-Unterrichtens, die Frage nach der gemeinsamen Grundlage dieser Ambivalenz zu beantworten. Die Antwort findet sich in der mathematischen Beschreibung der Polygone, grundlegend als geschlossener Streckenzug, und insbesondere im Vergleich zu der in meiner Masterarbeit (2018) erfolgten definitiven Festlegung der Polygone (siehe hierzu Kapitel 3.2.3)

3.3 Abstand – Linealfunktionen

Durch zwei Punkte innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ geht aufgrund des Verbindungsaxioms $V_{\mathcal{G}}$ stets eine Gerade. (Die Existenz der Geraden ist wegen der Zweielementigkeit der Punktmenge \mathcal{P} auch gegeben, wenn die Punkte zueinander identisch sind; sind die Punkte verschieden, so ist die Gerade sogar eindeutig bestimmt.) Von der Punktmenge einer jeden Geraden existiert nach dem Linealaxiom eine isometrische Bijektion, die sogenannte *Linealfunktion*, auf die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen mit der hierauf definierten Betragsmetrik. Die Linealfunktionen verstehen sich als „Mess-Lineale“ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Auf Basis des Linealaxioms repräsentieren sie die Möglichkeit der Abstandsbestimmung mit Hilfe eines Lineals (vgl. zusätzlich Moise 1990, S. 58). Die Idee des Linealaxioms geht auf Birkhoff (1932) zurück (vgl. Millman/Parker 1991, S. 27). Die Gestalt als „Mess-Lineale“ diskutieren wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ im Weiteren näher, und zwar beginnend mit dem

Satz 3.3.1. (vgl. Moise 1990, S. 58 f.; Martin 1975, S. 70) Sei f eine Linealfunktion einer Geraden g , so ist mit den beiden Zuordnungen $f_1, f_2: g \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(X) := -f(X) \quad \text{sowie} \quad f_2(X) := f(X) - a \quad \text{für ein beliebiges, aber festes } a \in \mathbb{R}$$

jeweils eine weitere Linealfunktion der Geraden g bestimmt.

Beweis: (vgl. Moise 1990, S. 58 f.; Martin 1975, S. 70)

Mit der Bijektivität der Linealfunktion f der Geraden g erhalten wir umgekehrt, dass mit der Zuordnung f_1 und f_2 ebenfalls eine Bijektion von der Punktmenge der Geraden g auf die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen definiert ist. Hiermit bleibt zum Nachweis, dass die Funktionen f_1 und f_2 eine Linealfunktion der Geraden g darstellen, entsprechend dem Linealaxiom zu zeigen, dass beide Funktionen die Lineal-Gleichung bezüglich der Geraden g erfüllen. Mit der Gültigkeit der Lineal-Gleichung für die Linealfunktion f erhalten wir aufgrund der definitiven Festlegung der Funktion f_1 und f_2 die Gleichung

$$\begin{aligned} d(X_1, X_2) &= |f(X_2) - f(X_1)| = |(f(X_2) - a) - (f(X_1) - a)| = |f_2(X_2) - f_2(X_1)| \quad \text{und} \\ d(X_1, X_2) &= |(-1) \cdot (f(X_2) - f(X_1))| = |-f(X_2) - (-f(X_1))| = |f_1(X_2) - f_1(X_1)|. \end{aligned}$$

Schließlich gilt, dass die Funktion f_1 und f_2 eine Linealfunktion der Geraden g ist. \square

Für eine beliebige Gerade ist die Existenz einer Linealfunktion stets durch das Linealaxiom gesichert, sodass wir mit dem Satz 3.3.1 aufgrund der Überabzählbarkeit der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen erhalten, dass jede Gerade überabzählbar viele verschiedene Linealfunktionen besitzt. In Bezug zur Auffassung der Linealfunktionen als „Mess-Lineale“ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ spiegeln sich mit dem Satz 3.3.1 zwei Aspekte wider. Zum einen ist die Abstandsbestimmung symmetrisch zum Nullpunkt (vgl. zusätzlich Martin 1975, S. 69). Zu beachten ist hier, dass ein Lineal idealisiert als Realobjekt das Intervall $[0; \infty)$ abbildet (eigentlich beidseitig beschränkt ist), im Gegensatz zu einer Linealfunktion. Zum anderen ist die Abstandsbestimmung nicht auf einen (Null-)Punkt determiniert (vgl. zusätzlich Martin 1975, S. 69). Diesbezüglich seien zwei Punkte A und B betrachtet. Weiter sei eine Linealfunktion f der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ mit $a := f(A)$ und $b := f(B)$ gegeben, wobei beide Bildpunkte zur reellen Zahl 0 verschieden sind. Nach dem Satz 3.3.1 existiert neben der Linealfunktion f eine weitere Linealfunktion f_1 der Geraden $\langle A, B \rangle$ definiert durch $f_1(X) := f(X) - a$. Beide Linealfunktionen liefern, dass der Abstand $d(A, B)$ der Punkte A und B zur reellen Zahl $|b - a|$ identisch ist, wobei ausschließlich die Linealfunktion f_1 als „Lineal“ mit dem Nullpunkt an dem Punkt A anliegt.

Die Frage nach der eindeutigen Existenz einer Linealfunktion beantwortet innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ der Satz 3.3.2. Die Aussage des Satzes orientiert sich an den Arbeiten von Moise (1990, S. 59) und Martin (1975, S. 70), wobei die Eindeutigkeit eigens in der vorliegenden Arbeit dargelegt ist.

Satz 3.3.2. Für eine Gerade g mit zwei ihrer zueinander verschiedenen Punkte A und B existiert genau eine Linealfunktion derart, dass die Funktion den Punkt A auf die reelle Zahl 0 und den Punkt B auf eine positive reelle Zahl abbildet.

Beweis: (Existenz: vgl. Moise 1990, S. 59; Martin 1975, S. 70; Eindeutigkeit: Eigener Beweis)

Zur Existenz: Mit dem Linealaxiom betrachten wir eine Linealfunktion f der Geraden g ; es sei $a := f(A)$. Damit existiert nach dem Satz 3.3.1 eine weitere Linealfunktion f_1 der Geraden g definiert durch

$$f_1 : g \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_1(X) := f(X) - a.$$

(Im Falle, dass das Bild des Punktes A unter der Linealfunktion f gleich der reellen Zahlen 0 ist, sind die Funktionen f und f_1 zueinander identisch.) Zusammen mit der Bijektivität ei-

ner Linealfunktion erhalten wir schließlich, dass mit der Linealfunktion f_1 selbst oder nach dem Satz 3.3.1 mit der Funktion $(-f_1)$ eine Linealfunktion der Geraden g derart existiert, dass das Bild des Punktes A zur reellen Zahl 0 und das des zum Punkt A verschiedenen Punktes B zu einer positiven reellen Zahl identisch ist.

Zur Eindeutigkeit: Es seien zwei Linealfunktionen h_1 und h_2 der Geraden g gegeben, die jeweils den Punkt A auf die reelle Zahl 0 und den Punkt B auf eine positive reelle Zahl abbilden. Wir zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die beiden Funktionen zueinander identisch sind. Nach Voraussetzung ist das Bild des Punktes A unter der Linealfunktion h_1 und h_2 zur reellen Zahl 0 identisch. Für einen von dem Punkt A verschiedenen Punkt X der Geraden g liefert die Lineal Gleichung bezüglich der Linealfunktionen h_1 und h_2 die beiden Gleichungen

$$(i) \quad |h_1(B) - h_1(X)| = d(B, X) = |h_2(B) - h_2(X)| \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad |-h_1(X)| = |h_1(A) - h_1(X)| = d(A, X) = |h_2(A) - h_2(X)| = |-h_2(X)|.$$

Ist der Punkt X gleich dem Punkt B , so liefert die Gleichung (ii) zusammen mit der Voraussetzung, dass das Bild des Punktes B unter den Funktionen h_1 und h_2 jeweils eine positive reelle Zahl ist, die Gleichheit der Bildpunkte $h_1(B)$ und $h_2(B)$. Schließlich folgt hieraus mit den Gleichungen (i) und (ii), dass das Bild jedes Punktes X der Geraden g unter den Linealfunktionen h_1 und h_2 identisch ist. \square

Grundprinzip des Messens: Streckenlängen

Allgemein beschreiben Größen quantifizierbare Charakteristika bezüglich (geometrischer) Untersuchungsgegenstände (vgl. Büchter/Holzäpfel 2018, S. 3 f.; Leuders 2015, S. 42). Die *Länge einer Strecke* beschreibt als Größe in diesem Zusammenhang die Menge aller Strecken, deren zugrunde liegenden Punkte zu den jeweiligen Punkten der gegebenen Strecke den gleichen Abstand besitzen, beziehungsweise innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Menge aller Strecken, deren zugrunde liegende Punktmenge bezüglich der Relation \equiv_d zur jeweiligen Punktmenge der gegebenen Strecke äquivalent ist (vgl. Benölken et al. 2018, S. 96 f.; Filler 1993, S. 77 f.). Größen als Äquivalenzklassen sind hier von ihrer Maßzahl zu unterscheiden (vgl. Filler 1993, S. 77 f.). Mathematisch ist sich der Unterscheidung bewusst zu werden. Gebräuchlich, insbesondere im schulischen Kontext, ist die

Differenzierung hingegen nicht. Die Länge einer Strecke $[A, B]$ wird mit dem Abstand $d(A, B)$ gleichgesetzt (vgl. Filler 1993, S. 77 f.), als „kürzeste Verbindung“ (MBK-SL 2014a, S. 25). Auch in der vorliegenden Arbeit machen wir von dieser Vereinfachung Gebrauch.

Eine umfassende Thematisierung der Längenmessung zählt bereits zum Unterrichtsinhalt der Primarstufe (vgl. Franke/Reinhold 2016, S. 306–309; Peter-Koop/Nührenböcker 2011, S. 93). Dem Spiralprinzip folgend ist in der Sekundarstufe I und II an das erworbene Messverständnis anzuknüpfen (vgl. Franke/Ruwisch 2010, S. 183). Letztlich avanciert das Messen von Längen mittels eines Lineals (nicht das einzig zu thematisierende Messwerkzeug, aber im schulischen Alltag das dominierende (vgl. Franke/Ruwisch 2010, S. 207–209)) recht direkt zu einem „Handwerkszeug“ des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe. Dem wird die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes mit der axiomatischen Festlegung der Linealfunktionen gerecht. Allgemein liegt dem Bestimmen von Längen bzw. Punktabständen das Grundprinzip des Messens zugrunde: Das mehrmalige Abtragen einer (Einheits-)Länge, und wenn nötig Unterteilen, an der zu messenden Strecke (vgl. ausführlich Peter-Koop/Nührenböcker 2011, S. 92 f.). Das zugrunde liegende Prinzip, die eigentliche Idee des Messens, ist auch in der Sekundarstufe wiederkehrend zu thematisieren, denn das Grundprinzip ist für ein adäquates Messverständnis zentral (vgl. Büchter/Holzäpfel 2018, S. 2 f.). Nicht zuletzt unterstreichen dies die Bildungsstandards der KMK (2022). Die Linealfunktionen als „Mess-Lineale“ im metrisch-normalen euklidischen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ spiegeln das Prinzip basierend auf der Gültigkeit des Archimedes-Axioms sowie des Axioms der Intervallschachtelung für die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen wider (vgl. Filler 1993, S. 132 f.).

Allgemein ist die Entwicklung eines adäquaten Messverständnisses eingebettet in die Entwicklung eines adäquaten Verständnis des betreffenden Größenbereichs⁶. Dabei liegt didaktisch ein stufenweiser Aufbau zugrunde, der jedoch nicht zur starren Strukturierung des (Geometrie-)Unterrichts, vielmehr als theoretischer Bezugsrahmen für Lehrkräfte dient (vgl. Franke/Ruwisch 2010, S. 178 f. u. 184–204). Das Stufenmodell sei exemplarisch anhand des Größenbereichs der Länge skizziert (vgl. ausführlich Franke/Ruwisch 2010, S. 184–210; vgl. auch Franke/Reinhold 2016, S. 305–309): Zentral ist das (Messen als) Vergleichen. Der direkte Vergleich von verschiedenen geometrischen Objekten greift (Vor-)Erfahrungen der Schüler

⁶Den Begriff des Größenbereichs prägte Arnold Kirsch aus einer Zusammenarbeit mit Heinz Griesel heraus in der Mathematikdidaktik (vgl. Griesel 2015). Der Begriff klassifiziert Größen artspezifisch und charakterisiert in mathematikdidaktischer Hinsicht die relevanten Strukturen (Addition, Vervielfachen/Teilen, Ordnen) innerhalb des Größenbereichs (vgl. Krauter/Bescherer 2013, S. 105–107; Griesel 2015).

auf. Sind die Objekte „gleich lang“? Ist eines „kürzer/länger“ als das andere? Anschließend sind Kontexte zu eröffnen, die statt eines direkten einen indirekten Vergleich erfordern. So können zwei Objekte indirekt miteinander verglichen werden, indem sie einzeln anhand eines Bezugs- respektive Vergleichsobjekts direkt verglichen werden. Weiter kann das Bezugsobjekt als nicht-standardisierte Maßeinheit fungieren, woraus letztlich basierend auf der Grundidee des Messens die Längenmessung mittels standardisierter Messinstrumente (und standardisierter Maßeinheiten) resultiert. Das Umrechnen der Größen in verschiedene Maßeinheiten sowie das Rechnen in Sachkontexten trägt schließlich zu einer ganzheitlichen Auffassung des Größenbereichs bei. Letzteres betrifft in erster Linie den arithmetischen Umgang mit Maßzahlen. Das Messen stellt hier eine Verbindung zwischen Geometrie und Arithmetik her (vgl. Leuders 2015, S. 42). Aus geometrischer Perspektive sind nicht die expliziten Maßzahlen von Bedeutung, vielmehr ist der durch das Messen ermöglichte Vergleich anhand der Maßzahlen relevant; exemplarisch zeigt sich dies in der vorliegenden Arbeit bereits mit der zuvor erfolgten Einführung des Begriffs der Länge einer Strecke (vgl. auch Schröder 1985, S. 55). Wir tragen dem bezüglich der Abstandsbestimmung innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ durch die explizite Einführung der Relation \equiv_d der Abstandsgleichheit Rechnung, die nach dem Korollar 2.2.2.7 eine Äquivalenzrelation darstellt.

Lineale eine Selbstverständlichkeit?

Wie zuvor erläutert, zählt das Messen von Streckenlängen bzw. das Bestimmen von Punktabständen mit Hilfe eines Lineals als Messinstrument zu den Grundlagen des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I und II. Entsprechend existieren vor dem Hintergrund der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit basierend auf dem Linealaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ sogenannte Linealfunktionen als „Mess-Lineale“. Wir schließen das vorliegende Kapitel mit einem Beispiel, das zeigt, dass die Existenz eines „Mess-Lineals“ eben keine Selbstverständlichkeit darstellt. Hierzu betrachten wir den euklidischen Punktraum \mathbb{R}^3 mit der Menge $\mathcal{G}_e := \{A + \lambda(B - A) : \lambda \in \mathbb{R}\} : A, B \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } A \neq B\}$, der Menge aller Geraden. Auf der Menge \mathbb{R}^3 sei die diskrete Metrik definiert durch

$$\delta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \delta(A, B) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A = B, \\ 1, & \text{falls } A \neq B. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass die Aussage des Linealaxioms nicht gilt. Per definitionem besitzt eine Gerade $g := \{\alpha A + \lambda(B - A) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ überabzählbar viele, vom Punkt A verschiedene Punkte (es sei die Überabzählbarkeit der Menge \mathbb{R} beachtet). Dementsprechend existieren auf der Geraden g überabzählbar viele verschiedene Punkte, deren Abstand zum Punkt A bezüglich der diskreten Metrik δ den Wert 1 beträgt. Eine Funktion, welche die Lineal Gleichung erfüllt, ist folglich keinesfalls bijektiv. Damit ist die Existenz einer Linealfunktion per definitionem nicht gegeben.

3.4 Kongruenz

Im Rahmen eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus der euklidischen Geometrie erweist sich die Einführung der „Kongruenz“ nicht als lokale, sondern globale Frage. Im Allgemeinen sind zwei mathematische Ansätze gegenüberzustellen, der kongruenz- und abbildungsgeometrische (vgl. Kirsche 2006, S. 5).

Als der klassische versteht sich der kongruenzgeometrische Ansatz (vgl. Bender 1982, S. 9 u. 12). Exemplarisch sei dieser in seinen Grundzügen anhand von Hilberts (1987) „Grundlagen der Geometrie“ erläutert. Charakteristisch ist, dass die „Kongruenz“ einen Grundbegriff des axiomatischen Aufbaus im Sinne des von Hilbert vertretenen Formalismus darstellt; der Begriff ist implizit-axiomatisch beschrieben (siehe hierzu Beginn des Kapitels 3). Die weitere Untersuchung der Kongruenz erfolgt eingebettet in den axiomatisch-deduktiven Aufbau basierend auf den jeweiligen Kongruenzaxiomen. Sogenannte „Kongruenzabbildungen“ bleiben dabei weitestgehend unthematisiert.

Impuls für den abbildungsgeometrischen Ansatz lieferte Felix Kleins (*1849, †1925) Erlanger Programm⁷ (vgl. Weigand 2018a, S. 267). Kleins Bestreben lag darin, die Geometrie in ihrer damaligen Entwicklung (neben der euklidischen existierten bereits eine Vielzahl weiterer Disziplinen) zu systematisieren (vgl. Wußing 2009, S. 169; Kadunz/Sträßer 2008, S. 168 f.). Zur Klassifizierung nutzte er die Autormorphismengruppen der Geometrien; die einzelnen (Teil-)Geometrien sind durch die Invarianten der jeweiligen Abbildungen charakterisiert (vgl. Wußing 2009, S. 169–171; Kadunz/Sträßer 2008, S. 169). In diesem Sinne versteht sich die euklidische Geometrie grundlegend als Kongruenzgeometrie (vgl. Wußing 2009, S. 170; vgl.

⁷Das Programm wurde als solches bekannt, Wußing (2009, S. 167) konkretisiert hier, dass die Veröffentlichung im Jahre 1872 unter dem Titel „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“ im Zuge von Kleins Inaugural-Vortrag an der Universität Erlangen erschien.

zusätzlich Quaisser 1989, S. 121). Vor diesem Hintergrund entwickelten sich abbildungsgeometrische Ansätze der euklidischen Geometrie auf Basis der Kongruenzabbildungen (vgl. Weigand 2018a, S. 267). Im Gegensatz zum kongruenzgeometrischen Ansatz legen diese die Kongruenzabbildungen axiomatisch zugrunde (vgl. Filler 1993, S. 127–129).

Vorgehensweise in $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ legen wir explizit weder abbildungsgeometrische Axiome noch Axiome der Kongruenz zugrunde. Es erfolgt eine in Bezug zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene analoge Darlegung. Als ganzheitliche Grundlage ist in diesem Zusammenhang die Arbeit von Schröder (1985) zu nennen. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ definieren wir mittels der Abstandsgleichheit \equiv_d zunächst die Kongruenzabbildungen in

Definition 3.4.1. Eine bijektive und abstandstreue bzw. -erhaltende Selbstabbildung der Punktmenge \mathcal{P} , also eine bijektive Abbildung $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ mit

$$\{A, B\} \equiv_d \{\Phi(A), \Phi(B)\} \quad \text{für } A, B \in \mathcal{P},$$

wird als (räumliche) Kongruenzabbildung oder (räumliche) Bewegung bezeichnet.

Mit dem Zusatz „räumlich“ verdeutlichen wir – wenn nötig –, dass die jeweilige Kongruenzabbildung die Punktmenge des gesamten metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ als Quell- bzw. Zielmenge umfasst. Demgegenüber stehen die „ebenen“ Kongruenzabbildungen, die bijektiven und abstandstreuen Selbstabbildungen betreffend der Punktmenge einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes; sie beschreiben eine Kongruenzabbildung einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 38). In diesem Zusammenhang stellt jede Restriktion einer räumlichen Kongruenzabbildung auf eine Ebene, deren Punktmenge unter der räumlichen Kongruenzabbildung wiederum auf sich selbst abgebildet wird, eine ebene Kongruenzabbildung dar (vgl. zusätzlich Quaisser 1989, S. 84). Auf dem Begriff der räumlichen Kongruenzabbildung aufbauend, erfolgt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit der Definition 3.4.2 die Festlegung der „Kongruenz“ als Relation zwischen geometrischen Figuren. In ei-

ner nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene gilt die Kongruenz zwischen zwei geometrischen Figuren entsprechend, unter Betrachtung der ebenen statt räumlichen Kongruenzabbildungen (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 72).

Definition 3.4.2. Ist das Bild einer geometrischen Figur \mathcal{F}_1 unter einer Kongruenzabbildung Φ gleich einer geometrischen Figur \mathcal{F}_2 , also gilt $\Phi[\mathcal{F}_1] = \mathcal{F}_2$, so heißt die geometrische Figur \mathcal{F}_1 kongruent zur geometrischen Figur \mathcal{F}_2 .

Das Kongruenzaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ für sich, beschreibt eine Forderung der Verträglichkeit zwischen der Relation der Parallelität und Abstandsgleichheit (vgl. Schröder 1985, S. 18). Hierauf basierend erfolgt eingebettet in den axiomatisch-deduktiven Aufbau des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Darlegung der Kongruenz ausgehend von derer definitorischen Festlegung *in Bezug zu* den Kongruenzabbildungen, *ohne* explizit den Begriff der Kongruenz oder Kongruenzabbildungen axiomatisch zugrunde zu legen.

Zur Begründung der Vorgehensweise in $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$

Das Vorgehen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ orientiert sich an dem vorherrschenden fachdidaktischen Konsens zur Diskussion um die abbildungs- und kongruenzgeometrische Methodik. In Anlehnung an Weigand et al. (2018, S. 193–195 u. 267–270) ist die Aussage von Kirsche (2006, S. 5), „[...] beide Methoden nicht als Alternativen an[z]usehen, sie sind komplementär“, für den Geometrieunterricht der Sekundarstufe zu unterstreichen: Zentral ist der Aspekt der Kongruenz als Relation der Deckungsgleichheit zwischen geometrischen Figuren, dass sich kongruente geometrische Figuren bis auf ihre Lage innerhalb der Ebene bzw. des Raumes nicht voneinander unterscheiden. Hiermit verbunden und zu berücksichtigen, ist die Vorstellung des zur Deckung-Bringens. Mathematisch spiegelt sich dies im Abbildungsbegriff wider.

Das Bewegliche als stetig sukzessiver Prozess der geometrischen Figuren und ihrer Teilfiguren ist (nicht zuletzt unter Zuhilfenahme von Digitaler Geometriesoftware) zu veranschaulichen (vgl. auch Kadunz/Sträßer 2008, S. 175 f.). In diesem Zusammenhang ist nach Filler (1993, S. 88 f.) zwischen dem Beweglichen im physikalischen und mathematischen Sinne zu unterscheiden, wobei zwei Unterschiede charakteristisch sind. Das Bewegliche versteht sich

physikalisch als ein dynamischer Prozess. Eine Abbildung beschreibt mathematisch hingegen den statischen Zusammenhang der Zustandsänderung von der Urbild- zur Bildmenge (vgl. auch Kadunz/Sträßer 2008, S. 172 f.). Dabei beschränkt sich eine Kongruenzabbildung als bijektive Selbstabbildung der Punktemenge des Raumes bzw. der Ebene nicht auf die jeweiligen Untersuchungsobjekte, wenngleich der Fokus in der Regel auf diesen liegt. Physikalisch sind jedoch ausschließlich die betrachteten Untersuchungsobjekte in Bewegung. Speziell im Hinblick auf die Diskussion um die Bedeutung der Kongruenzabbildungen für den Geometrieunterricht sei die Argumentation von Schmidt-Thieme/Weigand (2018, S. 194) untermauert.⁸ Mathematisch ist der Abbildungsbegriff von Bedeutung, in dem Bewusstsein, dass der Bezug zur Auffassung des Beweglichen im physikalischen Sinne herzustellen ist.

Grundlegende Eigenschaften in $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$

Die grundlegende Untersuchung der Kongruenz als Relation zwischen geometrischen Figuren steht innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in direktem Zusammenhang zu den Kongruenzabbildungen. Elementare Eigenschaften, die die Menge aller Kongruenzabbildungen eint, implizieren grundlegende Eigenschaften der Kongruenz als Relation zwischen geometrischen Figuren. Zu Beginn weisen wir mit dem Satz 3.4.3 nach, dass innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Menge aller räumlichen Kongruenzabbildungen eine Gruppe darstellt, sich somit nicht von der Menge aller ebenen Kongruenzabbildungen in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene unterscheidet (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 40 f.).

Satz 3.4.3. (vgl. Schröder 1985, S. 218) Die Menge aller Kongruenzabbildungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ bildet mit der Relation der Verkettung von Funktionen eine Gruppe.

Beweis: (vgl. Schröder 1985, S. 23 f. u. 218)

Grundsätzlich gilt, dass die Komposition von Funktionen *assoziativ* ist. Die Bijektivität der Kongruenzabbildungen und deren Abstandstreue zusammen mit der Transitivität der Ab-

⁸Nicht unkommentiert vertrete ich an dieser Stelle das Argument des „funktionalen Denkens“ bei Schmidt-Thieme/Weigand (2018, S. 194). Ich bin der Auffassung, dass dieser Aspekt differenzierter zu betrachten ist, indem zusätzlich die Betrachtungen wie etwa von Bender (1982, S. 18 f.) oder wie daran orientierend die von Kadunz/Sträßer (2008, S. 171 f.) Berücksichtigung finden.

standsgleichheit \equiv_d liefern, dass die Menge aller Kongruenzabbildungen bezüglich ihrer Komposition *abgeschlossen* ist. Die identische Abbildung $id_{\mathcal{P}}$ ist per definitionem eine bijektive, abstandstreue Selbstabbildung der Punktmenge \mathcal{P} , sodass in der Menge aller Kongruenzabbildungen bezüglich ihrer Komposition ein *neutrales Element* existiert. Diesbezüglich besitzt jede Kongruenzabbildung als eine bijektive, abstandstreue Selbstabbildung der Punktmenge \mathcal{P} ein *inverses Element*, eine bijektive, abstandstreue Umkehrabbildung. \square

Mit der Definition 3.4.2 der Kongruenzrelation liefert der Satz 3.4.3 umgekehrt, dass die Kongruenz eine reflexive, symmetrische und transitive Relation, also eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geometrischen Figuren darstellt (vgl. auch Filler 1993, S. 89). Ist eine geometrische Figur zu einer geometrischen Figur kongruent, so können wir aufgrund der Symmetrie auch davon sprechen, dass die beiden geometrischen Figuren (*zueinander*) *kongruent* sind (vgl. auch Filler 1993, S. 89).

Die Geradentreue einer Kongruenzabbildung erweitert sich im Vergleich zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ im Weiteren mit dem Satz 3.4.4 um die Ebenentreue (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 39). Bevor wir den Satz darlegen, sei ein Ergebnis aus dem Bereich der Analysis aufgegriffen, und zwar eine Eigenschaft, die grundsätzlich jede injektive Funktion besitzt; für einen Nachweis sei der Leser etwa auf Nicholson (2019, S. 290 f. u. 305 f.) verwiesen:

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine injektive Funktion von einer Menge X in eine Menge Y , so gelten die Gleichungen $f[X_1 \cup X_2] = f[X_1] \cup f[X_2]$ und $f[X_1 \cap X_2] = f[X_1] \cap f[X_2]$ für $X_1, X_2 \subseteq X$.

Diese Eigenschaft, die jede Kongruenzabbildung gemeinhin als bijektive Funktion besitzt, gelten zur weiteren Untersuchung der Kongruenzabbildungen als elementar. So greifen wir hierauf bereits innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ im Beweis des Satzes 3.4.4 zurück. Allgemein orientieren wir den Beweis, ausführlicher und differenzierter, an Schröder (1985, S. 211 u. 218).

Satz 3.4.4. (vgl. Schröder 1985, S. 211 u. 218) Eine Kongruenzabbildung Φ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist...

(a) ebenentreu mit $\Phi[m_{A,B}] = m_{\Phi(A),\Phi(B)}$ und (b) geradentreu, d.h. $\Phi[g] \in \mathcal{G}$ für $g \in \mathcal{G}$.

Beweis: (siehe zuvor, Schröder 1985)

a) Die Abstandstreue der Kongruenzabbildung Φ liefert zusammen mit der Transitivität der Abstandsgleichheit \equiv_d die Gleichung

$$\Phi[m_{A,B}] = \{\Phi(X) : X \in \mathcal{P} \wedge \{A, X\} \equiv_d \{X, B\}\} = \{\Phi(X) : X \in \mathcal{P} \wedge \{\Phi(A), \Phi(X)\} \equiv_d \{\Phi(X), \Phi(B)\}\},$$

weiter liefert die Surjektivität der Kongruenzabbildung die Gleichung

$$\{\Phi(X) : X \in \mathcal{P} \wedge \{\Phi(A), \Phi(X)\} \equiv_d \{\Phi(X), \Phi(B)\}\} = \{Y \in \mathcal{P} : \{\Phi(A), Y\} \equiv_d \{Y, \Phi(B)\}\} = m_{\Phi(A), \Phi(B)}.$$

Zusammenfassend erhalten wir, dass das Bild der Ebene $m_{A,B}$ unter der Kongruenzabbildung Φ zur Ebene $m_{\Phi(A), \Phi(B)}$ identisch ist. Folglich ist die zu zeigende Ebenentreue einer Kongruenzabbildung nachgewiesen. \square

b) Die Gerade g ist innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen ϵ und η identisch. Hiermit gilt aufgrund der Injektivität der Kongruenzabbildung Φ , dass unter der Kongruenzabbildung das Bild der Geraden g zum Schnitt der beiden Bildmengen $\Phi[\epsilon]$ und $\Phi[\eta]$ der Ebene ϵ bzw. η identisch ist. Damit gilt auf Grundlage der Bijektivität der Kongruenzabbildung Φ zusammen mit derer nach dem zuvor gezeigten Teil a) geltenden Ebenentreue weiter, dass das Bild der Geraden g unter der Kongruenzabbildung Φ zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen, also innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zu einer Geraden identisch ist. Folglich ist die zu zeigende Geradentreue einer Kongruenzabbildung nachgewiesen. \square

Ebenen und Geraden, die unter einer geraden- bzw. ebenentreuen Abbildung im Allgemeinen wiederum auf sich selbst abgebildet werden, werden als *Fixebenen* bzw. *Fixgeraden* der jeweiligen Abbildung bezeichnet (vgl. Schröder 1985, S. 23). Analog findet die Bezeichnung des *Fixpunktes* Verwendung (vgl. Schröder 1985, S. 23). Zu beachten ist, dass die Punkte einer Fixgerade sowie die Punkte einer Fixebene nicht zwingend Fixpunkte darstellen (vgl. Schröder 1985, S. 23).

Im Hinblick auf die in Kapitel 3.1.2 erfolgte definitorische Festlegung der Parallelität und Orthogonalität zwischen Geraden und/oder Ebenen zeigen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ basierend auf dem soeben bewiesenen Satz 3.4.4 das Korollar 3.4.5, die entsprechende Aussage in Schröder (1985, S. 211 u. 218) erweiternd.

Korollar 3.4.5. Eine Kongruenzabbildung Φ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist parallelentreu (i) und orthogonalitätstreu (ii) bezüglich der Parallelität bzw. Orthogonalität zwischen Geraden und/oder Ebenen:

$$(i) \quad g \parallel h \Rightarrow \Phi[g] \parallel \Phi[h] \quad \wedge \quad \epsilon \parallel \eta \Rightarrow \Phi[\epsilon] \parallel \Phi[\eta] \quad \wedge \quad g \parallel \epsilon \Rightarrow \Phi[g] \parallel \Phi[\epsilon] \quad \text{für } g, h \in \mathcal{G}; \epsilon, \eta \in \mathcal{E}.$$

$$(ii) \quad g \perp h \Rightarrow \Phi[g] \perp \Phi[h] \quad \wedge \quad \epsilon \perp \eta \Rightarrow \Phi[\epsilon] \perp \Phi[\eta] \quad \wedge \quad g \perp \epsilon \Rightarrow \Phi[g] \perp \Phi[\epsilon] \quad \text{für } g, h \in \mathcal{G}; \epsilon, \eta \in \mathcal{E}.$$

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: siehe zuvor, Schröder 1985)

Die mit dem Satz 3.4.4 nachgewiesene Ebenen- und Geradentreue einer Kongruenzabbildung liefert zusammen mit derer Bijektivität, dass die zu zeigende Parallelentreue gilt. Bezüglich der Orthogonalität zwischen zwei Ebenen sowie zwischen einer Gerade und Ebene folgt das zu Zeigende auf der Grundlage der jeweiligen in Kapitel 3.1.2 erfolgten Definition der Orthogonalität umgehend aus der Ebenen- und Geradentreue einer Kongruenzabbildung. Im Verbleibenden sei zusätzlich das Nachgewiesene zur Geradentreue in Satz 3.4.4 berücksichtigt, und zwar dass unter einer Kongruenzabbildung das Bild einer Geraden zur Schnittmenge der beiden Bildebenen derer Ebenen identisch ist, die der Geraden per definitionem innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zugrunde liegen. \square

Eine weitere Folgerung aus dem Satz 3.4.4 stellt das Korollar 3.4.6 dar. Das Korollar nutzen wir im Weiteren zugleich im Rahmen des Satzes 3.4.7 zum Nachweis der Strecken- und Halbgeradentreue einer räumlichen Kongruenzabbildung innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Im Vergleich zur in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene unterscheiden sich die räumlichen Kongruenzabbildungen in der Strecken- und Halbgeradentreue nicht von den ebenen Kongruenzabbildungen (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 39 f.). Diesbezüglich zeigt sich mit dem Satz 3.4.7 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ weiter, dass sich die Halbebenen- um die Halbraumtreue erweitert.

Korollar 3.4.6. (vgl. Moise 1990, S. 258) Eine Kongruenzabbildung Φ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist zwischentreu, d.h. liegt ein Punkt B zwischen zwei Punkten A und C , so liegt auch der Bildpunkt $\Phi(B)$ des Punktes B unter der Kongruenzabbildung Φ zwischen den Bildpunkten $\Phi(A)$ und $\Phi(C)$ der Punkte A bzw. C .

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Filler 1993, S. 77 u. 238)

Auf der Grundlage der in Kapitel 3.1.3 erfolgten Definition des Zwischenseins liefert die mit dem Satz 3.4.4 nachgewiesene Geradentreue einer Kongruenzabbildung zusammen mit derer Abstandstreue sowie Bijektivität, dass die zu zeigende Zwischentreue gilt. \square

Satz 3.4.7. (a/b: Filler 1993, S. 83 f.; c/d: Quaisser 1989, S. 83 f.) Eine Kongruenzabbildung Φ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist...

- a) streckentreu mit $\Phi[[A, B]] = [\Phi(A), \Phi(B)]$,
- b) halbgeradentreu mit $\Phi[[A, B]] = [\Phi(A), \Phi(B)]$,
- c) halbebenentreu mit $\Phi[\mathfrak{H}\langle ABC \rangle] = \mathfrak{H}\langle \Phi(A)\Phi(B)\Phi(C) \rangle$ sowie
- d) halbraumtreu mit $\Phi[\mathfrak{H}\langle ABC_D \rangle] = \mathfrak{H}\langle \Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)\Phi(D) \rangle$.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: Filler 1993, S. 84 f.)

Die zu zeigende Strecken- sowie Halbgeradentreue einer Kongruenzabbildung folgt umgehend aus derer nach dem Korollar 3.4.6 geltenden Zwischentreue (vgl. auch Filler 1993, S. 238). Im Weiteren beweisen wir explizit die zu zeigende Halbraumtreue. Die zu zeigende Halbebenentreue einer Kongruenzabbildung impliziert der Nachweis mittels entsprechender Analogiebetrachtungen zwischen „(Rand-)Ebene“ und „(Rand-)Gerade“ sowie „Halbraum“ und „Halbebene“:

Mit der nach dem Satz 3.4.4 geltenden Ebenentreue bildet die Kongruenzabbildung Φ die Ebene $\langle A, B, C \rangle$ aufgrund des Satzes 3.1.1.1 auf die Ebene $\langle \Phi(A), \Phi(B), \Phi(C) \rangle$ ab. Damit liefert die Bijektivität der Kongruenzabbildung, dass jeder Punkt, der in einem der beiden Halbräume mit der Randebene $\langle \Phi(A), \Phi(B), \Phi(C) \rangle$ liegt, unter der Kongruenzabbildung Φ gleich dem Bild eines Punktes ist, der in dem Halbraum $\mathfrak{H}\langle ABC_D \rangle$ oder $\mathfrak{H}\langle ABC_{\bar{D}} \rangle$ liegt.

Hierauf basierend zeigen wir zum Nachweis der Behauptung letztlich, dass die Kongruenzabbildung Φ jeden in dem Halbraum $\mathfrak{H}\langle ABC_D \rangle$ liegenden Punkt E_1 auf einen Punkt des Halbraumes $\mathfrak{H}\langle \Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)\Phi(D) \rangle$ sowie jeden in dem Halbraum $\mathfrak{H}\langle ABC_{\bar{D}} \rangle$ liegenden Punkt E_2 auf einen Punkt des Halbraumes $\mathfrak{H}\langle \Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)\Phi(\bar{D}) \rangle$ abbildet.

Nach dem Satz 3.2.1.9 schneidet die Strecke der Punkte D und E_2 die Randebene $\langle A, B, C \rangle$, im Gegensatz zur Strecke der Punkte D und E_1 . Zusammen mit der Bijektivität der Kon-

gruenzabbildung Φ erhalten wir mit derer Ebenen- und Streckentreue, dass entsprechendes für die jeweiligen Bildstrecken bezüglich der Randebene $\langle \Phi(A), \Phi(B), \Phi(C) \rangle$ gilt. Hieraus folgt wiederum mit dem Satz 3.2.1.9, dass die Bildpunkte $\Phi(D)$ und $\Phi(E_1)$ in dem gleichen Halbraum, die Bildpunkte $\Phi(D)$ und $\Phi(E_2)$ in unterschiedlichen Halbräumen der Ebene $\langle \Phi(A), \Phi(B), \Phi(C) \rangle$ liegen. \square

Zwei Strecken bzw. zwei Halbgeraden sind nach dem soeben nachgewiesenen Satz 3.4.7 genau dann zueinander kongruent, wenn die jeweils zugrunde liegenden zweielementigen Punkt-mengen zueinander kongruent sind. Entsprechend gilt die Kongruenz zweier Halbräume bzw. zweier Halbebenen genau dann, wenn die entsprechenden Randebenen bzw. -geraden zueinander kongruent sind. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zeigen wir zum Abschluss des vorliegenden Kapitels, anlehnend an Filler (1993, S. 84 f.), dass die Kongruenz zweier Winkel genau dann gilt, wenn die jeweiligen Winkellagen zueinander kongruent sind.

Satz 3.4.8. Eine Kongruenzabbildung Φ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist winkeltreu mit $\Phi[\angle ABC] = \angle \Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)$.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Filler 1993, S. 84 f.)

Zusammen mit der Bijektivität der Kongruenzabbildung Φ folgt aus derer nach dem Satz 3.4.7 geltenden Halbgeradentreue, dass die Winkellage des Winkels $\angle ABC$ unter der Kongruenzabbildung Φ gleich der Winkellage $\angle \Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)$ ist. Unter der Annahme, dass ein gestreckter Winkel oder Nullwinkel vorliegt, gilt damit bereits die zu zeigende Aussage.

Es sei im Weiteren die Existenz des inneren Winkels $\angle_i ABC$ und des äußeren Winkels $\angle_e ABC$ angenommen und gezeigt, dass das Bild des inneren Winkelfeldes $int(\mathcal{W}_{ABC})$ unter der Kongruenzabbildung Φ zum inneren Winkelfeld $int(\mathcal{W}_{\Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)})$ sowie das Bild des äußeren Winkelfeldes $ext(\mathcal{W}_{ABC})$ zum äußeren Winkelfeld $ext(\mathcal{W}_{\Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)})$ identisch ist. Aufgrund der Injektivität der Kongruenzabbildung Φ erhalten wir mit derer nach dem Satz 3.4.7 geltenden Halbebenentreue die Gleichung

$$\Phi[\mathfrak{H}\langle AB_C \rangle \cap \mathfrak{H}\langle BC_A \rangle] = \Phi[\mathfrak{H}\langle AB_C \rangle] \cap \Phi[\mathfrak{H}\langle BC_A \rangle] = \mathfrak{H}\langle \Phi(A)\Phi(B)_{\Phi(C)} \rangle \cap \mathfrak{H}\langle \Phi(B)\Phi(C)_{\Phi(A)} \rangle$$

sowie die Gleichung

$$\Phi[\mathfrak{H}\langle AB_{\bar{C}} \rangle \cup \mathfrak{H}\langle BC_{\bar{A}} \rangle] = \Phi[\mathfrak{H}\langle AB_{\bar{C}} \rangle] \cup \Phi[\mathfrak{H}\langle BC_{\bar{A}} \rangle] = \mathfrak{H}\langle \Phi(A)\Phi(B)_{\overline{\Phi(C)}} \rangle \cup \mathfrak{H}\langle \Phi(B)\Phi(C)_{\overline{\Phi(A)}} \rangle.$$

Zusammenfassend gilt mit der in Kapitel 3.2.2 erfolgten Definition eines inneren und äußeren Winkelfeldes das zu Zeigende. □

Mit den nachgewiesenen Sätzen 3.4.4/3.4.7/3.4.8 folgt im Allgemeinen aus der Kongruenz zweier geometrischer Figuren die Kongruenz entsprechender geometrischer (Teil-)Figuren (vgl. Filler 1993, S. 89 f.).

4 Räumliche Kontextualisierungen

Der Leitgedanke des Kapitels besteht darin, Inhalte der ebenen Geometrie vor dem Hintergrund der Raumgeometrie zu diskutieren: ebene-geometrische Aussagen raumgeometrisch zu kontextualisieren. Die Analogiebetrachtungen eröffnen weniger explizit raumgeometrische Frage- bzw. Problemstellungen. Der Fokus liegt vielmehr ausgehend von der ebenen Geometrie auf den Zusammenhängen zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie, entsprechend der „Curricularen Richtlinien“ (2.1) bezüglich des Geometrieunterrichts der allgemeinbildenden Sekundarstufe I und II. Dem metrisch-normalen euklidischen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ liegt gemeinhin die in meiner Masterarbeit (2018) entwickelte Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene zugrunde (siehe Kapitel 2.2).

Die euklidische (Schul-)Geometrie versteht sich anlehnend an das Erlanger Programm von Felix Klein grundlegend als Kongruenzgeometrie (siehe Kapitel 3.4). Entsprechend nimmt die Untersuchung der Kongruenz einen zentralen Stellenwert ein (siehe auch Kapitel 2.1 „Curriculare Richtlinien“). In Kapitel „Kongruenz – Teil I“ (4.1) diskutieren wir die „Punktspiegelungen“ und „Translationen“ als spezielle Kongruenzabbildungen. Darauf folgt in Kapitel „Kongruenz – Teil II“ (4.3) eine Diskussion um die „Ebenenspiegelungen“ als spezielle Kongruenzabbildungen, derer Darlegung als die Verkettung von Ebenenspiegelungen und einer abschließenden Untersuchung der Kongruenz zwischen geometrischen Figuren. Die Zweiteilung bedingt der deduktive Aufbau des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Dabei stellt der Einschub „Parallele und Orthogonale Geraden/Ebenen“ (4.2) ohnehin ein relevantes Themenfeld in der vorliegenden Arbeit dar (siehe Kapitel 2.1 „Curriculare Richtlinien“). Mit dem Kapitel zur „Ähnlichkeit“ (4.4) ist schließlich die euklidische (Schul-)Geometrie in ihren grundlegenden Elementen dargelegt (vgl. auch Mitschka et al. 1998, S. 273; siehe auch Kapitel 2.1 „Curriculare Richtlinien“).

In Bezug zur fachdidaktisch orientierten Grundlegung des Begriffs der Kongruenz innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, im Sinne eines komplementären Verständnisses des kongruenz- und abbildungsgeometrischen Ansatzes (siehe Kapitel 3.4), spiegelt sich darauf basierend in dem vorliegenden Kapitel tendenziell ein abbildungsgeometrisches Vorgehen wider. Diesbezüglich seien zwei Aspekte angemerkt. Erstens erfordert

das Mathematische (ein Bestandteil neben dem Fachdidaktischen) der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit, das Ziel eines mathematisch stringenten axiomatisch-deduktiven Aufbaus der euklidischen (Raum-)Geometrie, eine gewisse „Geradlinigkeit“ in der deduktiven Vorgehensweise. Zweitens räumt die fachdidaktisch motivierte komplementäre Auffassung des kongruenz- und abbildungsgeometrischen Ansatzes gemeinhin dem Abbildungsbegriff eine (mathematische) Bedeutung ein (siehe hierzu Kapitel 3.4). Die Frage nach der Schwerpunktsetzung liegt letztlich im didaktischen Gestaltungsspielraum der Lehrkraft (vgl. auch Schmidt-Thieme/Weigand 2018, S. 194 f.); die vorliegende Arbeit versteht sich hier (im Sinne ihrer Zielsetzung) als mathematische Grundlage.

4.1 Kongruenz – Teil I

Der Untersuchung der „Punktspiegelungen“ (4.1.1) und „Translationen“ (4.1.2) als spezielle Kongruenzabbildungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ liegt im Sinne des übergeordneten Leitgedankens der „Räumlichen Kontextualisierung“ die Untersuchung der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene zugrunde. Diesbezüglich sei mit Blick auf die Bedeutung des Kongruenzaxioms (siehe Kapitel 2.2 sowie Kapitel 3.4) folgendes angemerkt: Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ tritt die Bedeutung im Vergleich zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene weniger explizit hervor. Dahingehend reduziert sich die Bedeutung innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ darauf, dass das Kongruenzaxiom zum Nachweis des Satzes 2.2.2.6 elementar ist, dazu dass die Ergebnisse meiner Masterarbeit (2018) überhaupt in jeder Ebene des Raumes Anwendung finden können.

4.1.1 Punktspiegelungen

Als Grundlage innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ dient im Weiteren die in meiner Masterarbeit (2018, S. 46–52) erfolgte Untersuchung der Punktspiegelungen bezüglich einer metrisch-normalen euklidischen Ebene. Besonders im Hinblick auf die definitorische Darlegung der Punktspiegelungen ist im Rahmen dessen zusätzlich auf die

Arbeit von Schröder (1985, S. 24–26; 2014a, S. 31–34) zu verweisen, ergänzend sei die räumliche Erweiterung in Schröder (1985, S. 215–219) genannt.

Jede Ebene ϵ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ stellt nach dem Satz 2.2.2.6 eine metrisch-normale euklidische Ebene dar. Für einen Punkt M ist in der Ebene ϵ die Punktspiegelung entsprechend der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene wie folgt definiert (vgl. Lauer 2018, S. 46):

Die Abbildung $\tilde{M}: \epsilon \rightarrow \epsilon$ mit

$$\tilde{M}(X) := X^M := \begin{cases} M & , \text{ falls } X = M, \\ \{\cdot\}^{-1}(\langle M, X \rangle \cap k_M^\epsilon(X)) \setminus \{X\} & , \text{ falls } X \neq M, \end{cases}$$

wird als (ebene) Punktspiegelung an dem Punkt M bezeichnet.

Das sogenannte Zirkelaxiom in meiner Masterarbeit (2018) sichert (siehe zum Axiom Kapitel 2.2), dass die Punktspiegelungen im mathematischen Sinne eine Abbildung darstellen, genauer, dass die Schnittmenge der Verbindungsgeraden $\langle M, X \rangle$ und des Kreises $k_M^\epsilon(X)$ neben dem Punkt X stets genau einen weiteren Punkt besitzt. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zeigt sich mit dem Satz 4.1.1.2 im Weiteren, dass ein räumliches Analogon, sogar eine Erweiterung der Aussage des Zirkelaxioms, bewiesen werden kann. Rückblickend auf meine Masterarbeit (2018) zeigt sich, dass der Nachweis für das erweiterte Zirkelaxiom analog in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene gilt – die Aussage des Zirkelaxioms eben nicht axiomatisch gefordert werden muss (siehe auch Kapitel 2.2). Der Nachweis des erweiterten Zirkelaxioms im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte sich im Austausch mit meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Frank.⁹ Zum Nachweis der Aussage innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in Satz 4.1.1.2 ist das Lemma 4.1.1.1 zentral. Die Bedeutung des Lemmas ist dabei nicht lokal, sondern an einigen weiteren Stellen (größtenteils zur Untersuchung der Kongruenz zwischen geometrischen Figuren) elementar. Wohlgermerkt fordern verschiedene Axiomatisierungen der euklidischen Geometrie die Aussage des Lemmas 4.1.1.1 axiomatisch (vgl. Filler 1993, S. 80/124–130 u. 137f.). Den Nachweis des Lemmas 4.1.1.1 führen wir innerhalb des metrisch-normalen eu-

⁹Das erweiterte Zirkelaxiom zeigt sich im ebenen Kontext letztlich als ein Spezialfall des von Moise (1990, S. 227f.) oder Millman/Parker (1991, S. 157) nachgewiesenen „Line-Circle Theorem“.

klidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf das in meiner Masterarbeit (2018, S. 75 f.) entsprechend in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene nachgewiesenen Lemma zurück.

Lemma-Masterarbeit 5.1.3.4. Es sei eine nichtnegative reelle Zahl x gegeben. Für einen Punkt A existiert auf jeder Halbgeraden mit diesem Punkt als Anfangspunkt genau ein Punkt, dessen Abstand zum Punkt A identisch zur reellen Zahl x ist.

Lemma 4.1.1.1. Es sei eine nichtnegative reelle Zahl x gegeben. Für einen Punkt A existiert auf jeder Halbgeraden mit diesem Punkt als Anfangspunkt genau ein Punkt, dessen Abstand zum Punkt A identisch zur Zahl x ist.

Beweis: (Eigener Beweis)

Es sei eine Halbgerade $[A, B)$ gegeben; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei x eine positive reelle Zahl. Aufgrund der definatorischen Festlegung einer Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes liegt diese Halbgerade in einer Ebene ϵ , einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene, des Raumes. Auf der Halbgeraden $[A, B)$ existiert in der Ebene ϵ als metrisch-normale euklidischen Ebene genau ein Punkt C , sodass der Abstand der Punkte A und C zur reellen Zahl x identisch ist (siehe Lemma-Masterarbeit 5.1.3.4). Schließlich ist ein derartiger Punkt auf der Halbgeraden $[A, B)$ im gesamten metrisch-normalen euklidischen Raum eindeutig bestimmt. \square

Satz 4.1.1.2. Jede durch den Mittelpunkt einer Sphäre gehende Gerade besitzt mit der Sphäre genau zwei verschiedene Punkte gemeinsam.

Beweis: (siehe zuvor, Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. Frank)

Es sei eine Sphäre $s_M(A)$ gegeben. Eine durch den Mittelpunkt M gehende Gerade g besitzt (wie jede Gerade im metrisch-normalen euklidischen Raum) überabzählbar viele verschiedene Punkte. Der Punkt M zerlegt diese Gerade g nach dem Satz 3.2.1.6 in eine Halbgerade mit dem Anfangspunkt M und deren komplementäre Halbgerade. Auf jeder dieser Halbgeraden existiert nach dem Lemma 4.1.1.1 genau ein Punkt, dessen Abstand zum Punkt M gleich dem Abstand $d(M, A)$ ist. Schließlich erhalten wir, dass die Sphäre $s_M(A)$ und die Gerade g genau zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben. \square

Für eine Sphäre $s_M(X)$ liefert der Satz 4.1.1.2, dass die Verbindungsgerade durch die Punkte M und X mit der Sphäre genau einen weiteren, von dem Punkt X verschiedenen Punkt gemeinsam besitzt. Auf dieser Grundlage erfolgt die definitorische Festlegung der räumlichen Punktspiegelungen analog zu den ebenen Punktspiegelungen (siehe hierzu eingangs des vorliegenden Kapitels). Wir definieren die räumlichen Punktspiegelungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ als eine Abbildung von der Punktmenge \mathcal{P} in die Punktmenge \mathcal{P} mit der

Definition 4.1.1.3. Für einen Punkt M wird die Abbildung $\tilde{M}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ mit

$$\tilde{M}(X) := X^M := \begin{cases} M & , \text{ falls } X = M, \\ \{\cdot\}^{-1}(\langle M, X \rangle \cap s_M(X) \setminus \{X\}) & , \text{ falls } X \neq M, \end{cases}$$

als (räumliche) Punktspiegelung an dem Punkt M bezeichnet.

Der Bildpunkt des Punktes X unter der Punktspiegelung an dem Punkt M ist gleich derjenige Punkt, der zum Punkt M den gleichen Abstand wie der Punkt X besitzt und im Falle der Verschiedenheit der Punkte M und X auf derer Verbindungsgeraden liegt. Die Forderung nach der Abstandsgleichheit spiegelt sich durch den Schnitt mit der Sphäre $s_M(X)$ im letztgenannten Fall wider. Zwischen den ebenen Punktspiegelungen einer (nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen) Ebene und den räumlichen Punktspiegelungen besteht innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ der Zusammenhang in

Satz 4.1.1.4. Es sei ein Punkt M in einer Ebene ϵ gegeben. Die Restriktion der räumlichen Punktspiegelung an dem Punkt M auf die Ebene ϵ sowie die ebene Punktspiegelung an dem Punkt M innerhalb der Ebene ϵ sind zueinander identisch.

Beweis: (Eigener Beweis)

Es sei \tilde{M} die räumliche Punktspiegelung an dem Punkt M innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Auf dieser Grundlage zeigen wir, dass die Restriktion der Punktspiegelung \tilde{M} auf die Ebene ϵ zur ebenen Punktspiegelung an dem Punkt M innerhalb der Ebene ϵ identisch ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei ein von dem Punkt M verschiedener

Punkt A der Ebene ϵ gegeben. Nach dem Satz 2.2.2.1 liegt die Verbindungsgerade der beiden Punkte in der Ebene ϵ . Zusammen mit der Definition 4.1.1.3 erhalten wir die Gleichung

$$\tilde{M}(A) = \{\cdot\}^{-1}(\langle (M, A) \cap s_M(A) \rangle \setminus \{A\}) = \{\cdot\}^{-1}(\langle (M, A) \cap (s_M(A) \cap \epsilon) \rangle \setminus \{A\}).$$

Für die Schnittmenge der Sphäre $s_M(A)$ und der Ebene ϵ gilt zugleich mit der Restriktion der Äquivalenzrelation \equiv_d auf die Ebene ϵ die Gleichung

$$s_M(A) \cap \epsilon = \{X \in \epsilon : \{M, A\} \equiv_d \{M, X\}\} = \{X \in \epsilon : \{M, A\} \equiv_{d|_\epsilon} \{M, X\}\} = k_M^\epsilon(A),$$

sodass unter Berücksichtigung der definitorischen Festlegung einer ebenen Punktspiegelung innerhalb der nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ das zu Zeigende gilt; die Restriktion der räumlichen Punktspiegelung \tilde{M} auf die Ebene ϵ und die ebene Punktspiegelung an dem Punkt M innerhalb der Ebene ϵ sind zueinander identisch. \square

Entsprechend dem Satz 4.1.1.4 charakterisieren wir die ebene Punktspiegelung an einem Punkt M in einer (nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen) Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mittels des Symbols $\tilde{M}|_\epsilon$. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eröffnet der Satz 4.1.1.4 basierend auf der Analogie zwischen den definitorischen Festlegungen die Möglichkeit, Eigenschaften der räumlichen Punktspiegelungen auf die in meiner Masterarbeit (2018) im Rahmen der Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene untersuchten ebenen Punktspiegelungen zurückzuführen. Auf dieser Basis untersuchen wir im Weiteren die räumlichen Punktspiegelungen mit den Sätzen 4.1.1.5/4.1.1.7/4.1.1.9 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Nicht zuletzt zeigen wir mit dem Satz 4.1.1.5, dass die räumlichen Punktspiegelungen innerhalb des Raumes Kongruenzabbildungen darstellen, sich damit von den ebenen Punktspiegelungen in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene nicht unterscheiden:

Satz-Masterarbeit 5.1.1.8 (f). (vgl. Lauer 2018, S. 46–49) Jede ebene Punktspiegelung stellt eine Kongruenzabbildung der metrisch-normalen euklidischen Ebene dar.

Satz 4.1.1.5. Jede räumliche Punktspiegelung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist eine Kongruenzabbildung des Raumes.

Beweis: (Eigener Beweis)

Es sei $\tilde{M}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ eine räumliche Punktspiegelung. Wir zeigen zunächst die Bijektivität der Punktspiegelung, bevor wir deren Abstandstreue nachweisen.

1) Die Herleitung der Bijektivität differenzieren wir in die Surjektivität und Injektivität.

Surjektivität: Per definitionem gilt $\tilde{M}(M) = M$; es sei Y ein beliebiger vom Punkt M verschiedener Punkt des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Die Verbindungsgerade der beiden Punkte zerlegt der Punkt M nach dem Satz 3.2.1.6 in die Halbgerade $[M, Y)$ und deren komplementäre Halbgerade. Damit liefert das Lemma 4.1.1.1, dass auf dieser eindeutig bestimmten Verbindungsgeraden zugleich genau ein vom Punkt Y verschiedener Punkt X liegt, dessen Abstand zum Punkt M gleich dem Abstand $d(M, Y)$ ist. Für den Punkt Y folgt hieraus, dass dieser ein Punkt der Sphäre $s_M(X)$ sowie der Verbindungsgeraden $\langle M, X \rangle$ ist; es existiert also ein Punkt X mit $\tilde{M}(X) = Y$.

Injektivität: Es seien zwei zueinander identische Bildpunkte zweier Punkte X_1 und X_2 unter der Punktspiegelung \tilde{M} gegeben; es sei also $Y := \tilde{M}(X_1) = \tilde{M}(X_2)$. Ist der Punkt Y gleich dem Punkt M , so sind die Punkte X_1 und X_2 je zum Punkt M identisch. Anderenfalls impliziert der soeben erfolgte Nachweis der Surjektivität neben der Existenz zugleich die Eindeutigkeit eines Punktes X , dessen Bild unter der Punktspiegelung \tilde{M} gleich dem Punkt Y ist. Die Punkte X_1 und X_2 sind also stets zueinander identisch.

2) Den Nachweis der Abstandstreue führen wir auf die Abstandstreue der ebenen Punktspiegelungen als Kongruenzabbildungen in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene zurück. Es seien zwei verschiedene Punkte X_1 und X_2 gegeben.

Sind die Punkte M , X_1 und X_2 nicht kollinear, so liegen die Punkte nach dem Satz 3.1.1.1 gemeinsam in (genau) einer Ebene ϵ . Nach dem Satz 4.1.1.4 ist die Restriktion der räumlichen Punktspiegelung \tilde{M} auf die nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normale euklidische Ebene ϵ zur ebenen Punktspiegelung $\tilde{M}|_\epsilon$ identisch, womit die Gleichheit der Abstände $d(X_1, X_2)$ und $d(\tilde{M}(X_1), \tilde{M}(X_2))$ gilt. Sind die Punkte M , X_1 und X_2 kollinear, so liefert die definitorische Festlegung der Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes umgekehrt, dass die Punkte gemeinsam in einer Ebene liegen. Schließlich erhalten wir stets, dass die räumliche Punktspiegelung \tilde{M} abstandstreu ist. \square

Korollar 4.1.1.6. Für eine räumliche Punktspiegelung $\tilde{M}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ gilt, dass...

- i) die Punktspiegelung eine Involution ist, d.h. $\tilde{M} \circ \tilde{M} = id_{\mathcal{P}}$,
- ii) und die Punktspiegelung genau einen Fixpunkt besitzt, und zwar den Punkt M .

Beweis: (Eigener Beweis)

Die Aussage ii) gilt per definitionem. Damit gilt bereits die Gleichung $\tilde{M}(\tilde{M}(M)) = M$; es sei X ein vom Punkt M verschiedener Punkt, womit der Bildpunkt des Punktes X unter der Punktspiegelung \tilde{M} ebenfalls vom Punkt M verschieden ist. Dann impliziert der Nachweis der Surjektivität in Satz 4.1.1.5, dass der Punkt X als Urbildpunkt eindeutig durch den Schnitt der Verbindungsgeraden $\langle M, \tilde{M}(X) \rangle$ und der Sphäre $s_M(\tilde{M}(X))$ bestimmt ist. Letztlich gilt auch $\tilde{M}(\tilde{M}(X)) = X$. \square

Satz-Masterarbeit 5.1.1.8 (c). (vgl. Lauer 2018, S. 46–48) Jede ebene Punktspiegelung bildet eine Gerade wiederum auf eine Gerade ab, wobei die Gerade und ihre Bildgerade zueinander parallele Geraden darstellen.

Satz 4.1.1.7. Es sei eine räumliche Punktspiegelung \tilde{M} des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben. Dann ist...

- a) ...das Bild einer Geraden g unter der Punktspiegelung eine zur Geraden g parallele Gerade, es gilt also: $\tilde{M}[g] \in \mathcal{G}$ mit $\tilde{M}[g] \parallel g$.
- b) ...das Bild einer Ebene ϵ unter der Punktspiegelung eine zur Ebene ϵ parallele Ebene, es gilt also: $\tilde{M}[\epsilon] \in \mathcal{E}$ mit $\tilde{M}[\epsilon] \parallel \epsilon$.

Beweis: (Eigener Beweis)

Jede Punktspiegelung ist eine Kongruenzabbildung, sodass mit dem Satz 3.4.4 die zu zeigende Geraden- und Ebenentreue gilt. Es bleibt die Forderung nach der Parallelität der Geraden und Bildgeraden bzw. Ebene und Bildebene nachzuweisen:

- a) Liegt der Punkt M auf der Geraden g , so ist diese Gerade aufgrund des Axioms V_G zu jeder Verbindungsgeraden identisch, die durch den Punkt M und einen weiteren Punkt der Geraden g geht. Per definitionem bildet die Punktspiegelung \tilde{M} die Gerade g also auf eine zur Geraden g parallele, sogar identische Gerade ab.

Liegt der Punkt M nicht auf der Geraden g , so liegen die Gerade g und der Punkt M nach dem Satz 3.1.1.4 in (genau) einer Ebene η gemeinsam. Nach dem Satz 4.1.1.4 ist die Restriktion der räumlichen Punktspiegelung \tilde{M} auf diese (metrisch-normale euklidische) Ebene gleich der ebenen Punktspiegelung $\tilde{M}|_{\eta}$, womit die Gerade g und ihr Bild unter der Punktspiegelung \tilde{M} zueinander parallele Geraden sind. \square

b) Liegt der Punkt M in der Ebene ϵ , so erhalten wir aufgrund des Satzes 4.1.1.4, dass die Ebene ϵ zu ihrer Bildebene unter der Punktspiegelung \tilde{M} parallel, sogar identisch ist.

Liegt der Punkt M nicht in der Ebene ϵ , so schneidet jede durch den Punkt M und einen Punkt der Ebene ϵ gehende Verbindungsgerade die Ebene ϵ aufgrund des Satzes 2.2.2.1 eben in genau diesem Punkt. Per definitionem bildet die Punktspiegelung \tilde{M} also keinen Punkt der Ebene ϵ derart ab, dass der Bildpunkt wiederum in der Ebene ϵ liegt. Folglich besitzen die Ebene ϵ und ihre Bildebene unter der Punktspiegelung \tilde{M} keinen gemeinsamen Punkt, die beiden Ebenen sind also zueinander parallel. \square

In Bezug zum soeben nachgewiesenen Satz 4.1.1.7 liefert das folgende Korollar 4.1.1.8, dass die Gerade unter der räumlichen Punktspiegelung \tilde{M} zu ihrer parallelen Bildgeraden genau dann identisch ist, wenn der Punkt M auf der Urbildgerade liegt, und zum anderen, dass die Ebene unter der räumlichen Punktspiegelung \tilde{M} zu ihrer parallelen Bildebene genau dann identisch ist, wenn der Punkt M auf der Urbildebene liegt.

Korollar 4.1.1.8. Die Menge aller Fixgeraden sowie die Menge aller Fixebenen einer räumlichen Punktspiegelung \tilde{M} ist gleich der Menge aller durch den Punkt M gehenden Geraden bzw. Ebenen.

Beweis: (Eigener Beweis; vgl. zusätzlich Schröder 2014a, S. 32)

Der Nachweis der Aussage b) des Satzes 4.1.1.7 impliziert, dass eine Ebene genau dann eine Fixebene der Punktspiegelung \tilde{M} ist, wenn die Ebene durch den Punkt M geht.

Der Nachweis der Aussage a) zeigt eingangs, dass eine durch den Punkt M gehende Gerade, eine Fixgerade der Punktspiegelung \tilde{M} ist; die definitorische Festlegung der Punktspiegelung liefert mit dem Axiom V_G umgekehrt, dass eine Gerade durch den Punkt M geht, wenn die Gerade eine Fixgerade der Punktspiegelung \tilde{M} ist. \square

Satz-Masterarbeit 5.1.1.11. / Korollar-Masterarbeit 5.1.1.12. (vgl. Lauer 2018, S. 51f.) Für zwei Punkte A und B existiert genau ein Punkt M so, dass der Punkt A unter der ebenen Punktspiegelung an dem Punkt M auf den Punkt B abgebildet wird.

Der Punkt M ist gleich dem Punkt A , wenn die Punkte A und B identisch sind, anderenfalls ist der Punkt M gleich dem Schnittpunkt der Geraden $\langle A, B \rangle$ und $m_{A,B}$.

Statt einer Geraden stellt die Menge $m_{A,B}$ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine Ebene dar. Die Existenz eines Schnittpunktes der Ebene $m_{A,B}$ und der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ gilt bereits mit dem Satz 2.2.2.2. Damit ließe sich in Bezug zu der zuvor aufgegriffenen Aussage innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die entsprechende Aussage für die räumlichen Punktspiegelungen aus derer definitorischen Festlegung zusammen mit der definitorischen Festlegung der Ebenen ableiten (vgl. zusätzlich Schröder 2014a, S. 34). Wir folgen allerdings abschließend weiter der Struktur des vorliegenden Kapitels und beweisen mit Hilfe des Satzes 4.1.1.4 (wenn auch in eine etwas längere Argumentationskette eingebunden) innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ den

Satz 4.1.1.9. Für zwei Punkte A und B existiert genau ein Punkt M so, dass der Punkt A unter der räumlichen Punktspiegelung \tilde{M} auf den Punkt B abgebildet wird.

Der Punkt M ist gleich dem Punkt A , wenn die Punkte A und B identisch sind, anderenfalls ist der Punkt M gleich dem Schnittpunkt der Geraden $\langle A, B \rangle$ und der Ebene $m_{A,B}$.

Beweis: (Eigener Beweis)

Sind die Punkte A und B zueinander identisch, so existiert mit dem Punkt A nach dem Korollar 4.1.1.6 genau ein Punkt, an dem der Punkt A auf den Punkt B gespiegelt wird.

Die Punkte A und B seien im Weiteren verschieden. Wir zeigen zunächst die Existenz eines zum Schnittpunkt der Geraden $\langle A, B \rangle$ und der Ebene $m_{A,B}$ identischen Punktes, an dem der Punkt A auf den Punkt B gespiegelt wird, und letztlich, dass kein weiterer Punkt existiert, unter dessen Punktspiegelung der Punkt A auf den Punkt B abgebildet wird:

Existenz: Die Verbindungsgerade der Punkte A und B ist innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen identisch. Die Verbindungsgerade liegt also in einer Ebene ϵ des Raumes. In der (metrisch-normalen euklidischen) Ebene ϵ existiert genau ein Punkt M , sodass die ebene

Punktspiegelung $\tilde{M}|_\epsilon$ den Punkt A auf den Punkt B abbildet, und zwar der Schnittpunkt der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ und der Geraden $m_{A,B}|_\epsilon$ innerhalb der Ebene ϵ . Der Punkt M ist aufgrund des Satzes 2.2.2.2 zum Schnittpunkt der Geraden $\langle A, B \rangle$ und der Ebene $m_{A,B}$ identisch; und nach dem Satz 4.1.1.4 gilt $\tilde{M}(A) = B$.

Eindeutigkeit: Es seien M_1 und M_2 zwei Punkte, sodass $\tilde{M}_1(A) = B$ und $\tilde{M}_2(A) = B$ gilt. Nach der Definition 4.1.1.3 einer Punktspiegelung liegen die beiden Punkte also auf der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und somit auch in der Ebene ϵ . Zusammen mit dem Satz 4.1.1.4 erhalten wir, dass der Punkt M_1 und M_2 je ein Punkt ist, sodass die ebene Punktspiegelung $\tilde{M}_1|_\epsilon$ und $\tilde{M}_2|_\epsilon$ den Punkt A auf den Punkt B abbildet. In der metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ ist ein solcher Punkt jedoch eindeutig bestimmt, womit die Punkte M_1 und M_2 zueinander identisch sind. \square

4.1.2 Translationen

Translationen in Bezug zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene lassen sich als die Verkettungen zweier Punktspiegelungen charakterisieren (vgl. Lauer 2018, S. 53). Hierauf basierend zeigt sich, dass Translationen (ebene) Kongruenzabbildungen darstellen (vgl. Lauer 2018, S. 53). Die Darlegung der Translationen als spezielle (räumliche) Kongruenzabbildungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_\equiv)$ orientieren wir im Weiteren an dieser Vorgehensweise. Grundsätzlich bildet meine Masterarbeit (2018, S. 42–46 u. 53 f.) die Grundlage. Zusätzlich ist Schröders (2014a, S. 30 f. u. 35–38; 1985, S. 23 f. u. 26–29) Arbeit und deren raumgeometrische Erweiterung in Schröder (2014b, S. 17–20; 1985, S. 215–217) zu nennen.

Im Allgemeinen unterscheiden sich die räumlichen Translationen definatorisch nicht von den ebenen Translationen einer metrisch-normalen euklidischen Ebene (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 44). Es gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_\equiv)$ die

Definition 4.1.2.1. Eine Bijektion von der Punktmenge \mathcal{P} auf die Punktmenge \mathcal{P} wird als (räumliche) Translation bezeichnet, wenn unter der Abbildung jeder Punkt auf sich selbst oder jede Gerade auf eine zu sich parallele Gerade und dabei kein Punkt auf sich selbst abgebildet wird.

Beachtet sei, dass innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Parallelität zweier Geraden, deren Komplanarität impliziert (siehe Definition 3.1.2.1). Ein Aspekt, der in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene nicht zur Disposition steht. Die definitorische Festlegung der Translationen betrachten wir im Einzelnen näher. Es sei eine Translation $\tau: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ gegeben. Für eine Gerade g gilt per definitionem

$$\tau[g] \in \mathcal{G} \quad \text{mit} \quad \tau[g] \parallel g.$$

Für zwei voneinander verschiedene Punkte A und B erhalten wir zusammen mit dem Verbindungsaxiom-Geraden zugleich

$$\tau[\langle A, B \rangle] = \langle \tau(A), \tau(B) \rangle \quad \text{mit} \quad \langle \tau(A), \tau(B) \rangle \parallel \langle A, B \rangle.$$

Die definitorische Festlegung der Translationen liefert aufgrund der Bijektivität weiter, dass die Umkehrabbildung einer Translation wiederum eine Translation darstellt. Die identische Abbildung $id_{\mathcal{P}}$ bezeichnet Schröder (2014a, S. 35) als „Grenzfall“ unter den Translationen. Es gilt entsprechend der definitorischen Festlegung der Translationen, dass jede nicht fixpunktfreie Translation stets gleich der identischen Abbildung ist. Auch die fixpunktfreien Translationen, so zeigen wir im Weiteren mit dem Satz 4.1.2.2, besitzen Fixgeraden. Allerdings ist nicht jede Gerade eine Fixgerade, sodass in diesem Fall die Gerade und ihre parallele Bildgerade zueinander disjunkt sind. Ein Beispiel: Die Translation τ sei fixpunktfrei. Sind g und h zwei sich in einem Punkt X schneidende Geraden, so erhalten wir zusammen mit der Bijektivität der Translation τ die Ungleichung

$$X \neq \tau(X) = \tau[g \cap h] = \tau[g] \cap \tau[h],$$

also dass die Bildgeraden $\tau[g]$ und $\tau[h]$ nicht beide durch den Punkt X gehen, mindestens eine der beiden Geraden g und h keine Fixgerade der fixpunktfreien Translation τ ist. Umgekehrt impliziert das Beispiel, dass unter einer fixpunktfreien Translation (allgemein unter einer bijektiven, fixpunktfreien Abbildung) zwei Fixgeraden entweder disjunkt oder identisch sind; anderenfalls bestünde ein Widerspruch zur Fixpunktfreiheit der Translation.

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zeigen wir nun im Rahmen des Satzes 4.1.2.2, dass unter einer fixpunktfreien räumlichen Translation überhaupt die Existenz von Fixgeraden gegeben ist. Allgemein unterscheidet sich die Aussage des Satzes (samt der jeweiligen Folgerungen) im Vergleich zu den ebenen Translationen einer metrisch-normalen euklidischen Ebene nicht (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 44–46).

Satz 4.1.2.2. Es sei eine fixpunktfreie räumliche Translation τ gegeben ($\tau \neq id_{\mathcal{P}}$). Dann gilt:

- a) Die Verbindungsgerade durch einen Punkt X und dessen Bildpunkt $\tau(X)$ stellt eine Fixgerade der Translation τ dar: $\tau[\langle X, \tau(X) \rangle] = \langle X, \tau(X) \rangle$.
- b) Zwei Fixgeraden der Translation sind zueinander parallel; und eine Gerade ist eine Fixgerade, wenn sie zu einer Fixgeraden der Translation parallel ist.

Beweis: (a: vgl. Schröder 1985, S. 215 f.; b: Eigener Beweis;

Beweisansatz b: vgl. Schröder 1985, S. 215 f.; Schröder 2014b, S. 18)

a) Nach Voraussetzung ist die Translation τ fixpunktfrei, sodass grundsätzlich die Verbindungsgerade $\langle X, \tau(X) \rangle$ existiert. Die Translation τ bildet entsprechend ihrer definitorischen Festlegung die Verbindungsgerade auf eine zu dieser Geraden parallele Verbindungsgerade ab, und zwar gilt die Beziehung $\langle \tau(X), \tau(\tau(X)) \rangle \parallel \langle X, \tau(X) \rangle$. Die parallelen Verbindungsgeraden gehen je durch den Bildpunkt des Punktes X , sodass sie zueinander identisch sind. Folglich stellt die Gerade $\langle X, \tau(X) \rangle$ eine Fixgerade der Translation τ dar. \square

b) Mit der soeben bewiesenen Aussage a) ist die Menge aller Fixgeraden aufgrund des Satzes 3.1.1.2 nicht leer. Es sei g eine Fixgerade der Translation τ . Wir weisen nach, dass jede Fixgerade der Translation τ zur Fixgeraden g parallel ist, und zum anderen damit, dass jede zur Geraden g parallele Gerade eine Fixgerade der Translation τ darstellt:

i. Es sei h eine Fixgerade der Translation τ ; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Gerade h zur Geraden g verschieden. Als zueinander verschiedene Fixgeraden der fixpunktfreien Translation τ sind die beiden Geraden zueinander disjunkt (siehe Erläuterungen zur Definition 4.1.2.1). Folglich bleibt zum Nachweis ihrer Parallelität zu zeigen, dass die Geraden g und h komplanar sind.

Hierzu betrachten wir einen Punkt A auf der Geraden g und einen Punkt B auf der Geraden h . Die Verbindungsgerade der beiden Punkte und die Verbindungsgerade ihrer Bildpunkte $\tau(A)$ und $\tau(B)$ sind aufgrund der definitorischen Festlegung einer Translation zueinander parallel. Folglich liegen die Punkte A und B gemeinsam mit ihren Bildpunkten $\tau(A)$ und $\tau(B)$ in einer Ebene. Mit dem Satz 2.2.2.1 erhalten wir, dass auch die Verbindungsgeraden $\langle A, \tau(A) \rangle$ und $\langle B, \tau(B) \rangle$ komplanar sind. Dabei ist die Verbindungsgerade $\langle A, \tau(A) \rangle$ nach der bereits bewiesenen Aussage a) eine Fixgerade der Translation τ , wobei sie ebenso wie die Fixgerade g durch den Punkt A geht. Als zwei durch einen gemeinsamen Punkt

gehende Fixgeraden der fixpunktfreien Translation τ sind die Geraden g und $\langle A, \tau(A) \rangle$ identisch (siehe Erläuterungen zur Definition 4.1.2.1). Gleiches erhalten wir für die Geraden h und $\langle B, \tau(B) \rangle$, sodass zusammenfassend die Komplanarität der Geraden g und h gilt.

ii. Es sei k eine zur Geraden g parallele Gerade; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Gerade k zur Geraden g disjunkt. Nach der soeben bewiesenen Aussage a) ist jede Verbindungsgerade, die durch einen auf der Geraden k liegenden Punkt X und dessen Bildpunkt $\tau(X)$ geht, eine Fixgerade der Translation τ . Hier liefert der soeben dargelegte erste Beweisteil, dass eine solche Verbindungsgerade ebenfalls zur Fixgeraden g parallel ist. Zusammenfassend erhalten wir mit dem Parallelenaxiom, dass die Gerade k eine Fixgerade der Translation τ darstellt. \square

Korollar 4.1.2.3. Die Menge aller Fixgeraden unter einer fixpunktfreien Translation τ ist ungleich der leeren Menge, identisch zur Menge $\{\langle A, B \rangle \in \mathcal{G} : A, B \in \mathcal{P} \text{ mit } \tau(A) = B\}$.

Beweis: (Eigener Beweis; vgl. zusätzlich Schröder 1985, S. 215 f.)

Nach dem Satz 4.1.2.2a) ist jede (Verbindungs-)Gerade, die durch einen Punkt und dessen Bildpunkt unter der Translation τ geht, eine Fixgerade der Translation. Hiermit ist zugleich aufgrund des Satzes 3.1.1.2 die Menge aller Fixgeraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes nicht leer. Letztlich liefert für eine Fixgerade g der Translation τ der Beweisteil i. der Aussage b) des Satzes 4.1.2.2 implizit, dass die Fixgerade zur Verbindungsgeraden $\langle A, \tau(A) \rangle$ für einen auf der Geraden g liegenden Punkt A identisch ist. \square

Korollar 4.1.2.4. Es sei eine fixpunktfreie Translation τ gegeben. Für eine Fixgerade $\langle A, \tau(A) \rangle$ der Translation und ein nicht auf dieser Geraden liegender Punkt B beschreibt das Quadrupel $(\tau(A), A, B, \tau(B))$ ein Parallelogramm.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Schröder 1985, S. 215 f.)

Der Satz 4.1.2.2 liefert umgehend die Parallelität der beiden Verbindungsgeraden $\langle A, \tau(A) \rangle$ und $\langle B, \tau(B) \rangle$. Ferner gilt entsprechend der Definition einer Translation die Parallelität der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und $\langle \tau(A), \tau(B) \rangle$. Das Quadrupel $(\tau(A), A, B, \tau(B))$ beschreibt mit den geltenden Parallelitätsbeziehungen aufgrund der Nicht-Kollinearität der Punkte A, B und $\tau(A)$ ein Viereck und hiermit letztlich ein Parallelogramm. \square

Jedes Parallelogramm innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ beschreibt als ebene-geometrische Figur ein Parallelogramm einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene (siehe hierzu Kapitel 3.2.3). Dabei ist die jeweilige Ebene aufgrund des Satzes 3.1.1.1 bereits durch drei Eckpunkte des Vierecks innerhalb des Raumes eindeutig bestimmt. Folglich gilt die Aussage des Parallelogrammergänzungssatzes, der entsprechend meiner Masterarbeit (2018, S. 32 f.) basierend auf der Arbeit Schröders (2014a, S. 30) in einer affinen und somit in jeder metrisch-normalen euklidischen Ebene gilt (siehe hierzu Kapitel 2.2), gleichermaßen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$: Für drei nicht kollineare Punkte A , B und C existiert genau ein Punkt D derart, dass das Quadrupel (A, B, C, D) ein Parallelogramm beschreibt.

Diesen Zusammenhang nutzen wir zusammen mit dem Korollar 4.1.2.4 im Weiteren zum Nachweis des Lemmas 4.1.2.5. Mit Hilfe des Lemmas zeigen wir in Satz 4.1.2.6, dass jede räumliche Translation eine Kongruenzabbildung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ darstellt. Die Vorgehensweise im Rahmen des vorliegenden Kapitels orientiert sich wie eingangs beschrieben an der entsprechenden Vorgehensweise in der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene. In Satz 4.1.2.6 zeigen wir, dass die Menge aller Translationen zur Menge aller Verkettungen von zwei Punktspiegelungen identisch ist, woraus basierend auf der Abgeschlossenheit der Menge aller Kongruenzabbildungen bezüglich der Relation der Verkettung von Funktion das zu Zeigende mit der Eigenschaft der Punktspiegelungen als Kongruenzabbildungen folgt.

Lemma 4.1.2.5. Es seien zwei räumliche Translationen τ_1 und τ_2 gegeben. Ist das Bild eines Punktes unter den Translationen τ_1 und τ_2 identisch, so sind bereits beide Translationen zueinander identisch, d.h. $\tau_1(X) = \tau_2(X)$ für jedes $X \in \mathcal{P}$.

Beweis: (vgl. Lauer 2018, S. 44–46; vgl. Schröder 2014b, S. 19 f.)

Nach Voraussetzung existiert ein Punkt A mit $\tau_1(A) = \tau_2(A)$. Ist eine der beiden Translationen gleich der identischen Abbildung $id_{\mathcal{P}}$, so ist entsprechend der Voraussetzung auch die übrige Translation nicht fixpunktfrei und somit gleich der identischen Abbildung. Im Weiteren seien die Translationen τ_1 und τ_2 jeweils fixpunktfrei. Dann ist die Verbindungsgerade durch den Punkt A und dessen Bildpunkt $\tau_1(A)$ zur Verbindungsgerade durch den Punkt A und dessen Bildpunkt $\tau_2(A)$ identisch; es sei $g := \langle A, \tau_1(A) \rangle = \langle A, \tau_2(A) \rangle$. Nach dem Satz 4.1.2.2a) ist die Gerade g eine Fixgerade der Translation τ_1 und τ_2 . Für die fix-

punktfreien Translationen τ_1 und τ_2 zeigen wir im Folgenden zum einen, dass jeder nicht auf der Fixgeraden g liegende Punkt unter den Translationen den gleichen Bildpunkt besitzt, und zum anderen, dass gleiches für jeden auf der Fixgeraden g liegenden Punkt gilt:

- i. Es sei $X \notin g$. Dann beschreibt das Quadrupel $(\tau_1(A), A, X, \tau_1(X))$ und $(\tau_2(A), A, X, \tau_2(X))$ nach dem Korollar 4.1.2.4 ein Parallelogramm. Mit der Gleichheit der Bildpunkte $\tau_1(A)$ und $\tau_2(A)$ liefert der Parallelogrammergänzungssatz (siehe hierzu Erläuterung nach dem Korollar 4.1.2.4), dass die Bildpunkte $\tau_1(X)$ und $\tau_2(X)$ ebenfalls zueinander identisch sind.
- ii. Es sei $X \in g$. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes existiert mit dem Satz 3.1.1.2 aufgrund der definatorischen Festlegung einer Geraden ein nicht auf der Geraden g liegender Punkt B . Damit ist das Bild des Punktes B nach soeben erfolgten ersten Beweisteil unter den Translationen τ_1 und τ_2 identisch. Folglich sind auch die Verbindungsgeraden $\langle B, \tau_1(B) \rangle$ und $\langle B, \tau_2(B) \rangle$ zueinander identisch. Zusammen mit dem Satz 4.1.2.2a) ist hiermit eine Fixgerade der Translation τ_1 und τ_2 bestimmt. Diese Fixgerade ist zwar nach dem Satz 4.1.2.2b) zur Fixgeraden g parallel, aber nicht identisch, da der Punkt B nicht auf der Geraden g liegt. Folglich liegt auch der Punkt X nicht auf der Fixgeraden $\langle B, \tau_1(B) \rangle$ bzw. $\langle B, \tau_2(B) \rangle$. Analog zum soeben erfolgten ersten Beweisteil erhalten wir, dass die Quadrupel $(\tau_1(B), B, X, \tau_1(X))$ und $(\tau_2(B), B, X, \tau_2(X))$ je ein Parallelogramm beschreiben, und zusammen mit dem Parallelogrammergänzungssatz, dass die Bildpunkte $\tau_1(X)$ und $\tau_2(X)$ zueinander identisch sind. \square

Satz 4.1.2.6. Jede räumliche Translation des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist eine Kongruenzabbildung des Raumes.

Beweis: (vgl. Lauer 2018, S. 53; Schröder 2014a, S. 36 f.)

In einem ersten Beweisteil zeigen wir, dass die Verkettung zweier Punktspiegelungen eine Translation darstellt. Damit zeigen wir in einem zweiten Beweisteil, dass umgekehrt jede Translation eine Verkettung zweier Punktspiegelungen ist. Schließlich gilt basierend auf dem Satz 3.4.3 mit der Eigenschaft der Punktspiegelungen als Kongruenzabbildungen zusammenfassend das zu Zeigende:

Teil I: Es sei die Verkettung zweier Punktspiegelungen \tilde{A} und \tilde{B} gegeben. Jede der Punktspiegelungen ist nach dem Satz 4.1.1.5 eine Kongruenzabbildung, sodass die Verkettung der beiden Punktspiegelungen eine bijektive Selbstabbildung der Punktmenge \mathcal{P} innerhalb des

metrisch-normalen euklidischen Raumes darstellt. Weiter liefert der Satz 4.1.1.7a) mit der Transitivität der Parallelität auf der Menge aller Geraden, dass die Verkettung der beiden Punktspiegelungen jede Gerade auf eine zu sich parallele Gerade abbildet. Zum Nachweis, dass die Verkettung der Punktspiegelungen \tilde{A} und \tilde{B} eine Translation darstellt, bleibt zu zeigen, dass die Verkettung fixpunktfrei oder gleich der identischen Abbildung ist. Unter der Voraussetzung, dass die Verkettung einen Fixpunkt besitzt, zeigen wir hierzu die Gleichheit der Verkettung zur identischen Abbildung $id_{\mathcal{P}}$.

Es sei also ein Punkt X mit $\tilde{A} \circ \tilde{B}(X) = X$ gegeben. Dann erhalten wir mit der Eigenschaft der Punktspiegelung \tilde{A} als Involution (siehe hierzu Korollar 4.1.1.6), dass die beiden Bildpunkte $\tilde{A}(X)$ und $\tilde{B}(X)$ zueinander identisch sind. Folglich sind nach dem Satz 4.1.1.9 ebenfalls die zugrundeliegenden Punkte A und B zueinander identisch. Für die Verkettung $\tilde{A} \circ \tilde{B}$ der Punktspiegelungen \tilde{A} und \tilde{B} gilt also, dass sie zur Verkettung $\tilde{A} \circ \tilde{A}$ bzw. $\tilde{B} \circ \tilde{B}$ identisch und somit nach dem Korollar 4.1.1.6 gleich der identischen Abbildung $id_{\mathcal{P}}$ ist.

Teil II: Es sei eine Translation τ gegeben. Zum Nachweis, dass die Translation zur Verkettung zweier Punktspiegelungen identisch ist, betrachten wir weiter einen Punkt A innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Für den Punkt A und dessen Bildpunkt unter der Translation τ existiert nach dem Satz 4.1.1.9 (genau) ein Punkt M derart, dass die Punktspiegelung \tilde{M} den Punkt A auf den Punkt $\tau(A)$ abbildet. Andererseits bildet die Punktspiegelung \tilde{A} den Punkt A (als einzigen Punkt) auf sich selbst ab (siehe Korollar 4.1.1.6). Zusammenfassend erhalten wir, dass der Punkt $\tau(A)$ auch unter der Verkettung $\tilde{M} \circ \tilde{A}$ der beiden Punktspiegelungen \tilde{M} und \tilde{A} ein Bildpunkt des Punktes A darstellt; es gilt also die Gleichung $\tilde{M} \circ \tilde{A}(A) = \tau(A)$. Dabei ist die Verkettung nach dem soeben gezeigten ersten Beweisteil eine Translation, womit das Lemma 4.1.2.5 umgehend liefert, dass die Translation τ zu dieser Verkettung der beiden Punktspiegelungen \tilde{M} und \tilde{A} identisch ist. \square

Korollar 4.1.2.7. Die Menge aller Translationen ist identisch zur Menge aller Verkettungen von zwei Punktspiegelungen.

Beweis: (vgl. Lauer 2018, S. 53; Schröder 2014a, S. 36f.)

Die Aussage gilt zusammenfassend mit dem ersten und zweiten Beweisteil des soeben nachgewiesenen Satzes 4.1.2.6. \square

Das zum Beweis des Satzes 4.1.2.6 verwendete Lemma 4.1.2.5 charakterisiert für sich, dass höchstens eine räumliche Translation innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ existieren kann, die einen Punkt A auf einen Punkt B abbildet. Mit dem Satz 4.1.2.8 erweitern wir diese Aussage im Folgenden um die Existenz. Im Vergleich zu den ebenen Translationen einer metrisch-normalen euklidischen Ebene unterscheiden sich die räumlichen Translationen damit nicht (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 53 f.). Zudem unterscheiden sich die Translationen hier nicht von den Punktspiegelungen (siehe hierzu Kapitel 4.1.1).

Satz 4.1.2.8. Für zwei Punkte A und B existiert genau eine räumliche Translation τ so, dass der Punkt A auf den Punkt B abgebildet wird.

Dabei ist die Translation τ zur Verkettung $\tilde{M} \circ \tilde{A}$ der Punktspiegelungen \tilde{M} und \tilde{A} identisch, wobei \tilde{M} diejenige Punktspiegelung ist, die den Punkt A auf den Punkt B abbildet.

Beweis: (vgl. Schröder 2014a, S. 37)

Nach dem Lemma 4.1.2.5 ist eine Translation bereits eindeutig durch einen Punkt und dessen Bildpunkt unter der Translation bestimmt. Die Punktspiegelung \tilde{M} , die den Punkt A auf den Punkt B abbildet, existiert nach dem Satz 4.1.1.9 eindeutig. Aufgrund des Korollars 4.1.2.7 bleibt letztlich zu zeigen, dass die Verkettung $\tilde{M} \circ \tilde{A}$ der Punktspiegelungen \tilde{M} und \tilde{A} den Punkt A ebenfalls auf den Punkt B abbildet. Dies folgt mit der Existenz der Punktspiegelung \tilde{M} umgehend daraus, dass die Punktspiegelung \tilde{A} den Punkt A (als einzigen Punkt) auf sich selbst abbildet (siehe Korollar 4.1.1.6). \square

Wir richten den Blick zum Abschluss des Kapitels auf dessen Beginn und stellen die Frage, ob sich innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Eigenschaften der räumlichen Translationen bezüglich des Abbildens von Geraden auf die Ebenen übertragen lassen. Im Einzelnen gehen wir der Frage nach, ob eine Ebene unter einer räumlichen Translation wiederum auf eine parallele Ebene abgebildet wird und ob die Aussagen des Satzes 4.1.2.2 für eine fixpunktfreie räumliche Translation auch bezüglich der Ebenen des Raumes gelten. Anlehnend an Schröder (2014b, S. 18) zeigt sich diesbezüglich innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit dem Satz 4.1.2.9, dass sich mit Ausnahme des Satzes 4.1.2.2b) die Eigenschaften übertragen lassen.

Satz 4.1.2.9. Es sei eine räumliche Translation τ gegeben. Dann ist das Bild einer Ebene ϵ unter der Translation eine zur Ebene ϵ parallele Ebene; es gilt: $\tau[\epsilon] \in \mathcal{E}$ mit $\tau[\epsilon] \parallel \epsilon$.

Beweis: (Eigener Beweis)

Jede Translation ist nach dem Satz 4.1.2.6 eine Kongruenzabbildung, sodass die zu zeigende Ebenentreue mit dem Satz 3.4.4 gilt. Es bleibt zu zeigen, dass die Bildebene der Ebene ϵ unter der Translation τ zur Ebene ϵ parallel ist. Nach dem Korollar 4.1.2.7 ist die Translation τ gleich der Verkettung zweier Punktspiegelungen. Für die Verkettung zweier Punktspiegelungen liefert der Satz 4.1.1.7b) mit der Transitivität der Parallelität auf der Menge aller Ebenen wiederum, dass die Verkettung die Ebene ϵ auf eine zu sich parallele Ebene abbildet. \square

Korollar 4.1.2.10. Es sei eine fixpunktfreie räumliche Translation τ gegeben ($\tau \neq id_{\mathcal{P}}$). Liegt ein Punkt X und dessen Bildpunkt $\tau(X)$ gemeinsam in einer Ebene ϵ , so stellt die Ebene ϵ eine Fixebene der Translation τ dar.

Beweis: (vgl. Schröder 2014b, S. 18)

Nach dem soeben bewiesenen Satz 4.1.2.9 sind die Ebene ϵ und ihr Bild unter der Translation τ zueinander parallele Ebenen. Mit der geltenden Voraussetzung liegt der Bildpunkt $\tau(X)$ sowohl in der Ebene ϵ als auch in derer parallelen Bildebene, sodass die beiden Ebenen zueinander identisch sind, die Ebene ϵ also eine Fixebene der Translation τ ist. \square

Das soeben bewiesene Korollar zeigt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, dass die Aussage a) des Satzes 4.1.2.2 für eine fixpunktfreie räumliche Translation auch bezüglich der Ebenen des Raumes gilt. Weiter zeigt der Satz 4.1.2.9, dass das Bild einer Ebene unter einer räumlichen Translation wiederum eine Ebene ist, wobei Ebene und Bildebene zueinander parallel sind, analog wie es für eine Gerade des Raumes gilt. Die Aussage b) des Satzes 4.1.2.2 überträgt sich allerdings nicht entsprechend: Es sei eine fixpunktfreie räumliche Translation τ gegeben. Weiter betrachten wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes eine mit dem Korollar 4.1.2.3 existierende Fixgerade $\langle X, \tau(X) \rangle$ der Translation. Mit der definatorischen Festlegung einer Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes ist diese Fixgerade $\langle X, \tau(X) \rangle$ zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen identisch. Folglich sind die beiden Ebenen nicht parallel, jedoch nach dem Korollar 4.1.2.10 zugleich zwei verschiedene Fixebenen der Translation τ .

4.2 Parallele und Orthogonale Geraden/Ebenen

Eine grundlegende Darlegung der Parallelität und Orthogonalität als Lagebeziehung zwischen Geraden und/oder Ebenen erfolgte bereits mit der Diskussion um die „Grundbegriffe“ (3) eines metrisch-normalen euklidischen Raumes (siehe Kapitel 3.1.2). Daran anknüpfend erfolgt mit dem vorliegenden Kapitel eine nähere Untersuchung der beiden Lagebeziehungen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, unter dem hier übergeordneten Leitgedanken der „Räumlichen Kontextualisierung“ (4).

4.2.1 Parallele Geraden/Ebenen

Die Parallelität innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist analog zur Parallelität als Lagebeziehung zwischen Geraden in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene sowohl auf der Menge aller Geraden als auch auf der Menge aller Ebenen eine Äquivalenzrelation (siehe Kapitel 3.1.2). Offen ist die Frage, ob diese Analogie im übertragenen Sinne ebenfalls bezüglich der Parallelität als Lagebeziehung zwischen einer Gerade und Ebene gilt. Eine Antwort innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ liefert das vorliegende Kapitel.

Bezüglich des Parallelenaxioms gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ analog zur Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene auch die Verallgemeinerung des Axioms (siehe Kapitel 3.1.2). Im vorliegenden Kapitel gehen wir der Frage nach, ob das (verallgemeinerte) Parallelenaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf die Parallelität als Lagebeziehung zwischen einer Geraden und Ebene sowie zwischen zwei Ebenen übertragen werden kann.

Parallelität zwischen Gerade und Ebene

Als Lagebeziehung zwischen einer Gerade und Ebene ist die Parallelität per definitionem im übertragenen Sinne symmetrisch (siehe hierzu Definition 3.1.2.3). Eine Transitivität im übertragenen Sinne liegt jedoch nicht vor (womit auch im übertragenen Sinne nicht von einer Äquivalenzrelation zu sprechen ist), wenngleich sich entsprechende Aussagen zur Transitivität ergeben. Eine dahingehende Diskussion eröffnen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ im Weiteren mit dem Satz 4.2.1.1.

Satz 4.2.1.1. (vgl. Schröder 2014b, S. 16) Es seien zwei Geraden g und h sowie zwei Ebenen ϵ und η gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- a) Ist die Gerade h zur Geraden g und zur Ebene ϵ parallel, so sind auch die Gerade g und die Ebene ϵ zueinander parallel; mathematisch-formal: $g \parallel h \wedge h \parallel \epsilon \Rightarrow g \parallel \epsilon$.
- b) Ist die Ebene ϵ zur Geraden g und zur Ebene η parallel, so sind auch die Gerade g und die Ebene η zueinander parallel; mathematisch-formal: $g \parallel \epsilon \wedge \epsilon \parallel \eta \Rightarrow g \parallel \eta$.

Beweis: (a: Eigener Beweis; b: vgl. Schröder 2014b, S. 16)

a) Sind die Geraden g und h zueinander identisch, so ergibt sich die zu zeigende Parallelität umgehend. Wir nehmen im Weiteren an, dass die beiden Geraden disjunkt und komplanar in einer Ebene δ sind, und differenzieren hinsichtlich der Parallelität der Geraden h und der Ebene ϵ , ob die Gerade in der Ebene liegt oder zur Ebene disjunkt ist.

Es gelte $h \cap \epsilon = \emptyset$: Dann sind die Ebenen ϵ und δ entweder disjunkt oder sie besitzen eine zur Geraden h disjunkt parallele Schnittgerade. Sind die beiden Ebenen disjunkt, so folgt die Parallelität der Gerade g und der Ebene ϵ umgehend daraus, dass die Gerade g in der Ebene δ liegt.

Besitzen die Ebenen ϵ und δ eine zur Geraden h parallele Schnittgerade, so berücksichtigen wir bezüglich der Geraden g neben ihrer Lage, zusätzlich ihre Disjunktheit zur Geraden h in der Ebene δ . Dann liefert die Transitivität der Parallelität auf der Menge aller Geraden (siehe Satz 3.1.2.7), dass die Gerade g zu dieser Schnittgeraden innerhalb der Ebene δ parallel ist. Folglich liegt die Gerade g entweder in der Ebene ϵ oder sie ist zur Ebene ϵ disjunkt; es gilt also die Parallelität der Geraden g und der Ebene ϵ .

Es gelte $h \subseteq \epsilon$: In diesem Fall sind die Ebenen ϵ und δ entweder identisch oder sie besitzen die Gerade h als Schnittgerade.

Sind die Ebenen ϵ und δ identisch, so folgt die Parallelität der Gerade g und der Ebene ϵ umgehend daraus, dass die Gerade g in der Ebene δ liegt. Berücksichtigen wir bezüglich der Geraden g neben ihrer Lage, zusätzlich ihre Disjunktheit zur Geraden h in der Ebene δ , so erhalten wir die Parallelität der Geraden g und der Ebene ϵ auch, wenn sich die Ebenen ϵ und δ in der Geraden h schneiden. □

b) Wir führen den Beweis auf die bereits bewiesene Aussage a) zurück.

Aufgrund der Parallelität der Ebene ϵ und der Geraden g liefert der Satz 3.1.2.6, dass jede Parallele zur Geraden g , die durch einen Punkt der Ebene ϵ geht, selbst in der Ebene ϵ liegt. Hieraus folgt mit der Parallelität der Ebenen ϵ und η , dass eine solche Parallele auch zur Ebene η parallel ist. Zusammenfassend liefert das verallgemeinerte Parallelenaxiom mit dem Satz 2.2.2.5, dass das zu Zeigende bereits mit der soeben bewiesenen Aussage a) gilt. \square

Eine im übertragenen Sinne ganzheitliche Auffassung der Parallelität als Lagebeziehung zwischen einer Gerade und Ebene als transitive Relation ist, obgleich des soeben nachgewiesenen Satzes 4.2.1.1, innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ nicht möglich. Zum einen folgt die Parallelität zweier Ebenen gemeinhin nicht daraus, dass beide Ebenen zur gleichen Gerade parallel sind. Ein Beispiel: Per definitionem stellt eine Gerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes die Schnittmenge zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen dar. Demnach sind die beiden Ebenen je zu ihrer Schnittgeraden parallel, jedoch eben aufgrund der gemeinsamen Gerade nicht zueinander parallel. Zum anderen lässt sich nicht im Allgemeinen auf die Parallelität zweier Geraden schließen, wenn die Geraden je zur gleichen Ebene parallel sind. Dies zeigt der Satz 4.2.1.2 unter anderem.

Satz 4.2.1.2. (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 14) Es seien zwei windschiefe Geraden g und h gegeben. Dann existiert genau eine zur Geraden h parallele Ebene, in der die Gerade g liegt.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 13f.)

Wir zeigen zuerst die Existenz einer solchen Ebene und abschließend deren Eindeutigkeit. Hierzu sei ein Punkt A der Geraden g gegeben. Durch diesen Punkt betrachten wir weiter die zur Geraden h nach dem Satz 3.1.2.4 eindeutig bestimmte Parallele; es sei $k := (A \parallel h)$. Die Geraden g und k besitzen also den Punkt A gemeinsam. Im Gegensatz zur Geraden k ist nach Voraussetzung die Gerade g jedoch nicht zur Geraden h parallel. Folglich schneiden sich die Geraden g und k im Punkt A .

Damit liegen die Geraden g und k nach dem Satz 3.1.1.5 gemeinsam in genau einer Ebene δ . Zusammen mit der Parallelität der Geraden k und h liefert der Satz 4.2.1.1a), dass die Ebene δ zur Geraden h parallel ist. Zusammenfassend existiert mit der Ebene δ also eine Ebene, die zur Geraden h parallel ist und zugleich die Gerade g enthält.

Wir zeigen abschließend die Eindeutigkeit der Ebene δ . Dazu sei eine weitere zur Geraden h parallele Ebene δ' gegeben, in der die Gerade g liegt; wir zeigen, dass die Ebenen δ und δ' identisch sind. Mit der Parallelität der Ebene δ' und der Geraden h liefert der Satz 4.2.1.1a), dass die Parallele k ebenfalls zur Ebene δ' parallel ist. Die Parallele schneidet wie eingangs dargelegt die Gerade g im Punkt A , sodass mit der Geraden g auch die Parallele k in der Ebene δ' liegt. Letztlich enthält die Ebene δ' wie auch die Ebene δ die beiden sich im Punkt A schneidenden Geraden g und k , sodass wir mit dem Satz 3.1.1.5 erhalten, dass die Ebene δ' zur Ebene δ identisch ist. \square

Die soeben nachgewiesene Aussage des Satzes 4.2.1.2 gilt basierend auf der Definition 3.1.2.3 mit dem Satz 3.1.1.5 auch unter der Prämisse zweier sich schneidender Geraden. (Dies begründet ebenfalls, dass die Parallelität zweier Geraden nicht im Allgemeinen daraus folgt, dass beide Geraden je zur gleichen Ebene parallel sind.) Eingebunden in eine inzidenzgeometrische Fragestellung leiten Quaisser/Sprengel (1989, S. 13 f.) den Satz 4.2.1.2 her. Sie beabsichtigen in diesem Zusammenhang, die Herleitung auf inzidenzgeometrische Aspekte sowie grundlegende Aussagen zur Lagebeziehung von Geraden und Ebenen zurückzuführen (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 13 f.). Mittels einer recht analogen Methodik erhalten wir im Weiteren den Satz 4.2.1.3. Zusammen mit dem Satz 3.1.1.5 liefert der Satz bezüglich zweier sich schneidender Geraden, dass die durch die beiden Geraden eindeutig bestimmte Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zu einer weiteren Ebene parallel ist, wenn deren Parallelität zu den beiden zugrunde liegenden Geraden gilt. Basierend auf der definatorischen Festlegung der Parallelität als Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen sowie zwischen einer Ebene und Gerade gilt die Aussage ebenfalls mit vertauschter Prämisse und Konklusion. Es gilt die Äquivalenz.

Satz 4.2.1.3. (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 12) Es seien zwei sich schneidende Geraden g und h gegeben. Sind die Geraden je zu einer Ebene η parallel, so liegen die Geraden g und h gemeinsam in einer zur Ebene η parallelen Ebene.

Beweis: (vgl. Schröder 2014b, S. 16; Quaisser/Sprengel 1989, S. 12)

Aufgrund des gemeinsamen Schnittpunktes der Geraden g und h liegen die beiden Geraden nach dem Satz 3.1.1.5 gemeinsam in genau einer Ebene ϵ . Es bleibt zu zeigen, dass die

Ebenen ϵ und η zueinander parallel sind. Diesbezüglich schließen wir die Existenz einer Schnittgeraden aus, indem wir nachweisen, dass die Ebenen ϵ und η unter der Prämisse einer gemeinsamen Geraden bereits zueinander identisch sind:

Es sei also eine gemeinsame Gerade k der Ebenen ϵ und η gegeben. Damit liegen die drei Geraden g , h und k gemeinsam in der Ebene ϵ . Die Geraden g und h sind nach Voraussetzung zueinander nicht parallel, womit die Transitivität der Parallelität in ihrer Kontraposition liefert (zur Transitivität, siehe Satz 3.1.2.7), dass die Gerade k zu mindestens einer der Geraden g und h nicht parallel ist. Innerhalb der Ebene ϵ schneidet die Gerade k also eine der beiden Geraden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Geraden g und k gemeinsam in der Ebene ϵ liegen und sich schneiden. Die Gerade k liegt wie eingangs festgelegt zugleich in der Ebene η . Damit liegt auch der Schnittpunkt der Geraden g und k in der Ebene η . Die Gerade g wiederum ist nach Voraussetzung zur Ebene η parallel. Letztlich liegt auch die Gerade g in der Ebene η . Zusammenfassend gilt, dass die beiden sich schneidenden Geraden g und k in der Ebene ϵ sowie in der Ebene η liegen, womit die beiden Ebenen nach dem Satz 3.1.1.5 zueinander identisch sind. \square

Räumliche Erweiterung des Parallelenaxioms

Abschließend greifen wir die Frage auf, ob das (verallgemeinerte) Parallelenaxiom innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf die Parallelität zwischen einer Geraden und Ebene sowie zwischen zwei Ebenen übertragen werden kann. Letzteres gilt ohne Einschränkung mit dem

Satz 4.2.1.4. (*Verallgemeinertes Parallelenaxiom – Ebenen*; vgl. Schröder 1985, S. 213 f.) Es sei ein Punkt A und eine Ebene ϵ gegeben. Dann existiert genau eine durch den Punkt A gehende, zur Ebene ϵ parallele Ebene.

Beweis: (vgl. Schröder 1985, S. 214)

Aufgrund des Satzes 2.2.2.5 liefert das Axiom $V_{\mathcal{G}}$ zusammen mit dem Satz 2.2.2.1 die Existenz zweier in der Ebene ϵ liegender, sich in einem Punkt schneidender Geraden g und h . Wir betrachten zu diesen Geraden jeweils die nach dem Satz 3.1.2.4 eindeutig bestimmte Parallele durch den Punkt A ; es sei $g' := (A \parallel g)$ und $h' := (A \parallel h)$. Zusammen mit dem Satz 4.2.1.1a) erhalten wir zum einen, dass die Parallelen je zur Ebene ϵ parallel sind.

Aufgrund der Nichtparallelität der Geraden g und h erhalten wir zum anderen mittels der zweimaligen Anwendung der Transitivität der Parallelität auf der Menge \mathcal{G} in ihrer Kontraposition (zur Transitivität, siehe Satz 3.1.2.7), dass die Parallelen g' und h' sich im Punkt A schneiden. Folglich liegen die beiden Parallelen nach dem Satz 3.1.1.5 gemeinsam in einer eindeutig bestimmten Ebene η , wobei diese aufgrund des Satzes 4.2.1.3 zur Ebene ϵ parallel ist. Letztlich existiert mit der Ebene η eine Ebene, die den Punkt A enthält und zur Ebene ϵ parallel ist. Aufgrund der Transitivität der Parallelität auf der Menge \mathcal{E} ist eine solche Ebene mit der Ebene η eindeutig bestimmt, denn jede weitere Ebene, die den Punkt A enthält und zur Ebene ϵ parallel ist, ist ebenfalls zur Ebene η parallel und aufgrund des gemeinsamen Punktes A zur Ebene η identisch. \square

Die mit dem soeben nachgewiesenen Satz 4.2.1.4 eindeutig bestimmte parallele Ebene bezeichnen wir als die *Parallele* ($A \parallel \epsilon$) *durch* A *zu* ϵ (vgl. Schröder 1985, S. 214).

Bezüglich der Parallelität zwischen einer Gerade und Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ begründen wir basierend auf dem Satz 4.2.1.4, dass die Aussage des verallgemeinerten Parallelenaxioms zwar hinsichtlich der Existenz, nicht aber hinsichtlich der Eindeutigkeit gilt:

i) Es sei ein Punkt A und eine Ebene ϵ gegeben. Dann existiert nach dem Satz 4.2.1.4 genau eine Ebene η , die den Punkt A enthält und zur Ebene ϵ parallel ist. Aufgrund des Satzes 2.2.2.5 liefert das Axiom $V_{\mathcal{G}}$ zusammen mit dem Satz 2.2.2.1 die Existenz mindestens zweier verschiedener in der Ebene η liegender, durch den Punkt A gehender Geraden. Schließlich existieren innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes mindestens zwei verschiedene Geraden, die durch den Punkt A gehen und zur Ebene ϵ parallel sind.

ii) Es sei ein Punkt A und eine Gerade g gegeben. Per definitionem ist die Gerade g innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Schnitt zweier verschiedener Ebenen ϵ und η identisch. Nach dem Satz 4.2.1.4 existiert durch den Punkt A zu den beiden Ebenen je eine Parallele; es sei $\epsilon' := (A \parallel \epsilon)$ und $\eta' := (A \parallel \eta)$. Die beiden Ebenen ϵ und η sind aufgrund ihrer gemeinsamen Schnittgeraden g nicht parallel, sodass die Anwendung der Transitivität der Parallelität auf der Menge \mathcal{E} in ihrer Kontraposition liefert (zur Transitivität, siehe Satz 3.1.2.7), dass die Ebene η nicht zur Parallelen ϵ' und die Ebene ϵ nicht zur Parallelen η' parallel ist. Andererseits ist die Schnittgerade g der Ebenen ϵ und η ebenfalls zur Parallelen ϵ'

und η' parallel. Zusammenfassend erhalten wir, dass die Ebenen ϵ' und η' zwei verschiedene Ebenen sind, die jeweils durch den Punkt A gehen und zur Geraden g parallel sind.

4.2.2 Orthogonale Geraden/Ebenen

Die Orthogonalität als Lagebeziehung innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ beschreibt ein Spezialfall sich schneidender Geraden und/oder Ebenen (siehe Kapitel 3.1.2). Im Vergleich zur Untersuchung der Parallelität in Kapitel 4.2.1 zeigt sich eine spezifische Untersuchung der Orthogonalität im Weiteren in sich weniger geschlossen. Eingangs untersuchen wir die Orthogonalität in ihrer Beziehung zur Parallelität innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Zugrunde liegt dem, die mit meiner Masterarbeit (2018, S. 55) innerhalb einer metrisch-normalen euklidischen Ebene aufgegriffenen Beziehungen zwischen der Orthogonalität und Parallelität von Geraden: (Zu einem Nachweis wird hier in meiner Masterarbeit (2018, S. 55) auf die Arbeit von Schröder (2014a, S. 40 f.) verwiesen.)

Es seien drei Geraden g , h und k in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- a) Steht die Gerade g mit der Geraden h in einer Relation der Orthogonalität sowie mit der Geraden k in einer Relation der Parallelität, so stehen die Geraden h und k in einer Relation der Orthogonalität zueinander.
- b) Stehen die Geraden h und k je mit der Geraden g in einer Relation der Orthogonalität, so sind die Geraden h und k zueinander parallel.

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ erfolgt weiter die Untersuchung, ob in Bezug zu dem (verallgemeinerten) Parallelenaxiom (inbegriffen der in Kapitel 4.2.1 erfolgten Diskussion um eine räumliche Erweiterung) für die Orthogonalität Analoges gilt. Dies erfolgt vor dem Hintergrund, dass in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene eine entsprechende Analogie besteht (vgl. Lauer 2018, S. 55 f.). Abschließend diskutieren wir die Orthogonalität innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ als Relation auf der Menge aller Geraden und/oder Ebenen.

Satz 4.2.2.1. (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 29) Es seien zwei Geraden g und h sowie eine Ebene ϵ gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- a) Ist die Gerade h zur Geraden g parallel und die Gerade g zur Ebene ϵ orthogonal, so ist die Gerade h zur Ebene ϵ orthogonal; mathematisch-formal: $h \parallel g \wedge g \perp \epsilon \Rightarrow h \perp \epsilon$.
- b) Ist die Gerade g zur Ebene ϵ und die Ebene ϵ zur Geraden h orthogonal, so sind die Geraden g und h zueinander parallel; mathematisch-formal: $g \perp \epsilon \wedge \epsilon \perp h \Rightarrow g \parallel h$.

Beweis: (a/Beweisansatz in b: vgl. Schröder 2014a, S. 40 f.; b: Eigener Beweis)

a) Nach Voraussetzung ist die Gerade h zur Geraden g parallel, die Gerade g jedoch nicht zur Ebene ϵ , womit der Satz 4.2.1.1a) in seiner Kontraposition liefert, dass die Gerade h und die Ebene ϵ ebenfalls zueinander nicht parallel sind. Folglich schneiden sich die Gerade h und die Ebene ϵ in einem Punkt. Aufgrund ihrer Orthogonalität besitzen die Gerade g und die Ebene ϵ nach dem Satz 2.2.2.2 ebenfalls einen Schnittpunkt. Es sei $M_1 := \{\cdot\}^{-1}(\epsilon \cap g)$ und $M_2 := \{\cdot\}^{-1}(\epsilon \cap h)$. Nach dem Satz 4.1.2.8 existiert nun genau eine Translation τ derart, dass das Bild des Punktes M_1 identisch zum Punkt M_2 ist.

Zum einen liefert die definatorische Festlegung einer Translation, dass das Bild der Geraden g unter der Translation τ eine durch den Punkt M_2 gehende, zur Geraden g parallele Gerade ist. Hiermit folgt aus dem Satz 3.1.2.4, dass das Bild der Geraden g unter der Translation τ zur Geraden h identisch, da die Gerade h durch den Punkt M_2 geht und nach Voraussetzung zur Geraden g parallel ist. Zum anderen liefert der Satz 4.1.2.9, dass das Bild der Ebene ϵ unter der Translation τ eine durch den Punkt M_2 gehende, zur Ebene ϵ parallele Ebene ist. Damit ist die Ebene ϵ zur ihrer Bildebene unter der Translation τ identisch, da der Punkt M_2 ebenfalls in der Ebene ϵ liegt.

Zusammenfassend gilt, dass die Translation τ die Ebene ϵ auf sich selbst sowie die Gerade g auf die Gerade h abbildet. Dabei ist die Gerade g nach Voraussetzung zur Ebene ϵ orthogonal. Allgemein stellt die Translation τ nach dem Satz 4.1.2.6 eine Kongruenzabbildung des metrisch-normalen euklidischen Raumes dar, sodass wir mit der Orthogonalitätstreue einer Kongruenzabbildung erhalten (siehe Korollar 3.4.5), dass die Gerade h zur Ebene ϵ orthogonal ist. □

b) Die Gerade g und die Ebene ϵ besitzen aufgrund ihrer Orthogonalität nach dem Satz 2.2.2.2 genau einen gemeinsam Punkt; es sei M dieser Schnittpunkt. Durch den Punkt M existiert

zur Geraden h nach dem Satz 3.1.2.4 genau eine Parallele k . Die Gerade h ist nach Voraussetzung zur Ebene ϵ orthogonal, sodass nach der bereits bewiesenen Aussage a) die Gerade k zur Ebene ϵ orthogonal ist und hiermit die Ebene ϵ ebenfalls im Punkt M schneidet. Wir halten fest, dass mit den Geraden g und k zwei durch den Punkt M der Ebene ϵ gehende, zur Ebene ϵ orthogonale Geraden existieren. Im Weiteren zeigen wir, dass die Gerade k als die Parallele zur Geraden h gleich der Geraden g ist, also das zu Zeigende gilt: (Analog ließen sich die Rollen der Geraden g und h vertauschen.)

Mit der Orthogonalität der Ebene ϵ zur Geraden g und k existieren per definitionem auf der Geraden g zwei Punkte A_1 und A_2 sowie auf der Geraden k zwei Punkte B_1 und B_2 , sodass die Ebenen m_{A_1, A_2} und m_{B_1, B_2} je zur Ebene ϵ identisch sind. Zusammen mit dem Punkt M als der Schnittpunkt der Ebene ϵ mit der Geraden g sowie mit der Geraden k folgt dabei aus der Definition 4.1.1.3 einer Punktspiegelung, dass der Punkt A_2 gleich dem Bild des Punktes A_1 und der Punkt B_2 gleich dem Bild des Punktes B_1 unter der Punktspiegelung \tilde{M} ist. Mit einem Punkt C auf der Ebene ϵ erhalten wir, unter Berücksichtigung der Eigenschaft der Punktspiegelungen als abstandstreue und involutorische Abbildungen (siehe hierzu Satz 4.1.1.5 bzw. Korollar 4.1.1.6), die (Äquivalenz-)Beziehung

$$\{C, A_1\} \equiv_d \{C, A_2\} \equiv_d \{\tilde{M}(C), A_1\} \quad \text{und} \quad \{C, B_1\} \equiv_d \{C, B_2\} \equiv_d \{\tilde{M}(C), B_1\}.$$

Die Ebene m_{C, C^M} geht also durch die Punkte A_1 und B_1 . Analog gilt, dass die Punkte A_2 und B_2 in der Ebene m_{C, C^M} liegen. Zusammenfassend geht die Ebene m_{C, C^M} also durch die Punkte A_1 und A_2 der Geraden g sowie durch die Punkte B_1 und B_2 der Geraden k , womit die Geraden g und k nach dem Satz 2.2.2.1 jeweils in der Ebene m_{C, C^M} liegen. Die Geraden g und k sind wie eingangs dargelegt zur Ebene ϵ orthogonal, sodass sich die beiden Ebenen m_{C, C^M} und ϵ in einer Geraden derart schneiden, dass die Geraden g und k innerhalb der Ebene m_{C, C^M} zu dieser Geraden orthogonal sind (siehe hierzu Definition 3.1.2.8). Sind zwei Geraden innerhalb einer metrisch-normalen euklidischen Ebene zu der gleichen Geraden orthogonal, so sind die beiden Geraden zueinander parallel (siehe eingangs des vorliegenden Kapitels 4.2.2); aufgrund des Satzes 2.2.2.6 sind die Geraden g und k also zueinander parallel, wobei die beiden Geraden wie eingangs dargelegt durch den Punkt M gehen und somit zueinander identisch sind. Es gilt also das zu Zeigende. \square

Orientieren wir uns an dem Beweis des Satzes 4.2.2.1a), setzen statt der Parallelität der Geraden g zur Geraden h die Parallelität der Ebene ϵ zu einer Ebene η voraus, so erhalten wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ den

Satz 4.2.2.2. (vgl. Quaisser/Sprenkel 1989, S. 27) Ist eine Gerade g zu einer Ebene ϵ orthogonal und diese Ebene ϵ zu einer Ebene η parallel, so ist die Gerade g zur Ebene η orthogonal; mathematisch-formal: $g \perp \epsilon \wedge \epsilon \parallel \eta \Rightarrow g \perp \eta$.

Beweis: (Eigener Beweis; vgl. zusätzlich Schröder 2014a, S. 40 f.)

Aufgrund der beiden geltenden Voraussetzungen liefert der Satz 4.2.1.1b) in dessen Kontraposition, dass sich die Gerade g und die Ebene η schneiden. Ebenfalls schneiden sich die Gerade g und die Ebene ϵ nach dem Satz 2.2.2.2 aufgrund ihrer Orthogonalität. Es sei $M_1 := \{\cdot\}^{-1}(g \cap \epsilon)$ und $M_2 := \{\cdot\}^{-1}(g \cap \eta)$. Nach dem Satz 4.1.2.8 existiert genau eine Translation τ , die den Punkt M_1 auf den Punkt M_2 abbildet.

Zum einen liefert die definitorische Festlegung einer Translation, dass die Gerade g unter der Translation τ eine durch den Punkt M_2 gehende, zur Geraden g parallele Gerade ist. Damit ist die Gerade g eine Fixgerade der Translation, da der Punkt M_2 auf der Geraden g liegt. Zum anderen liefert der Satz 4.1.2.9, dass das Bild der Ebene ϵ unter der Translation τ eine durch den Punkt M_2 gehende, zur Ebene ϵ parallele Ebene ist. Hieraus folgt mit dem Satz 4.2.1.4, dass die Ebene ϵ unter der Translation τ zur Ebene η identisch ist, da die Ebene η durch den Punkt M_2 geht und nach Voraussetzung zur Ebene ϵ parallel ist.

Zusammenfassend gilt, dass die Translation τ die Gerade g auf sich selbst sowie die Ebene ϵ auf die Ebene η abbildet. Dabei ist die Gerade g nach Voraussetzung zur Ebene ϵ orthogonal. Allgemein stellt die Translation τ nach dem Satz 4.1.2.6 eine räumliche Kongruenzabbildung dar, sodass wir mit der Orthogonalitätstreue einer Kongruenzabbildung erhalten (siehe Korollar 3.4.5), die Gerade g zur Ebene η orthogonal ist. \square

In Anlehnung an die Aussage b) des Satzes 4.2.2.1 zeigen wir im Weiteren innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ den

Satz 4.2.2.3. (vgl. Quaisser/Sprenkel 1989, S. 27) Ist eine Ebene ϵ zu einer Geraden g und diese Gerade g zu einer Ebene η orthogonal, so sind die beiden Ebenen zueinander parallel; mathematisch-formal: $\epsilon \perp g \wedge g \perp \eta \Rightarrow \epsilon \parallel \eta$.

Beweis: (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 27)

Die Gerade g ist nach Voraussetzung zur Ebene ϵ und η orthogonal. Entsprechend der Definition 3.1.2.9 existieren also je zwei verschiedene Punkte A und B sowie C und D auf der Geraden g , sodass die Ebene ϵ zur Ebene $m_{A,B}$ und die Ebene η zur Ebene $m_{C,D}$ identisch ist; es gilt $\epsilon = m_{A,B}$ und $\eta = m_{C,D}$.

Als eine Gerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes ist die Gerade g per definitionem zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen δ und δ' identisch. Dabei schneidet die Gerade g die Ebenen $m_{A,B}$ und $m_{C,D}$ nach dem Satz 2.2.2.2 je in einem Punkt. Folglich schneiden die Ebenen δ und δ' die Ebene $m_{A,B}$ bzw. $m_{C,D}$ in einer durch diesen Schnittpunkt gehenden Geraden; es sei $h := m_{A,B}|_{\delta}$, $h' := m_{A,B}|_{\delta'}$, $k := m_{C,D}|_{\delta}$ und $k' := m_{C,D}|_{\delta'}$. Für die Geraden h und h' erhalten wir aufgrund des Satzes 3.1.1.5 in Bezug zur Geraden g mit der Verschiedenheit der Ebenen δ und δ' , dass die beiden Geraden nicht identisch sind, sich in der Ebene $m_{A,B}$ schneiden. Wir zeigen nun im Weiteren, dass die Geraden h und h' jeweils zur Ebene $m_{C,D}$ parallel sind, woraus mit dem Satz 4.2.1.3 die Parallelität der Ebenen $m_{A,B}$ und $m_{C,D}$ und somit das zu Zeigende folgt: (Analog ließen sich zum Nachweis die Geraden k und k' zugrunde legen.)

Entsprechend der Definition 3.1.2.8 ist innerhalb der Ebene δ die Gerade g zur Geraden h und k sowie innerhalb der Ebene δ' zur Geraden h' und k' orthogonal. Ist eine Gerade in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene zu zwei Geraden orthogonal, so sind diese beiden Geraden zueinander parallel (siehe eingangs des Kapitels 4.2.2); aufgrund des Satzes 2.2.2.6 sind also die Geraden h und k sowie die Geraden h' und k' zueinander parallel. Letztlich ist die Schnittgerade h der Ebenen $m_{A,B}$ und δ zur Schnittgeraden k der Ebenen $m_{C,D}$ und δ disjunkt oder identisch, womit die Gerade h zur Ebenen $m_{C,D}$ parallel ist. Analog gilt, dass die Gerade h' zur Ebene $m_{C,D}$ parallel ist. \square

In Bezug zu dem soeben erfolgten Beweis besteht ein Teil des Beweises darin, dass die Orthogonalität einer Geraden g und Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Existenz zweier in der Ebene ϵ liegender, durch den Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene ϵ gehender Geraden impliziert, so, dass die Gerade g zu beiden Geraden orthogonal ist. Diesbezüglich zeigen wir mit dem Satz 4.2.2.4 im Weiteren, dass hier im Allgemeinen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine Äquivalenzaussage vorliegt.

Satz 4.2.2.4. (vgl. Moise 1990, S. 212–217) Es seien eine sich in einem Punkt M schneidende Ebene ϵ und Gerade g gegeben. Die Gerade und Ebene sind genau dann zueinander orthogonal, wenn die Gerade g zu zwei verschiedenen in der Ebene ϵ liegenden und durch den Schnittpunkt M gehenden Geraden orthogonal ist.

Beweis: (Eigener Beweis)

Aufgrund des Satzes 2.2.2.5 liefert das Axiom V_G zusammen mit dem Satz 2.2.2.1 grundsätzlich die Existenz zweier in der Ebene ϵ liegender, sich in dem Schnittpunkt M der Ebene ϵ und Geraden g schneidender Geraden h_1 und h_2 . Die Geraden g und h_1 liegen nach dem Satz 3.1.1.5 gemeinsam in einer eindeutig bestimmten Ebene η_1 ebenso wie die Geraden g und h_2 gemeinsam in einer eindeutig bestimmten Ebene η_2 liegen. Die zu zeigende Äquivalenzaussage differenzieren wir schließlich in den Nachweis ihrer beiden Implikationen:

Es gelte $g \perp \epsilon$: Entsprechend der Definition 3.1.2.9 existieren zwei verschiedene Punkte A und B auf der Geraden g , sodass die Ebene ϵ zur Ebene $m_{A,B}$ identisch ist. Damit ist die Gerade h_1 als die Schnittgerade der Ebenen ϵ und η_1 sowie die Gerade h_2 als die Schnittgerade der Ebenen ϵ und η_2 gleich dem Schnitt der Ebenen $m_{A,B}$ und η_1 bzw. $m_{A,B}$ und η_2 . Folglich ist die gemeinsam mit der Geraden h_1 und h_2 in der Ebene η_1 bzw. η_2 liegende Gerade g entsprechend der Definition 3.1.2.8 zur Geraden h_1 und h_2 orthogonal.

Es gelte $g \perp h_1 \wedge g \perp h_2$: Entsprechend der Definition 3.1.2.8 existieren je zwei verschiedene Punkte A_1 und B_1 sowie A_2 und B_2 auf der Geraden g , sodass sich die Ebene m_{A_1,B_1} und die Ebene η_1 als die durch die Geraden g und h_1 eindeutig bestimmte Ebene in der Geraden h_1 schneiden sowie sich entsprechend die Ebenen m_{A_2,B_2} und η_2 in der Geraden h_2 schneiden. Folglich ist die Gerade g nach der Definition 3.1.2.9 ebenfalls zur Ebene m_{A_1,B_1} und m_{A_2,B_2} orthogonal, wobei die beiden Ebenen durch den Schnittpunkt M der beiden sich in der Ebene ϵ schneidenden Geraden h_1 und h_2 gehen. Zusammenfassend liefert der Satz 4.2.2.3 mit dem Satz 3.1.1.5, dass die Gerade g zur Ebene ϵ orthogonal ist. \square

Aufgrund des Satzes 3.1.1.5 gilt basierend auf den Definitionen 3.1.2.8 und 3.1.2.9 der Orthogonalität einer Geraden und Ebene bzw. zweier Geraden im Allgemeinen, dass eine Gerade g unter der Voraussetzung ihrer Orthogonalität zu einer Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zu jeder in der Ebene ϵ liegenden, durch den Schnittpunkt M der Geraden g und Ebene ϵ gehenden Gerade orthogonal ist. Ferner existiert

tieren, wie in dem soeben erfolgten Beweis des Satzes 4.2.2.4 zu Beginn begründet, stets mindestens zwei in der Ebene ϵ liegende, sich im Punkt M schneidende Geraden. Schließlich erhalten wir mit dem Satz 4.2.2.4, dass dessen Aussage gleichermaßen gilt, wenn wir „zu zwei verschiedenen, in der Ebene ϵ liegenden und durch den Schnittpunkt M gehende Geraden“ durch „zu jeder [...] Geraden“ ersetzen.

In verschiedenen Axiomatisierungen ist der dargelegte Zusammenhang in Bezug zur Orthogonalität zwischen einer Gerade und Ebene definitorisch fundiert (vgl. hierzu Moise 1990, S. 212–214; Mitschka 1977, S. 164f.). In diesem Sinne ist basierend auf dem Satz 4.2.2.4 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eine definitorische Äquivalenz begründet.

Lotgeraden und Lotebenen

Mit der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene gilt für die Orthogonalität zwischen Geraden eine zu dem verallgemeinerten Parallelenaxiom analoge Aussage; es existiert in jeder metrisch-normalen euklidischen Ebene ein sogenanntes „Lot durch einen Punkt auf eine Gerade“ (vgl. Lauer 2018, S. 55 f.):

Satz-Masterarbeit 5.1.1.18. Es sei ein Punkt A und eine Gerade g in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene gegeben. Dann existiert genau eine durch den Punkt A gehende, zur Geraden g orthogonale Gerade.

Im Rahmen meiner Masterarbeit (2018, S. 55 f.) erfolgt der Nachweis auf der Grundlage der hier eingangs in dem vorliegenden Kapitel 4.2.2 aufgegriffenen Beziehungen zwischen der Parallelität und Orthogonalität zweier Geraden in einer metrisch-normalem euklidischen Ebene. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ erhalten wir basierend auf dem Satz 4.2.2.1 im Weiteren mit dem Satz 4.2.2.5 entsprechend, dass durch jeden Punkt zu jeder Ebene innerhalb des Raumes genau eine orthogonale Gerade existiert. Im Vergleich zur Diskussion um die räumliche Erweiterung des Parallelenaxioms in Kapitel 4.2.1 besteht hier ein Unterschied, zwar existiert durch jeden Punkt zu jeder Ebene eine parallele Gerade, jedoch keine eindeutig bestimmte.

Satz 4.2.2.5. (vgl. Quaisser/Sprenkel 1989, S. 26) Es sei ein Punkt A und eine Ebene ϵ gegeben. Dann existiert genau eine durch den Punkt A gehende, zur Ebene ϵ orthogonale Gerade.

Beweis: (vgl. Schröder 2014a, S. 40 f.; vgl. zusätzlich Lauer 2018, S. 55 f.)

Für die Ebene ϵ existieren innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem zwei verschiedene Punkte B und C derart, dass die Ebene ϵ zur Ebene $m_{B,C}$ identisch ist. Entsprechend der Definition 3.1.2.9 ist damit die Verbindungsgerade der Punkte B und C zur Ebene ϵ orthogonal. Wir betrachten nun die nach dem Satz 3.1.2.4 eindeutig bestimmte Gerade, die durch den Punkt A geht und zur Verbindungsgerade $\langle B, C \rangle$ parallel ist; es sei $g := (A \parallel \langle B, C \rangle)$. Nach dem Satz 4.2.2.1a) existiert mit der Geraden g eine durch den Punkt A gehende, zur Ebene ϵ orthogonale Gerade. Diesbezüglich ist die Gerade g aufgrund des Satzes 4.2.2.1b) zugleich eindeutig bestimmt; denn jede weitere Gerade, die durch den Punkt A geht und zur Ebene ϵ orthogonal ist, ist nach dem Satz 4.2.2.1b) zur Geraden g parallel und somit aufgrund des gemeinsamen Punktes A identisch. \square

Die mit dem soeben nachgewiesenen Satz 4.2.2.5 eindeutig bestimmte orthogonale Gerade bezeichnen wir als das *Lot* ($A \perp \epsilon$) *von* A *auf* (der Ebene) ϵ . Den Schnittpunkt, den das Lot und die Ebene gemeinhin aufgrund ihrer Orthogonalität besitzen (siehe Kapitel 3.1.2), bezeichnen wir als den *Lotfußpunkt* $F_{\perp\epsilon}^A$ *von* A *auf* ϵ . Die Bezeichnungen sind angelehnt an das mit meiner Masterarbeit (2018, S. 55 f.) in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene eindeutig existierende Lot auf einer Geraden (vgl. hier auch Schröder 2014a, S. 41).

Für einen Punkt A und eine Ebene ϵ liefert der Satz 4.2.2.5 zusammen mit der definitiven Festlegung einer Geraden als der Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, dass zwar entsprechend der Definition 3.1.2.10 die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit einer durch den Punkt A gehenden, zur Ebene ϵ orthogonalen Ebene gilt. Im Vergleich zur räumlichen Erweiterung des Parallelenaxioms besteht damit ein Unterschied (siehe hierzu Satz 4.2.1.4).

Weiter ergibt sich innerhalb des metrisch-normalen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ein Unterschied in Bezug zu dem mit dem Satz 3.1.2.4 nachgewiesenen verallgemeinerten Parallelenaxiom. Zugleich liegt damit ein Unterschied in Bezug zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene vor. Für eine Gerade g und einen nicht auf dieser Gerade liegenden Punkt A lässt sich basierend auf dem Satz 3.1.1.4

zwar die Existenz einer durch den Punkt A gehenden, zur Geraden g orthogonalen Gerade darauf zurückführen, dass die eindeutige Existenz eben in jeder metrisch-normalen euklidischen Ebene und damit nach dem Satz 2.2.2.6 in jeder Ebene des Raumes gilt. Allerdings ist die Eindeutigkeit innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ nicht gegeben, wenn der Punkt A auf der Geraden g liegt. In diesem Fall liegen der Punkt A und die Gerade g gemeinsam in mindestens zwei verschiedenen Ebenen, da die Gerade g des Raumes per definitionem zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen identisch ist. Hiermit existieren letztlich auch mindestens zwei verschiedene durch den Punkt A gehende, zur Geraden g orthogonale Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$.

Orientierend an dem Beweis des Satzes 4.2.2.5 zeigen wir im Weiteren mit dem Satz 4.2.2.6 die eindeutige Existenz einer *Lotebene* auf eine Gerade innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Im Vergleich zur Diskussion um die räumliche Erweiterung des Parallelenaxioms in Kapitel 4.2.1 besteht hier ein weiterer Unterschied, zwar existiert durch jeden Punkt zu jeder Geraden eine parallele Ebene, jedoch keine eindeutig bestimmte.

Satz 4.2.2.6. (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 28) Es sei ein Punkt A und eine Gerade g gegeben. Dann gibt es genau eine durch den Punkt A gehende, zur Gerade g orthogonale Ebene.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Schröder 2014a, S. 40 f.)

Auf der Geraden g liegen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes nach dem Satz 2.2.2.3 (mindestens) zwei verschiedene Punkte B und C . Damit ist aufgrund des Axioms $V_{\mathcal{G}}$ die Gerade g entsprechend der Definition 3.1.2.9 zur Ebene $m_{B,C}$ orthogonal. Wir betrachten nun die nach dem Satz 4.2.1.4 eindeutig bestimmte Ebene, die durch den Punkt A geht und zur Ebene $m_{B,C}$ parallel ist; es sei $\epsilon := (A \parallel m_{B,C})$. Nach dem Satz 4.2.2.2 existiert mit der Ebene ϵ eine durch den Punkt A gehende, zur Geraden g orthogonale Ebene. Diesbezüglich ist die Ebene ϵ aufgrund des Satzes 4.2.2.3 zugleich eindeutig bestimmt; denn jede durch den Punkt A gehende, zur Geraden g orthogonale Ebene ist nach dem Satz 4.2.2.3 zur Ebene ϵ parallel und somit aufgrund des gemeinsamen Punktes A identisch. \square

Die Orthogonalität als Relation

Die Orthogonalität ist per definitionem innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ weder auf der Menge \mathcal{G} aller Geraden noch auf der Menge \mathcal{E} aller Ebenen eine reflexive Relation (siehe Definition 3.1.2.8 bzw. 3.1.2.10). Dies begründet zugleich, dass die Orthogonalität, im Gegensatz zur Parallelität (siehe Satz 3.1.2.7), auf den jeweiligen Mengen keine Äquivalenzrelation darstellt. Gleichwohl sei abschließend die Frage nach der Symmetrie und Transitivität der Orthogonalität als Lagebeziehung zwischen Geraden und/oder Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ diskutiert.

Bemerkung 4.2.2.7. Die Orthogonalität als Lagebeziehung zwischen einer Gerade und Ebene ist per definitionem im übertragenen Sinne symmetrisch; denn nach der Definition 3.1.2.9 reduziert sich die Frage nach der Orthogonalität einer Geraden g und Ebene ϵ darauf, ob *auf der* Geraden zwei verschiedene Punkte A und B derart existieren, dass die Ebene ϵ zur Ebene $m_{A,B}$ identisch ist. Die Definition 3.1.2.8 der Orthogonalität zweier Geraden ist an dieser Stelle differenzierter zu betrachten. Neben der Komplanarität der Geraden in einer Ebene ϵ ist die Voraussetzung entscheidend, dass *auf einer* der beiden Geraden zwei verschiedene Punkte A und B derart existieren, dass die jeweils andere Gerade zur Geraden $m_{A,B}|_{\epsilon}$ identisch ist. Dies impliziert nicht umgekehrt, dass entsprechendes mit vertauschten Rollen der Geraden gilt. Analoges gilt bezüglich der Definition 3.1.2.10 der Orthogonalität zweier Ebenen. Gleichwohl stellt die Orthogonalität innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ sowohl auf der Menge \mathcal{G} aller Geraden als auch auf der Menge \mathcal{E} aller Ebenen eine symmetrische Relation dar. Erstgenanntes, so begründen wir im Weiteren, gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit der in meiner Masterarbeit (2018) in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene nachgewiesenen Symmetrie bezüglich der Orthogonalität zweier Geraden; zweitgenanntes zeigen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit dem Satz 4.2.2.8.

Eine Gerade innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist genau dann zu einer Geraden orthogonal, wenn die Gerade in einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes zur jeweiligen Gerade orthogonal ist (siehe Kapitel 3.1.2). Mit der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene ist die Orthogonalität auf der Menge aller Geraden symmetrisch (vgl. Lauer 2018, S. 54f.), sodass die Orthogonalität als Lagebeziehung zwischen zwei Geraden

innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ebenfalls eine symmetrische Relation darstellt.

Satz 4.2.2.8. (vgl. Quaisser/Sprengel 1989, S. 28) Die Orthogonalität als Relation auf der Menge \mathcal{E} aller Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist symmetrisch.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Schröder 2014a, S. 40)

Es seien zwei Ebenen ϵ und η gegeben. Unter der Voraussetzung, dass die Ebene ϵ zur Ebene η orthogonal ist, zeigen wir, dass die Ebene η ebenfalls zur Ebene ϵ orthogonal ist.

Mit der definatorischen Festlegung der Orthogonalität zweier Ebenen liegt in der Ebene ϵ eine Verbindungsgerade zweier Punkte A und B derart, dass die Ebene η zur Ebene $m_{A,B}$ identisch ist (siehe Definition 3.1.2.10). Die Verbindungsgerade und die Ebene schneiden sich aufgrund des Satzes 2.2.2.2 in genau einem Punkt M , sodass entsprechend der Definition 4.1.1.3 einer Punktspiegelung die Punktspiegelung \tilde{M} den Punkt A auf den Punkt B abbildet. Die Ebene ϵ schneidet ferner die Ebene η in einer durch den Punkt M gehenden Gerade g . Innerhalb der Ebene η als eine nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normale euklidischen Ebene existiert durch den Punkt M genau eine zur Geraden g orthogonale Gerade (siehe Abschnitt „Lotgeraden und Lotebenen“ des vorliegenden Kapitels 4.2.2); es sei h diese orthogonale Gerade.

Aufgrund der Lage des Punktes M auf der Geraden g und h erhalten wir mit der Definition 3.1.2.8 der Orthogonalität zweier Geraden zusammen mit der definatorischen Festlegung einer Punktspiegelung, dass für einen Punkt C der Geraden h die Gerade g gleich dem Schnitt der Ebenen m_{C,C^M} und η ist. Die Gerade g als die Schnittgerade der Ebene ϵ und η liegt also ebenfalls in der Ebene m_{C,C^M} . Im Weiteren zeigen wir, dass auch der in der Ebene ϵ liegende Punkt A bzw. B in der Ebene m_{C,C^M} liegt, womit die Ebene ϵ aufgrund des Satzes 3.1.1.4 zur Ebene m_{C,C^M} identisch ist. Letztlich folgt hieraus mit der Definition 3.1.2.9, dass die in der Ebene η liegende Gerade h und somit die Ebene η selbst entsprechend der Definition 3.1.2.10 zur Ebene ϵ orthogonal ist, also das zu Zeigende gilt:

Wie eingangs dargelegt, ist die Ebene η gleich der Ebene $m_{A,B}$ und es existiert mit der Punktspiegelung \tilde{M} eine Punktspiegelung, die den Punkt A auf den Punkt B abbildet. Zusammen mit dem auf der Geraden h innerhalb der Ebene η liegenden Punkt C erhalten wir, unter

Berücksichtigung der Eigenschaft der Punktspiegelungen als abstandstreue und involutorische Abbildungen (siehe Satz 4.1.1.5 bzw. Korollar 4.1.1.6), die (Äquivalenz-)Beziehung

$$\{C, A\} \equiv_d \{C, B\} \equiv_d \{\tilde{M}(C), A\} \quad \text{und} \quad \{C, B\} \equiv_d \{C, A\} \equiv_d \{\tilde{M}(C), B\}.$$

Folglich geht die Ebene m_{C, C^M} sowohl durch den Punkt A als auch durch den Punkt B ; es gilt also das zu Zeigende. \square

Schließlich bleibt die Orthogonalität als Relation zwischen Geraden und/oder Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ hinsichtlich der Transitivität zu untersuchen. Innerhalb des Raumes implizieren die Sätze 4.2.2.1b) und 4.2.2.3, dass die Transitivität im übertragenen Sinne für Orthogonalität als Relation zwischen einer Geraden und Ebene nicht erfüllt ist. Der mit den beiden Sätzen beschriebene Zusammenhang gilt analog in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene bezüglich zweier Geraden, wie zu Beginn des vorliegenden Kapitels 4.2.2 aufgegriffen. Demnach sind zwei Geraden, die je zu einer Geraden orthogonal sind, zueinander parallel. Die Parallelität und Orthogonalität zweier Geraden gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ genau dann, wenn die jeweiligen Geraden in einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene parallel bzw. orthogonal sind (siehe Kapitel 3.1.2). Für die Orthogonalität als Lagebeziehung zwischen zwei Geraden erhalten wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zusammenfassend, dass die Transitivität nicht erfüllt ist. Im Übrigen gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ das

Beispiel – Beziehung \perp auf \mathcal{E} nicht transitiv.

Es seien ϵ und η zwei zueinander parallele Ebenen. Für einen Punkt A der Ebene ϵ betrachten wir die mit dem Satz 4.2.2.5 eindeutig bestimmte Gerade, die durch den Punkt A geht und zur Ebene ϵ orthogonal ist; es sei $g := (A \perp \epsilon)$. Mit der Parallelität der Ebenen ϵ und η liefert der Satz 4.2.2.2, dass die Gerade g ebenfalls zur Ebene η orthogonal ist. Dabei ist die Gerade g als eine Gerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen identisch. Folglich existieren mindestens zwei verschiedene Ebenen, die entsprechend der Definition 3.1.2.10 je zur Ebene ϵ und η orthogonal sind, wobei die Ebenen ϵ und η jedoch parallel, nicht orthogonal sind.

4.3 Kongruenz – Teil II

Anknüpfend an das Kapitel „Kongruenz – Teil I“ (4.1) erfolgt mit dem vorliegenden Kapitel eine Untersuchung der „Ebenenspiegelungen“ (4.3.1), ihres Zusammenhangs zur Menge aller räumlichen Kongruenzabbildungen (4.3.2) sowie letztlich eine Untersuchung der „Kongruenz geometrischer Figuren“ (4.3.3) innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. (Die Zweiteilung in Bezug zum Kapitel „Kongruenz – Teil I“ ist im deduktiven Aufbau des Raumes begründet, siehe eingangs des Kapitels 4). Die Orientierung an dem übergeordneten Leitgedanken der „Räumlichen Kontextualisierung“ in Bezug zu der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene bleibt unverändert bestehen, ebenso wie die getroffene Anmerkung zur Bedeutung des Kongruenzaxioms (siehe hierzu eingangs des Kapitels 4.1).

4.3.1 Ebenenspiegelungen

Im Gegensatz zu den „Punktspiegelungen“ (4.1.1) und „Translationen“ (4.1.2) existieren keine „ebene Ebenenspiegelungen“. Als ebenes-geometrisches Pendant zeigt sich, und verstehen wir, zur Untersuchung der „Ebenenspiegelung“ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Geradenspiegelungen einer metrisch-normalen euklidischen Ebene. Grundsätzlich bildet hier meine Masterarbeit (2018, S. 56–59) die Grundlage. Zusätzlich sei auf die Arbeit von Schröder (2014a, S. 51 f.), auf ihre räumliche Erweiterung in Schröder (2014b, S. 59 f.) sowie auf die Arbeit von Quaisser (1989, S. 79–81) verwiesen.

Jede Ebene ϵ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ stellt nach dem Satz 2.2.2.6 eine metrisch-normale euklidische Ebene dar. Für eine Gerade g der Ebene ϵ ist eine Geradenspiegelung entsprechend der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene wie folgt definiert (vgl. Lauer 2018, S. 56):

Eine Abbildung von der Punktmenge in die Punktmenge der Ebene ϵ , so, dass der Bildpunkt eines Punktes X gleich dem Bildpunkt ist, den der Punkt X unter der ebenen Punktspiegelung an seinem Lotfußpunkt $F_{\perp g}^X$ auf der Geraden g innerhalb der Ebene ϵ besitzt, also die Abbildung

$$\tilde{g}_{\epsilon}: \epsilon \rightarrow \epsilon \quad \text{mit} \quad \tilde{g}_{\epsilon}(X) := \tilde{F}_{\perp g}^X|_{\epsilon}(X),$$

wird als Geradenspiegelung an der Geraden g innerhalb der Ebene ϵ bezeichnet.

Die definitorische Festlegung einer Geradenspiegelung bzw. ihr Verständnis als Abbildung im mathematischen Sinne basiert innerhalb einer metrisch-normalen euklidischen Ebene auf zwei Aspekten. Erstens, dass jeder Punkt auf einer Geraden genau ein Lot und somit genau einen Lotfußpunkt besitzt (siehe hierzu Kapitel 4.2.2). Zweitens, dass jede ebene Punktspiegelung eine bijektive Selbstabbildung der zugrunde liegenden Ebene darstellt (siehe hierzu Kapitel 4.1.1).

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gilt, dass jeder Punkt auf einer Ebene genau eine Lotgerade besitzt (siehe Kapitel 4.2.2), und zum anderen, dass jede räumliche Punktspiegelung eine bijektive Selbstabbildung der Punktmenge \mathcal{P} ist (siehe Kapitel 4.1.1). Hierauf basierend erfolgt die definitorische Festlegung der Ebenenspiegelung analog zu den Geradenspiegelungen einer metrisch-normalen euklidischen Ebene (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 56). Wir definieren die Ebenenspiegelungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ als eine Abbildung von der Punktmenge \mathcal{P} in die Punktmenge \mathcal{P} des Raumes mit der

Definition 4.3.1.1. Für eine Ebene ϵ wird die Abbildung

$$\tilde{\epsilon}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \quad \text{mit} \quad \tilde{\epsilon}(X) := X^{\epsilon} := \tilde{F}_{\perp\epsilon}^X(X)$$

als Ebenenspiegelung an der Ebene ϵ bezeichnet.

Der Bildpunkt $\tilde{\epsilon}(X)$ des Punktes X unter der Ebenenspiegelung an der Ebene ϵ ist gleich dem Bild des Punktes unter der Punktspiegelung an dem Lotfußpunkt des Punktes X auf der Ebene ϵ . Dabei sind die Lotfußpunkte des Punktes X und seines Bildpunktes $\tilde{\epsilon}(X)$ stets zueinander identisch. Zwischen den Ebenenspiegelungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ und den Geradenspiegelungen in einer (nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen) Ebene des Raumes besteht innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ der Zusammenhang in

Satz 4.3.1.2. Es seien zwei zueinander orthogonale Ebenen ϵ und η gegeben. Die Restriktion der Ebenenspiegelung an der Ebene ϵ auf die Ebene η und die Geradenspiegelung an der Schnittgeraden der beiden Ebenen innerhalb der Ebene η sind zueinander identisch.

Beweis: (Eigener Beweis)

Die Schnittgerade der Ebenen ϵ und η existiert aufgrund ihrer Orthogonalität grundsätzlich (siehe Kapitel 3.1.2); es sei g die Schnittgerade der beiden Ebenen. Weiter liegt innerhalb der Ebene η als eine zur Ebene ϵ orthogonale Ebene per definitionem eine zur Ebene ϵ orthogonale Gerade (siehe Definition 3.1.2.10); es sei h diese orthogonale Gerade.

Schritt I: Wir zeigen, dass jeder Punkt der Geraden h unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ und der Geradenspiegelung \tilde{g}_η den gleichen Bildpunkt besitzt. Mit der Orthogonalität der Geraden h zur Ebene ϵ erhalten wir zusammen mit der Lage der Geraden h in der Ebene η , dass die Gerade h auch zur Schnittgerade g der Ebenen ϵ und η orthogonal ist. Damit schneidet die Gerade h aufgrund des Satzes 2.2.2.2 die Ebene ϵ und Gerade g in dem gleichen Punkt.

Für jeden Punkt auf der Geraden h ist dieser Schnittpunkt gleich dem eindeutig bestimmten Lotfußpunkt des Punktes auf der Ebene ϵ sowie gleich dem eindeutig bestimmten Lotfußpunkt des Punktes auf der Geraden g innerhalb der Ebene η (siehe Kapitel 4.2.2 zur eindeutigen Existenz der Lotfußpunkte). Daraus folgt mit dem Satz 4.1.1.4, dass die Geradenspiegelung \tilde{g}_η in der (nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene) η jeden Punkt der Geraden h auf denselben Punkt wie die Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ abbildet.

Schritt II: Wir zeigen abschließend, dass auch jeder nicht auf der Geraden h , innerhalb der Ebene η liegende Punkt X unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ und der Geradenspiegelung \tilde{g}_η den gleichen Bildpunkt besitzt. Hierzu betrachten wir auf der Ebene ϵ das Lot des Punktes X ; es sei $l := (X \perp \epsilon)$, und wir zeigen, dass dieses ebenso wie die Gerade h in der Ebene η liegt, woraus analog zum zuvor bewiesenen ersten Beweisschritt das zu Zeigende folgt:

Als zwei zur Ebene ϵ orthogonale Geraden sind die Geraden h und l nach dem Satz 4.2.2.1b) zueinander parallel. Damit gilt im Allgemeinen die Komplanarität der Geraden. Nach Voraussetzung geht die Gerade l durch den in der Ebene η , aber nicht auf der Geraden h liegenden Punkt X , und die Gerade h liegt in der Ebene η . Folglich liegen die Geraden h und l aufgrund ihrer Komplanarität nach dem Satz 3.1.1.4 gemeinsam in der Ebene η . Die Gerade l stellt also eine Gerade der Ebene η dar, womit wir das zu Zeigende analog zum ersten Beweisschritt erhalten. \square

Allgemein erhalten wir für eine Geradenspiegelung $\tilde{g}|_\epsilon$ einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ im metrisch-normalen euklidischen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit

dem soeben nachgewiesenen Satz 4.3.1.2, dass sich die Geradenspiegelung als die Restriktion einer Ebenenspiegelung auffassen lässt: In der Ebene ϵ als eine metrisch-normale euklidische Ebene ist die Gerade g zur Geraden $m_{A,B}|_{\epsilon}$ für zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene ϵ , also zum Schnitt der Ebene $m_{A,B}$ und Ebene ϵ identisch (siehe Bemerkung 2.2.2.9). Die beiden Ebenen sind entsprechend der Definition 3.1.2.10 zueinander orthogonal, wobei die Gerade g die Schnittgerade beider Ebenen darstellt. Folglich ist die Geradenspiegelung \tilde{g}_{ϵ} innerhalb der Ebene ϵ nach dem Satz 4.3.1.2 zur Restriktion der Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ auf die Ebene ϵ identisch.

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eröffnet der Satz 4.3.1.2 basierend auf der Analogie zwischen den definitorischen Festlegungen die Möglichkeit, Eigenschaften der Ebenenspiegelungen auf die in meiner Masterarbeit (2018) im Rahmen der Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene untersuchten Geradenspiegelungen zurückzuführen; zugleich sind zur Untersuchung entsprechend der definitorischen Festlegungen die Punktspiegelungen elementar. Auf dieser Basis untersuchen wir im Weiteren mit den Sätzen 4.3.1.3/4.3.1.5/4.3.1.6 die Ebenenspiegelungen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Nicht zuletzt zeigen wir mit dem Satz 4.3.1.3, dass die Ebenenspiegelungen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ Kongruenzabbildungen darstellen, sich damit nicht von den Geradenspiegelungen in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene unterscheiden:

Satz-Masterarbeit 5.1.2.2(e). (vgl. Lauer 2018, S. 56–59) Jede Geradenspiegelung einer metrisch-normalen euklidischen Ebene ist eine Kongruenzabbildung der Ebene.

Satz 4.3.1.3. Jede Ebenenspiegelung innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist eine Kongruenzabbildung des Raumes.

Beweis: (Eigener Beweis)

Es sei eine Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ gegeben. Wir zeigen zunächst die Bijektivität der Ebenenspiegelung, bevor wir deren Abstandstreue nachweisen.

1) Die Herleitung der Bijektivität differenzieren wir in die Surjektivität und Injektivität.

Surjektivität: Es sei ein beliebiger Punkt Y innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gegeben. Aufgrund des Satzes 4.2.2.5 besitzt der Punkt auf der Ebene ϵ genau einen Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^Y$. Die räumliche Punktspiegelung an diesem Lotfußpunkt ist aufgrund

des Satzes 4.1.1.5 eine bijektive Selbstabbildung der Punktmenge \mathcal{P} des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Folglich existiert genau ein Punkt X , dessen Bild unter der Punktspiegelung $\tilde{F}_{\perp\epsilon}^Y$ gleich dem Punkt Y ist. Der definitorischen Festlegung einer Punktspiegelung entsprechend (siehe Definition 4.1.1.3), liegt der Punkt X auf der Verbindungsgerade durch den Punkt Y und dessen Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^Y$. Damit folgt aus dem Satz 4.2.2.5, dass sich der Lotfußpunkt des Punktes X und des Punktes Y auf der Ebene ϵ nicht voneinander unterscheiden. Für den Punkt Y erhalten wir zusammenfassend, dass der Punkt gleich dem Bildpunkt des Punktes X unter der Punktspiegelung an dessen Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^X$ und somit gleich dem Bildpunkt des Punktes X unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ ist.

Injektivität: Es seien zwei zueinander identische Bildpunkte zweier Punkte X_1 und X_2 unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ gegeben; es sei also $Y := \tilde{\epsilon}(X_1) = \tilde{\epsilon}(X_2)$. Unter Berücksichtigung, dass die Lotfußpunkte eines Punktes und seines Bildpunktes unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ sich auf der Ebene ϵ nicht voneinander unterscheiden (siehe Definition 4.3.1.1), impliziert der soeben erfolgte Nachweis der Surjektivität neben der Existenz zugleich die Eindeutigkeit eines Punktes X , dessen Bild unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ gleich dem Punkt Y ist. Die Punkte X_1 und X_2 sind also stets zueinander identisch.

2) Den Nachweis der Abstandstreue führen wir auf die Geradenspiegelungen als Kongruenzabbildungen innerhalb einer metrisch-normalen euklidischen Ebene zurück. Es seien zwei zueinander verschiedene Punkte X_1 und X_2 gegeben. Mit dem Satz 4.2.2.5 betrachten wir das eindeutig bestimmte Lot des Punktes X_1 auf die Ebene ϵ ; es sei $l := (X_1 \perp \epsilon)$.

Liegt der Punkt X_2 nicht auf dem Lot l , so existiert nach dem Satz 3.1.1.4 genau eine Ebene η , in der das Lot l und der Punkt X_2 gemeinsam liegen. Zusammen mit der Definition der Orthogonalität zwischen Ebenen erhalten wir (siehe hierzu Definition 3.1.2.10), dass die Ebene η eine durch die Punkte X_1 und X_2 gehende, zur Ebene ϵ orthogonale Ebene ist. Nach dem Satz 4.3.1.2 ist die Geradenspiegelung an der Schnittgeraden der Ebenen ϵ und η innerhalb der nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene η gleich der Restriktion der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ auf die Ebene η , womit die Gleichheit der Abstände $d(X_1, X_2)$ und $d(\tilde{\epsilon}(X_1), \tilde{\epsilon}(X_2))$ gilt. Liegt der Punkt X_2 auf dem Lot l , so liegen die Punkte X_1 und X_2 bereits aufgrund der definitorischen Festlegung einer Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gemeinsam in einer zur Ebene ϵ orthogonalen Ebene. Schließlich erhalten wir stets, dass die Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ abstandstreu ist. \square

Korollar 4.3.1.4. Jede Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ist eine Involution, d.h. $\tilde{\epsilon} \circ \tilde{\epsilon} = id_{\mathcal{P}}$.

Beweis: (Eigener Beweis)

Es sei ein Punkt X des metrisch-normalen euklidischen Raumes gegeben. Basierend auf der definitorischen Festlegung der Ebenenspiegelungen liefert der Beweis der Surjektivität in dem soeben nachgewiesenen Satz 4.3.1.3, dass unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ der Punkt X als Urbildpunkt eindeutig als der Bildpunkt seines Bildpunktes bestimmt ist. Hiermit erhalten wir umgekehrt die Gleichung $\tilde{\epsilon}(\tilde{\epsilon}(X)) = X$. \square

Satz-Masterarbeit 5.1.2.2 (a) bzw. (f). (vgl. Lauer 2018, S. 56–59) Für die Geradenspiegelung an einer Geraden g in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ ist...

- a) ...die Menge aller Fixpunkte gleich der Punktmenge der Geraden g .
- b) ...die Menge aller Fixgeraden gleich der Menge aller Geraden, die zur Geraden g identisch oder innerhalb der Ebene ϵ zur Geraden g orthogonal sind.

Satz 4.3.1.5. Für jede Ebenenspiegelung an einer Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist...

- a) ...die Menge aller Fixpunkte gleich der Punktmenge der Ebene ϵ .
- b) ...die Menge aller Fixgeraden gleich der Menge aller Geraden, die in der Ebene ϵ liegen oder zur Ebene ϵ orthogonal sind.
- c) ...die Menge aller Fixebenen gleich der Menge aller Ebenen, die zur Ebene ϵ identisch oder orthogonal sind.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz a: vgl. Lauer 2018, S. 56 f.)

a) Jeder in der Ebene ϵ liegende Punkt X ist zugleich dessen eindeutig bestimmter Lotfußpunkt auf der Ebene ϵ (siehe Kapitel 4.2.2 zur eindeutigen Existenz des Lotfußpunktes). Damit bildet die Punktspiegelung an diesem Lotfußpunkt den Punkt X nach dem Korollar 4.1.1.6 wiederum auf sich selbst ab, womit der Punkt X ebenfalls ein Fixpunkt der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass jeder Fixpunkt X' der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ ein Punkt der Ebene ϵ darstellt. Das Bild des Punktes X' ist unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ per definitionem

das gleiche wie unter der Punktspiegelung an dem Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^{X'}$ des Punktes X' auf der Ebene ϵ . Der Punkt X' ist also ebenfalls ein Fixpunkt der Punktspiegelung $\tilde{F}_{\perp\epsilon}^{X'}$. Diese Punktspiegelung wiederum besitzt nach dem Korollar 4.1.1.6 den Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^{X'}$ als einzigen Fixpunkt, sodass der Punkt X' zu dessen Lotfußpunkt auf der Ebene ϵ identisch und somit ein Punkt der Ebene ϵ ist. \square

b) Jede Ebenenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung, sodass mit dem Satz 3.4.4 die Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ grundsätzlich jede Gerade wiederum auf eine Gerade abbildet. Dabei liefert die soeben nachgewiesene Aussage a) umgekehrt, dass jede in der Ebene ϵ liegende Gerade eine Fixgerade der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ darstellt. Ist eine Gerade zur Ebene ϵ orthogonal, so schneiden sich die Gerade und die Ebene ϵ aufgrund ihrer Orthogonalität in genau einem Punkt (siehe hierzu Kapitel 3.1.2). Dabei ist das Bild der Geraden unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ per definitionem das gleiche wie unter der Punktspiegelung an dem Schnittpunkt der Geraden und Ebene, womit die Gerade nach dem Korollar 4.1.1.8 eine Fixgerade der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ darstellt.

Es bleibt zu zeigen, dass jede Fixgerade der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ in der Ebene ϵ liegt oder zur Ebene ϵ orthogonal ist. Es sei g eine Fixgerade der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$. Entsprechend der definitorischen Festlegung der Ebenenspiegelung gilt, dass das Bild eines auf der Geraden g liegenden Punktes X unter der Punktspiegelung an dessen Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^X$ auf der Ebene ϵ wiederum auf der Geraden g liegt. Damit liefert die definitorische Festlegung einer Punktspiegelung (siehe Definition 4.1.1.3), dass der jeweilige Lotfußpunkt selbst auf der Geraden g liegt. Folglich sind die Gerade g und die Ebene ϵ nicht disjunkt. Vielmehr ist die Gerade g entweder aufgrund des Satzes 4.2.2.5 eine zur Ebene ϵ orthogonale Gerade oder aufgrund des Satzes 2.2.2.1 eine Gerade innerhalb der Ebene ϵ . \square

c) Jede Ebenenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung, sodass mit dem Satz 3.4.4 die Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ grundsätzlich jede Ebene wiederum auf eine Ebene abbildet. Dabei liefert die soeben nachgewiesene Aussage a) und der Satz 4.3.1.2, dass die Ebene ϵ selbst bzw. jede zur Ebene ϵ orthogonale Ebene eine Fixebene der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ darstellt.

Es bleibt zu zeigen, dass jede Fixebene η der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ gleich der Ebene ϵ oder eine zur Ebene ϵ orthogonale Ebene ist. Analog zu dem entsprechenden Nachweis im Rahmen der soeben nachgewiesenen Aussage b) erhalten wir, dass die Ebene η entweder zur Ebene ϵ identisch oder entsprechend der Definition 3.1.2.10 zur Ebene ϵ orthogonal ist. \square

Mit dem soeben nachgewiesenen Satz 4.3.1.5 gilt für zwei zueinander nicht orthogonale, sich in einer Geraden g schneidende Ebenen ϵ und η , dass unter der Ebenenspiegelung an der Ebene ϵ die Schnittgerade g eine Fixgerade, die Ebene η jedoch keine Fixebene darstellt. Damit schneiden sich ebenfalls die Ebene η und ihre Bildebene unter der Ebenenspiegelung (in der Geraden g). Analoges ergibt sich für eine zur Ebene ϵ nicht orthogonale, die Ebene in einem Punkt schneidende Gerade. Im Gegensatz zu den Punktspiegelungen und Translationen erhalten wir zusammenfassend (siehe hierzu Kapitel 4.1.1 bzw. 4.1.2), dass eine Ebenenspiegelung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ nicht jede Ebene und Gerade derart abbildet, dass die Ebene und Bildebene bzw. Gerade und Bildgerade zueinander parallel sind.

Schneiden sich im Allgemeinen eine Ebene η und deren Bildebene unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$, so liefert das Korollar 4.3.1.4 unter Berücksichtigung, dass das Bild einer jeden Schnittmenge unter der Ebenenspiegelung als bijektive Abbildung gleich dem Schnitt der einzelnen Bildmengen ist, dass das Bild der Schnittgeraden unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ sowohl in der Ebene η als auch in der Bildebene $\tilde{\epsilon}[\eta]$ liegt. Folglich ist die Schnittgerade eine Fixgerade der Ebenenspiegelung.

Aufgrund des Satzes 4.3.1.5 besitzt jede Fixgerade unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ mit der Ebene ϵ mindestens einen Punkt gemeinsam, sodass wir mit dem Vorherigen erhalten, dass das Bild einer zur Ebene ϵ disjunkten Ebene η unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ eine zur Ebene η disjunkte (parallele) Ebene ist. Analog erhalten wir für eine zur Ebene ϵ disjunkte Gerade g , dass die Gerade und deren Bildgerade unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ zueinander disjunkt sind. Die Komplanarität beider Geraden, und damit ihre Parallelität, führen wir auf den soeben nachgewiesenen Satz 4.3.1.5 zurück. Jeder Punkt auf der Geraden g besitzt nach dem Satz 4.2.2.5 genau ein Lot auf der Ebene ϵ . Dabei ist das Lot zur Geraden g verschieden, da die Gerade als eine zur Ebene ϵ disjunkte Ebene, keine zur Ebene orthogonale Gerade darstellt (siehe hierzu Kapitel 3.1.2). Zusammen mit dem Satz 3.1.1.5 erhalten wir, dass das Lot und die Gerade g gemeinsam in einer eindeutig bestimmten Ebene liegen. Diese Ebene stellt entsprechend der definitorischen Festlegung der Orthogonalität zwischen Ebenen eine zur Ebene ϵ orthogonale Ebene dar (siehe Definition 3.1.2.10). Damit ist die Ebene nach dem Satz 4.3.1.5 eine Fixebene der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$, sodass die Gerade g und deren Bildgerade unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ gemeinsam in einer Ebene liegen.

Satz-Masterarbeit 5.1.2.2 (b) u. (c). (vgl. Lauer 2018, S. 56 f.) Es seien zwei verschiedene Punkte A und B sowie eine Gerade g innerhalb einer metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ gegeben. Der Punkt B ist genau dann zum Bild des Punktes A unter der Geradenspiegelung \tilde{g}_ϵ identisch, wenn die Gerade g zur Geraden $m_{A,B}|_\epsilon$ identisch ist.

Satz 4.3.1.6. Es seien zwei verschiedene Punkte A und B sowie eine Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_\equiv)$ gegeben. Der Punkt B ist genau dann zum Bild des Punktes A unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ identisch, wenn die Ebene ϵ zur Ebene $m_{A,B}$ identisch ist.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Lauer 2018, S. 56 f.)

Wir differenzieren den Nachweis in die einzelnen Implikationen.

„ \Rightarrow “: Es gelte $\tilde{\epsilon}(A) = B$. Damit ist entsprechend der definitorischen Festlegung einer Ebenenspiegelung das Bild des Punktes A unter Punktspiegelung an dem Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^A$ des Punktes A auf der Ebene ϵ zum Punkt B identisch. Aufgrund der Verschiedenheit der Punkte A und B folgt daraus mit dem Satz 4.1.1.9, dass der Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^A$ zum Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und der Ebene $m_{A,B}$ identisch ist. Einerseits erhalten wir, dass der Lotfußpunkt sowohl in der Ebene ϵ als auch in der Ebene $m_{A,B}$ liegt. Andererseits erhalten wir, dass die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ zum Lot des Punktes A auf der Ebene ϵ identisch, also zur Ebene ϵ orthogonal ist. Zugleich ist die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ entsprechend der definitorischen Festlegung der Orthogonalität zwischen einer Geraden und Ebene zur Ebene $m_{A,B}$ orthogonal (siehe Definition 3.1.2.9), sodass die Ebenen $m_{A,B}$ und ϵ nach dem Satz 4.2.2.3 parallel sind. Daraus folgt zusammen mit der Lage des Lotfußpunktes $F_{\perp\epsilon}^A$ in den Ebenen ϵ und $m_{A,B}$, dass die beiden Ebenen zueinander identisch sind.

„ \Leftarrow “: Es gelte $m_{A,B} = \epsilon$. Dann ist die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ entsprechend der definitorischen Festlegung der Orthogonalität zwischen einer Geraden und Ebene zur Ebene ϵ orthogonal (siehe Definition 3.1.2.9), wobei der eindeutig bestimmte Lotfußpunkt $F_{\perp\epsilon}^A$ des Punktes A auf der Ebene ϵ gleich dem Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und der Ebene $m_{A,B}$ ist (siehe Kapitel 4.2.2 zur eindeutigen Existenz des Lotfußpunktes). Damit liefert der Satz 4.1.1.9, dass die Punktspiegelung $\tilde{F}_{\perp\epsilon}^A$ den Punkt A auf den Punkt B abbildet, also dass das Bild des Punktes A unter der Ebenenspiegelung an der Ebene ϵ zum Punkt B identisch ist. \square

Dem Nachweis des Satzes 4.3.1.6 liegt die Aussage des Satzes 4.1.1.9 zugrunde, und zwar, dass für zwei Punkte A und B *genau* eine Punktspiegelung derart existiert, dass der Punkt A auf den Punkt B abgebildet wird. In dieser Hinsicht impliziert der Satz 4.3.1.6 ebenfalls die eindeutige Existenz einer Ebenenspiegelung, jedoch mit dem Unterschied, dass die Verschiedenheit der Punkte A und B hier vorauszusetzen ist (vgl. Schröder 2014b, S. 60; Schröder 2014a, S. 52). Im Falle der Gleichheit gilt die Eindeutigkeit aufgrund des Satzes 4.3.1.5 im Allgemeinen nicht, da in diesem Fall jede Ebenenspiegelung an einer durch den Punkt A bzw. B gehenden Ebene die beiden Punkte aufeinander abbildet.

4.3.2 Kongruenzabbildungen – Verkettung von Ebenenspiegelungen

In einer metrisch-normalen euklidischen Ebene lässt sich jede ebene Kongruenzabbildung als eine Verkettung von Geradenspiegelungen darlegen, wobei in keinem Fall mehr als drei Geradenspiegelungen notwendig sind (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 70). Das raumgeometrische Pendant zu den Geradenspiegelungen einer metrisch-normalen euklidischen Ebene beschreiben innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Ebenenspiegelungen (siehe Kapitel 4.3.1). Ziel des vorliegenden Kapitels ist der Nachweis, dass sich innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ jede räumliche Kongruenzabbildung als eine Verkettung von Ebenenspiegelungen, von höchstens vier Ebenenspiegelungen auffassen lässt (siehe Satz 4.3.2.5). Elementar ist in diesem Zusammenhang der Satz 4.3.2.3. Zugleich ist dieser bzw. dessen Korollar wesentlich zur Diskussion der „Kongruenz geometrischer Figuren“ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in Kapitel 4.3.3. Die Vorgehensweise innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ orientiert sich im Rahmen des vorliegenden Kapitels im Allgemeinen an Quaisser (1989, S. 83–86).

Zum Beweis des Satzes 4.3.2.3 weisen wir die Lemmata 4.3.2.1 und 4.3.2.2 nach. Im Hinblick auf die Aussage des Lemmas 4.3.2.2 sei berücksichtigt, dass nicht ausschließlich Bezug auf zwei verschiedene Halbebenen einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ genommen wird, sondern auch zwei verschiedene Halbebenen zweier unterschiedlicher Ebenen inbegriffen sind. Gleichwohl zwingend ist die Voraussetzung der identischen Randgeraden beider Halbebenen.

Lemma 4.3.2.1. Es seien zwei verschiedene Halbgeraden mit einem gemeinsam Anfangspunkt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben.

Dann existiert genau eine Ebenenspiegelung, die die beiden Halbgeraden aufeinander abbildet; der gemeinsame Anfangspunkt beider Halbgeraden stellt dabei ein Fixpunkt der Ebenenspiegelung dar.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Quaisser 1989, S. 83 u. 124)

Es seien $[B, A)$ und $[B, C)$ zwei verschiedene Halbgeraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt B durch den Punkt A bzw. C . Mit dem Korollar 4.3.1.4 zeigen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die eindeutige Existenz einer Ebenenspiegelung, die die Halbgerade $[B, A)$ auf die Halbgerade $[B, C)$ abbildet. Die Existenz des Punktes B als Fixpunkt der Ebenenspiegelung ergibt sich dabei implizit:

Existenz: Nach dem Lemma 4.1.1.1 existiert auf der Halbgeraden $[B, C)$ genau ein Punkt D , dessen Abstand zum Punkt B gleich dem Abstand der Punkte A und B ist. Es sei $\epsilon := m_{A,D}$; wir betrachten im Weiteren die Ebenenspiegelung an der Ebene ϵ . Nach dem Satz 4.3.1.5 stellt der Punkt B ein Fixpunkt der Ebenenspiegelung dar. Ferner bildet die Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ nach dem Satz 4.3.1.6 den Punkt A auf den Punkt D ab. Aufgrund des Korollars 3.2.1.3 erhalten wir zusammenfassend mit der nach dem Satz 3.4.7 geltenden Halbgeradentreue der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ als Kongruenzabbildung, dass das Bild der Halbgeraden $[B, A)$ unter der Ebenenspiegelung gleich der Halbgeraden $[B, C)$ ist.

Eindeutigkeit: Jede Ebenenspiegelung ist als eine Kongruenzabbildung des metrisch-normalen euklidischen Raumes entsprechend des Satzes 3.4.7 halbgeradentreu. Damit besitzt jede Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$, die die Halbgerade $[B, A)$ auf die Halbgerade $[B, C)$ abbildet, den Punkt B als Fixpunkt. Ferner ist jede Ebenenspiegelung als eine Kongruenzabbildung abstandstreu. Damit erhalten wir für die Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ weiter, dass sie den Punkt A ebenso wie die Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ auf den Punkt D abbildet, auf den auf der Halbgeraden $[B, C)$ eindeutig bestimmte Punkt, dessen Abstand zum Punkt B gleich dem Abstand der Punkte A und B ist. Hieraus folgt mit dem Satz 4.3.1.6, dass die Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ zur Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}$ identisch ist. \square

Lemma 4.3.2.2. Es seien zwei verschiedene Halbebenen mit je einer identischen Randgeraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben.

Dann existiert genau eine Ebenenspiegelung, die die Halbebenen aufeinander abbildet; die gemeinsame Randgerade stellt dabei eine Fixgerade dar, deren Punkte wiederum Fixpunkte der Ebenenspiegelung sind.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: vgl. Quaisser 1989, S. 83 u. 124)

Es seien \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 zwei verschiedene Halbebenen mit je einer gemeinsamen Randgerade g . Wir zeigen mit dem Korollar 4.3.1.4 ohne Beschränkung der Allgemeinheit die eindeutige Existenz einer Ebenenspiegelung, die die Halbebene \mathfrak{H}_1 auf die Halbebene \mathfrak{H}_2 abbildet. Diesbezüglich differenzieren wir, ob die Halbebenen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 mit der gemeinsamen Randgeraden g Halbebenen einer gemeinsamen Ebene oder unterschiedlicher Ebenen sind. Die Existenz der Geraden g als Fixgerade und derer Punkte als Fixpunkte der Ebenenspiegelung ergibt sich dabei implizit:

1. Fall: Die Halbebenen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 seien zwei verschiedene Halbebenen unterschiedlicher Ebenen mit der gemeinsamen Randgeraden g ; es sei ϵ_1 die Ebene, die der Halbebene \mathfrak{H}_1 zugrunde liegt, und ϵ_2 die Ebene, die der Halbebene \mathfrak{H}_2 zugrunde liegt.

Zur Existenz: Die Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 schneiden sich in der Geraden g . Für einen Punkt M der Geraden g existiert sowohl in der Ebene ϵ_1 genau eine Gerade l_1 als auch in der Ebene ϵ_2 genau eine Gerade l_2 derart, dass die Geraden g und l_1 sowie die Geraden g und l_2 zwei durch den Punkt M gehende, zueinander orthogonale Geraden sind (siehe Kapitel 4.2.2 zur eindeutigen Existenz). Dabei schneiden sich die Geraden l_1 und l_2 in dem Punkt M , womit sie nach dem Satz 3.1.1.5 gemeinsam in genau einer Ebene liegen.

Zusammen mit dem Satz 4.2.2.4 liefert der Satz 4.2.2.5, dass die Gerade g die einzige Gerade innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes ist, die durch den Punkt M geht und zur Geraden l_1 und l_2 orthogonal ist. Weiter erhalten wir aufgrund des Korollars 3.2.1.12 mit dem Lemma 4.1.1.1, dass auf der Geraden l_1 ein Punkt A und auf der Geraden l_2 ein Punkt B derart existiert, dass beide Punkte zum Punkt M den gleichen Abstand besitzen und bezüglich der Halbebenen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 in unterschiedlichen Halbebenen liegen; der Punkt A liegt in der Halbebene \mathfrak{H}_1 und der Punkt B in der Halbebene \mathfrak{H}_2 .

Es sei im Weiteren $\eta := m_{A,B}$; wir betrachten die Ebenenspiegelung an der Ebene η . Die Ebenenspiegelung bildet nach dem Satz 4.3.1.5 den Punkt M auf sich selbst und nach dem

Satz 4.3.1.6 den Punkt A auf den Punkt B ab. Damit bildet die Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ aufgrund des Korollars 4.3.1.4 mit ihrer nach dem Satz 3.4.4 geltenden Geradentreue als Kongruenzabbildung die Geraden l_1 und l_2 aufeinander ab. Unter Berücksichtigung, dass die Gerade g die einzige durch den Punkt M gehende, zur Geraden l_1 und l_2 orthogonale Gerade innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes ist, erhalten wir mit der nach dem Korollar 3.4.5 geltenden Orthogonalitätstreue der Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ als Kongruenzabbildung weiter, dass die Gerade g eine Fixgerade der Ebenenspiegelung ist. Zusammenfassend liefert die nach dem Satz 3.4.7 geltende Halbebenentreue der Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ als Kongruenzabbildung, dass das Bild der Halbebene \mathfrak{H}_1 unter der Ebenenspiegelung gleich der Halbebene \mathfrak{H}_2 ist.

Zur Eindeutigkeit: Jede Ebenenspiegelung ist als Kongruenzabbildung entsprechend dem Satz 3.4.7 halbebenentreu. Demnach besitzt jede Ebenenspiegelung $\tilde{\sigma}$, die die Halbebene \mathfrak{H}_1 auf die Halbebene \mathfrak{H}_2 abbildet, die gemeinsame Randgerade g als Fixgerade. Damit liefert der Satz 4.3.1.5 aufgrund der Verschiedenheit der Ebenen ϵ_1 und ϵ_2 , unter Berücksichtigung der definitorischen Festlegung der Orthogonalität zwischen Ebenen (siehe Definition 3.1.2.10), dass die Gerade g in der Ebene σ liegt; folglich ist jeder Punkt der Geraden g sogar ein Fixpunkt der Ebenenspiegelung $\tilde{\sigma}$. Damit besitzt die Ebenenspiegelung $\tilde{\sigma}$ ebenso wie die Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ den Punkt M der Geraden g als Fixpunkt.

Mit den Punkten A und B existieren in der Halbebene \mathfrak{H}_1 bzw. \mathfrak{H}_2 , auf der innerhalb der Ebene ϵ_1 bzw. ϵ_2 eindeutig bestimmten durch den Punkt M orthogonalen Geraden l_1 bzw. l_2 zwei Punkten mit dem gleichen Abstand zum Punkt M . Schließlich erhalten wir mit der Abstandstreue und der nach dem Korollar 3.4.5 geltenden Orthogonalitätstreue der Ebenenspiegelung $\tilde{\sigma}$ als Kongruenzabbildung, dass sie den Punkt A ebenso wie die Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ auf den Punkt B abbildet. Hieraus folgt mit dem Satz 4.3.1.6, dass die Ebenenspiegelungen $\tilde{\sigma}$ und $\tilde{\eta}$ zueinander identisch sind.

2. Fall: Die Halbebenen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 seien zwei verschiedene Halbebenen einer gemeinsamen Ebene ϵ mit der Randgeraden g .

Zur Existenz: Nach dem Satz 2.2.2.6 ist die Ebene ϵ eine metrisch-normale euklidische Ebene des Raumes. Damit ist die Gerade g innerhalb der Ebene ϵ zur Geraden $m_{A,B}|_\epsilon$ für zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene ϵ , also zum Schnitt der Ebenen $m_{A,B}$ und ϵ

identisch (siehe Bemerkung 2.2.2.9). Aufgrund des Satzes 2.2.2.2 folgt dabei aus dem Korollar 3.2.1.12 mit dem Lemma 4.1.1.1, dass die Punkte A und B in verschiedenen Halbebenen liegen; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Punkt A ein Punkt der Halbebene \mathfrak{H}_1 und der Punkt B ein Punkt der Halbebene \mathfrak{H}_2 .

Es sei im Weiteren $\eta := m_{A,B}$; wir betrachten die Ebenenspiegelung an der Ebene η . Die Ebenenspiegelung bildet nach dem Satz 4.3.1.5 die Gerade g auf sich selbst und nach dem Satz 4.3.1.6 den Punkt A auf den Punkt B ab. Zusammenfassend erhalten wir mit der nach dem Satz 3.4.7 geltenden Halbebenentreue der Ebenenspiegelung $\tilde{\eta}$ als Kongruenzabbildung, dass das Bild der Halbebene \mathfrak{H}_1 unter der Ebenenspiegelung gleich der Halbebene \mathfrak{H}_2 ist.

Zur Eindeutigkeit: Jede Ebenenspiegelung ist als Kongruenzabbildung entsprechend dem Satz 3.4.7 halbebenentreu. Damit besitzt jede Ebenenspiegelung $\tilde{\sigma}$, die die Halbebene \mathfrak{H}_1 auf die Halbebene \mathfrak{H}_2 abbildet, die gemeinsame Randgerade g als Fixgerade. Nach dem Satz 4.3.1.5 ist die Gerade entweder zur Ebene σ orthogonal oder eine in der Ebene σ liegende Gerade. Gilt der letztgenannte Fall erhalten wir mit der per definitionem geltenden Orthogonalität der Geraden g und $m_{A,B}|_\epsilon$ das zu Zeigende analog zum Eindeutigkeitsbeweis des ersten Falls. Wir schließen im Weiteren den Fall, dass die Gerade g zur Ebene σ orthogonal ist, mittels eines Widerspruchsbeweises aus:

Es sei also angenommen, dass die Gerade g zur Ebene σ orthogonal ist. Entsprechend der definitorischen Festlegung der Orthogonalität zwischen Ebenen sind damit auch die Ebenen ϵ und σ zueinander orthogonal. Aufgrund ihrer Orthogonalität schneiden sich beide Ebenen in einer Geraden (siehe Kapitel 3.1.2). Nach dem Satz 4.3.1.5 ist diese Schnittgerade eine Fixgerade unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\sigma}$ derart, dass deren Punkte wiederum Fixpunkte sind. Ferner ist die Schnittgerade entsprechend der definitorischen Festlegung der Orthogonalität zwischen einer Geraden und/oder Ebene zur Geraden g orthogonal. Aufgrund ihrer Orthogonalität schneiden sich beide Geraden (siehe Kapitel 3.1.2). Mit dem Korollar 3.2.1.12 erhalten wir zusammenfassend, dass die Ebenenspiegelung $\tilde{\sigma}$ keine Ebenenspiegelung ist, die die Halbebene \mathfrak{H}_1 auf die Halbebene \mathfrak{H}_2 abbildet. Dies stellt einen Widerspruch dar. \square

Wir zeigen nun mit der Aussage a) des Satzes 4.3.2.3, dass für je vier nicht komplanare Punkte A, B, C und D sowie A', B', C' und D' innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ stets eine Verkettung von höchstens vier Ebenenspiegelungen derart existiert, dass ...

- i) das Bild des Punktes A zum Punkt A' ,
- ii) das Bild der Halbgeraden $[A, B)$ zur Halbgeraden $[A', B')$ sowie
- iii) das Bild der Halbebene $\mathfrak{H}\langle ABC \rangle$ zur Halbebene $\mathfrak{H}\langle A'B'C' \rangle$ und
- iv) das Bild des Halbraumes $\mathfrak{H}\langle ABCD \rangle$ zum Halbraum $\mathfrak{H}\langle A'B'C'D' \rangle$ identisch ist.

Jede Ebenenspiegelung ist nach dem Satz 4.3.1.3 eine räumliche Kongruenzabbildung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, sodass aufgrund des Satzes 3.4.3 jede Verkettung von Ebenenspiegelungen wiederum eine räumliche Kongruenzabbildung darstellt. Allgemein zeigen wir mit dem Teil b) des Satzes 4.3.2.3, dass innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ höchstens eine räumliche Kongruenzabbildung existieren kann, die die zuvor aufgeführten Eigenschaften i)-iv) erfüllt. Schließlich zeigen wir auf der Grundlage des Satzes 4.3.2.3 mit dem Satz 4.3.2.5, dass sich innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ jede räumliche Kongruenzabbildung als eine Verkettung von höchstens vier Ebenenspiegelungen auffassen lässt. Sprechen wir im Rahmen der Sätze 4.3.2.3 und 4.3.2.5 von den Eigenschaften i)/ii)/iii)/iv), so wird stets Bezug auf die zuvor aufgeführten Eigenschaften genommen.

Satz 4.3.2.3. Es seien vier nicht komplanare Punkte A, B, C und D sowie vier nicht komplanare Punkte A', B', C' und D' innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben. Dann gilt:

- a) Es existiert eine Verkettung von höchstens vier Ebenenspiegelungen derart, dass die Eigenschaften i)-iv) (siehe zuvor) gelten.
- b) Erfüllen zwei Kongruenzabbildungen Φ_1 und Φ_2 die Eigenschaften i)-iv) (siehe zuvor), so sind die Kongruenzabbildungen identisch, d.h. $\Phi_1(X) = \Phi_2(X)$ für jedes $X \in \mathcal{P}$.

Beweis: (a: Quaisser 1989, S. 85 f.; b: Quaisser 1989, S. 84)

a) Wir entwickeln das zu Zeigende sukzessiv entlang der Eigenschaften i)-iv). Hierzu halten wir fest, dass jede Verkettung von beliebig vielen Ebenenspiegelungen mit derer Eigenschaft als Kongruenzabbildung aufgrund des Satzes 3.4.3 wiederum eine Kongruenzabbildung darstellt und somit die Eigenschaften in den Sätzen 3.4.4 und 3.4.7 erfüllt:

Sind die Punkte A und A' verschieden, so liefert der Satz 4.3.1.6 die (eindeutige) Existenz einer Ebenenspiegelung, die den Punkt A auf den Punkt A' abbildet. Anderenfalls berücksichtigen wir, dass aufgrund der Nicht-Komplanarität der Punkte A, B, C und D bzw. A', B', C' und D' nach dem Satz 3.1.1.1 je genau eine Ebene existiert, die durch je genau drei der vier Punkte geht (siehe Bemerkung 3.1.1.3). Zusammen mit dem Satz 4.3.1.5 erhalten wir letztlich, dass stets eine Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}_1$ existiert, die die Eigenschaft i) erfüllt.

Folglich ist das Bild der Halbgeraden $[A, B)$ unter der Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}_1$ eine Halbgerade mit demselben Anfangspunkt wie die Halbgerade $[A', B')$. Liegt der Punkt $\tilde{\epsilon}_1(B)$ nicht auf der Halbgeraden $[A', B')$, so liefert das Lemma 4.3.2.1 die (eindeutige) Existenz einer Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}_2$, sodass die Verkettung $(\tilde{\epsilon}_2 \circ \tilde{\epsilon}_1)$ die Eigenschaften i)-ii) erfüllt. Anderenfalls erfüllt die Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}_1$ selbst die Eigenschaften. In jedem Fall existiert eine Verkettung $\psi_{\leq 2}$ von höchstens zwei Ebenenspiegelungen, die die Eigenschaften i)-ii) erfüllt.

Die Abbildung $\psi_{\leq 2}$ bildet damit zugleich jede Halbebene mit der Randgeraden $\langle A, B \rangle$ auf eine Halbebene mit der Randgeraden $\langle A', B' \rangle$ ab. Diesbezüglich ist es durchaus möglich, dass die Abbildung $\psi_{\leq 2}$ bereits die Halbebene mit dem Punkt C als Element auf die Halbebene mit dem Punkt C' als Element abbildet. Anderenfalls liefert das Lemma 4.3.2.2 die (eindeutige) Existenz einer Ebenenspiegelung $\tilde{\epsilon}_3$, sodass die Verkettung $(\tilde{\epsilon}_3 \circ \psi_{\leq 2})$ die Eigenschaften i)-iii) erfüllt. Folglich existiert eine Verkettung $\psi_{\leq 3}$ von höchstens drei Ebenenspiegelungen, die die Eigenschaften i)-iii) erfüllt.

Dabei bildet die Abbildung $\psi_{\leq 3}$ die beiden Halbräume mit der Randebene $\langle A, B, C \rangle$ je auf einen unterschiedlichen Halbraum mit der Randebene $\langle A', B', C' \rangle$ ab. Diesbezüglich ist es durchaus möglich, dass die Abbildung den Halbraum mit dem Punkt D als Element auf den Halbraum mit dem Punkt D' als Element abbildet. Anderenfalls betrachten wir die Spiegelung an der Ebene $\langle A', B', C' \rangle := \epsilon_4$. Hier liefert die definitorische Festlegung einer Ebenenspiegelung zusammen mit dem Satz 4.3.1.5, dass die Verkettung $(\tilde{\epsilon}_4 \circ \psi_{\leq 3})$ die Eigenschaften i)-iv) erfüllt. Schließlich existiert eine Verkettung von höchstens vier Ebenenspiegelungen, die die Eigenschaften i)-iv) erfüllt. \square

b) Allgemein gilt aufgrund des Satzes 3.4.3, dass jede Kongruenzabbildung wiederum eine Kongruenzabbildung als Umkehrabbildung besitzt und dass die Verkettung beliebig vieler Kongruenzabbildungen wiederum eine Kongruenzabbildung ist. Damit betrachten wir die Verkettung der Kongruenzabbildung Φ_2 mit der Umkehrabbildung Φ_1^{-1} der Kongruenzabbildung Φ_1 und zeigen, dass diese Verkettung als Kongruenzabbildung jeden Punkt des metrisch-normalen euklidischen Raumes auf sich selbst abbildet; es sei $\Psi := (\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2)$.

Schritt I: Mit dem ersten Beweisschritt zeigen wir, dass jeder Punkt der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ ein Fixpunkt der Kongruenzabbildung Ψ ist. Nach Voraussetzung erfüllen die Kongruenzabbildungen Φ_1 und Φ_2 die Eigenschaften i)-iv). Zum einen folgt daraus, dass die Kongruenzabbildung Ψ die Halbgerade $[A, B)$ und deren komplementäre Halbgerade je auf sich selbst abbildet, wobei eben der Punkt A ein Fixpunkt ist. Damit liefert die Abstandstreue der Kongruenzabbildung Ψ zusammen mit dem Lemma 4.1.1.1, dass jeder Punkt der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ ein Fixpunkt der Kongruenzabbildung Ψ ist. Zum anderen ergibt sich, dass die Kongruenzabbildung Ψ die beiden Halbebenen der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ mit der Randgeraden $\langle A, B \rangle$ jeweils auf sich selbst abbildet. Damit zeigen wir letztlich, dass jeder Punkt, der in der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$, aber nicht auf der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ liegt, ebenfalls ein Fixpunkt der Kongruenzabbildung Ψ ist:

Für einen solchen Punkt X betrachten wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes die in der Ebene $\langle A, B, C \rangle$ liegende, durch den Punkt X gehende zur Verbindungsgerade der Punkte A und B eindeutig bestimmte orthogonale Gerade (siehe Kapitel 4.2.2 zur eindeutigen Existenz). Aufgrund ihrer Orthogonalität schneidet diese Gerade die Verbindungsgerade in genau einem Punkt X' (siehe hierzu Kapitel 3.1.2), sodass die Halbgerade (X', X) und deren komplementäre Halbgerade aufgrund des Korollars 3.2.1.12 innerhalb der Ebene $\langle A, B, C \rangle$ in verschiedenen Halbebenen mit der Randgeraden $\langle A, B \rangle$ liegen. Für die Kongruenzabbildung Ψ gilt dabei, dass sie jede der beiden Halbebenen wiederum auf sich selbst abbildet, wobei jeder Punkt der Randgeraden ein Fixpunkt ist. Zusammenfassend erhalten wir mit der nach dem Korollar 3.4.5 geltenden Orthogonalitätstreue der Kongruenzabbildung Ψ , unter Berücksichtigung der Eindeutigkeit einer Lotgeraden innerhalb einer Ebene des Raumes, dass die Kongruenzabbildung die Halbgerade $[X', X)$ ebenfalls auf sich selbst abbildet. Damit liefert die Abstandstreue der Kongruenzabbildung Ψ mit dem Lemma 4.1.1.1 schließlich, dass der Punkt X ein Fixpunkt ist.

Schritt II: Abschließend zeigen wir mit dem zweiten Beweisschritt, dass jeder Punkt des metrisch-normalen euklidischen Raumes, der nicht in der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ liegt, ebenfalls ein Fixpunkt der Kongruenzabbildung Ψ ist.

Für einen solchen Punkt X betrachten wir die nach dem Satz 4.2.2.5 eindeutig bestimmte zur Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ orthogonale Gerade. Jeder Punkt der Verbindungsebene ist nach dem ersten Beweisschritt unter der Kongruenzabbildung Ψ ein Fixpunkt. Ferner erfüllen die Kongruenzabbildungen Φ_1 und Φ_2 nach Voraussetzung die Eigenschaft iv), sodass die Kongruenzabbildung Ψ die beiden Halbräume der Randebene $\langle A, B, C \rangle$ jeweils auf sich selbst abbildet. Schließlich erhalten wir analog zum ersten Beweisschritt, dass der Punkt X ein Fixpunkt der Kongruenzabbildung Ψ ist. \square

Korollar 4.3.2.4. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ seien je vier nicht komplanare Punkte A, B, C und D sowie A', B', C' und D' gegeben.

Dann gibt es genau eine räumliche Kongruenzabbildung derart, dass die Eigenschaften i)-iv) in Satz 4.3.2.3 gelten, und zwar eine Verkettung von höchstens vier Ebenenspiegelungen.

Beweis: (Eigener Beweis)

Nach dem Satz 4.3.1.3 ist jede Ebenenspiegelung eine räumliche Kongruenzabbildung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, sodass aufgrund des Satzes 3.4.3 jede Verkettung von Ebenenspiegelungen wiederum eine räumliche Kongruenzabbildung darstellt. Hiermit folgt das zu Zeigende umgehend aus dem soeben nachgewiesenen Satz 4.3.2.3. \square

Satz 4.3.2.5. Jede räumliche Kongruenzabbildung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ entspricht einer Verkettung von höchstens vier Ebenenspiegelungen.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: Quaisser 1989, S. 86)

Es sei eine räumliche Kongruenzabbildung Φ gegeben. Nach dem Satz 3.1.1.2 existieren innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes (mindestens) vier nicht komplanare Punkte A, B, C und D . Aufgrund der Nicht-Komplanarität der Punkte existiert nach dem Satz 3.1.1.1 je genau eine Ebene, die durch je genau drei der vier Punkte geht (siehe Bemerkung 3.1.1.3). Wir betrachten die Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$. Weiter betrachten wir auf der Verbindungsgerade der Punkte A und B die Halbgerade $[A, B)$. Mit den Sätzen 3.4.4

und 3.4.7 erhalten wir, dass bezüglich der Punkte A, B, C und D sowie derer jeweiligen Bildpunkte $\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C)$ und $\Phi(D)$ unter der Kongruenzabbildung Φ die Voraussetzung samt der Eigenschaften i)-iv) in Satz 4.3.2.3 erfüllt sind. Damit folgt aus dem Korollar 4.3.2.4 des Satzes, dass die Kongruenzabbildung Φ gleich einer Verkettung von höchstens vier Ebenenspiegelungen ist. \square

Basierend auf dem Satz 4.3.2.5 ließe sich weiter die Gruppe der räumlichen Kongruenzabbildungen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in die Menge aller Kongruenzabbildungen bestehend aus der Verkettung von zwei, drei bzw. vier Ebenenspiegelungen klassifizieren und untersuchen; damit einher ginge die Darlegung weiterer spezieller räumlicher Kongruenzabbildungen. Der Leser sei an dieser Stelle auf die Arbeit von Quaisser (1989, S. 79–118) verwiesen. Auf eine entsprechende Diskussion wird in der vorliegenden Arbeit verzichtet. Eine explizite (gruppentheoretische) Untersuchung der Kongruenzabbildungen steht nicht im Fokus. Vielmehr ist die Untersuchung der Kongruenzabbildungen in der vorliegenden Arbeit eingerahmt in eine allgemeine Untersuchung der Kongruenz, unter dem hier übergeordneten Leitgedanken der „Räumlichen Kontextualisierung“ (siehe eingangs von Kapitel 4). Wir schließen im Weiteren mit einer Diskussion um die „Kongruenz geometrischer Figuren“ an.

4.3.3 Kongruenz geometrischer Figuren

Ziel des vorliegenden Kapitels ist es, die Möglichkeit zu eröffnen, die Kongruenz geometrischer Figuren innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf die Kongruenz zwischen geometrischen Figuren in einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes zurückzuführen. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ betrifft dies die Kongruenz zwischen geometrischen Figuren, die in verschiedenen Ebenen des Raumes liegen. Die zugrunde liegende Herangehensweise entwickelte sich im Dialog mit meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr. Frank, aus der Frage heraus, wie sich die Kongruenzsätze für Dreiecke innerhalb des metrisch-normalen eukli-

schen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ nachweisen lassen. Am Beispiel des „Kongruenzsatzes SSS“ sei die Vorgehensweise zunächst näher erläutert:

Mit der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene gilt der Kongruenzsatz innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ nach dem Satz 2.2.2.6 in jeder Ebene des Raumes (vgl. Lauer 2018, S. 74). Demnach sind zwei gemeinsam in einer Ebene liegende Dreiecke zueinander kongruent, wenn die Länge jeder Seite des einen Dreiecks zu je einer Seitenlänge des übrigen Dreiecks identisch ist (vgl. Benölken et al. 2018, S. 180).

Es seien nun zwei verschiedene Ebenen ϵ und η innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben; weiter sei in der Ebene ϵ ein Dreieck (A, B, C) sowie in der Ebene η ein Dreieck (A', B', C') derart gegeben, dass die Voraussetzungen des Kongruenzsatzes SSS erfüllt sind. Aufgrund des Satzes 3.1.1.1 sind die Ebenen ϵ und η jeweils durch die Eckpunkte der Dreiecke eindeutig bestimmt. Ferner erhalten wir mit der Verschiedenheit der beiden Ebenen die Existenz zweier Punkte D und D' , sodass die Punkte A, B, C und D sowie A', B', C' und D' jeweils nicht komplanar sind. Damit existiert aufgrund des Korollars 4.3.2.4 mit den Sätzen 3.4.4 und 3.4.7 eine räumliche Kongruenzabbildung, sodass das Bild des Dreiecks (A, B, C) unter der Kongruenzabbildung ein Dreieck (A^*, B^*, C^*) innerhalb der Ebene η darstellt. Folglich sind diese beiden Dreiecke innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zueinander kongruent. Zum anderen liefert die Abstandstreue der räumlichen Kongruenzabbildung, dass für die Dreiecke (A^*, B^*, C^*) und (A', B', C') wie nach Voraussetzung für die Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') die Voraussetzungen des Kongruenzsatzes SSS gelten. Mit der Gültigkeit des Kongruenzsatzes SSS in der Ebene η als eine nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normale euklidische Ebene des Raumes erhalten wir damit, dass die beiden Dreiecke (A^*, B^*, C^*) und (A', B', C') in dieser Ebene des Raumes zueinander kongruent sind.

Um letztlich, basierend auf der Eigenschaft der Kongruenzrelation als Äquivalenzrelation (siehe hierzu Kapitel 3.4), auf die Kongruenz der Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ schließen zu können, benötigen wir eine Äquivalenzaussage zwischen der „räumlichen“ und „ebenen“ Kongruenz. *Konkret: Zwei gemeinsam in einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ liegende geometrische Figuren werden unter einer räumlichen Kongruenzabbildung genau dann aufeinander abgebildet, wenn sie unter einer ebenen Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden.* Diese Aussage legen wir im Weiteren mit dem Satz 4.3.3.3

innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ dar. Grundlegend zeigen wir hierzu zunächst den Satz 4.3.3.2 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Für sich genommen ist mit diesem Satz bereits ein räumliches Analogon zum Kongruenzsatz SSS explizit innerhalb des Raumes bewiesen. Zum Beweis sei zuvor die Bemerkung 4.3.3.1 getroffen.

Bemerkung 4.3.3.1. Es sei eine nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normale euklidische Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gegeben. Mit der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene gilt der sogenannte Fixpunktsatz (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 59 f.). Dieser besagt, dass jede abstandstreue Selbstabbildung der Ebene ϵ mit zwei verschiedenen Fixpunkten entweder gleich der identischen Abbildung oder gleich der Geradenspiegelung an der Verbindungsgeraden der Fixpunkte ist. Ferner gilt wie eingangs aufgegriffen der sogenannte Kongruenzsatz SSS in der Ebene ϵ als metrisch-normale euklidische Ebene. Anzumerken ist an dieser Stelle, dass die Kongruenz der Dreiecke respektive ihr entsprechender Nachweis stets die Existenz je einer Kongruenzabbildung impliziert, die die Eckpunkte der Dreiecke so abbildet, dass je zwei gleich lange Seiten der Dreiecke aufeinander abgebildet werden (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 74). Innerhalb der nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ betrachten wir nun drei nicht kollineare Punkte A , B und C :

Basierend auf dem Kongruenzsatz SSS erhalten wir zusammen mit dem Fixpunktsatz, dass neben dem Bildpunkt des Punktes C unter der Geradenspiegelung an der Verbindungsgerade der Punkte A und B kein weiterer nicht auf der Verbindungsgerade der Punkte A und B liegender, zum Punkt C verschiedener Punkt existiert, der zu den Punkten A und B je den gleichen Abstand wie der Punkt C besitzt. Dabei liefert die definitorische Festlegung der Geradenspiegelung in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene (siehe hierzu Kapitel 4.3.1), dass der Punkt C und dessen Bildpunkt in verschiedenen Halbebenen der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ liegen.

Satz 4.3.3.2. (vgl. Filler 1993, S. 138) Es seien innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ je drei nicht kollineare Punkte A, B und C sowie A', B' und C' derart gegeben, dass die Mengen $\{A, B\}$ und $\{A', B'\}$, $\{B, C\}$ und $\{B', C'\}$ sowie $\{A, C\}$ und $\{A', C'\}$ bezüglich der Abstandsgleichheit \equiv_d in Relation stehen.

Dann existieren genau zwei verschiedene räumliche Kongruenzabbildungen, die den Punkt A auf den Punkt A' , den Punkt B auf den Punkt B' sowie den Punkt C auf den Punkt C' abbilden. Dabei bilden beide Kongruenzabbildungen die Halbräume der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ je auf einen verschiedenen Halbraum der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ ab.

Beweis: (Eigener Beweis)

Nach dem Satz 3.1.1.1 liegen die Punkte A, B und C aufgrund ihrer Nicht-Kollinearität ebenso wie die Punkte A', B' und C' gemeinsam in genau einer Ebene, jeweils in ihrer Verbindungsebene. Sind die beiden Ebenen zueinander verschieden, so existiert in den Ebenen je ein Punkt, sodass der jeweilige Punkt nicht in der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ bzw. $\langle A', B', C' \rangle$ liegt. Anderenfalls liefert der Satz 3.1.1.2 die Existenz zweier solcher Punkte. Zusammenfassend existieren also stets zwei Punkte D und D' innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes, sodass die Punkte A, B, C und D sowie die Punkte A', B', C' und D' jeweils nicht komplanar sind.

Hiermit weisen wir auf der Grundlage des Korollars 4.3.2.4 das zu Zeigende nach. Das Korollar liefert die Existenz genau einer räumlichen Kongruenzabbildung Φ_1 derart, dass...

- i) das Bild des Punktes A zum Punkt A' ,
- ii) das Bild der Halbgeraden $[A, B)$ zur Halbgeraden $[A', B')$ sowie
- iii) das Bild der Halbebene $\mathfrak{H}\langle ABC \rangle$ zur Halbebene $\mathfrak{H}\langle A'B'C' \rangle$ und
- iv) das Bild des Halbraumes $\mathfrak{H}\langle ABC_D \rangle$ zum Halbraum $\mathfrak{H}\langle A'B'C'_D' \rangle$ identisch ist.

Weiter betrachten wir damit die Verkettung $(\langle \widetilde{A', B', C'} \rangle \circ \Phi_1)$ der Kongruenzabbildung Φ_1 mit der Ebenenspiegelung an der Verbindungsebene der Punkte A', B' und C' . Aufgrund des Satzes 3.4.3 stellt diese Verkettung eine weitere räumliche Kongruenzabbildung dar. Es sei $\Phi_2 := (\langle \widetilde{A', B', C'} \rangle \circ \Phi_1)$. Die Kongruenzabbildung Φ_2 erfüllt aufgrund des Satzes 4.3.1.5 ebenso wie die Kongruenzabbildung Φ_1 die Eigenschaften i)-iii), unterscheidet sich jedoch in der Eigenschaft iv) von der Kongruenzabbildung Φ_1 . Zusammen mit der definitorischen

Festlegung einer Ebenenspiegelung gilt (siehe hierzu Definition 4.3.1.1), dass unter der Kongruenzabbildung Φ_2 das Bild...

iv') ...des Halbraumes $\mathfrak{H}\langle ABC_D \rangle$ zu dem Halbraum $\mathfrak{H}\langle A'B'C'_{D'} \rangle$ identisch ist.

Nach dem Korollar 4.3.2.4 ist letztlich die Kongruenzabbildung Φ_2 durch die Eigenschaften i), ii), iii) und iv') wie die Kongruenzabbildung Φ_1 durch die Eigenschaften i), ii), iii) und iv) eindeutig bestimmt. Schließlich bleibt zu zeigen, dass die Kongruenzabbildungen Φ_1 und Φ_2 jeweils den Punkt A auf den Punkt A' , den Punkt B auf den Punkt B' sowie den Punkt C auf den Punkt C' abbilden:

Beide Kongruenzabbildungen erfüllen die Eigenschaft i), womit sie eben den Punkt A auf den Punkt A' abbilden.

Die Eigenschaft ii) der Kongruenzabbildungen Φ_1 und Φ_2 liefert, dass der Bildpunkt des Punktes B unter der Kongruenzabbildung Φ_1 und Φ_2 auf der Halbgeraden $[A', B')$ liegt. Den Punkt A bilden beide Kongruenzabbildungen nach dem Vorherigen auf den Punkt A' ab; und nach Voraussetzung sind Abstände $d(A, B)$ und $d(A', B')$ zueinander identisch. Hieraus folgt aus der Abstandstreue der beiden Kongruenzabbildungen, dass die Bildpunkte $\Phi_1(B)$ und $\Phi_2(B)$ den gleichen Abstand zum Punkt A' wie der Punkt B' besitzen. Zusammen mit dem Lemma 4.1.1.1 erhalten wir, dass das Bild des Punktes B unter den Kongruenzabbildungen Φ_1 und Φ_2 zum Punkt B' identisch ist.

Die Eigenschaft iii) der Kongruenzabbildungen Φ_1 und Φ_2 liefert, dass die Bildpunkte $\Phi_1(C)$ und $\Phi_2(C)$ innerhalb der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ in derselben Halbebene bezüglich der Randgeraden $\langle A', B' \rangle$ wie der Punkt C' liegen. Den Punkt A bilden beide Kongruenzabbildungen nach dem Vorherigen auf den Punkt A' sowie den Punkt B auf den Punkt B' ab; und nach Voraussetzung sind die Abstände $d(A, C)$ und $d(A', C')$ sowie $d(B, C)$ und $d(B', C')$ zueinander identisch. Hieraus folgt mit der Abstandstreue der Kongruenzabbildungen, dass die Bildpunkte $\Phi_1(C)$ und $\Phi_2(C)$ zum Punkt A' und B' den gleichen Abstand wie der Punkt C' besitzen. Zusammenfassend erhalten wir für die Bildpunkte $\Phi_1(C)$ und $\Phi_2(C)$ mit der Bemerkung 4.3.3.1, dass sie jeweils zum Punkt C' identisch sind. \square

Mit der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ aufgrund des Satzes 2.2.2.6 in jeder Ebene des Raumes eine zu dem soeben nachgewiesenen

Satz 4.3.3.2 analoge Aussage (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 71 f.). Wohlgermerkt fungieren beide Aussagen in einzelnen Axiomatisierungen der ebenen bzw. räumlichen euklidischen Geometrie als Axiom (vgl. hierzu Filler 1993, S. 124–130 u. 137 f.); ihnen ist eine gewisse Bedeutung einzuräumen.

Satz-Masterarbeit 5.1.2.19. (vgl. Lauer 2018, S. 71 f.; vgl. zusätzlich Filler 1993, S. 86) Es seien in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ zwei verschiedene Punkte A und B sowie A' und B' derart gegeben, dass die Mengen $\{A, B\}$ und $\{A', B'\}$ bezüglich der Abstandsgleichheit $\equiv_{d|_\epsilon}$ in Relation stehen.

Dann existieren genau zwei verschiedene ebene Kongruenzabbildungen, die den Punkt A auf den Punkt A' und den Punkt B auf den Punkt B' abbilden. Dabei bilden beide Kongruenzabbildungen die Halbebenen der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ je auf eine verschiedene Halbebene der Verbindungsgerade $\langle A', B' \rangle$ ab.

Schließlich greifen wir im Rahmen des vorliegenden Kapitels zum Beweis des Satzes 4.3.3.3 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ sowohl auf den Satz 4.3.3.2 als auch auf dessen in einer Ebene des Raumes geltendes Pendant zurück.

Satz 4.3.3.3. Zwei gemeinsam in einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ liegende geometrische Figuren werden unter einer räumlichen Kongruenzabbildung genau dann aufeinander abgebildet, wenn sie unter einer ebenen Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden.

Beweis: (Eigener Beweis)

Den Nachweis der Äquivalenzaussage differenzieren in die beiden zu zeigenden Implikationen. Die zugrunde liegende Ebene sei als die Ebene ϵ bezeichnet.

„ \Rightarrow “: Es sei eine räumliche Kongruenzabbildung Φ_r des metrisch-normalen euklidischen Raumes gegeben, die je zwei in der Ebene ϵ liegende geometrische Figuren aufeinander abbildet. Diesbezüglich differenzieren wir in die Fälle, ob die räumliche Kongruenzabbildung Φ_r mindestens drei nicht kollineare Punkte, genau zwei verschiedene oder genau einen Punkt der Ebene ϵ wiederum in die ϵ abbildet; und wir zeigen im erstgenannten Fall die Existenz

einer ebenen Kongruenzabbildung der Ebene ϵ , die zur Restriktion der räumlichen Kongruenzabbildung Φ_r auf die Ebene ϵ identisch ist, und in den übrigen Fällen die Existenz einer ebenen Kongruenzabbildung der Ebene ϵ , die die jeweiligen Punkte auf die gleichen Punkte wie die räumliche Kongruenzabbildung Φ_r abbildet:

i) Bildet die räumliche Kongruenzabbildung Φ_r mindestens drei nicht kollineare Punkte der Ebene ϵ wiederum in die Ebene ϵ ab, so folgt aus dem Satz 3.1.1.1 mit der nach dem Satz 3.4.4 geltenden Ebenen- und Geradentreue der Kongruenzabbildung, dass die Ebene ϵ eine Fixebene der Kongruenzabbildung ist. Folglich existiert mit der Restriktion der räumlichen Kongruenzabbildung Φ_r auf die Ebene ϵ eine ebene Kongruenzabbildung dieser Ebene (siehe hierzu Kapitel 3.4), die eben jeden Punkt der Ebene ϵ auf den gleichen Punkt wie die räumliche Kongruenzabbildung abbildet.

ii) Bildet die räumliche Kongruenzabbildung Φ_r genau zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene ϵ wiederum in die Ebene ϵ ab, so liefert die Bijektivität der Kongruenzabbildung, dass auch die Bildpunkte der beiden Punkte zueinander verschieden sind. Ferner liefert die Abstandstreue der räumlichen Kongruenzabbildung, dass der Abstand der Bildpunkte gleich dem Abstand ihrer Urbildpunkte ist. Folglich existiert mit dem ebenen-geometrischen Pendant zum Satz 4.3.3.2 eine ebene Kongruenzabbildung der Ebene ϵ , die die Punkte A und B auf die gleichen Punkte wie die räumliche Kongruenzabbildung Φ_r abbildet.

iii) Letztlich betrachten wir den Fall, dass die räumliche Kongruenzabbildung Φ_r genau einen Punkt X der Ebene ϵ wiederum in die Ebene ϵ abbildet; es sei $X' := \Phi_r(X)$. In der Ebene ϵ existiert aufgrund des Satzes 2.2.2.5 ein weiterer Punkt Y , der sowohl zum Punkt X als auch zu dem Bildpunkt X' verschieden ist. Die Halbgerade mit dem Anfangspunkt X' durch den Punkt Y liegt nach dem Satz 2.2.2.1 ebenfalls in der Ebene ϵ des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Mit dem Lemma 4.1.1.1 existiert auf dieser Halbgeraden genau ein Punkt X'' , dessen Abstand zum Punkt X' gleich dem Abstand der Punkt X und Y ist. Folglich existiert mit dem ebenen-geometrischen Pendant zum Satz 4.3.3.2 eine ebene Kongruenzabbildung der Ebene ϵ , die den Punkt X ebenso wie die räumliche Kongruenzabbildung Φ_r auf den Punkt X' abbildet.

„ \Leftarrow “: Es sei eine ebene Kongruenzabbildung Φ_e der Ebene ϵ innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gegeben, die je zwei in der Ebene ϵ liegende geometrische Figuren aufeinander abbildet. Grundsätzlich gilt für die ebene Kongruenzabbildung, dass sie als bijektive

Selbstabbildung der Punktmenge der Ebene ϵ jeden Punkt der Ebene wiederum in die Ebene abbildet. Nach dem Satz 2.2.2.5 liegen in der Ebene mindestens drei nicht kollineare paarweise verschiedene Punkte A , B und C . Wie jede räumliche ist auch die ebene Kongruenzabbildung geradentreu (siehe Kapitel 3.4), sodass die Bildpunkte der Punkte unter der ebenen Kongruenzabbildung Φ_e wiederum drei nicht kollineare paarweise verschiedene Punkte der Ebene ϵ sind; es sei $A' := \Phi_e(A)$, $B' := \Phi_e(B)$ und $C' := \Phi_e(C)$. Ferner liefert die Abstandstreue der ebenen Kongruenzabbildung Φ_e , dass die Abstände je zweier Punkte A , B und C zum Abstand ihrer jeweiligen Bildpunkte identisch ist.

Mit dem Satz 4.3.3.2 erhalten wir die Existenz einer räumlichen Kongruenzabbildung Φ_r , die die Punkte A , B und C je auf ihre Bildpunkte unter der ebenen Kongruenzabbildung Φ_e abbildet. Nach dem Satz 3.1.1.1 ist durch die Punkte A , B und C ebenso wie durch die Bildpunkte A' , B' und C' aufgrund ihrer Nicht-Kollinearität die Ebene ϵ eindeutig bestimmt. Zusammen mit der nach dem Satz 3.4.4 geltenden Ebenen- und Geradentreue der räumlichen Kongruenzabbildung Φ_r gilt, dass die Ebene ϵ eine Fixebene der Kongruenzabbildung ist. Damit ist die Restriktion der räumlichen Kongruenzabbildung auf die Ebene ϵ eine ebene Kongruenzabbildung dieser Ebene (siehe hierzu Kapitel 3.4). Zusammenfassend erhalten wir mit dem ebenen-geometrischen Pendant zum Satz 4.3.3.2, dass mit der räumlichen Kongruenzabbildung Φ_r eine räumliche Kongruenzabbildung existiert, deren Restriktion auf die Ebene ϵ zur ebenen Kongruenzabbildung Φ_e der Ebene ϵ identisch ist. \square

4.4 Ähnlichkeit

Die euklidische (Schul-)Geometrie versteht sich in Anlehnung an das Erlanger Programm von Felix Klein grundlegend als Kongruenzgeometrie (siehe Kapitel 3.4). Als Teil der euklidischen Geometrie lässt sich die Ähnlichkeitsgeometrie in diesem Sinne basierend auf der Kongruenzgeometrie darlegen (vgl. Wußing 2009, S. 170). Analog zur Kongruenz existieren aus mathematischer Perspektive zur Darlegung der Ähnlichkeit grundsätzlich zwei Herangehensweisen (vgl. Hölzl 2018, S. 203; siehe auch Kapitel 3.4): Ein Zugrundelegen als Grundbegriff oder basierend auf den sogenannten Ähnlichkeitsabbildungen. Unverändert bleibt ebenfalls die komplementäre Auffassung beider Ansätze in fachdidaktischer Hinsicht (vgl. Hölzl 2018, S. 203; siehe auch Kapitel 3.4). Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ erfolgt schließlich basierend auf und analog zu der Untersuchung der Kongruenz die Untersuchung der Ähnlichkeit (siehe zur Kongruenz im Allgemeinen, Kapitel 3.4 sowie Einleitung des Kapitels 4). Allgemein liegt im Sinne des übergeordneten Leitgedankens der „Räumlichen Kontextualisierung“ (4) die in meiner Masterarbeit (2018) entwickelte Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene zugrunde. Zusätzlich sei, insbesondere im Hinblick auf die deduktive Strukturierung, auf die Arbeit von Filler (1993, S. 117–121) verwiesen.

Bevor wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die „Ähnlichkeit – Ähnlichkeitsabbildungen“ (4.4.2) untersuchen, untersuchen wir die „Zentrischen Streckungen“ (4.4.1). Dies erfolgt unter dem Aspekt, die Ähnlichkeitsabbildungen als die Verkettungen von zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen einzuführen, die Ähnlichkeitsabbildungen somit in direktem Bezug zu den Kongruenzabbildungen zu untersuchen.

4.4.1 Zentrische Streckungen

Als die Verkettungen von zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen untersuchen wir in Kapitel „Ähnlichkeit – Ähnlichkeitsabbildungen“ (4.4.2) die sogenannten Ähnlichkeitsabbildungen. Vor diesem Hintergrund orientieren wir die Untersuchung der zentrischen Streckungen an den Eigenschaften der Kongruenzabbildungen (siehe hierzu Kapitel 3.4), um die Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen letztlich als diejenigen Eigenschaften charakterisieren zu können, die der Menge aller zentrischen Streckungen und der Menge aller Kongruenzabbildungen gemeinsam sind. Dabei liegt der Untersuchung der zentrischen Stre-

ckungen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gemeinhin die mit meiner Masterarbeit (2018, S. 90–94) erfolgte Untersuchung der zentrischen Streckungen in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene zugrunde; hier wiederum dient die Arbeit von Filler (1993, S. 118) als Anknüpfungspunkt.

Definitiv unterscheiden sich die zentrischen Streckungen in der Ebene und im Raum grundsätzlich nicht (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 90); innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gilt die

Definition 4.4.1.1. Für einen Punkt Z und eine von der reellen Zahl 0 verschiedene reelle Zahl k wird die Selbstabbildung $\zeta_{Z,k}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ definiert durch die beiden nachfolgenden Eigenschaften: für einen Punkt X ...

- (i) ...ist dessen k -facher Abstand zum Punkt Z gleich dem Abstand des Punktes Z zu dem Bildpunkt $\zeta_{Z,k}(X)$: $d(Z, \zeta_{Z,k}(X)) = |k| \cdot d(Z, X)$;
- (ii) ...liegt der Bildpunkt $\zeta_{Z,k}(X)$ auf der Halbgeraden $[Z, X)$, wenn k eine positive reelle Zahl ist ($k > 0$), und auf der zur Halbgeraden $[Z, X)$ komplementären Halbgerade, wenn k eine negative reelle Zahl ist ($k < 0$),

bezeichnet als **(räumliche) zentrische Streckung** mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor k .

Die grundlegende Existenz einer zentrischen Streckung als Abbildung im mathematischen Sinne, genauer, dass der Bildpunkt eines jeden Punktes unter der zentrischen Streckung eindeutig bestimmt ist, ist basierend auf dem Verbindungsaxiom für Geraden mit der Aussage des Lemmas 4.1.1.1 gegeben. Mit dem Zusatz „räumlich“ verdeutlichen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ – wenn nötig –, dass die jeweilige zentrische Streckung die Punktmenge des gesamten metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ als Quell- bzw. Zielmenge umfasst. Demgegenüber stehen die „ebenen“ zentrischen Streckungen als die entsprechenden, eine Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes betreffenden Abbildungen; sie beschreiben die zentrischen Streckungen einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 90). Zwischen den ebenen und räumlichen zentrischen Streckungen erhalten wir im Weiteren recht direkt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ den mit

dem Satz 4.4.1.3 beschriebenen Zusammenhang. Zuvor erläutern wir in Satz 4.4.1.2 basierend auf der definatorischen Festlegung einer zentrischen Streckung die Frage nach der Anzahl der Punkte, die unter einer zentrischen Streckung innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ fest bleiben, die Frage nach den sogenannten Fixpunkten, wobei sich die räumlichen hier nicht von den ebenen zentrischen Streckungen unterscheiden (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 91 f.):

Satz 4.4.1.2. Ist der Streckfaktor einer zentrischen Streckung zur reellen Zahl 1 verschieden, so besitzt die zentrische Streckung neben ihrem Streckzentrum keinen weiteren Fixpunkt, ist der Streckfaktor hingegen zur reellen Zahl 1 identisch, so bildet die zentrische Streckung jeden Punkt des Raumes wiederum auf sich selbst ab.

Beweis: (vgl. Lauer 2018, S. 91 f.)

Es sei eine zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ gegeben. Per definitionem stellt das Streckzentrum Z einen Fixpunkt der zentrischen Streckung dar.

Ist der Streckfaktor k von der reellen Zahl 1 verschieden, so liegt der Bildpunkt eines von dem Streckzentrum Z verschiedenen Punktes X unter der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ per definitionem auf der offenen Halbgerade (Z, X) , wenn der Streckfaktor eine (von der reellen Zahl 1 verschiedene) positive reelle Zahl ist, und auf der zur offenen Halbgerade (Z, X) komplementären Halbgerade, wenn der Streckfaktor eine (von der reellen Zahl 1 verschiedene) negative reelle Zahl ist. Im zweitgenannten Fall erhalten wir umgekehrt, dass der Punkt X sich von seinem Bildpunkt unter der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ unterscheidet. Im erstgenannten Fall erhalten wir dies mit dem Lemma 4.1.1.1.

Ist der Streckfaktor k zur reellen Zahl 1 identisch, so folgt mit dem Lemma 4.1.1.1 aus der Definition 4.4.1.1 einer zentrischen Streckung, dass neben dem Streckzentrum jeder weitere Punkt ebenfalls ein Fixpunkt der zentrischen Streckung darstellt. \square

Satz 4.4.1.3. Es sei ein Punkt Z in einer Ebene ϵ und eine von der reellen Zahl 0 verschiedene reelle Zahl k gegeben.

Die Restriktion der räumlichen zentrischen Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor k auf die Ebene ϵ sowie die ebene zentrische Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor k der Ebene ϵ sind zueinander identisch.

Beweis: (Eigener Beweis)

Die räumliche wie auch die ebene zentrische Streckung bilden per definitionem den Punkt Z auf sich selbst ab. Es sei im Weiteren ein von dem Punkt Z verschiedener Punkt X der Ebene ϵ gegeben. Nach dem Satz 2.2.2.1 liegt jeder Punkt der durch die Punkte X und Z gehenden Verbindungsgerade in der Ebene ϵ . Zusammen mit dem Lemma 4.1.1.1 erhalten wir basierend auf der analogen definatorischen Festlegung einer räumlichen und ebenen zentrischen Streckung, dass die Behauptung gilt. \square

Anlehnend an den Satz 4.4.1.3 differenzieren wir die ebenen zentrischen Streckungen einer (nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen) Ebene ϵ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ symbolisch mittels des Zeichens $\zeta_{Z,k}|_{\epsilon}$.

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ eröffnet der Satz 4.4.1.3 basierend auf der Analogie zwischen den definatorischen Festlegungen die Möglichkeit, Eigenschaften der räumlichen auf die ebenen zentrischen Streckungen zurückzuführen. Dies zeigt sich unter anderem im Rahmen des Satzes 4.4.1.4 mit dem Nachweis, dass die räumlichen zentrischen Streckungen abstandsverhältnistreue sind. Den Nachweis führen wir größtenteils auf die Abstandsverhältnistreue der ebenen zentrischen Streckungen zurück (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 91–94). Im Gesamten zeigt der Satz 4.4.1.4, dass die räumlichen zentrischen Streckungen bijektive, abstandsverhältnistreue Abbildungen darstellen, sich somit nicht von den ebenen zentrischen Streckungen unterscheiden (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 91–94). Die Bijektivität lässt sich allerdings nicht auf die ebenen zentrischen Streckungen zurückführen. Dem Beweis der Bijektivität liegt die Idee von Mitschka et al. (1998, S. 236) zugrunde, deren Beweis zugleich in meiner Masterarbeit (2018, S. 91 f.) für die ebenen zentrischen Streckungen innerhalb einer metrisch-normalen Ebene aufgegriffen wurde.

Satz 4.4.1.4. Eine räumliche zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor k ist...

a) eine bijektive Abbildung des Raumes, und

b) abstandsverhältnistreue $\left(\frac{d(A,B)}{d(A',B')} = \frac{d(\zeta_{Z,k}(A), \zeta_{Z,k}(B))}{d(\zeta_{Z,k}(A'), \zeta_{Z,k}(B'))} \right)$ mit $d(\zeta_{Z,k}(A), \zeta_{Z,k}(B)) = |k| \cdot d(A, B)$.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz a: vgl. Mitschka et al. 1998, S. 236)

a) Den Beweis der Bijektivität der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ differenzieren wir in den Nachweis ihrer Surjektivität und Injektivität.

Injektivität: Es seien zwei verschiedene Punkte X_1 und X_2 gegeben. Ist einer der beiden Punkte zum Punkt Z identisch, so sind die Bildpunkte der beiden Punkte unter der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ per definitionem zueinander verschieden. Sind die Punkte je zum Punkt Z verschieden, so betrachten wir im Weiteren die Verbindungsgerade $\langle X_1, X_2 \rangle$ der beiden Punkte X_1 und X_2 :

Liegt der Punkt Z auf dieser Verbindungsgerade, so teilt er diese nach dem Satz 3.2.1.6 in eine Halbgerade mit dem Anfangspunkt Z und deren komplementäre Halbgerade. Bezüglich dieser beiden Halbgeraden liegen die beiden zueinander verschiedenen Punkte X_1 und X_2 entweder auf unterschiedlichen oder gemeinsam auf einer Halbgeraden. Im erstgenannten Fall folgt umgehend aus der Definition 4.4.1.1 einer zentrischen Streckung, dass die Bildpunkte der beiden verschiedenen Punkte X_1 und X_2 unter der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ ebenfalls zueinander verschieden sind. Im zweitgenannten Fall folgt dies mit dem Lemma 4.1.1.1 aus der definitorischen Festlegung einer zentrischen Streckung.

Liegt der Punkt Z nicht auf der Verbindungsgeraden der Punkte X_1 und X_2 , so existieren aufgrund des Axioms V_G die zwei sich im Punkt Z schneidenden Verbindungsgeraden $\langle Z, X_1 \rangle$ und $\langle Z, X_2 \rangle$. Damit liefert die definitorische Festlegung einer zentrischen Streckung, dass die Bildpunkte $\zeta_{Z,k}(X_1)$ und $\zeta_{Z,k}(X_2)$ zueinander verschieden sind.

Surjektivität: Für das Streckzentrum Z gilt $\zeta_{Z,k}(Z) = Z$. Es sei im Weiteren ein von dem Punkt Z verschiedener Punkt Y innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gegeben, und wir zeigen die Existenz eines Punktes X mit $\zeta_{Z,k}(X) = Y$:

Nach dem Axiom V_G geht durch die Punkte Y und Z genau eine Gerade. Der Punkt Z teilt diese Gerade nach dem Satz 3.2.1.6 in eine Halbgerade mit dem Anfangspunkt Z und deren komplementäre Halbgerade. Auf jeder dieser beiden Halbgeraden existiert nach dem Lemma 4.1.1.1 genau ein Punkt X_1 bzw. X_2 , sodass die Gleichung

$$d(Z, X_i) = \left|\frac{1}{k}\right| \cdot d(Z, Y), \quad \text{also } |k| \cdot d(Z, X_i) = d(Z, Y) \quad \text{für } i \in \{1, 2\}$$

erfüllt ist. Folglich existiert ein Punkt X , dessen Bildpunkt unter der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ zum Punkt Y identisch ist. \square

b) Ist der Punkt Z zu genau einem der beiden Punkte A oder B identisch, so erhalten wir basierend auf der Definition 4.4.1.1 einer zentrischen Streckung, dass der k -fache Abstand der beiden Punkte zum Abstand ihrer Bildpunkte $\zeta_{Z,k}(A)$ und $\zeta_{Z,k}(B)$ identisch ist. Sind die Punkte A und B zueinander identisch, die Gleichheit der Punkte A , B und Z mit inbegriffen, so erhalten wir mit der positiv Definitheit der Abstandsfunktion basierend auf der Eigenschaft der zentrischen Streckung als mathematische Abbildung, dass der k -fache Abstand der Punkte A und B zum Abstand ihrer Bildpunkte $\zeta_{Z,k}(A)$ und $\zeta_{Z,k}(B)$ identisch ist. Für den Fall der paarweise Verschiedenheit der Punkte A , B und Z führen wir die zu zeigende Abstandsverhältnistreue der räumlichen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ mittels des Satzes 4.4.1.3 auf die Abstandsverhältnistreue einer ebenen zentrischen Streckung zurück (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 91–94):

Sind die Punkte nicht kollinear, so liegen sie nach dem Satz 3.1.1.1 gemeinsam in einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes; anderenfalls liegen aufgrund der definitorischen Festlegung einer Geraden als der Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes die Punkte ebenfalls gemeinsam in einer Ebene. Es existiert also innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes stets eine Ebene ϵ , die durch die Punkte A , B und Z geht. Nach dem Satz 4.4.1.3 ist die Restriktion der räumlichen zentrischen Streckung auf die Ebene ϵ zur ebenen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}|_{\epsilon}$ identisch, womit die Gleichheit des k -fachen Abstandes der beiden Punkte A und B und des Abstandes ihrer Bildpunkte $\zeta_{Z,k}(A)$ und $\zeta_{Z,k}(B)$ gilt. \square

Eine zentrische Streckung besitzt als bijektive Abbildung im Allgemeinen eine bijektive Umkehrabbildung. Mit dem soeben erfolgten Nachweis der Surjektivität einer zentrischen Streckung ergibt sich weiter, dass die Umkehrabbildung wiederum eine zentrische Streckung darstellt, und zwar gilt das

Korollar 4.4.1.5. Die räumliche zentrische Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor k besitzt die räumliche zentrische Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor $\frac{1}{k}$ als Umkehrabbildung.

Beweis: (vgl. Mitschka et al. 1998, S. 236)

Für den Urbildpunkt X eines Punktes Y unter der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ zeigt der Nachweis der Surjektivität in Satz 4.4.1.4, dass der Abstand des Punktes X zum Punkt Z

gleich dem $\frac{1}{k}$ -fachen Abstand der Punkte Y und Z ist. Aufgrund der Definition 4.4.1.1 einer zentrischen Streckung gilt weiter, dass der Urbildpunkt X auf der Halbgeraden $[Z, Y)$ liegt, wenn der Faktor k und somit der Quotient $\frac{1}{k}$ eine positive reelle Zahl ist, und anderenfalls auf der jeweiligen komplementären Halbgerade. Schließlich erhalten wir, dass die zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ als bijektive Abbildung die zentrische Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor $\frac{1}{k}$ als Umkehrabbildung besitzt. \square

Mit dem soeben nachgewiesenen Satz 4.4.1.4 zeigt sich innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ein charakteristischer Unterschied der zentrischen Streckung im Vergleich zu den Kongruenzabbildungen. Zwar stellen die zentrischen Streckungen ebenso wie Kongruenzabbildungen bijektive Abbildungen dar, jedoch erfüllen sie statt der Abstands- die Abstandsverhältnistreue. Dabei existieren zwei Sonderfälle: Ist der Streckfaktor einer zentrischen Streckung zur reellen Zahl 1 oder -1 identisch, so impliziert die geltende Abstandsverhältnis- die Abstandstreue. Ist der Streckfaktor gleich der reellen Zahl -1 , so gilt basierend auf der definitorischen Festlegung einer zentrischen Streckung mit dem Lemma 4.1.1.1, dass die zentrische Streckung gleich einer Punktspiegelung an dem jeweiligen Streckzentrum ist; ist der Streckfaktor gleich der reellen Zahl 1, so gilt, dass die identische Abbildung vorliegt (vgl. zusätzlich Benölken et al. 2018, S. 235 f.).

Bezüglich der in Kapitel 3.4 nachgewiesenen Eigenschaften der räumlichen Kongruenzabbildungen begründen wir im Weiteren mit dem Satz 4.4.1.6 sowie der Bemerkung 4.4.1.8 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, dass sich die Eigenschaften der räumlichen zentrischen Streckungen hiervon nicht unterscheiden. In Bezug zu den im Rahmen meiner Masterarbeit (2018) in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene untersuchten ebenen zentrischen Streckungen gilt damit nicht zuletzt, dass sich analog zu den Kongruenzabbildungen die *Geraden- um die Ebenentreue* sowie die *Halbebenen- um die Halbraumtreue* erweitert und dass die *Strecken-, Halbgeraden- und Winkeltreue* unverändert gilt (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 91–94):

Satz 4.4.1.6. Eine räumliche zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist...

(a) ...ebentreu mit $\zeta_{Z,k}[m_{A,B}] = m_{\zeta_{Z,k}(A), \zeta_{Z,k}(B)}$ und (b) ...geradentreu, d.h. $\zeta_{Z,k}[g] \in \mathcal{G}$ für $g \in \mathcal{G}$.

Beweis: (Eigener Beweis)

zu a): Für jeden Punkt X des metrisch-normalen euklidischen Raumes ist der k -fache Abstand des Punktes zum Punkt A und B gleich dem Abstand der jeweiligen Bildpunkte unter der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ nach derer mit dem Satz 4.4.1.4 geltenden Abstandsverhältnistreue; es gelten also die beiden Gleichungen

$$d(\zeta_{Z,k}(X), \zeta_{Z,k}(A)) = |k| \cdot d(X, A) \quad \text{und} \quad d(\zeta_{Z,k}(X), \zeta_{Z,k}(B)) = |k| \cdot d(X, B).$$

Im Weiteren sei $X' := \zeta_{Z,k}(X)$ für $X \in \mathcal{P}$. Damit ergibt sich aus den beiden vorherigen Gleichungen die Gleichung

$$\zeta_{Z,k}[m_{A,B}] = \{X' : X \in \mathcal{P} \wedge \{A, X\} \equiv_d \{X, B\}\} = \{X' : X \in \mathcal{P} \wedge \{A', X'\} \equiv_d \{X', B'\}\};$$

weiter liefert die Surjektivität der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ die Gleichung

$$\{X' : X \in \mathcal{P} \wedge \{A', X'\} \equiv_d \{X', B'\}\} = \{Y \in \mathcal{P} : \{A', Y\} \equiv_d \{Y, B'\}\} = m_{\zeta_{Z,k}(A), \zeta_{Z,k}(B)}.$$

Schließlich erhalten wir, dass die räumliche zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ die zu zeigende Ebenentreue erfüllt. \square

zu b): Den Nachweis der zu zeigenden Geradentreue der räumlichen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ führen wir mittels des Satzes 4.4.1.3 auf die Geradentreue einer ebenen zentrischen Streckung zurück (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 91–93):

Liegt das Streckzentrum Z nicht auf der Geraden g , so liegen das Streckzentrum und die Gerade nach dem Satz 3.1.1.4 gemeinsam in genau einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes; anderenfalls liegen aufgrund der definitorischen Festlegung einer Gerade als der Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes das Streckzentrum und die Gerade ebenfalls gemeinsam in einer Ebene des Raumes. Es existiert also innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes stets eine Ebene ϵ , in der das Streckzentrum Z und die Gerade g gemeinsam liegen. Nach dem Satz 4.4.1.3 ist die Restriktion der räumlichen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ auf die Ebene ϵ zur ebenen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}|_{\epsilon}$ identisch, womit die zu zeigende Geradentreue der räumlichen zentrischen Streckung gilt. \square

Aus dem soeben nachgewiesenen Satz 4.4.1.6 folgern wir analog zu den Kongruenzabbildungen im Weiteren mit dem Korollar 4.4.1.7 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen

Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ für die zentrischen Streckungen, dass diese Parallelitäts- und Orthogonalitätstreue sind.

Korollar 4.4.1.7. Eine zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist parallelentreue (i) und orthogonalitätstreue (ii) bezüglich der Parallelität bzw. Orthogonalität zwischen Geraden und/oder Ebenen:

$$(i) \quad g \parallel h \Rightarrow \zeta_{Z,k}[g] \parallel \zeta_{Z,k}[h] \quad \wedge \quad \epsilon \parallel \eta \Rightarrow \zeta_{Z,k}[\epsilon] \parallel \zeta_{Z,k}[\eta] \quad \wedge \quad g \parallel \epsilon \Rightarrow \zeta_{Z,k}[g] \parallel \zeta_{Z,k}[\epsilon] \quad \text{für } g, h \in \mathcal{G}; \epsilon, \eta \in \mathcal{E}$$

$$(ii) \quad g \perp h \Rightarrow \zeta_{Z,k}[g] \perp \zeta_{Z,k}[h] \quad \wedge \quad \epsilon \perp \eta \Rightarrow \zeta_{Z,k}[\epsilon] \perp \zeta_{Z,k}[\eta] \quad \wedge \quad g \perp \epsilon \Rightarrow \zeta_{Z,k}[g] \perp \zeta_{Z,k}[\epsilon] \quad \text{für } g, h \in \mathcal{G}; \epsilon, \eta \in \mathcal{E}$$

Beweis: (siehe zuvor, Eigener Beweis)

Zusammen mit der Bijektivität liefert die mit dem Satz 4.4.1.6 nachgewiesene Ebenen- und Geradentreue einer zentrischen Streckung, dass die zu zeigende Parallelentreue gilt. Bezüglich der Orthogonalität zwischen zwei Ebenen sowie einer Geraden und Ebene folgt das zu Zeigende auf der Grundlage der jeweiligen in Kapitel 3.1.2 erfolgten Definition der Orthogonalität umgehend aus der Ebenen- und Geradentreue einer zentrischen Streckung. Das Verbleibende gilt unter zusätzlicher Berücksichtigung, dass eine Gerade unter einer zentrischen Streckung aufgrund derer Bijektivität und Ebenentreue zum Schnitt der Bildebenen der Ebenen identisch ist, die der Geraden innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes per definitionem zugrunde liegen. \square

Bemerkung 4.4.1.8. Der Nachweis der Ebenentreue für die zentrischen Streckungen in Satz 4.4.1.6 im Vergleich zu dem entsprechenden Nachweis für die Kongruenzabbildungen in Satz 3.4.4 zeigt, dass die Abstandsverhältnistreue hier die Abstandstreue ersetzt. Allgemein gilt: Sind die Abstände bezüglich zweier (höchstens) zweielementiger Punktemengen identisch, so sind die Abstände ihrer jeweiligen Bildpunkte unter einer abstandstreuen Kongruenzabbildung als auch unter einer abstandsverhältnistreuen zentrischen Streckung zueinander identisch. Basierend auf der Abstandsverhältnistreue einer zentrischen Streckung (zusammen mit dem geltenden Distributivgesetz für die reellen Zahlen) lässt sich diese Aussage auch auf die Gleichheit von Summen einzelner Abstände übertragen. Unter Berücksichtigung dieses Aspekts impliziert der in Kapitel 3.4 erfolgte Beweis der Zwischentreue für die Kongruenzabbildungen, dass die Zwischentreue entsprechend für die zentrischen Streckungen des

metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gilt. Schließlich implizieren die in Kapitel 3.4 erfolgten Beweise der Strecken- und Halbgeradentreue, Halbebenen- und Halbraumtreue sowie Winkeltreue für die Kongruenzabbildungen weiter, dass Analoges ebenfalls für die zentrischen Streckungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ gilt.

In Bezug zu den Kongruenzabbildungen, die soeben mit der Bemerkung 4.4.1.8 begründete Winkeltreue einer zentrischen Streckung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ erweiternd, zeigen wir abschließend mit dem Satz 4.4.1.10, dass ein Winkel und dessen Bildwinkel unter einer räumlichen zentrischen Streckung zueinander kongruent sind; zugleich gilt hiermit, dass kein Unterschied zu den ebenen zentrischen Streckungen einer metrisch-normalen euklidischen Ebene besteht (vgl. Lauer 2018, S. 91–94). Zum Nachweis des Satzes 4.4.1.10 beweisen wir zuvor mit dem Lemma 4.4.1.9, dass eine Gerade und dessen Bildgerade unter einer räumlichen zentrischen Streckungen zueinander parallel sind. Diesen Nachweis führen wir in Anlehnung an den Nachweis der Geradentreue einer räumlichen zentrischen Streckung in Satz 4.4.1.6 auf die mit meiner Masterarbeit (2018, S. 91–93) entsprechend für die ebenen zentrischen Streckungen geltende Aussage zurück.

Lemma 4.4.1.9. Das Bild einer Geraden g unter einer räumlichen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist eine zur Geraden g parallele Gerade; es gilt: $\zeta_{Z,k}[g] \in \mathcal{G}$ mit $g \parallel \zeta_{Z,k}[g]$.

Beweis: (Eigener Beweis)

Nach dem Satz 4.4.1.6 ist die räumliche zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ geradentreu. Damit bleibt zu zeigen, dass die Bildgerade $\zeta_{Z,k}[g]$ zur Geraden g parallel ist. Dies führen wir mittels des Satzes 4.4.1.3 darauf zurück, dass unter einer ebenen zentrischen Streckung Bild- und Urbildgeraden zueinander parallel sind (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 91–93):

Liegt das Streckzentrum Z nicht auf der Geraden g , so liegen das Streckzentrum und die Gerade nach dem Satz 3.1.1.4 gemeinsam in einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes; anderenfalls liegen aufgrund der definitorischen Festlegung einer Gerade als der Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes das Streckzentrum und die Gerade ebenfalls gemeinsam in einer Ebene.

Es existiert also innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes stets eine Ebene ϵ , in der das Streckzentrum Z und die Gerade g gemeinsam liegen. Nach dem Satz 4.4.1.3 ist die Restriktion der räumlichen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ auf die Ebene ϵ zur ebenen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}|_{\epsilon}$ identisch, womit die Bildgerade $\zeta_{Z,k}[g]$ der Geraden g unter der räumlichen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ zur Geraden g parallel ist. \square

Satz 4.4.1.10. Das Bild eines Winkels $\angle ABC$ unter einer räumlichen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist ein zu dem Winkel $\angle ABC$ kongruenter Winkel.

Beweis: (Eigener Beweis)

Aufgrund der Bemerkung 4.4.1.8 bleibt zu zeigen, dass der Winkel $\angle ABC$ und dessen Bildwinkel $\angle \zeta_{Z,k}(A)\zeta_{Z,k}(B)\zeta_{Z,k}(C)$ zueinander kongruent sind. Nach dem Satz 4.1.2.8 existiert eine Translation τ , die den Punkt B auf den Punkt $\zeta_{Z,k}(B)$ abbildet. Damit liefert die Definition 4.1.2.1 einer Translation, dass das Bild der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ und $\langle B, C \rangle$ unter der Translation τ eine durch den Punkt $\zeta_{Z,k}(B)$ gehende zur jeweiligen Verbindungsgerade parallele Gerade ist. Zusammen mit dem Lemma 4.4.1.9 folgt aus dem Parallelenaxiom, dass die zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ die Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und $\langle B, C \rangle$ je auf die gleiche Gerade wie die Translation τ abbildet, wobei die Bildpunkte $\tau(B)$ und $\zeta_{Z,k}(B)$ identisch sind. Die Geraden und ihre parallelen Bildgeraden liegen gemeinsam in einer Ebene, wobei sich die beiden Ebenen in der Geraden $\langle B, \zeta_{Z,k}(B) \rangle$ schneiden. Dabei geht die Gerade $\langle B, \zeta_{Z,k}(B) \rangle$ entsprechend der Definition 4.4.1.1 einer zentrischen Streckung durch das Streckzentrum Z der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$. Ferner stellen die Gerade $\langle B, \zeta_{Z,k}(B) \rangle$ sowie die Geraden $\langle A, \tau(A) \rangle$ und $\langle C, \tau(C) \rangle$ nach dem Satz 4.1.2.2 Fixgeraden der Translation τ und somit zueinander parallele Geraden dar. Dabei sind die Geraden disjunkt parallel.

Die Definition 4.4.1.1 einer zentrischen Streckung berücksichtigend, erhalten wir zusammenfassend basierend auf der Definition 3.2.1.10 eines Halbraumes mit dem Satz 3.2.1.11, dass die Translation τ die Halbgerade $[B, A)$ auf die Halbgerade $[\zeta_{Z,k}(B), \zeta_{Z,k}(A))$ und die Halbgerade $[B, C)$ auf die Halbgerade $[\zeta_{Z,k}(B), \zeta_{Z,k}(C))$ oder beide Halbgeraden auf die jeweils komplementären Halbgeraden abbildet.

Im erstgenannten Fall folgt das zu Zeigende umgehend aus der nach dem Satz 3.4.8 geltenden Winkeltreue der Translation τ als Kongruenzabbildung. Im zweitgenannten Fall betrachten

wir die Verkettung der Translation τ mit der Punktspiegelung an dem Punkt $\zeta_{Z,k}(B)$. Nach dem Satz 3.4.3 stellt diese Verkettung ebenfalls eine Kongruenzabbildung dar. Zusammen mit der geltenden Winkeltreue einer Kongruenzabbildung erhalten wir basierend auf der definitorischen Festlegung einer Punktspiegelung das zu Zeigende. \square

4.4.2 Ähnlichkeit – Ähnlichkeitsabbildungen

Die Untersuchung der Ähnlichkeit erfolgt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in analoger Vorgehensweise zur Untersuchung der Kongruenz; im Allgemeinen als Grundlage dient die in meiner Masterarbeit (2018, S. 96–100) erfolgte Untersuchung der Ähnlichkeit in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene (siehe eingangs des Kapitels 4.4). Die Ähnlichkeit als Relation zwischen geometrischen Figuren steht in direktem Zusammenhang zu den sogenannten Ähnlichkeitsabbildungen.

Ähnlichkeitsabbildungen

Allgemein unterscheiden sich die Ähnlichkeitsabbildungen innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit der Definition 4.4.2.2 im Weiteren nicht von den entsprechenden Abbildungen in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 96). Ähnlichkeitsabbildungen charakterisieren sich durch die Schnittmenge derjenigen Eigenschaften, die die zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen gemeinsam besitzen. In Bezug zu der in meiner Masterarbeit (2018, S. 96) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene liegt hier wiederum das Verständnis von Filler (1993, S. 119) zugrunde. Die Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen beschreibt per definitionem die Menge derjenigen Abbildungen, die zu einer Verkettung einer zentrischen Streckung und Kongruenzabbildung identisch sind. Grundsätzlich ergibt sich die Frage, ob die Reihenfolge der Verkettung relevant ist. Bevor wir die Ähnlichkeitsabbildungen mit der Definition 4.4.2.2 einführen, und hierauf basierend charakterisieren, zeigen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ mit dem Satz 4.4.2.1 im Allgemeinen die Unabhängigkeit von der Reihenfolge (vgl. hierzu Holland 1977, S. 87f.).

Satz 4.4.2.1. Es seien eine räumliche Kongruenzabbildung Φ_1 und eine räumliche zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ gegeben. Dann existieren räumliche Kongruenzabbildungen Φ_2 und Φ_3 derart, dass die Verkettung $(\zeta_{Z,k} \circ \Phi_1)$ zur Verkettung $(\Phi_2 \circ \zeta_{Z,k})$ sowie die Verkettung $(\Phi_1 \circ \zeta_{Z,k})$ zur Verkettung $(\zeta_{Z,k} \circ \Phi_3)$ identisch ist.

Beweis: (vgl. Holland 1977, S. 88)

Nach dem Korollar 4.4.1.5 besitzt die zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ eine Umkehrabbildung, die wiederum eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor $\frac{1}{k}$ ist. Damit zeigen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zum Nachweis der Behauptung, dass die Verkettung

$$(\zeta_{Z,k} \circ \Phi_1 \circ (\zeta_{Z,k})^{-1}) = (\zeta_{Z,k} \circ \Phi_1 \circ \zeta_{Z,\frac{1}{k}}) =: \Phi_2$$

eine Kongruenzabbildung darstellt. Die zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ und deren Umkehrabbildung sind nach dem Satz 4.4.1.4a), wie die Kongruenzabbildung Φ_1 , bijektive Selbstabbildungen der Punktmenge \mathcal{P} des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Ferner liefert die mit dem Satz 4.4.1.4b) dargelegte Abstandsverhältnistreue der zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ und derer Umkehrabbildung aufgrund ihrer Streckfaktoren k bzw. $\frac{1}{k}$ zusammen mit der Abstandstreue der Kongruenzabbildung Φ_1 , dass die Abbildung Φ_2 abstandstreu ist. Zusammenfassend erhalten wir, dass die Abbildung Φ_2 eine Kongruenzabbildung des metrisch-normalen euklidischen Raumes darstellt. \square

Definition 4.4.2.2. Die Verkettung einer räumlichen zentrischen Streckung und einer räumlichen Kongruenzabbildung (bzw. einer räumlichen Kongruenzabbildung und räumlichen zentrischen Streckung) wird als (räumliche) Ähnlichkeitsabbildung bezeichnet.

Analog zu den zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen verdeutlichen wir mit dem Zusatz „räumlich“ – wenn nötig –, dass die Ähnlichkeitsabbildungen sich auf die Punktmenge des gesamten metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ beziehen. Demgegenüber stehen die „ebenen“ Ähnlichkeitsabbildungen, die Verkettungen einer ebenen zentrischen Streckung und einer ebenen Kongruenzabbildung bezogen auf eine Ebene des Raumes; sie beschreiben die Ähnlichkeitsabbildungen einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 96).

Bemerkung 4.4.2.3. Allgemein gilt innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, dass die Ähnlichkeitsabbildungen durch diejenigen Eigenschaften charakterisiert sind, die die zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen gemeinsam haben (vgl. zusätzlich Filler 1993, S. 119). In Bezug zu den ebenen Ähnlichkeitsabbildungen erhalten wir für die räumlichen Ähnlichkeitsabbildungen (vgl. hierzu Lauer 2018, S. 96), dass sich insbesondere die *Geraden-* um die *Ebenen-* und die *Halbebenen-* um die *Halbraum-* treue erweitert sowie die *Bijektivität, Abstandsverhältnis-, Strecken-, Halbgeraden- und Winkeltreue* unverändert gilt: Eine räumliche Ähnlichkeitsabbildung Θ als die Verkettung einer räumlichen zentrischen Streckung $\zeta_{Z,k}$ und Kongruenzabbildung Φ des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ist...

- a) ...eine bijektive Selbstabbildung der Punktmenge \mathcal{P} ,
- b) ...abstandsverhältnistreu mit $d(\Theta(A), \Theta(B)) = |k| \cdot d(A, B)$,
- c) ...ebentreu mit $\Theta[m_{A,B}] = m_{\Theta(A), \Theta(B)}$ und
- d) ...geradentreu mit $\Theta[\langle A, B \rangle] = \langle \Theta(A), \Theta(B) \rangle$,

Bezüglich der Parallelität und Orthogonalität zwischen Geraden und/oder Ebenen gilt, analog wie für die Kongruenzabbildung Φ und zentrische Streckung $\zeta_{Z,k}$ mit dem Korollar 3.4.5 bzw. Korollar 4.4.1.7 beschrieben, die *Parallelitäts- und Orthogonalitätstreue* für die Ähnlichkeitsabbildung Θ . Gleiches gilt hinsichtlich der *Zwischentreue*. Ferner ist die Ähnlichkeitsabbildung Θ ...

- e) ...streckentreu mit $\Theta[[A, B]] = [\Theta(A), \Theta(B)]$,
- f) ...halbgeradentreu mit $\Theta[[A, B]] = [\Theta(A), \Theta(B)]$,
- g) ...halbebentreu mit $\Theta[\mathfrak{H}\langle ABC \rangle] = \mathfrak{H}\langle \Theta(A)\Theta(B)\Theta(C) \rangle$,
- h) ...halbraumtreu mit $\Theta[\mathfrak{H}\langle ABCD \rangle] = \mathfrak{H}\langle \Theta(A)\Theta(B)\Theta(C)\Theta(D) \rangle$ sowie
- i) ...winkeltreu mit $\Theta[\angle ABC] = \angle \Theta(A)\Theta(B)\Theta(C)$, wobei Winkel und Bildwinkel kongruent sind.

Ebenso wie für die zentrischen Streckungen liegt der charakteristische Unterschied der Ähnlichkeitsabbildungen im Vergleich zu den Kongruenzabbildungen in der Abstandsverhältnis- statt Abstandstreue innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$.

Ähnlichkeit

Analog wie die Kongruenz steht die definatorische Festlegung der Ähnlichkeit als Relation zwischen geometrischen Figuren innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in direkten Zusammenhang zu den Ähnlichkeitsabbildungen. Entsprechendes gilt für die in meiner Masterarbeit (2018) entwickelte Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene (unter Verwendung der ebenen statt räumlichen Abbildungen):

Definition 4.4.2.4. Ist das Bild einer geometrischen Figur \mathcal{F}_1 unter einer Ähnlichkeitsabbildung gleich einer geometrischen Figur \mathcal{F}_2 , so heißt die geometrische Figur \mathcal{F}_1 ähnlich zur geometrischen Figur \mathcal{F}_2 .

Die Untersuchung der Ähnlichkeit konzentrieren wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ ebenfalls (wie die der Kongruenz) darauf, die Möglichkeit zu eröffnen, die Ähnlichkeit geometrischer Figuren auf die Ähnlichkeit zwischen geometrischen Figuren in einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes zurückzuführen. Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ betrifft dies die Frage nach der Ähnlichkeit zwischen geometrischen Figuren, die in verschiedenen Ebenen des Raumes liegen.

Unter Berücksichtigung des Unterschieds der Abstandsverhältnis- und Abstandstreue zeigt die Untersuchung zur „Kongruenz geometrischer Figuren“ (4.3.3), dass sich die Vorgehensweise unter zwei Voraussetzungen auf die Ähnlichkeit innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ überträgt: (1) Für die Ähnlichkeit gilt eine zu dem Satz 4.3.3.2 sowie zu dessen ebenen-geometrischen Pendant analoge Aussage innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes bzw. in einer nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normalen euklidischen Ebene des Raumes. In Bezug zur Ebene ist die Gültigkeit mit meiner Masterarbeit (2018, S. 97) begründet (wobei an der jeweilige Stelle auf Filler (1993, S. 119 f.) verwiesen wird). Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zeigen wir im Weiteren mit dem Satz 4.4.2.5 die Gültigkeit einer entsprechenden Aussage. In diesem Zusammenhang sei explizit darauf hingewiesen, dass aufgrund der Bemerkung 4.4.2.3 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ unter einer räumlichen Ähnlichkeitsabbildung, die drei nicht kollineare Punkte in dem Raum abbildet, die Voraussetzungen des Satzes 4.4.2.5 erfüllt sind, die zugrunde liegende Ähnlichkeitsabbildung letztlich

zu einer der in dem Existenznachweis des Satzes 4.4.2.5 hergeleiteten Ähnlichkeitsabbildung identisch ist. **(2)** Als weitere Voraussetzung ist die Eigenschaft der Ähnlichkeit als Äquivalenzrelation auf der Menge aller geometrischen Figuren innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ zu begründen. Basierend auf der Definition 4.4.2.4 zeigen wir dies innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, indem wir im Weiteren mit dem Satz 4.4.2.7 beweisen, dass die Menge aller räumlichen Ähnlichkeitsabbildungen mit der Relation der Verkettung von Funktionen eine Gruppe darstellt, sich hiermit nicht von den ebenen Ähnlichkeitsabbildungen unterscheidet (vgl. Lauer 2018, S. 98).

Satz 4.4.2.5. Es seien A, B und C sowie A', B' und C' je drei nicht kollineare Punkte mit den Abstandsverhältnissen $d(A', B') : d(A, B) = d(A', C') : d(A, C) = d(B', C') : d(B, C) = |k|$. Dann existieren genau zwei verschiedene Ähnlichkeitsabbildungen, die den Punkt A auf den Punkt A' , den Punkt B auf den Punkt B' sowie den Punkt C auf den Punkt C' abbilden. Die Ähnlichkeitsabbildungen bilden die Halbräume der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ je auf einen verschiedenen Halbraum der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ ab.

Beweis: (Existenz: vgl. Filler 1993, S. 121; Eindeutigkeit: Eigener Beweis)

Wir differenzieren den Nachweis in die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage. Den Nachweis der Existenz führen wir auf den Satz 4.3.3.2 zurück, den der Eindeutigkeit orientieren wir an dem Nachweis der Aussage b) des Satzes 4.3.2.3.

Existenz: Das Abstandsverhältnis $|k|$ ist eine zur reellen Zahl 0 verschiedene reelle Zahl, da die Punkte A, B und C sowie A', B' und C' als nicht kollineare Punkte paarweise verschieden sind. Wir betrachten die zentrische Streckung $\zeta_{A,k}$ mit dem Streckzentrum A und dem Streckfaktor k . Aufgrund der vorausgesetzten Abstandsverhältnisse gelten die Gleichungen

$$d(A, \zeta_{A,k}(B)) = |k| \cdot d(A, B) = d(A', B'),$$

$$d(A, \zeta_{A,k}(C)) = |k| \cdot d(A, C) = d(A', C') \quad \text{sowie}$$

$$d(\zeta_{A,k}(B), \zeta_{A,k}(C)) = |k| \cdot d(B, C) = d(B', C').$$

Beachtet sei, dass der Punkt A ein Fixpunkt der zentrischen Streckung $\zeta_{A,k}$ ist. Zudem stellt die Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ aufgrund des Satzes 4.4.1.3 eine Fixebene dar. Für den Punkt A sowie die Bildpunkte der Punkte B und C unter der zentrischen Streckung $\zeta_{A,k}$

liefert deren Geradentreue, dass die Punkte drei nicht kollineare Punkte innerhalb der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ sind.

Letztlich erhalten wir mit dem Satz 4.3.3.2 die Existenz zweier verschiedener Kongruenzabbildungen, die den Punkt A auf den Punkt A' sowie die Bildpunkte $\zeta_{A,k}(B)$ und $\zeta_{A,k}(C)$ auf die Punkte B' bzw. C' abbilden, und dabei die Halbräume der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ je auf einen verschiedenen Halbraum der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ abbilden. Damit ist durch die Verkettung der zentrischen Streckung $\zeta_{A,k}$ mit den beiden Kongruenzabbildungen die zu zeigende Existenz zweier verschiedener Ähnlichkeitsabbildungen nachgewiesen.

Eindeutigkeit: Es seien Θ und Θ^* zwei Ähnlichkeitsabbildungen, die den Punkt A auf den Punkt A' , den Punkt B auf den Punkt B' sowie den Punkt C auf den Punkt C' abbilden, und dabei jeden Halbraum der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ auf den gleichen Halbraum der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ abbilden. Wir zeigen, dass die beiden Ähnlichkeitsabbildungen zueinander identisch sind. Hierzu leiten wir aus den genannten insgesamt fünf gemeinsame Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen Θ und Θ^* her:

- i) Das Bild des Punktes A ist unter beiden Ähnlichkeitsabbildungen zum Punkt A' identisch.
- ii) Das Bild der Halbgeraden mit dem Anfangspunkt A durch den Punkt B ist unter beiden Ähnlichkeitsabbildungen aufgrund ihrer Halbgeradentreue zur Halbgeraden mit dem Anfangspunkt A' durch den Punkt B' identisch.
- iii) Aufgrund ihrer Halbebenentreue bilden beide Ähnlichkeitsabbildungen jede Halbebene der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ mit der Randgeraden $\langle A, B \rangle$ auf die gleiche Halbebene der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ mit der Randgeraden $\langle A', B' \rangle$ ab.
- iv) Beide Ähnlichkeitsabbildungen bilden jeden Halbraum mit der Randebene $\langle A, B, C \rangle$ auf den gleichen Halbraum mit der Randebene $\langle A', B', C' \rangle$ ab.
- v) Beiden Ähnlichkeitsabbildungen liegt der gleiche Streckfaktor zugrunde, und zwar im Vorliegenden der Streckfaktor k , was mit der Verhältnistreue der Ähnlichkeitsabbildungen aufgrund der vorausgesetzten Abstandsverhältnisse daraus folgt, dass die Ähnlichkeitsabbildungen die Punkte A, B und C auf die Punkte A', B' bzw. C' abbilden.

Wir zeigen nun im Weiteren in zwei Schritten, dass die Bildpunkte eines jeden Punktes des metrisch-normalen euklidischen Raumes unter den Ähnlichkeitsabbildungen Θ und Θ^* zueinander identisch sind.

1. *Schritt:* Mit dem ersten Beweisschritt zeigen wir, dass jeder Punkt der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ unter der Ähnlichkeitsabbildung Θ und Θ^* den gleichen Bildpunkt besitzt. Beide Ähnlichkeitsabbildungen erfüllen die Aussagen i)-iii). Zum einen folgt daraus, dass die Ähnlichkeitsabbildungen Θ und Θ^* die Halbgerade $[A, B)$ auf die Halbgerade $[A', B')$ sowie die zur Halbgeraden $[A, B)$ komplementäre Halbgerade auf die zur Halbgeraden $[A', B')$ komplementäre Halbgerade abbilden. Damit liefert die Abstandsverhältnistreue beider Ähnlichkeitsabbildungen, unter der Berücksichtigung ihres nach der Aussage v) identischen Streckfaktors, zusammen mit dem Lemma 4.1.1.1, dass jeder Punkt der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ unter der Ähnlichkeitsabbildung Θ und Θ^* den gleichen Bildpunkt besitzt. Zum anderen bleibt zu zeigen, dass das Gleiche für jeden Punkt gilt, der in der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$, aber nicht auf der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ liegt:

Für einen solchen Punkt X betrachten wir die durch den Punkt gehende, in der Ebene $\langle A, B, C \rangle$ liegende zur Verbindungsgerade der Punkte A und B eindeutig bestimmte orthogonale Gerade (siehe Kapitel 4.2.2 zur eindeutigen Existenz). Aufgrund ihrer Orthogonalität schneidet diese Gerade die Verbindungsgerade in genau einem Punkt X^* (siehe hierzu Kapitel 3.1.2), sodass die Halbgerade (X^*, X) und deren komplementäre Halbgerade nach dem Korollar 3.2.1.12 innerhalb der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ in unterschiedlichen Halbebenen mit der Randgeraden $\langle A, B \rangle$ liegen. Für die Ähnlichkeitsabbildungen Θ und Θ^* gilt dabei, dass sie jede der Halbebenen je auf die gleiche Halbebene der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ abbilden, wobei sie jeden Punkt der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ auf den gleichen Punkt der Verbindungsgeraden $\langle A', B' \rangle$ abbilden.

Zusammenfassend erhalten wir mit der Orthogonalitätstreue der Ähnlichkeitsabbildungen Θ und Θ^* , unter Berücksichtigung der Eindeutigkeit einer Lotgeraden innerhalb einer Ebene des Raumes, dass das Bild der Halbgeraden $[X^*, X)$ unter beiden Ähnlichkeitsabbildungen eine identische Halbgerade ist. Damit liefert schließlich die Abstandsverhältnistreue der Ähnlichkeitsabbildungen Θ und Θ^* , unter Berücksichtigung ihres nach der Aussage v) identischen Streckfaktors, zusammen mit dem Lemma 4.1.1.1, dass der Bildpunkt des Punktes X unter beiden Ähnlichkeitsabbildungen identisch ist.

2. *Schritt:* Anknüpfend an den ersten Beweisschritt zeigen wir abschließend, dass jeder Punkt des metrisch-normalen euklidischen Raumes, der nicht in der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ liegt, unter der Ähnlichkeitsabbildung Θ und Θ^* den gleichen Bildpunkt besitzt. Durch einen solchen Punkt X betrachten wir die nach dem Satz 4.2.2.5 eindeutig bestimmte zur Verbin-

dungsebene $\langle A, B, C \rangle$ orthogonale Gerade. Jeder Punkt der Verbindungsebene besitzt nach dem ersten Beweisschritt unter der Ähnlichkeitsabbildung Θ und Θ^* den gleichen Bildpunkt. Ferner bilden beide Ähnlichkeitsabbildungen nach der Aussage iv) jeden Halbraum der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ auf den gleichen Halbraum der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ ab. Schließlich erhalten wir analog zum ersten Beweisschritt, dass der Bildpunkt des Punktes X unter den Ähnlichkeitsabbildungen Θ und Θ^* identisch ist. \square

Mit dem nachfolgenden Satz 4.4.2.7, mit der Aussage, dass die Menge aller räumlichen Ähnlichkeitsabbildungen bezüglich ihrer Verkettung eine Gruppe darstellt, schließen wir letztlich das vorliegende Kapitel. Im Hinblick auf den Nachweis dieser Aussage treffen wir zuvor anknüpfend an den soeben nachgewiesenen Satz 4.4.2.5 die

Bemerkung 4.4.2.6. Der Eindeutigkeitsnachweis im Rahmen von Satz 4.4.2.5 für sich genommen impliziert, dass die Eindeutigkeit unter den geltenden Voraussetzungen bereits für zwei Abbildungen gilt, die lediglich einige wenige Eigenschaften einer Ähnlichkeitsabbildung erfüllen, und zwar für eine abstandsverhältnis-, halbgeraden-, halbebenen- und orthogonalitätstreue Selbstabbildung des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Darüber hinaus impliziert der Eindeutigkeitsnachweis, dass die Eindeutigkeit zweier Ähnlichkeitsabbildungen sowie lediglich zweier abstandsverhältnis-, halbgeraden-, und orthogonalitätstreuer Selbstabbildungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ bereits gilt, wenn die beiden Abbildungen (unabhängig der geltenden Voraussetzungen) die in dem Nachweis dargelegten Eigenschaften i)-v) erfüllen.

Satz 4.4.2.7. Die Menge aller räumlichen Ähnlichkeitsabbildungen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ bildet mit der Relation der Verkettung \circ von Funktionen eine Gruppe.

Beweis: (Eigener Beweis; Beweisansatz: Lauer 2018, S. 97 f.)

Grundsätzlich gilt, dass die Komposition von Funktionen *assoziativ* ist. Die identische Abbildung $id_{\mathcal{P}}$ ist sowohl in der Menge aller zentrischen Streckungen als auch in der Menge aller Kongruenzabbildungen enthalten (siehe Kapitel 3.4 bzw. Kapitel 4.4.1). Folglich ist

die identische Abbildung $id_{\mathcal{P}}$ nach der Definition 4.4.2.2 auch ein Element der Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen, sodass in der Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen bezüglich ihrer Komposition ein *neutrales Element* existiert. Diesbezüglich besitzt jede Ähnlichkeitsabbildung ein *inverses Element*, da wiederum jede zentrische Streckung sowie jede Kongruenzabbildung eine zentrische Streckung bzw. Kongruenzabbildung als Umkehrabbildung besitzt (siehe Kapitel 3.4 bzw. Kapitel 4.4.1). Es bleibt im Weiteren zu zeigen, dass die Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen bezüglich ihrer Komposition *abgeschlossen* ist. Hierzu sei eine Verkettung zweier Ähnlichkeitsabbildungen gegeben; es sei $\Theta := \Theta_1 \circ \Theta_2$:

Wir betrachten mit dem Satz 3.1.1.2 entsprechend der Bemerkung 3.1.1.3 innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes drei verschiedene nicht kollineare Punkte A , B und C mit $\Theta(A) =: A'$, $\Theta(B) =: B'$ und $\Theta(C) =: C'$. Für die Abbildung Θ als die Verkettung zweier Ähnlichkeitsabbildungen gilt wie für die jeweiligen Ähnlichkeitsabbildungen selbst, dass sie eine abstandsverhältnis- sowie geradentreue (bijektive) Selbstabbildung des Raumes ist. Letztlich erhalten wir mit dem Satz 4.4.2.5 die Existenz genauer zweier Ähnlichkeitsabbildungen, die den Punkt A auf den Punkt A' , den Punkt B auf den Punkt B' und den Punkt C auf den Punkt C' abbilden. Dabei unterscheiden sich die beiden Ähnlichkeitsabbildungen darin, dass sie die Halbräume der Verbindungsebene $\langle A, B, C \rangle$ je auf einen verschiedenen Halbraum der Verbindungsebene $\langle A', B', C' \rangle$ abbilden. Unter Berücksichtigung, dass die Abbildung Θ als die Verkettung zweier Ähnlichkeitsabbildungen wie die jeweiligen Ähnlichkeitsabbildungen selbst zum einen halbraumtreue und zum anderen eine abstandsverhältnis-, halbgeraden-, halbebenen-, und orthogonalitätstreue (bijektive) Selbstabbildung des Raumes ist, erhalten wir mit der Bemerkung 4.4.2.6, dass die Verkettung Θ zu einer der beiden Ähnlichkeitsabbildungen identisch ist. Damit gilt das zu Zeigende. \square

5 Geometrie zwischen Axiomatik und Anschauung

Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes versteht sich als eine Axiomatisierung der euklidischen (Raum-)Geometrie *explizit* für Mathematiklehrkräfte der allgemeinbildenden Sekundarstufe I und II, eine Axiomatisierung der euklidischen (Raum-)Geometrie unter Berücksichtigung der geometrisch-fachdidaktischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte.

Für sich erfordert der Anspruch, mit der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes die euklidische (Raum-)Geometrie axiomatisch-deduktiv darzulegen, den Nachweis, dass der Anschauungsraum – dessen mathematisch-arithmetisches Modell – ein Modell des metrisch-normalen euklidischen Raumes darstellt. Die euklidische Geometrie verstanden in ihrer Auffassung als die Geometrie des uns umgebenden Raumes, wie wir ihn wahrnehmen. In Bezug zur Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes verstehen wir die Darlegung des Anschauungsraumes als Modell der Theorie in Kapitel 5.1 als extern-perspektivische Betrachtung. Demgegenüber steht die intern-perspektivische Betrachtung in Kapitel 5.2; wir zeigen, dass sich der Anschauungsraum aus der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes heraus als Teil der Theorie charakterisieren respektive in die Theorie einbetten lässt. Die intern-perspektivische Betrachtung ist im Besonderen fachdidaktisch motiviert. Der Blick richtet sich hier nicht zuletzt auf den Übergang zwischen der Geometrie der Sekundarstufe I und II. In der Sekundarstufe II erhält die Analytische Geometrie als Methode Einzug in den Geometrieunterricht; bereits bekannte geometrische Inhalte werden nun analytisch-geometrisch diskutiert (siehe hierzu Kapitel 2.1 „Curriculare Richtlinien“). Sowohl die intern-perspektivische wie auch extern-perspektivische Betrachtung ist ferner in der Diskussion um die Güte des axiomatischen Aufbaus der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes in Kapitel 6.1 von Bedeutung.

Dem mathematisch-arithmetischen Modell unseres Anschauungsraumes liegt der dreidimensionale euklidische Vektorraum $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ über der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen zugrunde (vgl. Henn/Filler 2015, S. 149 f.; Mitschka et al. 1998, S. 148). Das Modell basiert auf dem Koordinatisieren „als fundamentale Idee der Mathematik“ (Henn/Filler 2015, S. 149). Punkte, Geraden und Ebenen sowie Abstände lassen sich wie folgt charakterisieren (vgl. Henn/Filler 2015, S. 169–185 u. 195–204):

- Die Menge $\{\lambda_1 \cdot (1, 0, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1, 0) + \lambda_3 \cdot (0, 0, 1) : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$ beschreibt die Menge aller Punkte.
- Für zwei verschiedene Punkte A und B beschreibt die Menge $\{A + \lambda \cdot (B - A) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade; es symbolisiere \mathcal{G}_e die Menge aller Geraden.
- Für drei nicht kollineare, verschiedene Punkte A , B und C beschreibt die Menge $\{A + \lambda_1 \cdot (B - A) + \lambda_2 \cdot (C - A) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene; es symbolisiere \mathcal{E}_e die Menge aller Ebenen.¹⁰
- Die Abbildung $d_e: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (A, B) \mapsto \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ beschreibt den Abstand zweier Punkte A und B .

Anlehnend an die Charakterisierung eines metrisch-normalen euklidischen Raumes bezeichnen wir das Quadrupel $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e=})$ fortan als den euklidischen (Anschauungs-)Raum; ferner verwenden wir die bekannten, für einen metrisch-normalen euklidischen Raum eingeführten Sprechweisen. Im Allgemeinen setzt das Kapitel (elementare) Kenntnisse der linearen Algebra voraus. In diesem Zusammenhang sei etwa auf die Arbeiten von Beutelspacher (2014) oder Walter (1986) verwiesen.

5.1 Der euklidische Raum – extern-perspektivisch

Ziel ist es: den euklidischen Anschauungsraum $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e=})$ als ein Modell der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes zu identifizieren. Hierzu zeigen wir, dass die

¹⁰Mit der definitiven Festlegung einer Geraden ist die Voraussetzung der Nicht-Kollinearität der Punkte A , B und C äquivalent dazu, dass bezüglich des hier zugrunde liegenden Vektorraums die Vektoren $(B - A)$ und $(C - A)$ linear unabhängig sind.

Axiome eines metrisch-normalen euklidischen Raumes innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes gelten.

Die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes versteht sich als eine räumliche Erweiterung der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene (siehe hierzu Kapitel 2.2). In diesem Zusammenhang lassen sich einzelne Axiome der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes als ebene Axiome im räumlichen Kontext auffassen. Exemplarisch ist das Teilungsaxiom. Das Axiom fordert die Teilung einer jeden Ebene des Raumes, nicht des Raumes selbst (siehe hierzu Kapitel 3.2.1). Für die Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene ist mit meiner Masterarbeit (2018, S. 112–123) bereits nachgewiesen, dass die euklidische Anschauungsebene die jeweiligen Axiome erfüllt, ein Modell der Theorie ist.

Schließlich führen wir im Rahmen des vorliegenden Kapitels den Nachweis, dass das Parallelenaxiom, Kongruenzaxiom und Teilungsaxiom eines metrisch-normalen euklidischen Raumes innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ gilt, auf die euklidische Anschauungsebene zurück. Direkt innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes erfolgt der Nachweis des Linealaxioms sowie der Verbindungsaxiome für Geraden bzw. Ebenen. Bezüglich der Punkte-, Geraden- und Ebenenmenge $\mathbb{R}^3, \mathcal{G}_e$ bzw. \mathcal{E}_e des euklidischen Anschauungsraumes zeigen wir zuvor, dass die Mengen im Sinne der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes Punkte-, Geraden- und Ebenenmengen darstellen. Als Grundlage der weiteren Untersuchung dient meine Masterarbeit (2018, S. 112–123), mit einer Ausnahme, den Nachweis des Linealaxioms orientieren wir an Millman/Parker (1991, S. 42–44).

Die Menge \mathbb{R}^3 aller Punkte

Es existieren mindestens zwei verschiedene Punkte –

die Menge \mathbb{R}^3 beschreibt als die Menge aller Punkte des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ eine Punktmenge entsprechend der definitorischen Festlegung eines metrisch-normalen euklidischen Raumes:

Beweis: Per definitionem enthält die Menge \mathbb{R}^3 mindestens zwei verschiedene Elemente; sie charakterisiert eine mindestens zweielementige Punktmenge.

Die Menge \mathcal{E}_e aller Ebenen

Jede Ebene ist zu einer Menge $m_{A,B;e} := \{X \in \mathbb{R}^3 : \{A, X\} \equiv_{d_e} \{X, B\}\}$ für zwei verschiedene Punkte A und B identisch, und umgekehrt –

die Menge \mathcal{E}_e beschreibt als die Menge aller Ebenen des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e=})$ eine Ebenenmenge entsprechend der definitorischen Festlegung eines metrisch-normalen euklidischen Raumes:

Beweis – Teil I: Für zwei verschiedene Punkte $A := (a_1, a_2, a_3)$ und $B := (b_1, b_2, b_3)$ sei die Menge $m_{A,B;e}$ gegeben. Wir zeigen innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes die Existenz einer Ebene, die Existenz eines Elementes in der Menge \mathcal{E}_e derart, dass ein Punkt des Raumes genau dann ein Element dieser Ebene ist, wenn der Punkt ein Element der Menge $m_{A,B;e}$ darstellt. Aufgrund der Verschiedenheit der Punkte A und B sind die Komponenten a_1 und b_1 , a_2 und b_2 oder a_3 und b_3 zueinander verschieden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien im Weiteren die reellen Zahlen a_2 und b_2 zueinander verschieden, die beiden jeweils übrigen Komponenten beliebige reelle Zahlen. Für einen Punkt $X := (x_1, x_2, x_3)$ des euklidischen Raumes gilt mit der auf dem euklidischen Abstand basierenden Definition der Relation \equiv_{d_e} die Äquivalenz

$$X \in m_{A,B;e} \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} = \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + (x_3 - b_3)^2};$$

wir lösen nach der Komponenten x_2 auf und erhalten die Äquivalenz

$$\begin{aligned} X \in m_{A,B;e} &\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2 \cdot (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot (x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3) \\ &\Leftrightarrow x_2 &= x_1 \cdot m + x_3 \cdot n + k \quad , \end{aligned}$$

wobei $k := \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2}{2 \cdot (a_2 - b_2)}$, $m := \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2}$ und $n := \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2}$ mit $a_2 \neq b_2$ wie vorausgesetzt. Innerhalb des euklidischen Raumes existiert mit den Punkten $A' := (0, k, 0)$, $B' := (1, m + k, 0)$ und $C' := (0, n + k, 1)$ per definitionem eine Ebene

$$\epsilon_e := \{A' + \lambda \cdot (B' - A') + \mu \cdot (C' - A') \in \mathbb{R}^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, k + \lambda \cdot m + \mu \cdot n, \mu) \in \mathbb{R}^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\};$$

zusammen mit der soeben dargelegten Äquivalenz gilt, dass der Punkt X genau dann ein Element der Menge $m_{A,B;e}$ ist, wenn der Punkt X in der Ebene ϵ_e liegt. Folglich ist die Menge $m_{A,B;e}$ zur Ebene ϵ_e innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes identisch.

Beweis – Teil II: Es sei ein Element $\epsilon_e := \{A + \lambda \cdot (B - A) + \mu \cdot (C - A) \in \mathbb{R}^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ der Menge \mathcal{E}_e , eine Ebene des euklidischen Raumes gegeben. Bezüglich des hier zugrunde liegenden euklidischen Vektorraumes $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ existiert das Kreuzprodukt $N := (B - A) \times (C - A)$. Damit betrachten wir die zueinander verschiedenen Punkte $A' := A + N$ und $B' := A - N$ und weisen nach, dass die Ebene ϵ_e zur Menge $m_{A',B';e}$ identisch ist:

i) Wir zeigen zunächst, dass ein Punkt $X := (x_1, x_2, x_3)$ der Ebene ϵ_e zu den Punkten A' und B' den gleichen euklidischen Abstand besitzt, also ein Element der Menge $m_{A',B';e}$ ist. Aufgrund der Lage des Punktes X in der Ebene ϵ_e erhalten wir mit der Definition des Punktes N , dass das Skalarprodukt $N \cdot (X - A)$ bezüglich des euklidischen Vektorraumes $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ zur reellen Zahl 0 identisch ist. Hierauf führen wir die zu zeigende Abstandsgleichheit zurück; es sei $A := (a_1, a_2, a_3)$, $B := (b_1, b_2, b_3)$ und $N := (n_1, n_2, n_3)$:

$$\begin{aligned} (d_e(A', X))^2 &= (x_1 - (a_1 + n_1))^2 + (x_2 - (a_2 + n_2))^2 + (x_3 - (a_3 + n_3))^2 \\ &= ((x_1 - a_1) - n_1)^2 + ((x_2 - a_2) - n_2)^2 + ((x_3 - a_3) - n_3)^2 \\ &= (X - A)^2 + N^2 - 2 \cdot ((X - A) \cdot N) \\ &= (X - A)^2 + N^2 + 2 \cdot ((X - A) \cdot N) \\ &= ((x_1 - a_1) + n_1)^2 + ((x_2 - a_2) + n_2)^2 + ((x_3 - a_3) + n_3)^2 = (d_e(B', X))^2 \end{aligned}$$

Damit sind die euklidischen Abstände der Punkte A' und X sowie der Punkte B' und X zueinander identisch.

ii) Es ist also gezeigt, dass innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e=})$ jeder Punkt der Ebene ϵ_e ein Element der Menge $m_{A',B';e}$ darstellt. Basierend auf dem dargelegten Teilschritt I weisen wir hiermit die Gleichheit der Menge $m_{A',B';e}$ und der Ebene ϵ_e nach. Nach dem Schritt I existiert innerhalb des euklidischen Raumes bereits eine zur Menge $m_{A',B';e}$ identische Ebene. Es sei $\bar{\epsilon}_e := \{\bar{A} + \bar{\lambda} \cdot (\bar{B} - \bar{A}) + \bar{\mu} \cdot (\bar{C} - \bar{A}) \in \mathbb{R}^3 : \bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \mathbb{R}\} = m_{A',B';e}$; wir zeigen letztlich die Gleichheit der Ebenen ϵ_e und $\bar{\epsilon}_e$. Die Ebene ϵ_e enthält per definitionem die Punkte A , B und C . Damit sind die Punkte aufgrund der nach dem Schritt II.i) geltenden Teilmengenbeziehung ebenfalls Elemente der Ebene $\bar{\epsilon}_e$. Folglich existieren reelle Zahlen $\bar{\lambda}_A$ und $\bar{\mu}_A$, $\bar{\lambda}_B$ und $\bar{\mu}_B$ sowie $\bar{\lambda}_C$ und $\bar{\mu}_C$ so, dass der Punkt $(\bar{A} + \bar{\lambda}_A \cdot (\bar{B} - \bar{A}) + \bar{\mu}_A \cdot (\bar{C} - \bar{A}))$ zu dem Punkt A , der Punkt $(\bar{A} + \bar{\lambda}_B \cdot (\bar{B} - \bar{A}) + \bar{\mu}_B \cdot (\bar{C} - \bar{A}))$ zu dem Punkt B sowie der Punkt $(\bar{A} + \bar{\lambda}_C \cdot (\bar{B} - \bar{A}) + \bar{\mu}_C \cdot (\bar{C} - \bar{A}))$ zu dem Punkt C identisch ist. Entsprechend erset-

zen wir die Punkte A , B und C in der definitorischen Festlegung der Ebene ϵ_e und erhalten für die Ebene die Gleichung

$$\epsilon_e = \{ \bar{A} + (\bar{\lambda}_A + \lambda \bar{\lambda}_{(B-A)} + \mu \bar{\lambda}_{(C-A)}) \cdot (\bar{B} - \bar{A}) + (\bar{\mu}_A + \lambda \bar{\mu}_{(B-A)} + \mu \bar{\mu}_{(C-A)}) \cdot (\bar{C} - \bar{A}) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \},$$

wobei $\bar{\lambda}_{(B-A)} := (\bar{\lambda}_B - \bar{\lambda}_A)$, $\bar{\lambda}_{(C-A)} := (\bar{\lambda}_C - \bar{\lambda}_A)$, $\bar{\mu}_{(B-A)} := (\bar{\mu}_B - \bar{\mu}_A)$ und $\bar{\mu}_{(C-A)} := (\bar{\mu}_C - \bar{\mu}_A)$. Damit zeigen wir zu dem Nachweis, dass die Ebene ϵ_e zur Ebene $\bar{\epsilon}_e$, und somit zur Menge $m_{A',B';e}$ identisch ist, die Surjektivität der folgenden Funktionen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\alpha, \beta) \mapsto \bar{\lambda}_A + \alpha \bar{\lambda}_{(B-A)} + \beta \bar{\lambda}_{(C-A)}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\alpha, \beta) \mapsto \bar{\mu}_A + \alpha \bar{\mu}_{(B-A)} + \beta \bar{\mu}_{(C-A)}.$$

Per definitionem ist die Ebene ϵ_e durch die drei Punkte A , B und C bestimmt, womit die Punkte innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ nicht kollineare paarweise verschiedene Punkte sind. In Bezug zur Ebene $\bar{\epsilon}_e$ gilt aufgrund der paarweise Verschiedenheit, dass mindestens eine der beiden reellen Zahlen $\bar{\lambda}_{(B-A)}$ und $\bar{\mu}_{(B-A)}$ sowie $\bar{\lambda}_{(C-A)}$ und $\bar{\mu}_{(C-A)}$ von der reellen Zahl 0 verschieden ist, und aufgrund der Nicht-Kollinearität, dass mindestens eine der beiden reellen Zahlen $\bar{\lambda}_{(B-A)}$ und $\bar{\lambda}_{(C-A)}$ sowie $\bar{\mu}_{(B-A)}$ und $\bar{\mu}_{(C-A)}$ von der reellen Zahl 0 verschieden ist. Seien die reellen Zahlen $\bar{\lambda}_{(C-A)}$ und $\bar{\mu}_{(C-A)}$ von der reellen Zahl 0 verschieden, so existiert für eine reelle Zahl γ in der Menge \mathbb{R}^2 ein Element $(0, ((\gamma - \bar{\lambda}_A)/\bar{\lambda}_{(C-A)}))$, dessen Bild unter der Funktion f zur reellen Zahl γ identisch ist, sowie ein Element $(0, ((\gamma - \bar{\mu}_A)/\bar{\mu}_{(C-A)}))$, dessen Bild unter der Funktion g zur reellen Zahl γ identisch ist. Analoges gilt im Falle, dass die reellen Zahlen $\bar{\lambda}_{(B-A)}$ und $\bar{\mu}_{(B-A)}$, die reellen Zahlen $\bar{\lambda}_{(B-A)}$ und $\bar{\mu}_{(C-A)}$ oder die reellen Zahlen $\bar{\lambda}_{(C-A)}$ und $\bar{\mu}_{(B-A)}$ von der reellen Zahl 0 verschieden sind; und somit gilt die Surjektivität der beiden Funktionen f und g .

Die Menge \mathcal{G}_e aller Geraden

Jede Gerade ist zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen identisch und umgekehrt, ist jeder Schnitt zweier solcher Ebenen gleich einer Geraden –

die Menge \mathcal{G}_e beschreibt als die Menge aller Geraden des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ eine Geradenmenge entsprechend der definitorischen Festlegung eines metrisch-normalen euklidischen Raumes:

Beweis – Teil I: Es seien zwei verschiedene, nicht disjunkte Ebenen ϵ_e und η_e gegeben. In Bezug zu dem zugrunde liegenden Vektorraum $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ stellt jede Ebene des euklidischen

Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ eine zweidimensionale lineare Mannigfaltigkeit dar. Entsprechend ist die Menge aller Geraden gleich der Menge aller linearen eindimensionalen Mannigfaltigkeiten. Zum Nachweis, dass der Schnitt der Ebenen ϵ_e und η_e innerhalb des euklidischen Raumes zu einer Gerade identisch ist, zeigen wir, dass der Schnitt bezüglich des zugrundeliegenden Vektorraums eine eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit darstellt.

Allgemein ist die Schnittmenge zweier nicht disjunkter linearer Mannigfaltigkeiten wiederum eine lineare Mannigfaltigkeit. Bleibt zu zeigen, dass die Schnittmenge der Ebenen ϵ_e und η_e eindimensional ist. Berücksichtigend, dass auch die Summe zweier linearer Mannigfaltigkeiten wiederum eine lineare Mannigfaltigkeit darstellt, greifen wir hierzu auf die entsprechende Dimensionsformel zurück; es gilt

$$\dim(\epsilon_e \cap \eta_e) = \dim(\epsilon_e) + \dim(\eta_e) - \dim(\epsilon_e + \eta_e).$$

Die Ebenen ϵ_e und η_e sind als lineare Mannigfaltigkeiten zweidimensional. Die Summe aus beiden Ebenen besitzt als lineare Mannigfaltigkeit eine Dimension, die kleiner als oder identisch zur Dimension des hier zugrundeliegenden Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ ist. Im Vergleich zu den Ebenen ϵ_e und η_e ist die Dimension der Summe andererseits größer, da die Ebenen verschieden sind. Die Summe der Ebenen ϵ_e und η_e beschreibt also eine dreidimensionale lineare Mannigfaltigkeit. Zusammenfassend besitzt der Schnitt der Ebenen ϵ_e und η_e mit der obigen Dimensionsformel als lineare Mannigfaltigkeit die Dimension eins; schließlich ist der Schnitt zu einer Geraden des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ identisch.

Beweis – Teil II: Es sei eine Gerade $g_e := \{A + \lambda \cdot (B - A) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ innerhalb des metrischnormalen euklidischen Raumes gegeben. Wir weisen nach, dass die Gerade zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen identisch ist. Hierzu leiten wir zunächst die Existenz zweier verschiedener Ebenen her, deren Schnitt jeden Punkt der Geraden g_e enthält, und beweisen letztlich die Gleichheit dieser Schnittmenge und der Geraden:

i) Wir zeigen für die Gerade g_e die Existenz zweier verschiedener Ebenen, in denen je die Gerade liegt. Die Gerade ist per definitionem durch die Punkte A und B bestimmt. Damit sind die Punkte zueinander verschieden; es sei $A := (a_1, a_2, a_3)$ und $B := (b_1, b_2, b_3)$. Wir wählen eine reelle Zahl x derart, dass wir mit den Punkten $C_1 := (b_1 + x, b_2, b_3)$ und $C_2 := (b_1 - x, b_2, b_3)$ zwei weitere zueinander verschiedene, je zu den Punkten A und B verschiedene Punkte innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes betrachten. Bezüglich des hier zugrunde liegenden Vektorraumes $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ sind damit die Vektoren $(C_1 - A)$ und $(C_2 - A)$ jeweils zum Vek-

tor $(B - A)$ linear unabhängig. Zusammenfassend erhalten wir mit den Punkten A , B und C_1 sowie A , B und C_2 per definitionem je eine Ebene, zwei verschiedene Ebenen

$$\epsilon_e := \{A + \lambda_1 \cdot (B - A) + \mu_1 \cdot (C_1 - A) : \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{und}$$

$$\eta_e := \{A + \lambda_2 \cdot (B - A) + \mu_2 \cdot (C_2 - A) : \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Sind die reellen Zahlen μ_1 und μ_2 fest, gleich der reellen Zahlen 0, so sind die beiden Ebenen jeweils zur Geraden g_e identisch; schließlich existieren mit den Ebenen ϵ_e und η_e zwei verschiedene Ebenen, in denen jeweils die Gerade g_e liegt.

ii) Es ist also gezeigt, dass innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e=})$ jeder Punkt der Geraden g_e im Schnitt der Ebenen ϵ_e und η_e liegt. Basierend auf dem bereits dargelegten Teilschritt I weisen wir hiermit nach, dass die Gerade und die Schnittmenge zueinander identisch sind. Nach dem Teilschritt I existiert innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes bereits eine zur Schnittmenge der Ebenen ϵ_e und η_e identische Gerade. Es sei $\bar{g}_e := \{\bar{A} + \bar{\lambda} \cdot (\bar{B} - \bar{A}) : \bar{\lambda} \in \mathbb{R}\} = (\epsilon_e \cap \eta_e)$; wir zeigen letztlich die Gleichheit der Geraden g_e und \bar{g}_e . Die Gerade g_e enthält per definitionem die Punkte A und B . Damit sind die Punkte aufgrund der nach dem Schritt II.i) geltenden Teilmengenbeziehung ebenfalls Elemente der Geraden \bar{g}_e . Folglich existieren zwei reelle Zahlen $\bar{\lambda}_A$ und $\bar{\lambda}_B$ derart, dass der Punkt $(\bar{A} + \bar{\lambda}_A \cdot (\bar{B} - \bar{A}))$ zu dem Punkt A und der Punkt $(\bar{A} + \bar{\lambda}_B \cdot (\bar{B} - \bar{A}))$ zu dem Punkt B identisch ist. Entsprechend ersetzen wir die Punkte A und B in der definitorischen Festlegung der Geraden g_e und erhalten für die Gerade die Gleichung

$$g_e = \{\bar{A} + (\bar{\lambda}_A + \lambda(\bar{\lambda}_B - \bar{\lambda}_A)) \cdot (\bar{B} - \bar{A}) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Damit zeigen wir zu dem Nachweis, dass die Gerade g_e zur Geraden \bar{g}_e , und somit zum Schnitt der Ebenen ϵ_e und η_e identisch ist, die Surjektivität der folgenden Funktion:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \alpha \mapsto \bar{\lambda}_A + \alpha(\bar{\lambda}_B - \bar{\lambda}_A),$$

Per definitionem enthält die Gerade g_e die Punkte A und B , womit die beiden Punkte innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes zueinander verschieden sind. In Bezug zur Geraden \bar{g}_e gilt damit, dass die Differenz aus den reellen Zahlen $\bar{\lambda}_A$ und $\bar{\lambda}_B$ zur reellen Zahl 0 verschieden ist. Damit existiert für eine reelle Zahl β in der Menge \mathbb{R} ein Element $((\beta - \bar{\lambda}_A)/(\bar{\lambda}_B - \bar{\lambda}_A))$, dessen Bild unter der Funktion f gleich der reellen Zahl β ist. Damit ist die Surjektivität der Funktion f gezeigt.

Verbindungsaxiom-Geraden (V_G)

Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

Beweis: Es seien A und B zwei verschiedene Punkte des euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$. Damit existiert die Gerade $\{A + \lambda \cdot (B - A) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ innerhalb des Anschauungsraumes, wobei der Punkt $(A + 0 \cdot (B - A))$ der Geraden gleich dem Punkt A sowie der Punkt $(A + 1 \cdot (B - A))$ gleich dem Punkt B ist. Die zu zeigende Eindeutigkeit der Geraden als diejenige Gerade innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes, die durch die Punkte A und B geht, folgt umgehend aus dem Teilschritt II.ii) des vorherigen Abschnittes, genauer aus dem Nachweis, dass die Geraden g_e und \bar{g}_e identisch sind.

Verbindungsaxiom-Ebenen (V_E)

Durch drei nicht kollineare Punkte geht eine Ebene.

Beweis: Es seien A , B und C drei nicht kollineare Punkte des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$. Die Punktmenge \mathbb{R}^3 ist mindestens zweielementig, sodass die Punkte A , B und C aufgrund ihrer Nicht-Kollinearität nach dem soeben bewiesenen Axiom V_G innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes nicht identisch sind; weiter sind die Punkte aufgrund ihrer Nicht-Kollinearität nach dem Axiom V_G paarweise verschieden. Die Punkte bestimmen somit per definitionem eine Ebene $\{A + \lambda \cdot (B - A) + \mu \cdot (C - A) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ innerhalb des euklidischen Raumes, sodass der Punkt A zum Punkt $(A + 0 \cdot (B - A) + 0 \cdot (C - A))$ der Ebene sowie der Punkt B zum Punkt $(A + 1 \cdot (B - A) + 0 \cdot (C - A))$ und der Punkt C zum Punkt $(A + 0 \cdot (B - A) + 1 \cdot (C - A))$ identisch ist.

Mit der Existenz dieser Ebene ist hier die Gültigkeit des Axioms innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ begründet. Analog zum soeben erfolgten Nachweis des Axioms V_G folgt die Eindeutigkeit der Ebene aus dem Teilschritt II.ii) des Abschnittes „Die Menge \mathcal{E}_e aller Ebenen“. Die eindeutige Existenz einer solchen Ebene ist zum späteren Nachweis des Parallelen- und Kongruenzaxioms innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes relevant.

Linealaxiom (L)

Für jede Gerade g existiert eine bijektive Funktion $f: g \rightarrow \mathbb{R}$, sodass der Abstand $d(A, B)$ zweier auf der Gerade g liegender Punkte A und B zur Betragsmetrik ihrer beiden Bildpunkte $f(A)$ und $f(B)$ bezüglich der Funktion f identisch ist.

Beweis: Es sei eine Gerade $g_e := \{A + \lambda \cdot (B - A) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ innerhalb des euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e=})$ gegeben. Für jeden Punkt X der Geraden g_e existiert entsprechend derer definitorischen Festlegung genau eine reelle Zahl λ_X so, dass der Punkt $(A + \lambda_X \cdot (B - A))$ gleich dem Punkt X ist. Folglich existiert die Funktion

$$f: g_e \rightarrow \mathbb{R}; \quad X = (A + \lambda_X \cdot (B - A)) \mapsto \lambda_X \cdot d_e(A, B),$$

und wir zeigen, dass mit dieser Funktion für die Gerade g_e die Aussage des Linealaxioms innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e=})$ gilt:

Teil I: Wir zeigen zunächst die Bijektivität der Funktion f . Den Nachweis gliedern wir wiederum in den Nachweis der Injektivität und Surjektivität.

Injektivität: Es seien zwei verschiedene Punkte X_1 und X_2 der Geraden g_e gegeben. Mit der definitorischen Festlegung der Geraden g_e existieren (genau) zwei reelle Zahlen λ_{X_1} und λ_{X_2} so, dass der Punkt X_1 gleich dem Punkt $(A + \lambda_{X_1} \cdot (B - A))$ und der Punkt X_2 gleich dem Punkt $(A + \lambda_{X_2} \cdot (B - A))$ ist. Dabei sind die reellen Zahlen aufgrund der Verschiedenheit der Punkte X_1 und X_2 ebenfalls zueinander verschieden. Hieraus folgt mit der definitorischen Festlegung der Funktion f wiederum, dass die Bildpunkte $f(X_1)$ und $f(X_2)$ der Punkte X_1 bzw. X_2 unter der Funktion f zueinander verschieden sind. Folglich gilt die Injektivität der Funktion f .

Surjektivität: Es sei eine reelle Zahl y gegeben. Per definitionem ist die Gerade g_e durch die Punkte A und B bestimmt. Damit sind die beiden Punkte zueinander verschieden. Folglich ist der euklidische Abstand $d_e(A, B)$ der Punkte eine zur reellen Zahl 0 verschiedene reelle Zahl. Auf der Geraden g_e existiert hiermit der Punkt $(A + \frac{y}{d_e(A, B)} \cdot (B - A))$, dessen Bild unter der Funktion f gleich der reellen Zahl y ist. Folglich gilt die Surjektivität der Funktion f .

Teil II: Für zwei beliebige Punkte X_1 und X_2 der Geraden g_e zeigen wir, dass deren euklidischer Abstand zur Betragsmetrik ihrer Bildpunkte $f(X_1)$ und $f(X_2)$ identisch ist. Mit der definitorischen Festlegung der Geraden g_e existieren (genau) zwei reelle Zahlen λ_{X_1} und λ_{X_2} so, dass der Punkt X_1 gleich dem Punkt $(A + \lambda_{X_1} \cdot (B - A))$ und der Punkt X_2 gleich dem

Punkt $(A + \lambda_{X_2} \cdot (B - A))$ ist. Für den euklidischen Abstand der Punkte X_1 und X_2 gilt damit die folgende Gleichung, es sei $A := (a_1, a_2, a_3)$ und $B := (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{aligned} d_e(X_1, X_2) &= \sqrt{((\lambda_{X_2} - \lambda_{X_1}) \cdot (b_1 - a_1))^2 + ((\lambda_{X_2} - \lambda_{X_1}) \cdot (b_2 - a_2))^2 + ((\lambda_{X_2} - \lambda_{X_1}) \cdot (b_3 - a_3))^2} \\ &= \sqrt{(\lambda_{X_2} - \lambda_{X_1})^2 \cdot ((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2)} \\ &= \sqrt{(\lambda_{X_2} - \lambda_{X_1})^2} \cdot \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \\ &= |(\lambda_{X_2} - \lambda_{X_1})| \cdot d_e(A, B) = |\lambda_{X_2} \cdot d_e(A, B) - \lambda_{X_1} \cdot d_e(A, B)| = |f(X_2) - f(X_1)| \end{aligned}$$

Es gilt, dass der euklidische Abstand der Punkte X_1 und X_2 zur Betragsmetrik ihrer Bildpunkte unter der Funktion f identisch ist.

Parallelenaxiom (P) / Kongruenzaxiom (K) / Teilungsaxiom (T)

- (P) *Für eine Gerade g und einen nicht auf dieser Gerade liegender Punkt A existiert genau eine durch den Punkt A gehende, zur Geraden g disjunkt parallele Gerade.*
- (K) *Bezüglich eines Parallelogramms (A, B, C, D) ist der Abstand der Punkte A und B sowie der Abstand der Punkte C und D identisch.*
- (T) *Jede Ebene wird durch jede in ihr liegende Gerade g in zwei (offene) Halbebenen mit der Randgeraden g geteilt.*

Das Teilungsaxiom charakterisiert ein ebenes Axiom im räumlichen Kontext; es fordert die Teilung einer jeden Ebene innerhalb des Raumes (nicht die des Raumes selbst). Mit meiner Masterarbeit (2018, S. 112–123) erfolgte bereits der Nachweis, dass die Aussage des Axioms in der euklidischen Anschauungsebene gilt. (Siehe eingangs des vorliegenden Kapitels 5.1.) Die euklidische Anschauungsebene ist analog wie der (zu Beginn des Kapitels dargelegte) euklidische Anschauungsraum $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e=})$ beschrieben. Statt des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ liegt der euklidische Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ zugrunde – die Menge aller Ebenen existiert nicht. In Bezug zu dem zugrundeliegenden Vektorraum beschreibt der euklidische Abstand sowohl innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes als auch innerhalb der euklidischen Anschauungsebene eine durch die euklidische Norm induzierte Metrik, wo-

bei die Norm wiederum durch das Standardskalarprodukt induziert ist. Die Ebenen des euklidischen Anschauungsraumes lassen sich bezüglich des zugrunde liegenden euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ als einen zweidimensionalen euklidischen Untervektorraum bzw. als eine zweidimensionale lineare Mannigfaltigkeit eines solchen Untervektorraums auffassen. Die euklidische Anschauungsebene wiederum beschreibt einen zweidimensionalen euklidischen Vektorraum. Besitzen zwei endlich dimensionale euklidische Vektorräume die gleiche Dimension, so sind sie zueinander (isometrisch) isomorph (vgl. Walter 1986, S. 210–212). Für die Ebenen des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ erhalten wir zusammenfassend, dass sie in diesem algebraischen Sinne, hiermit aber auch hinsichtlich ihrer geometrischen Struktur zur euklidischen Anschauungsebene isomorph sind: Jede Ebene des Raumes ist zu dem Bild der euklidischen Anschauungsebene unter einer abstands- und geradentreuen Bijektion identisch, und umgekehrt. Auf dieser Grundlage führen wir die Gültigkeit des Parallelen-, Kongruenz- und Teilungsaxioms innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes auf die mit meiner Masterarbeit (2018, S. 112–123) gezeigten Gültigkeit der entsprechenden Aussagen in der euklidischen Anschauungsebene zurück.

Hierzu zeigen wir im Einzelnen, dass neben dem Teilungsaxiom auch die beiden übrigen Axiome im räumlichen Kontext ebene Axiome darstellen, sich ihre Aussagen also auf eine Ebene des Raumes beziehen. Ferner zeigen wir, dass die mit den Axiomen beschriebenen geometrischen Sachverhalte unter einer bijektiven, geraden- und abstandstreuen Abbildung – wie sie von jeder Ebene des euklidischen Anschauungsraumes auf die euklidische Anschauungsebene existiert (siehe zuvor) – invariant sind:

Beweis – Parallelenaxiom: Das Axiom charakterisiert für eine Gerade g und einen nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt A die eindeutige Existenz einer Geraden, die durch den Punkt A geht, zur Geraden g disjunkt ist und mit der Geraden g gemeinsam in einer Ebene liegt. Basierend auf den im Rahmen des vorliegenden Kapitels innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes bereits nachgewiesenen Axiomen sowie der Darlegung der Geradenmenge \mathcal{G}_e des Raumes erhalten wir wie innerhalb eines metrisch-normalen euklidischen Raumes mit der Aussage des Satzes 3.1.1.4, dass im Allgemeinen eine Gerade und einen nicht auf dieser Geraden liegender Punkt gemeinsam in genau einer Ebene liegen. Letztlich charakterisiert das Parallelenaxiom eine inzidenzgeometrische Existenz- und Eindeutigkeitsaussage, bezogen auf genau eine Ebene des Raumes. Schließlich erhalten wir mit der Gültigkeit des Axioms in der euklidischen Anschauungsebene aufgrund der existierenden abstands- und ge-

radentreuen Bijektion zwischen einer jeden Ebene des euklidischen Anschauungsraumes und der euklidischen Anschauungsebene, dass das Parallelenaxiom innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes gilt.

Beweis – Kongruenzaxiom: Bezüglich eines Parallelogramms (A, B, C, D) trifft das Axiom eine abstandsgeometrische Aussage, und zwar dass der Abstand der Punkte A und B zum Abstand der Punkte C und D identisch ist. Mit dem im Rahmen des vorliegenden Kapitels bereits nachgewiesenen Verbindungsaxiom-Geraden sowie der erfolgten Darlegung der Geradenmenge \mathcal{G}_e gilt innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes analog wie innerhalb eines metrisch-normalen euklidischen Raumes die Aussage des Satzes 2.2.2.1. Damit beschreibt jedes Parallelogramm innerhalb des euklidischen Raumes zur Definition in einem metrisch-normalen euklidischen Raum entsprechend als Polygon eine ebene Figur. Ein Polygon beschreibt dabei einen Streckenzug; das Parallelogramm zeichnet sich hier dadurch aus, dass die Seitengeraden $\langle A, B \rangle$ und $\langle C, D \rangle$ sowie die Seitengeraden $\langle B, C \rangle$ und $\langle A, D \rangle$ disjunkt sind. Unter der von jeder Ebene des euklidischen Anschauungsraumes auf die euklidische Anschauungsebene existierenden Bijektion wird aufgrund derer Abstands- und Geradentreue (was zugleich die Zwischen- und letztlich die Streckentreue impliziert) ein Parallelogramm wiederum auf ein Parallelogramm abgebildet. Mit der Gültigkeit des Kongruenzaxioms innerhalb der euklidischen Anschauungsebene erhalten wir schließlich die Gültigkeit des Axioms innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes.

Beweis – Teilungsaxiom: Die mit dem Axiom dargelegten Halbebenen einer Ebene bezüglich einer in der Ebene liegenden Geraden zeichnen sich durch drei Aspekte aus. Erstens, dass sich die Gerade und die Strecke zweier in derselben Halbebenen liegender Punkte nicht schneiden. Zweitens, dass sich die Gerade und die Strecke zweier in verschiedenen Halbebenen liegender Punkte schneiden. Drittens, dass die beiden Halbebenen disjunkt sind. Unter der von jeder Ebene des euklidischen Anschauungsraumes auf die euklidische Anschauungsebene existierenden Bijektion ist aufgrund derer Geraden- und Abstandstreue zugleich eine Strecke entsprechend zur Definition in einem metrisch-normalen euklidischen Raum invariant. Schließlich erhalten wir mit der Gültigkeit des Teilungsaxioms in der euklidischen Anschauungsebene, dass das Axiom in jeder Ebene des euklidischen Anschauungsraumes und damit in dem Raum selbst gilt.

5.2 Der euklidische Raum – intern-perspektivisch

Ziel ist es: den euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ aus der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes heraus als Teil der Theorie zu charakterisieren respektive in die Theorie einzubetten. Hierzu zeigen wir die Existenz eines Isomorphismus von dem metrisch-normalen euklidischen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ – als formales Modell der Theorie – auf den euklidischen Anschauungsraum $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$; jedes (explizite) Modell der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes ist letztlich zu dem euklidischen Anschauungsraum als ein nach dem Kapitel 5.1 explizites Modell der Theorie isomorph (vgl. hierzu auch Kowol 2009, S. 64 f.). Ein Isomorphismus beschreibt hier eine bijektive Abbildung von der Punktmenge \mathcal{P} auf die Punktmenge \mathbb{R}^3 , unter der die elementaren geometrischen Strukturen des Raumes, die dem axiomatischen Aufbau zugrunde liegen, invariant sind (vgl. zusätzlich Kowol 2009, S. 64). Den Nachweis gliedern wir sukzessiv in vier Schritte. Elementar ist der Existenznachweis einer Bijektion f von der Punktmenge \mathcal{P} auf die Punktmenge \mathbb{R}^3 . Im zweiten Schritt zeigen wir, dass der Abstand zweier Punkte innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Bijektion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist. Im dritten und vierten Schritt zeigen wir, dass die Bijektion die Ebenenmenge \mathcal{E} auf die Ebenenmenge \mathcal{E}_e bzw. die Geradenmenge \mathcal{G} auf die Geradenmenge \mathcal{G}_e abbildet. Die Struktur des Beweises sowie die Beweisschritte im Einzelnen sind explizit für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes der vorliegenden Arbeit entwickelt und dargelegt; in diesem Zusammenhang sei die Arbeit von Mitschka et al. (1998, S. 147–149) als Impulsarbeit genannt. Der Nachweis der Funktion f als abstandstreue Abbildung im zweiten Beweisschritt erfordert die Gültigkeit des Satzes des Pythagoras innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$. Aufgrund dessen erfolgt im Rahmen des vorliegenden Kapitels mit dem „Schritt 0“ zunächst die Herleitung des Satzes.

Schritt 0: Der Satz des Pythagoras

Es sei ein Dreieck (A, B, C) , dessen Seitengeraden $\langle A, C \rangle$ und $\langle B, C \rangle$ orthogonal sind, gegeben. Dann gilt die Gleichung

$$(d(A, B))^2 = (d(A, C))^2 + (d(B, C))^2;$$

die Länge der Seite $[A, B]$ zum Quadrat ist zur Summe der beiden übrigen, jeweils quadrierten Seitenlängen des Dreiecks (A, B, C) identisch.

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ beschreibt das Dreieck (A, B, C) als Polygon eine ebene Figur, wobei nach dem Satz 3.1.1.1 die zugrunde liegende Ebene aufgrund der Nicht-Kollinearität der Eckpunkte A , B und C eindeutig bestimmt ist. Der Satz des Pythagoras stellt grundsätzlich eine ebene-geometrische Aussage dar. Den Nachweis des Satzes führen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ letztlich eingeschränkt in einer Ebene ϵ des Raumes als eine nach dem Satz 2.2.2.6 metrisch-normale euklidische Ebene $(\epsilon, \mathcal{G}|_{\epsilon}, \equiv_d|_{\epsilon})$, entsprechend der in meiner Masterarbeit (2018) entwickelten Theorie. (Jede Ebene beschreibt innerhalb des Raumes eine metrisch-normale euklidische Ebene samt der für die Theorie gewonnenen Erkenntnisse, umgekehrt gilt nach dem Kapitel 2.2 zugleich, dass die eingeschränkt in der Ebene als metrisch-normale euklidische Ebene hergeleiteten Erkenntnisse gemeinhin für eine jede metrisch-normale euklidische Ebene gelten.)

Innerhalb der metrisch-normalen euklidischen Ebene $(\epsilon, \mathcal{G}|_{\epsilon}, \equiv_d|_{\epsilon})$ führen wir zunächst orientierend an Mitschka et al. (1998, S. 100–102) und Filler (1993, S. 97–99) eine Möglichkeit zum Vergleich zweier Winkel sowie orientierend an Mitschka et al. (1998, S. 56) den Begriff des „rechten Winkels“ ein:

- Ein innerer Winkel $\angle_i ABC$ heißt *kleiner* als ein innerer Winkel $\angle_i A'B'C'$, wenn unter einer Kongruenzabbildung ein Schenkel des Winkels $\angle_i ABC$ auf einen Schenkel des Winkels $\angle_i A'B'C'$ und der übrige Schenkel in das innere Winkel­feld $\text{int}(\mathcal{W}_{A'B'C'})$ abgebildet wird.

Basierend auf der Aussage des Lemmas 4.1.1.1 ist mit dem ebenen-geometrischen Pendant zum Satz 4.3.3.2 der vorliegenden Arbeit für zwei Winkel gemeinhin eine Kleinerrelation existent (vgl. Mitschka et al. 1998, S. 100). Dabei liefert das ebene-geometrische Pendant zum Satz 4.3.1.6 mit der Aussage des Lemmas 4.1.1.1, dass die Schenkel eines Winkels mittels einer Kongruenzabbildung stets aufeinander abgebildet werden können, womit die Repräsentantenunabhängigkeit der Kleinerbeziehung gilt, in dem Sinne, dass diese unabhängig von der Wahl der aufeinander abgebildeten Schenkel ist.

- Ein innerer Winkel $\angle_i ABC$ wird als *rechter Winkel* bezeichnet, wenn die zugrunde liegenden Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ und $\langle B, C \rangle$ bezüglich der beiden Schenkel des Winkels zueinander orthogonal sind.

Mit der Einführung des Begriffs des rechten Winkels zeigt sich, dass die Aussage des Satzes des Pythagoras wie eingangs dargelegt Bezug auf ein Dreieck nimmt, das an einem seiner Eckpunkte einen rechten inneren Winkel besitzt; ein solches Dreieck wird als *rechtwinklig* bezeichnet (vgl. Schröder 2014a, S. 49), der innere Winkel an einem Eckpunkt eines Dreiecks im Allgemeinen als *Innenwinkel* (vgl. Filler 1993, S. 105). Basierend auf der Aussage des Lemmas 4.1.1.1 folgt mit dem ebenen-geometrischen Pendant zum Satz 4.3.3.2 aus der Orthogonalitätstreue einer Kongruenzabbildung für zwei rechte Winkel, dass sie stets zueinander kongruent sind.

Innerhalb der metrisch-normalen euklidischen Ebene $(\epsilon, \mathcal{G}|_{\epsilon}, \equiv_d|_{\epsilon})$ beweisen wir den Satz des Pythagoras schließlich unter Rückgriff auf die Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen Dreiecken. Im Speziellen nutzen wir den in meiner Masterarbeit (2018, S. 99) im Rahmen der Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene bewiesenen Hauptähnlichkeitssatz¹¹ (siehe zur Ähnlichkeit im Allgemeinen auch Kapitel 4.4 der vorliegenden Arbeit). Ferner benötigen wir das im Weiteren nachgewiesene Lemma 0.1; zum Nachweis des Lemmas sei angemerkt, dass in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene analog der Beweis der Aussage des Satzes 3.2.1.6 sowie der Teilaussage a) des Korollars 3.2.1.12 gilt, also die jeweiligen Aussagen uneingeschränkt in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene gelten:

Satz-Masterarbeit 5.2.2.7. (Hauptähnlichkeitssatz) Sind zwei verschiedene Innenwinkel eines Dreiecks zu je einem Innenwinkel eines zweiten Dreiecks kongruent, so sind die beiden Dreiecke zueinander ähnlich.

Lemma 0.1. Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv_d) := (\epsilon, \mathcal{G}|_{\epsilon}, \equiv_d|_{\epsilon})$ eine metrisch-normale euklidische Ebene. Für ein rechtwinkliges Dreieck (A, B, C) mit einem rechten Innenwinkel $\angle_i ACB$ liegt der Lotfußpunkt des Punktes C auf der Seitengerade $\langle A, B \rangle$ zwischen den Punkten A und B .

Beweis: (Eigener Beweis)

Durch den Punkt C existiert innerhalb der metrisch-normalen euklidischen Ebene genau eine zur Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ orthogonale Gerade mit genau einem Lotfußpunkt (siehe Kapitel 4.2.2); es sei $g := (C \perp \langle A, B \rangle)$ mit $D := \{\cdot\}^{-1}(g \cap \langle A, B \rangle)$. Den Nachweis differenzieren wir im Weiteren in drei Schritte.

¹¹Statt wie in meiner Masterarbeit (2018) von dem „Ähnlichkeitssatz WW“ zu sprechen, wird der Satz in der vorliegenden Arbeit in Anlehnung an Filler (1993, S. 120) als Hauptähnlichkeitssatz bezeichnet.

1. *Schritt:* Wir betrachten mit dem Parallelenaxiom innerhalb der metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ durch den Punkt B die eindeutig bestimmte zur Verbindungsgerade $\langle A, C \rangle$ disjunkt parallele Gerade sowie die eindeutig zur Geraden g disjunkt parallele Gerade; es sei $h' := (B \parallel \langle A, C \rangle)$ und $g' := (B \parallel g)$.

Für die Gerade g' folgt aus den in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene geltenden Parallelitäts-/Orthogonalitätsbeziehungen (siehe hierzu Kapitel 4.2.2), dass die Gerade ebenso wie die Gerade g zur Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ orthogonal ist. Zusammen mit der Aussage des Satzes 3.2.1.6 erhalten wir auf der Geraden g' die Existenz eines Punktes C' derart, dass die Punkte C und C' bezüglich der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ gemeinsam in einer Halbebene liegen und der innere Winkel $\angle_i ABC'$ ein rechter Winkel ist. Dabei ist eben die Verbindungsgerade der Punkte B und C' zur Geraden g' identisch.

Der Innenwinkel $\angle_i ACB$ des Dreiecks (A, B, C) ist nach Voraussetzung des hier zu zeigenden Lemmas ein rechter Winkel, sodass die Gerade h' wie die Gerade $\langle A, C \rangle$ nach den in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene geltenden Parallelitäts-/Orthogonalitätsbeziehungen zur Verbindungsgerade $\langle B, C \rangle$ orthogonal ist (siehe hierzu Kapitel 4.2.2). Bezüglich der Geraden h' folgt aus derer disjunkten Parallelität zur Verbindungsgerade $\langle A, C \rangle$ für die Punkte A und C , dass diese gemeinsam in einer Halbebene der Geraden h' liegen. Letztlich erhalten wir auf der Geraden h' mit der Aussage des Satzes 3.2.1.6 die Existenz eines Punkt C^* , sodass der innere Winkel $\angle_i CBC^*$ ein rechter Winkel derart ist, dass wir zusammen mit der Teilaussage a) des Korollars 3.2.1.12 erhalten, dass der innere Winkel $\angle_i ABC$ kleiner als dieser rechte Winkel ist.

Zusammenfassend liefert das Vorherige, dass der Punkt C gemeinsam mit dem Punkt A in einer Halbebene bezüglich der Geraden g' liegt; denn anderenfalls ergibt sich ein Widerspruch: Es sei angenommen, dass der Punkt C bezüglich der Geraden g' in einer anderen Halbebene als der Punkt A liegt. Dann folgt aus der gemeinsamen Lage der Punkte C und C' in einer Halbebene bezüglich der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ mit der Teilaussage a) des Korollars 3.2.1.12, dass der rechte Winkel $\angle_i ABC'$ kleiner als der innere Winkel $\angle_i ABC$ ist. Dabei ist der innere Winkel $\angle_i ABC$ nach dem Vorherigen kleiner als der rechte Winkel $\angle_i CBC^*$. Schließlich erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass zwei rechte Winkel aufgrund der Orthogonalitätstreue einer Kongruenzabbildung stets zueinander kongruent sind.

2. *Schritt:* Wir betrachten mit dem Parallelenaxiom innerhalb der metrisch-normalen euklidischen Ebene ϵ durch den Punkt A die eindeutig bestimmte zur Verbindungsgerade $\langle B, C \rangle$ disjunkt parallele Gerade sowie die eindeutig bestimmte zur Geraden g disjunkt parallele Gerade; es sei $h'' := (A \parallel \langle B, C \rangle)$ und $g'' := (A \parallel g)$. Analog zum vorherigen Beweisschritt erhalten wir, dass der Punkt C bezüglich der Geraden g'' in derselben Halbebene wie der Punkt B liegt.

3. *Schritt:* Für die Gerade g und ihre Parallelen g' und g'' erhalten wir aufgrund der Nicht-Kollinearität der Punkte A , B und C als die Eckpunkte des Dreiecks (A, B, C) mit der Eigenschaft der Parallelität als Äquivalenzrelation in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene (siehe hierzu Kapitel 3.1.2), dass die Geraden paarweise disjunkt (parallel) sind. Bezüglich der Geraden g' und g'' liegt der Punkt C nach den vorherigen Beweisschritten in der gleichen Halbebene wie der Punkt A bzw. B , sodass die durch den Punkt C gehende Gerade g ebenfalls im Schnitt dieser beiden Halbebenen liegt. Für den Lotfußpunkt D der Geraden g als die durch den Punkt C gehende, zur Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ orthogonale Gerade erhalten wir damit aufgrund der Teilaussage a) des Korollars 3.2.1.12, dass der Lotfußpunkt zwischen den Punkten A und B liegt. \square

Satz 0.2. (*Satz des Pythagoras*) Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv_d) := (\epsilon, \mathcal{G}|_\epsilon, \equiv_d|_\epsilon)$ eine metrisch-normale euklidische Ebene. Für ein rechtwinkliges Dreieck (A, B, C) mit einem rechten Innenwinkel $\angle_i ACB$ gilt die Gleichung

$$(d(A, B))^2 = (d(A, C))^2 + (d(B, C))^2;$$

die Länge der Seiten $[A, C]$ und $[B, C]$ je zum Quadrat sind in der Summe gleich der Länge der Seite $[A, B]$ zum Quadrat.

Beweis: (vgl. Kasten/Vogel 2018, S. 134 f.)

Wir betrachten durch den Punkt C das eindeutig bestimmte Lot auf die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ mit dessen eindeutig bestimmten Lotfußpunkt (siehe hierzu Kapitel 4.2.2); der Lotfußpunkt sei als der Punkt D bezeichnet. Nach dem Lemma 0.1 liegt der Punkt D auf der Verbindungsgeraden $\langle A, B \rangle$ zwischen den Punkten A und B . Mit den inneren Win-

keln $\angle_i ADC$ und $\angle_i BDC$ existieren letztlich zwei verschiedene rechte Winkel. Die beiden Winkel sind als rechte Winkel je zum rechten Winkel $\angle_i ACB$ kongruent.

Für sich liefert die Lage des Punktes D zwischen den beiden Punkten A und B einerseits die Gleichung

$$d(A, D) + d(B, D) = d(A, B)$$

und andererseits, dass die Winkel $\angle_i CAD$ und $\angle_i CAB$ sowie die Winkel $\angle_i CBD$ und $\angle_i CBA$ jeweils identisch und somit kongruent sind.

Aus der Kongruenz dieser Winkel sowie der zuvor dargelegten Kongruenz der rechten Winkel $\angle_i ADC$ und $\angle_i BDC$ je zum rechten Winkel $\angle_i ACB$ folgt mit dem Hauptähnlichkeitsatz, dass das Dreieck (A, B, C) zum Dreieck (A, D, C) und (B, D, C) ähnlich ist. Hiermit erhalten wir, die Abstandsverhältnistreue einer Ähnlichkeitsabbildung berücksichtigend (siehe hierzu Kapitel 4.4), die Gleichungen

$$\frac{d(A, C)}{d(A, B)} = \frac{d(A, D)}{d(A, C)}, \quad \text{also } (d(A, C))^2 = d(A, B) \cdot d(A, D), \quad \text{und}$$

$$\frac{d(B, C)}{d(A, B)} = \frac{d(B, D)}{d(B, C)}, \quad \text{also } (d(B, C))^2 = d(A, B) \cdot d(B, D).$$

Aus diesen beiden Gleichungen resultiert gemeinsam mit der obigen Gleichung schließlich die Gültigkeit der Gleichung

$$(d(A, C))^2 + (d(B, C))^2 = d(A, B) \cdot (d(A, D) + d(B, D)) = (d(A, B))^2,$$

also das zu Zeigende, der Satz des Pythagoras. □

Schritt I: $\exists f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijektiv

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ existieren mit dem Satz 3.1.1.2 mindestens vier nicht komplanare Punkte. Aufgrund ihrer Nicht-Komplanarität sind je drei der vier Punkte nicht kollinear. Es seien innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes drei nicht kollineare Punkte A , B und C gegeben. Die Punkte A und B liegen nach dem Axiom V_G gemeinsam auf genau einer Geraden, ihrer Verbindungsgeraden, hier als die Gerade x_1 bezeichnet. Der Punkt C liegt nicht auf dieser Geraden. Damit existiert

durch den Punkt C genau eine zur Verbindungsgerade der Punkte A und B orthogonale Gerade (siehe Kapitel 4.2.2), hier als die Gerade x_2 bezeichnet. Aufgrund ihrer Orthogonalität schneiden sich die beiden Geraden und liegen gemeinsam in einer Ebene des Raumes, nach dem Satz 3.1.1.5 gemeinsam in genau einer Ebene. Zu dieser Ebene existiert durch den Schnittpunkt der beiden Geraden mit dem Satz 4.2.2.5 wiederum genau eine orthogonale Gerade, hier als die Gerade x_3 bezeichnet. Dabei ist die Gerade nach dem Satz 4.2.2.4 ebenfalls zu den Geraden x_1 und x_2 orthogonal. Aus den getroffenen Betrachtungen schlussfolgern wir im metrisch-normalen euklidischen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die folgenden Zusammenhänge:

- Mit den Geraden x_1 , x_2 und x_3 existieren drei paarweise zueinander orthogonale Geraden.
- Die drei Geraden x_1 , x_2 und x_3 schneiden sich paarweise in genau einem, demselben Punkt; dieser (Schnitt-)Punkt sei als der Punkt O bezeichnet.
- Je zwei der Geraden x_1 , x_2 und x_3 liegen mit dem Satz 3.1.1.5 gemeinsam in genau einer Ebene; die durch die Geraden x_1 und x_2 eindeutig bestimmte Ebene sei als die Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ bezeichnet, entsprechend die beiden übrigen Ebenen.
- Jede der Geraden x_1 , x_2 und x_3 stellt aufgrund des Satzes 4.2.2.4 eine orthogonale Gerade zu der durch die beiden übrigen Geraden eindeutig bestimmten Ebene dar, mit dem Satz 4.2.2.5 die eindeutig bestimmte durch den Punkt O gehende orthogonale Gerade.
- Zusatz: Jede der Geraden x_1 , x_2 und x_3 besitzt aufgrund des Satzes 3.3.2 eine Linealfunktion, die den Punkt O auf die reelle Zahl 0 abbildet; für die Gerade x_1 sei mit dem Symbol f_1 eine solche Linealfunktion betrachtet, entsprechend mit dem Symbol f_2 bzw. f_3 eine solche Linealfunktion für die beiden übrigen Geraden.

Auf dieser Grundlage weisen wir in dem vorliegenden Beweisschritt die Existenz einer Bijektion von der Punktmenge \mathcal{P} des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf die Punktmenge \mathbb{R}^3 des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e_{\equiv}})$ nach. Den Nachweis gliedern wir im Weiteren in zwei Teilschritte. Zunächst charakterisieren wir eine Zuordnung von der Punktmenge \mathcal{P} in die Punktmenge \mathbb{R}^3 . Erst im zweiten Teilschritt zeigen wir, dass diese Zuordnungsvorschrift eine Funktion, und letztlich eine bijektive Funktion von der Menge \mathcal{P} auf die Punktmenge \mathbb{R}^3 definiert.

Teilschritt I.1: Zur Festlegung der Zuordnungsvorschrift von der Punktmenge \mathcal{P} in die Punktmenge \mathbb{R}^3 unterscheiden wir für einen Punkt X der Menge \mathcal{P} innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ drei Fälle. Erstens, ob der Punkt auf der Geraden x_1 , x_2 oder x_3 liegt. Zweitens, ob der Punkt in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_1, x_3 \rangle$ oder $\langle x_2, x_3 \rangle$, aber auf keiner der Geraden x_1 , x_2 und x_3 liegt. Drittens, ob der Punkt X in keiner der Ebenen $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_1, x_3 \rangle$ und $\langle x_2, x_3 \rangle$ liegt.

i) Der Punkt X sei ein Punkt auf der Geraden x_1 , x_2 oder x_3 . Mit den Linealfunktionen f_1 , f_2 und f_3 der Geraden treffen wir die folgende Zuordnung in die Punktmenge \mathbb{R}^3 :

$$X \mapsto \begin{cases} (f_1(X), 0, 0) & , \text{ wenn } X \in x_1, \\ (0, f_2(X), 0) & , \text{ wenn } X \in x_2, \\ (0, 0, f_3(X)) & , \text{ wenn } X \in x_3. \end{cases}$$

Bemerkung: Die Linealfunktionen f_1 , f_2 und f_3 beschreiben eine bijektive Funktion von der Punktmenge der Geraden x_1 , x_2 bzw. x_3 auf die Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen, wobei jede der Funktionen den gemeinsamen Schnittpunkt O der Geraden x_1 , x_2 und x_3 auf die reelle Zahl 0 abbildet. Aufgrund der Bijektivität der Linealfunktionen gilt hiermit bezüglich der getroffenen Zuordnungsvorschrift, dass jeder von dem Punkt O verschiedene Punkt der Geraden x_1 , x_2 und x_3 auf einen verschiedenen Punkt der Menge \mathbb{R}^3 mit genau einer von der reellen Zahl 0 verschiedenen Komponente zugeordnet wird; der Schnittpunkt O ist der einzige Punkt der Geraden, der auf den Punkt $(0, 0, 0)$ der Menge \mathbb{R}^3 zugeordnet wird.

ii) Der Punkt X sei zunächst ein Punkt der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ ohne auf der Geraden x_1 oder x_2 zu liegen. Nach dem Satz 2.2.2.6 stellt die Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ dar. Innerhalb der metrisch-normalen euklidischen Ebene existiert durch den Punkt X zur Geraden x_1 wie auch zur Geraden x_2 genau eine orthogonale Gerade, das Lot des Punktes X innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ auf der Geraden x_1 bzw. x_2 (siehe Kapitel 4.2.2). Das Lot schneidet die jeweilige Gerade in genau einem Punkt, dem Lotfußpunkt (siehe Kapitel 4.2.2). Analog erhalten

wir für den Punkt X die Existenz genau eines Lotfußpunktes auf der Geraden x_1 , x_2 und x_3 , wenn der Punkt X entsprechend in der Ebene $\langle x_1, x_3 \rangle$ oder $\langle x_2, x_3 \rangle$ liegt.

Der Punkt X stellt nach Voraussetzung stets kein Punkt der Geraden x_1 , x_2 und x_3 dar, sodass der Punkt *entweder* in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_1, x_3 \rangle$ oder $\langle x_2, x_3 \rangle$ liegt. Wir bezeichnen – damit konsistent – unabhängig von dem betrachteten Fall, den Lotfußpunkt des Punktes X auf der Geraden x_1 als den Lotfußpunkt X' , den auf der Geraden x_2 als den Lotfußpunkt X'' sowie den auf der Geraden x_3 als den Lotfußpunkt X''' .

Für den Punkt X als einen in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_1, x_3 \rangle$ oder $\langle x_2, x_3 \rangle$, nicht auf der Geraden x_1 , x_2 und x_3 liegenden Punkt des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ treffen wir mit den Linealfunktionen f_1 , f_2 und f_3 der Geraden x_1 , x_2 bzw. x_3 schließlich die folgende Zuordnung in die Menge \mathbb{R}^3 :

$$X \mapsto \begin{cases} (f_1(X'), f_2(X''), 0) & , \text{ wenn } X \in \langle x_1, x_2 \rangle \setminus x_1 \wedge x_2, \\ (f_1(X'), 0, f_3(X''')) & , \text{ wenn } X \in \langle x_1, x_3 \rangle \setminus x_1 \wedge x_3, \\ (0, f_2(X''), f_3(X''')) & , \text{ wenn } X \in \langle x_2, x_3 \rangle \setminus x_2 \wedge x_3, \end{cases}$$

Bemerkung: Mit der paarweisen Orthogonalität der Geraden x_1 , x_2 und x_3 folgt aus den innerhalb der metrisch-normalen euklidischen Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_1, x_3 \rangle$ und $\langle x_2, x_3 \rangle$ geltenden Parallelitäts-/Orthogonalitätsbeziehungen zwischen Geraden (siehe hierzu Kapitel 4.2.2), dass in der jeweiligen Ebene die Gerade x_1 zu dem Lot des Punktes X auf der Geraden x_2 bzw. x_3 parallel ist und entsprechendes für die Geraden x_2 und x_3 in Bezug zu den übrigen Lotgeraden gilt. Der Punkt X liegt nach Voraussetzung nicht auf der Geraden x_1 , x_2 und x_3 , sodass die Geraden und Lotgeraden disjunkt parallel sind. Hieraus folgt, dass die Lotfußpunkte X' , X'' und X''' des Punktes X auf der Geraden x_1 , x_2 bzw. x_3 von deren gemeinsamen Schnittpunkt O verschieden sind. Die Linealfunktionen f_1 , f_2 und f_3 der Geraden beschreiben eine bijektive Funktion von der Punktmenge der Geraden x_1 , x_2 bzw. x_3 auf die Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen, wobei jede Funktion den gemeinsamen Schnittpunkt O der Geraden auf die reelle Zahl 0 abbildet. Bezüglich der getroffenen Zuordnungsvorschrift erhalten wir, dass der Punkt X stets auf einen Punkt der Menge \mathbb{R}^3 mit genau zwei von der reellen Zahl 0 verschiedenen Komponenten zugeordnet wird.

Entgegen dem soeben Dargelegten sind die Lotfußpunkte X' , X'' und X''' zum Punkt O identisch, unter der Annahme, dass der Punkt X auf der Geraden x_1 , x_2 bzw. x_3 liegt. Mit Blick auf die in i) getroffene Zuordnungsvorschrift erhalten wir, dass die hier getroffene Zuordnungsvorschrift im Grunde für jeden Punkt der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_1, x_3 \rangle$ oder $\langle x_2, x_3 \rangle$ angewendet werden kann.

iii) Der Punkt X sei ein Punkt des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$, der weder in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ noch in der Ebene $\langle x_1, x_3 \rangle$ oder $\langle x_2, x_3 \rangle$ liegt. Durch den Punkt X geht nach dem Satz 4.2.2.5 genau eine zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ orthogonale Gerade l_X , das Lot des Punktes auf der Ebene. Dabei schneiden sich das Lot und die Ebene in genau einem Punkt X^* , dem Lotfußpunkt (siehe Kapitel 4.2.2):

- Mit der Orthogonalität der Geraden x_3 zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ liefert der Satz 4.2.2.1b), dass das Lot l_X und die Gerade x_3 zueinander parallel sind. Nach Voraussetzung liegt der Punkt X weder in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ noch in den beiden Ebenen $\langle x_1, x_3 \rangle$ und $\langle x_2, x_3 \rangle$, sodass das Lot l_X und die Gerade x_3 disjunkt parallel sind. Folglich liegt der Punkt X nicht auf der Geraden x_3 . Damit ist diejenige Ebene, in der die Geraden l_X und x_3 als zueinander parallele Geraden liegen, aufgrund des Satzes 3.1.1.4 eindeutig durch den Punkt X und die Gerade x_3 bestimmt. Diese Ebene stellt nach dem Satz 2.2.2.6 eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes dar. In der metrisch-normalen euklidischen Ebene existiert durch den Punkt X eine (auch innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes) eindeutig bestimmte zur Geraden x_3 orthogonale Gerade, das Lot des Punktes X in der Ebene auf der Geraden x_3 (siehe Kapitel 4.2.2). Aufgrund ihrer Orthogonalität schneiden sich das Lot und die Gerade in genau einem Punkt, dem Lotfußpunkt (siehe Kapitel 4.2.2); der Lotfußpunkt sei hier als der Fußpunkt X''' bezeichnet.

- Die Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ stellt nach dem Satz 2.2.2.6 ebenfalls eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes dar. In dieser Ebene existiert durch den Lotfußpunkt X^* des Punktes X wiederum genau eine zur Geraden x_1 und x_2 orthogonale Gerade, das Lot des Punktes X^* innerhalb der Ebene auf der Geraden x_1 bzw. x_2 . Der Lotfußpunkt auf der Geraden x_1 sei als der Punkt X' und der auf der Geraden x_2 als der Punkt X'' bezeichnet.

Für den Punkt X betrachten wir schließlich die Punkte X' , X'' und X''' ; zusammen mit den Linealfunktionen f_1 , f_2 und f_3 der Geraden x_1 , x_2 bzw. x_3 treffen wir die folgende Zuordnung in die Punktmenge \mathbb{R}^3 :

$$X \mapsto (f_1(X'), f_2(X''), f_3(X''')) \quad \text{für } X \in \mathcal{P} \setminus \langle x_1, x_2 \rangle \wedge \langle x_1, x_3 \rangle \wedge \langle x_2, x_3 \rangle.$$

Bemerkung: Die basierend auf den disjunkt parallelen Geraden l_X und x_3 eindeutig bestimmte Ebene sei hier im Weiteren als die Ebene ϵ bezeichnet. Der Punkt X liegt nach Voraussetzung nicht in der Ebene $\langle x_1, x_3 \rangle$ oder $\langle x_2, x_3 \rangle$, sodass die Ebene ϵ zu diesen beiden Ebenen verschieden ist. Aufgrund des Satzes 3.1.1.5 erhalten wir für den Lotfußpunkt X^* des Punktes X auf der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, dass dieser nicht auf der Geraden x_1 oder x_2 liegt. Analog wie in der Bemerkung zur Zuordnungsvorschrift in ii) begründet, ergibt sich daraus, dass die Lotfußpunkte X' und X'' des Punktes X^* auf der Geraden x_1 bzw. x_2 innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ zum Punkt O verschieden sind. Aufgrund der Orthogonalität der Geraden x_3 zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ schneidet diese Ebene die Ebene ϵ in einer zur Geraden x_3 orthogonalen Geraden. Die Schnittgerade geht durch den Punkt O , den Schnittpunkt der Geraden x_3 und der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, sowie durch den Punkt X^* , den Lotfußpunkt des Punktes X auf der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$; aufgrund des Axioms V_G ist die Schnittgerade zur Verbindungsgeraden der beiden Punkte identisch. Das Lot des Punktes X auf der Geraden x_3 innerhalb der Ebene ϵ ist zu dieser Schnittgeraden verschieden, da der Punkt X nach Voraussetzung nicht in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ liegt. In der Ebene ϵ existiert neben der Schnittgeraden keine weitere durch den Punkt O gehende, zur Geraden x_3 orthogonale Gerade (siehe hierzu Kapitel 4.2.2). Für den Fußpunkt X''' des durch den Punkt X gehenden Lotes auf der Geraden x_3 erhalten wir, dass dieser vom Punkt O verschieden ist.

Zusammenfassend gilt, dass die Punkte X' , X'' und X''' stets von dem Schnittpunkt O der Geraden x_1 , x_2 und x_3 verschieden sind. Die Linealfunktionen f_1 , f_2 und f_3 der Geraden beschreiben eine bijektive Funktion von der Punktmenge der Geraden x_1 , x_2 bzw. x_3 auf die Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen, wobei jede Funktion den gemeinsamen Schnittpunkt O der Geraden auf die reelle Zahl 0 abbildet. Bezüglich der getroffenen Zuordnungsvorschrift gilt also, dass der Punkt X stets auf einen Punkt der Menge \mathbb{R}^3 mit drei von der reellen Zahl verschiedenen Komponenten zugeordnet wird.

Entgegen dem soeben Dargelegten ist der Punkt X' zum Punkt O identisch, wenn der Punkt X in der Ebene $\langle x_2, x_3 \rangle$ liegt; der Punkt X'' ist zum Punkt O identisch, wenn der

Punkt X in der Ebene $\langle x_1, x_3 \rangle$ liegt; und der Punkt X''' ist zum Punkt O identisch, wenn der Punkt X in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ liegt. Mit Blick auf die in i) und ii) getroffene Zuordnungsvorschrift erhalten wir, dass die hier getroffene Zuordnungsvorschrift im Grunde für jeden Punkt des metrisch-normalen euklidischen Raumes angewendet werden kann. Hier sei angemerkt, dass das Lot des Punktes X auf der Geraden x_3 im Falle, dass der Punkt X auf der Geraden x_3 liegt, zwar nicht eindeutig bestimmt ist, der entscheidende Fußpunkt X''' jedoch gleich dem Punkt X und somit eindeutig bestimmt ist.

Teilschritt I.2: Mit der in dem soeben erfolgten Teilschritt I.1 dargelegten Zuordnungsvorschrift i)-iii) ist zusammenfassend eine Funktion von der Punktmenge \mathcal{P} des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in die Punktmenge \mathbb{R}^3 des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ definiert; denn: Sowohl im Rahmen von Fall ii) als auch im Rahmen von Fall iii) ist die Existenz der zugrunde liegenden Lotgeraden eindeutig bestimmt. In beiden Fällen ist damit zugleich die eindeutige Existenz der Lotfußpunkte X' , X'' und X''' gegeben. Zusammen mit der Existenz der bijektiven Linealfunktionen f_1 , f_2 und f_3 der Geraden x_1 , x_2 bzw. x_3 erhalten wir schließlich, dass die Zuordnungsvorschrift i)-iii) zusammenfassend jeden Punkt der Menge \mathcal{P} auf genau einen Punkt der Menge \mathbb{R}^3 zuordnet.¹² Die mit der Zuordnungsvorschrift definierte Funktion von der Punktmenge \mathcal{P} des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ in die Punktmenge \mathbb{R}^3 des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ bezeichnen wir als die Funktion f .

In dem hier vorliegenden „Beweisschritt I: $\exists f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijektiv“ zeigen wir abschließend im Weiteren die Bijektivität der Funktion f ; den Nachweis gliedern wir in den Beweis der Injektivität und Surjektivität.

Surjektivität: Mit der Bemerkung zur Zuordnungsvorschrift iii) der Funktion f gilt, dass die Funktion f mit der Reduzierung auf diese Zuordnungsvorschrift gleichwohl definiert ist. Die Funktion f legen wir im Weiteren in diesem Sinne zugrunde. Für einen Punkt $Y := (y_1, y_2, y_3)$ des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e\equiv})$ zeigen wir innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ die Existenz eines Punktes X , der unter der Funktion f auf den Punkt Y abgebildet wird.

¹²Als binäre Relation bezüglich des kartesischen Produktes $(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^3)$ aufgefasst, ist hiermit die Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit begründet.

Mit der Bijektivität der Linealfunktionen f_1 und f_2 existiert auf der Geraden x_1 genau ein Punkt X_1 , dessen Bild unter der Linealfunktion f_1 zur reellen Zahl y_1 identisch ist, sowie auf der Geraden x_2 genau ein Punkt X_2 , dessen Bild unter der Linealfunktion f_2 zur reellen Zahl y_2 identisch ist. Nach dem Satz 2.2.2.6 stellt die Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes dar. In der metrisch-normalen euklidischen Ebene existiert durch den Punkt X_1 genau eine zur Geraden x_1 sowie durch den Punkt X_2 genau eine zur Geraden x_2 orthogonale Gerade (siehe Kapitel 4.2.2). Für diese beiden Geraden folgt aus den innerhalb der metrisch-normalen euklidischen Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ geltenden Parallelitäts-/Orthogonalitätsbeziehungen mit der Orthogonalität der Geraden x_1 und x_2 (siehe hierzu Kapitel 4.2.2), dass die beiden Geraden ebenfalls zueinander orthogonal sind. Damit schneiden sich die Geraden in genau einem Punkt (siehe hierzu Kapitel 4.2.2); der Schnittpunkt sei als der Punkt X^* bezeichnet. Durch den Schnittpunkt geht innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes nach dem Satz 4.2.2.5 genau eine zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ orthogonale Gerade, das Lot ($X^* \perp \langle x_1, x_2 \rangle$) des Punktes auf der Ebene. Wir betrachten nun die Fälle, ob der Punkt X^* innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ zum Schnittpunkt der Geraden x_3 und Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ identisch oder eben nicht identisch ist:

Fall 1: Der Punkt X^* sei zum Schnittpunkt O identisch. Dann folgt aus der Orthogonalität der Geraden x_3 zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ mit dem Satz 4.2.2.5, dass das Lot ($X^* \perp \langle x_1, x_2 \rangle$) zur Geraden x_3 identisch ist. Auf der Geraden x_3 existiert mit der Bijektivität ihrer Linealfunktion f_3 genau ein Punkt X_3 , dessen Bild unter der Linealfunktion gleich der reellen Zahl y_3 ist. Zusammenfassend erhalten wir mit der Darlegung des Punktes X^* , auf der Grundlage der Bemerkung zur Zuordnungsvorschrift iii) der Funktion f , dass mit dem Punkt X_3 ein Punkt X existiert, dessen Bild unter der Funktion f zum Punkt Y identisch ist.

Fall 2: Der Punkt X^* sei zum Schnittpunkt O verschieden. Dann ist das Lot ($X^* \perp \langle x_1, x_2 \rangle$) entgegen dem vorherigen Fall zur Geraden x_3 verschieden. Mit der Orthogonalität der Geraden x_3 zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ liefert gleichwohl der Satz 4.2.2.1b), dass das Lot ($X^* \perp \langle x_1, x_2 \rangle$) und die Gerade x_3 zueinander parallel sind. Sie sind also zueinander disjunkt parallel. Damit liegen das Lot und die Gerade gemeinsam in einer Ebene des Raumes, und zwar aufgrund des Satzes 3.1.1.4 gemeinsam in genau einer Ebene. Nach dem Satz 2.2.2.6 stellt die Ebene eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes dar. Auf der Geraden x_3 existiert mit der Bijektivität ihrer Linealfunktion f_3 genau ein Punkt X_3 , dessen Bild unter der Linealfunktion gleich der reellen Zahl y_3 ist. In

der metrisch-normalen euklidischen Ebene geht durch den Punkt X_3 genau eine zu dem Lot ($X^* \perp \langle x_1, x_2 \rangle$) orthogonale Gerade (siehe hierzu Kapitel 4.2.2). Aufgrund der Orthogonalität schneiden sich das Lot und die Gerade in genau einem Punkt X . Zusammenfassend erhalten wir mit der Darlegung des Punktes X^* , auf der Grundlage der Bemerkung zur Zuordnungsvorschrift iii) der Funktion f , dass mit dem Punkt X ein Punkt existiert, dessen Bild unter der Funktion f zum Punkt Y identisch ist.

Injektivität: Im Rahmen des zuvor erfolgten Nachweises der Surjektivität der Funktion f zeigt sich die eindeutige Existenz der Punkte X_1 , X_2 und X_3 sowie der jeweils betrachteten Lotgeraden, und hiermit die eindeutige Existenz des Punktes X . Damit impliziert der Nachweis, dass zwei zueinander identische Bildpunkte unter der Funktion f stets zueinander identische Urbildpunkte besitzen. Folglich ist die Injektivität der Funktion f gezeigt.

Schritt II: $d(A, B) = d_e(f(A), f(B))$

Mit dem vorherigen „Beweisschritt I: $\exists f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijektiv“ ist die Existenz einer Bijektion von der Punktmenge \mathcal{P} des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf die Punktmenge \mathbb{R}^3 des euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e_{\equiv}})$ nachgewiesen. In dem vorliegenden Beweisschritt begründen wir, dass die Funktion f isometrisch ist. Wir zeigen, dass der Abstand zweier Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist, also die Gültigkeit der Gleichung $d(A, B) = d_e(f(A), f(B))$.

Sind die Punkte A und B zueinander identisch, so folgt das zu Zeigende mit der Bijektivität der Funktion f umgehend aus der Definitheit der Abstandsfunktionen d und d_e . Im Übrigen liegt dem Beweis der Gedanke zugrunde, die zu zeigende Isometrie auf den innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes geltenden Satz des Pythagoras zurückzuführen (siehe hierzu „Schritt 0“).

Mit der Bemerkung zur Zuordnungsvorschrift iii) der Funktion f im Rahmen des „Beweisschrittes I: $\exists f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijektiv“ gilt, dass die Funktion f mit der Reduzierung auf diese Zuordnungsvorschrift gleichwohl definiert ist. Zum Nachweis der Isometrie der Funktion f bezüglich zweier verschiedener Punkte A und B des metrisch-normalen euklidischen Raum-

es $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ legen wir die Funktion f im Weiteren in diesem Sinne zugrunde; diesbezüglich gelte $f(A) := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $f(B) := (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Um den Nachweis letztlich auf den Satz des Pythagoras zurückführen zu können, sind vor diesem Hintergrund zuvor zwei „Spezialfälle“ zugrunde zu legen. Zum einen, dass die Verbindungsgerade der Punkte A und B zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ orthogonal ist, und zum anderen, dass die Verbindungsgerade der Punkte A und B zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ parallel ist. Schließlich bleibt der Fall, dass weder die Parallelität noch die Orthogonalität zwischen der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ und der Verbindungsgerade der Punkte A und B gilt.

Fall 1: Es gelte $\langle A, B \rangle \perp \langle x_1, x_2 \rangle$. Dann ist die Verbindungsgerade der Punkte A und B aufgrund des Satzes 4.2.2.5 sowohl das eindeutig bestimmte Lot des Punktes A als auch das des Punktes B auf der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$. Für die Komponenten a_1 und b_1 sowie a_2 und b_2 der Bildpunkte $f(A)$ und $f(B)$ ergibt sich hiermit, dass sie jeweils zueinander identisch sind. Wir differenzieren im Weiteren, ob mindestens einer der Punkte A und B auf der Geraden x_3 oder keiner der beiden Punkte A und B auf der Geraden x_3 liegt:

i) Liegt der Punkt A oder B auf der Geraden x_3 , so folgt aus der Orthogonalität zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ mit dem Satz 4.2.2.5, dass die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ gleich der Geraden x_3 ist. Die Punkte A und B liegen also jeweils auf der Geraden x_3 . Für die Komponente a_3 des Bildpunktes $f(A)$ ergibt sich hiermit, dass sie zum Bild des Punktes A unter der Linealfunktion f_3 der Geraden x_3 identisch ist, und für die Komponente b_3 des Bildpunktes $f(B)$ entsprechend, dass sie zum Bild des Punktes B unter der Linealfunktion identisch ist. Mit der Bijektivität der Linealfunktion f_3 folgt aus der Verschiedenheit der Punkte A und B , dass ebenfalls die Komponenten a_3 und b_3 verschieden sind; wie allgemein bereits begründet, sind demgegenüber die Komponenten a_1 und b_1 sowie a_2 und b_2 je zueinander identisch. Zusammenfassend erhalten wir mit der innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes geltenden Lineal Gleichung und der definitorischen Festlegung des euklidischen Abstandes innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes die Gleichung

$$d(A, B) = |b_3 - a_3| = \sqrt{(b_3 - a_3)^2} = d_e(f(A), f(B)),$$

also das zu Zeigende, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist.

ii) Liegt keiner der Punkte A und B auf der Geraden x_3 , so gilt mit dem Satz 4.2.2.1b) entgegen dem Vorherigen, dass die Verbindungsgerade der beiden Punkte zur Geraden x_3 disjunkt parallel ist. Damit liegen die beiden Geraden gemeinsam in einer Ebene, und zwar aufgrund des Satzes 3.1.1.4 gemeinsam in genau einer Ebene des metrisch-normalen euklidischen Raumes. Nach dem Satz 2.2.2.6 stellt die Ebene eine metrisch-normale euklidische Ebene dar. In der metrisch-normalen euklidischen Ebene existiert durch den Punkt A und B je genau eine zur Geraden x_3 orthogonale Gerade, das Lot der beiden Punkte innerhalb der Ebene auf der Geraden x_3 (siehe hierzu Kapitel 4.2.2); das Lot des Punktes A sei als das Lot l_A und das des Punktes B als das Lot l_B bezeichnet. Die beiden Lotgeraden sind aufgrund der in der metrisch-normalen euklidischen Ebene geltenden Parallelitäts-/Orthogonalitätsbeziehungen zueinander parallel (siehe hierzu Kapitel 4.2.2), disjunkt parallel, da die Verbindungsgerade der Punkte A und B zur Geraden x_3 nicht orthogonal ist. Jedes der Lote schneidet die Gerade x_3 somit in genau einem verschiedenen Punkt; der Lotfußpunkt des Punktes A sei als der Punkt A^* und der des Punktes B als der Punkt B^* bezeichnet. Für die Komponente a_3 des Bildpunktes $f(A)$ ergibt sich, dass sie zu dem Bild des Punktes A^* unter der Linealfunktion f_3 der Geraden x_3 identisch ist, und für die Komponente b_3 des Bildpunktes $f(B)$ entsprechend, dass sie zum Bild des Punktes B^* unter der Linealfunktion identisch ist. Mit der Bijektivität der Linealfunktion f_3 folgt aus der Verschiedenheit der Punkte A^* und B^* , dass die Komponenten a_3 und b_3 ebenfalls verschieden sind. Analog zur vorherigen Untersuchung in Fall 1.i) gilt für die Lotfußpunkte A^* und B^* , dass ihr Abstand innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist, hier gleich der Betragsmetrik der reellen Zahlen a_3 und b_3 ist.

Zum Nachweis des zu Zeigenden, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist, zeigen wir nun, dass innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes der Abstand der Punkte A und B zum Abstand der Punkte A^* und B^* identisch ist. Hier sei berücksichtigt, dass wie allgemein bereits begründet die Komponenten a_1 und b_1 sowie a_2 und b_2 der Bildpunkte $f(A)$ und $f(B)$ je zueinander identisch sind.

Wir betrachten die nach dem Satz 4.1.2.8 eindeutig existierende Translation, die den Punkt A auf dessen Lotfußpunkt A^* bezüglich des Lotes l_A auf der Geraden x_3 abbildet; die Translation sei als die Translation τ bezeichnet. Der Punkt A liegt nach der im vorliegenden Fall 1.ii)

geltenden Voraussetzung nicht auf der Geraden x_3 , sodass die Translation τ eine fixpunktfreie Translation darstellt. Damit liefert Satz 4.1.2.2, dass das Lot l_A eine Fixgerade der Translation ist. Mit der Parallelität des Lotes zu dem entsprechenden Lot l_B bezüglich des Punktes B auf der Geraden x_3 liefert Satz 4.1.2.2 weiter, dass das Lot l_B ebenfalls eine Fixgerade dieser Translation darstellt. Mit dem jeweiligen Lotfußpunkt B^* schneidet das Lot l_B die Gerade x_3 . Die Gerade x_3 wiederum ist aufgrund der im vorliegenden Fall 1.ii) geltenden Voraussetzung zur Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ disjunkt parallel, sodass einerseits mit dem Verbindungsaxiom-Geraden gilt, dass das Lot l_B die Verbindungsgerade im Punkt B schneidet, und andererseits mit dem Parallelenaxiom gilt, dass die Translation τ per definitionem als die Translation, die den Punkt A auf dessen Lotfußpunkt A^* bezüglich des Lotes l_A auf der Geraden x_3 abbildet, die gesamte Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ auf die Gerade x_3 abbildet. Letztlich erhalten wir mit der Bijektivität der Translation τ , dass die Translation auch den Punkt B auf dessen Lotfußpunkt B^* bezüglich des Lotes l_B abbildet. Die Abstandstreue der Translation τ liefert, dass der Abstand der Punkte A und B zu dem Abstand der Punkte A^* und B^* innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes identisch ist. Zusammenfassend erhalten wir somit die Gleichung

$$d(A, B) = d(A^*, B^*) = |b_3 - a_3| = \sqrt{(b_3 - a_3)^2} = d_e(\mathfrak{f}(A), \mathfrak{f}(B)),$$

also das zu Zeigende, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion \mathfrak{f} innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist.

Fall 2: Es gelte $\langle A, B \rangle \parallel \langle x_1, x_2 \rangle$. Der definitorischen Festlegung der Parallelität entsprechend (siehe hierzu Definition 3.1.2.3), differenzieren wir den vorliegenden Fall nochmals in zwei Fälle. Wir unterscheiden die Fälle, ob die Verbindungsgerade der Punkte A und B zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ disjunkt ist oder ob die Verbindungsgerade der Punkte A und B innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ liegt.

Fall 2.1: Es gelte $\langle A, B \rangle \subset \langle x_1, x_2 \rangle$. Die nachzuweisende Eigenschaft der Funktion \mathfrak{f} als Isometrie führen wir auf den Satz des Pythagoras zurück. Im Kontext der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ folgen wir hier dem Beweisgedanken, der dem hier vorliegenden zweiten Beweisschritt im

Allgemeinen zugrunde liegt (siehe eingangs des Beweisschrittes). Entsprechend sind vorangehend zwei „Spezialfälle“ ohne Verwendung des Pythagorassatzes zu diskutieren, und zwar dass die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ zur Geraden x_1 oder x_2 parallel ist. Letztlich bleibt der Fall, dass die Verbindungsgerade weder zur Geraden x_1 noch zur Geraden x_2 parallel ist. Die Betrachtung der beiden Spezialfälle reduzieren wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Betrachtung des Falles, dass die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ zur Geraden x_1 parallel ist:

Fall 2.1.i)+2.1.ii) Die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ sei innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit zur Geraden x_1 parallel. Wir differenzieren hier im Weiteren nochmals, ob die Verbindungsgerade zur Geraden x_1 identisch oder disjunkt parallel ist:

a) Die Verbindungsgerade der Punkte A und B sei innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ zur Geraden x_1 identisch. Die Punkte A und B liegen also jeweils auf der Geraden x_1 . Für die Komponenten a_2 und b_2 der Bildpunkte $f(A)$ und $f(B)$ ergibt sich damit, dass sie jeweils gleich der reellen Zahl 0, sie zueinander identisch sind. Aufgrund der Lage der Punkte A und B in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ sind die Komponenten a_3 und b_3 ohnehin identisch, gleich der reellen Zahl 0. Für die Komponente a_1 des Bildpunktes $f(A)$ ergibt sich mit der Gleichheit der Geraden $\langle A, B \rangle$ zur Geraden x_1 , dass die Komponente zum Bild des Punktes A unter der Linealfunktion f_1 der Geraden x_1 identisch ist, und für die Komponente b_1 des Bildpunktes $f(B)$ entsprechend, dass sie zum Bild des Punktes B unter der Linealfunktion identisch ist. Mit der Bijektivität der Linealfunktion f_1 folgt aus der Verschiedenheit der Punkte A und B , dass die Komponenten a_1 und b_1 ebenfalls zueinander verschieden sind. Fassen wir die Charakterisierung der Bildpunkte $f(A)$ und $f(B)$ zusammen, so erhalten wir mit der innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes geltenden Lineal Gleichung sowie der definatorischen Festlegung des euklidischen Abstandes innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes umgehend die Gleichung

$$d(A, B) = |b_1 - a_1| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2} = d_e(f(A), f(B)),$$

also das zu Zeigende, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist.

b) Die Verbindungsgerade der Punkte A und B sei innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ zur Geraden x_1 disjunkt parallel. Die Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ stellt nach dem Satz 2.2.2.6 eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes dar. In

der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ gilt mit der Orthogonalität der Geraden x_1 und x_2 aufgrund der in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene geltenden Parallelitäts-/Orthogonalitätsbeziehungen (siehe hierzu Kapitel 4.2.2), dass die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ zur Geraden x_2 orthogonal ist. Neben dieser Verbindungsgerade existiert durch den Punkt A wie auch durch den Punkt B in der metrisch-normalen euklidischen Ebene keine weitere zur Geraden x_2 orthogonale Gerade; die Verbindungsgerade ist das innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ eindeutig bestimmte Lot des Punktes A sowie das des Punktes B auf der Geraden x_2 (siehe hierzu Kapitel 4.2.2). Folglich unterscheiden sich die entsprechenden Lotfußpunkte der Punkte A und B nicht voneinander. Für die Komponenten a_2 und b_2 der Bildpunkte $f(A)$ und $f(B)$ ergibt sich damit, dass sie zueinander identisch sind. Die Komponenten a_3 und b_3 sind aufgrund der Lage der Punkte A und B in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ ohnehin identisch, gleich der reellen Zahl 0.

Ausgehend von der hier in dem vorliegenden Fall geltenden Voraussetzung, dass innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ und die Gerade x_1 disjunkt parallel sind, erhalten wir im Weiteren analog zum bereits diskutierten Fall 1.ii) die Gleichung

$$d(A, B) = |b_1 - a_1| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2} = d_e(f(A), f(B)),$$

also das zu Zeigende, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist.

Fall 2.1.iii) Die Verbindungsgerade der Punkte A und B sei innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ weder zur Geraden x_1 noch zur Geraden x_2 parallel. Mit dem verallgemeinerten Parallelenaxiom existiert in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ durch den Punkt A genau eine zur Geraden x_1 sowie durch den Punkt B genau eine zur Geraden x_2 parallele Gerade (siehe hierzu auch Kapitel 3.1.2); wir betrachten diese Parallelen ($A \parallel x_1$) und ($B \parallel x_2$). Die Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ stellt nach dem Satz 2.2.2.6 eine metrisch-normale euklidische Ebene innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes dar. In der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ gilt mit der Orthogonalität der Geraden x_1 und x_2 aufgrund der in einer metrisch-normalen euklidischen Ebene geltenden Parallelitäts-/Orthogonalitätsbeziehungen (siehe hierzu Kapitel 4.2.2), dass die Parallelen ($A \parallel x_1$) und ($B \parallel x_2$) zueinander orthogonal sind. Aufgrund ihrer Orthogonalität schneiden sich die Parallelen in genau einem Punkt; der Schnittpunkt sei als der Punkt C bezeichnet. Nach dem Axiom V_G ist die Parallele ($A \parallel x_1$) gleich der Verbindungsgeraden $\langle A, C \rangle$ und die Parallele ($B \parallel x_2$) gleich der Verbindungsgeraden $\langle B, C \rangle$. Wir erhalten

mit den Punkten A , B und C die Existenz eines Dreiecks derart, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden kann (siehe hierzu „Schritt 0“); es gilt die Gleichung

$$(*) \quad d(A, B) = \sqrt{(d(A, C))^2 + (d(B, C))^2}.$$

Letztlich erhalten wir auf dieser Grundlage zusammen mit den bereits diskutierten Fällen 2.1.i) und 2.1.ii) das zu Zeigende, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist:

Die Verbindungsgerade der Punkte A und C als die Parallele ($A \parallel x_1$) sowie die Verbindungsgerade der Punkte B und C als die Parallele ($B \parallel x_2$) ist eben innerhalb der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ zur Geraden x_1 bzw. x_2 parallel. Damit liefern die Fälle 2.1.i) und 2.1.ii), dass der Abstand der Punkte A und C innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes identisch ist und entsprechend, dass der Abstand der Punkte B und C gleich dem euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte ist. Allgemein sei (zu den Bildpunkten der Punkte A und B analog) $f(C) := (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Im Einzelnen implizieren die Fälle 2.1.i) bzw. 2.1.ii), dass die Abstände $d(A, C)$ und $d_e(f(A), f(C))$ jeweils zum Betrag $|c_1 - a_1|$ sowie die Abstände $d(B, C)$ und $d_e(f(B), f(C))$ jeweils zum Betrag $|b_2 - c_2|$ identisch sind. Dabei liefert die definitonische Festlegung des euklidischen Abstandes hier, dass die Komponenten b_1 und c_1 sowie die Komponenten a_2 und c_2 nicht verschieden sind; die Komponenten a_3 , b_3 und c_3 sind ebenso, und ohnehin aufgrund der Lage der Punkte A , B und C in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, zueinander identisch. Für den Abstand der Punkte A und C sowie der Punkte B und C innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes erhalten wir damit die Gleichung

$$d(A, C) = |b_1 - a_1| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2} \quad \text{und} \quad d(B, C) = |b_2 - a_2| = \sqrt{(b_2 - a_2)^2},$$

woraus mit der Gleichung in (*) das zu Zeigende folgt, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist.

Fall 2.2: Es gelte $\langle A, B \rangle \cap \langle x_1, x_2 \rangle = \emptyset$. Durch den Punkt A und B existiert nach dem Satz 4.2.2.5 je genau eine zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ orthogonale Gerade, das Lot des Punktes auf der Ebene; das Lot des Punktes A sei als das Lot l_A und das des Punktes B als das Lot l_B

bezeichnet. Die beiden Lotgeraden sind aufgrund des Satzes 4.2.2.1b) zueinander parallel, disjunkt parallel, da die Verbindungsgerade der Punkte A und B nach Voraussetzung nicht zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ orthogonal ist. Jedes der Lote schneidet die Ebene somit in genau einem verschiedenen Punkt; der Lotfußpunkt des Punktes A sei als der Punkt A^* und der des Punktes B als der Punkt B^* bezeichnet. Die bereits diskutierten Fälle 2.1.i)-iii) liefern für die Lotfußpunkte, dass ihr Abstand innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist. Im Vorliegenden gilt dabei, dass sich hinsichtlich der Komponente a_1 und der Komponente a_2 des Bildpunktes $f(A)$ die entsprechende Komponente des Bildpunktes $f(A^*)$ nicht unterscheidet, sowie sich hinsichtlich der Komponente b_1 und der Komponente b_2 des Bildpunktes $f(B)$ die entsprechende Komponente des Bildpunktes $f(B^*)$ nicht unterscheidet. Die übrigen Komponenten der Bilder des Lotfußpunktes A^* und B^* sind aufgrund derer Lage in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ gleich der reellen Zahl 0, zueinander identisch.

Zum Nachweis des hier zu Zeigenden, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist, bleiben zusammenfassend zwei Aspekte nachzuweisen. Es ist zu zeigen, (i) dass innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes der Abstand der Punkte A und B gleich dem Abstand ihrer Lotfußpunkte A^* und B^* ist, sowie, (ii) dass die Komponenten a_3 und b_3 der Bildpunkte $f(A)$ und $f(B)$ identisch sind:

zu (i): Wir betrachten die nach dem Satz 4.1.2.8 eindeutig existierende Translation, die den Punkt A auf dessen Lotfußpunkt A^* auf der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ abbildet; die Translation sei als die Translation τ bezeichnet. Der Punkt A liegt nach Voraussetzung nicht in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$, sodass die Translation τ eine fixpunktfreie Translation darstellt. Der Satz 4.1.2.2 liefert, dass das Lot l_A eine Fixgerade der Translation ist. Mit der Parallelität des Lotes zu dem entsprechenden Lot l_B des Punktes B auf der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ liefert der Satz 4.1.2.2 weiter, dass ebenfalls das Lot l_B eine Fixgerade dieser Translation darstellt.

Nach dem Satz 4.2.1.4 existiert durch den Punkt A zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ genau eine parallele Ebene. Das Lot l_B ist aufgrund des Satzes 4.2.1.1 ebenfalls zu dieser Parallelen ($A \parallel \langle x_1, x_2 \rangle$) orthogonal. Folglich schneiden sich das Lot und die Parallele in einem Punkt. Die Parallele ist mit der nach Voraussetzung geltenden (disjunkten) Parallelität der Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ und Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ nach dem Satz 4.2.1.1 zu dieser Verbindungsgeraden parallel; die Verbindungsgerade $\langle A, B \rangle$ liegt damit in der Parallelen ($A \parallel \langle x_1, x_2 \rangle$), sodass das Lot l_B

die Parallele im Punkt B schneidet. Die Translation τ als die Translation, die den Punkt A auf dessen Lotfußpunkt auf der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ abbildet, bildet die Parallele ($A \parallel \langle x_1, x_2 \rangle$) wiederum aufgrund des Satzes 4.2.1.4 auf die Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ ab.

Zusammenfassend erhalten wir mit der Bijektivität der Translation τ , dass sie auch den Punkt B auf dessen Lotfußpunkt B^* abbildet. Letztlich gilt mit der Abstandstreue der Translation innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes, dass der Abstand der Punkte A und B zum Abstand der Punkte A^* und B^* identisch ist; es gilt die Gleichheit der Abstände $d(A, B)$ und $d(A^*, B^*)$.

zu (ii): Wir betrachten nun die Umkehrabbildung τ^{-1} der Translation τ . Nach der definitiven Festlegung einer Translation stellt die Umkehrabbildung selbst eine Translation dar (siehe hierzu 4.1.2.1). Als die Umkehrabbildung der Translation τ bildet sie das Lot l_A des Punktes A sowie das Lot l_B des Punktes B jeweils auf sich selbst ab, hierbei jedoch den Lotfußpunkt A^* auf den Punkt A sowie den Lotfußpunkt B^* auf den Punkt B . Ebenso wie die Lotgeraden l_A und l_B ist innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes die Gerade x_3 zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ orthogonal. Folglich ist die Gerade x_3 nach dem Satz 4.2.2.1b) zu beiden Lotgeraden parallel. Aufgrund des Satzes 4.1.2.2 stellt ebenfalls die Gerade x_3 eine Fixgerade der Translation τ^{-1} dar.

Die Gerade x_3 und die Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ schneiden sich in dem Punkt O . Durch den Punkt O und den Lotfußpunkt A^* des Punktes A auf der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ sowie durch den Punkt O und den Lotfußpunkt B^* des Punktes B auf der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ existiert je genau eine Gerade, die nach dem Satz 2.2.2.1 beide in der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ liegen. Mit der Orthogonalität der Geraden x_3 zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ liefert der Satz 4.2.2.4, dass die Gerade x_3 ebenfalls zu diesen beiden Geraden orthogonal ist. Die Geraden selbst sind entweder zueinander identisch oder schneiden sich in dem Punkt O . In jedem Fall besitzen beide Geraden bezüglich ihrer Orthogonalität zur Geraden x_3 den gleichen Fußpunkt, und zwar den Schnittpunkt O der Geraden x_3 und der Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$.

Zusammenfassend erhalten wir mit der Orthogonalitätstreue und Bijektivität der Translation τ^{-1} , dass die, innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes eindeutig bestimmten (siehe hierzu in „Beweisschritt I: $\exists f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijektiv“ die Herleitung der Zuordnungsvorschrift iii) samt Bemerkung), Lotfußpunkte der Punkte A und B in Bezug zur Geraden x_3 zueinander identisch sind. Für die Komponenten a_3 und b_3 der Bildpunkte $f(A)$ und $f(B)$ ergibt sich damit, dass sie ebenfalls zueinander identisch sind.

Fall 3: Es gelte $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle \not\perp \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \wedge \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle \not\parallel \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$. Wir betrachten die nach dem Satz 4.2.1.4 eindeutig existierende durch den Punkt A gehende, zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ parallele Ebene und die nach dem Satz 4.2.2.5 eindeutig existierende durch den Punkt B gehende, zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ orthogonale Gerade. Das betrachtete Lot ($B \perp \langle x_1, x_2 \rangle$) und die betrachtete Parallele ($A \parallel \langle x_1, x_2 \rangle$) sind nach dem Satz 4.2.2.2 zueinander orthogonal. Sie schneiden sich dabei in genau einem Punkt; der Schnittpunkt sei als der Punkt C bezeichnet. Nach dem Satz 2.2.2.1 liegt die Verbindungsgerade der Punkte A und C in der Parallelen ($A \parallel \langle x_1, x_2 \rangle$). Damit ist die Verbindungsgerade aufgrund des Satzes 4.2.2.4 zugleich zu dem Lot ($B \perp \langle x_1, x_2 \rangle$) orthogonal. Das Lot wiederum ist nach dem Axiom V_G zur Verbindungsgerade der Punkte B und C identisch. Wir erhalten mit den Punkten A , B und C die Existenz eines Dreiecks derart, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden kann (siehe hierzu „Schritt 0“); es gilt die Gleichung

$$(*) \quad d(A, B) = \sqrt{(d(A, C))^2 + (d(B, C))^2}.$$

Letztlich erhalten wir auf dieser Grundlage zusammen mit den bereits diskutierten Fällen 1 und 2 das zu Zeigende, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist:

Die Verbindungsgerade der Punkte B und C ist als das Lot ($B \perp \langle x_1, x_2 \rangle$) zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ orthogonal; zudem ist die Verbindungsgerade der Punkte A und C aufgrund ihrer Lage in der Parallelen ($A \parallel \langle x_1, x_2 \rangle$) zur Ebene $\langle x_1, x_2 \rangle$ parallel. Folglich liefern die Fälle 1 und 2, dass der Abstand der Punkte A und C innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes gleich dem Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes ist und entsprechend, dass der Abstand der Punkte B und C zum euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte identisch ist. Allgemein sei (zu den Bildpunkten der Punkte A und B analog) $f(C) := (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Der Nachweis zu Fall 1 zeigt zugleich implizit, dass die Komponenten c_1 und c_2 zu den entsprechenden Komponenten b_1 und b_2 identisch sind, sowie der Nachweis zu Fall 2, dass die Komponente c_3 zur Komponente a_3 identisch ist. Zusammenfassend erhalten wir mit der Gleichung in (*), unter Berücksichtigung der Definition des euklidischen Abstandes, das zu Zeigende, dass der Abstand der Punkte A und B innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte unter der Funktion f innerhalb des euklidischen Raumes identisch ist.

Schritt III: $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_e$

Der zweite „Beweisschritt II: $d(A, B) = d_e(f(A), f(B))$ “ impliziert, dass ebenfalls die Relation der Abstandsgleichheit unter der Funktion f invariant ist. Gleiches gilt hiermit aufgrund der Bijektivität der Funktion f auch für deren Umkehrabbildung. Es gilt im Rahmen dessen die Äquivalenz zwischen der Relation \equiv_d , der Abstandsgleichheit, innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ und der Relation \equiv_{d_e} , der Abstandsgleichheit, innerhalb des euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e_{\equiv}})$. Für eine Ebene $m_{A,B}$ des metrisch-normalen euklidischen Raumes erhalten wir die Äquivalenz

$$X \in m_{A,B} \Leftrightarrow f(X) \in \{Y \in \mathbb{R}^3 : \{f(A), Y\} \equiv_{d_e} \{Y, f(B)\}\}.$$

Innerhalb des euklidischen Raumes ist, wie in Kapitel 5.1 mit dem Abschnitt „Die Menge \mathcal{E}_e aller Ebenen“ bereits gezeigt, jede Ebene $\{A + \lambda_1 \cdot (B - A) + \lambda_2 \cdot (C - A) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ gleich einer Menge $\{X \in \mathbb{R}^3 : \{C, X\} \equiv_{d_e} \{X, D\}\}$, und umgekehrt. Zusammenfassend ergibt sich mit der Bijektivität der Funktion f , dass die Funktion die Menge \mathcal{E} aller Ebenen des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf die Menge \mathcal{E}_e aller Ebenen des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e_{\equiv}})$ abbildet.

Schritt IV: $f(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_e$

Innerhalb des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ entspricht jede Gerade per definitionem der Schnittmenge zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen. Hieraus folgt mit dem soeben erfolgten „Beweisschritt III: $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_e$ “ und der Bijektivität der Funktion f , dass die Funktion jede Gerade des metrisch-normalen euklidischen Raumes auf die Schnittmenge zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen innerhalb des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e_{\equiv}})$ abbildet. Innerhalb des euklidischen Raumes wiederum ist, wie in Kapitel 5.1 mit dem Abschnitt „Die Menge \mathcal{G}_e aller Geraden“ bereits gezeigt, jede Gerade $\{A + \lambda \cdot (B - A) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ zum Schnitt zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen identisch, und umgekehrt. Zusammenfassend ergibt sich mit der Bijektivität der Funktion f , dass die Funktion die Menge \mathcal{G} aller Geraden des metrisch-normalen euklidischen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ auf die Menge \mathcal{G}_e aller Geraden des euklidischen Anschauungsraumes $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_e, \mathcal{G}_e, d_{e_{\equiv}})$ abbildet.

6 Schlussbetrachtungen

Das Ziel der vorliegenden Arbeit bestand in der Entwicklung eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus der euklidischen (Raum-)Geometrie unter Berücksichtigung der fachdidaktischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte der allgemeinbildenden Sekundarstufe, betont ohne die mathematische Stringenz eines solch axiomatisch-deduktiven Vorgehens aufzugeben – das Ergebnis: die *Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes*. Mit einer zusammenfassenden Darlegung der Axiomatisierung schließt die vorliegende Arbeit in Kapitel 6.2. Zuvor rückt mit dem Kapitel 6.1 die Frage nach der Güte der Axiomatik in den Fokus.

6.1 Die Güte der Axiomatik

Grundlage einer jeden axiomatisch-deduktiv aufgebauten (mathematischen) Theorie ist ihr Axiomensystem; das Axiomensystem umfasst die ohne Beweis als wahr vorausgesetzten (Grund-)Aussagen der Theorie, die Axiome, und markiert damit den Beginn des deduktiven Schließens (siehe Kapitel 2.2). In der Frage nach der Güte des Axiomensystems sind drei Aspekte zu berücksichtigen: die Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit (vgl. Wußing 2009, S. 176 f.). Die Diskussion darüber erfolgt in Bezug zur vorliegenden Arbeit an deren Schluss, aus zwei Gründen. Zum einen nimmt die Diskussion eine Meta-Perspektive auf die entwickelte Axiomatisierung ein. Zum anderen sind die Anforderungen zunächst von rein mathematischer Natur ohne direkte Berührungspunkte zur fachdidaktischen Perspektive der vorliegenden Arbeit.

Elementar ist die Forderung nach der *Widerspruchsfreiheit*; denn sie sichert eben die Konsistenz der Theorie, dass sich aus dem zugrunde liegenden Axiomensystem keine Widersprüche ableiten lassen. Für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes der vorliegenden Arbeit gilt die Widerspruchsfreiheit mit dem Kapitel „Der euklidische Raum – externperspektivisch“ (5.1), vielmehr mit dem hier erfolgten Nachweis, dass das mathematische Modell des euklidischen Anschauungsraumes die Axiome eines metrisch-normalen eukli-

schen Raumes erfüllt respektive ein Modell der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes ist. Die Widerspruchsfreiheit basiert hier auf dem Wissen, dass die Theorie der reellen Zahlen widerspruchsfrei ist (vgl. Kowol 2009, S. 66). In diesem Sinne gilt die relative Widerspruchsfreiheit (vgl. Filler 1993, S. 174 f.). Die „absolute“ Widerspruchsfreiheit einer Theorie lässt sich prinzipiell nicht begründen (vgl. Filler 1993, S. 175). Durch eine sukzessive Fortsetzung der beschriebenen Vorgehensweise ginge diese auf eine absolute Widerspruchsfreiheit der elementaren Theorien wie der Mengenlehre zurück, auf eine Widerspruchsfreiheit der Mathematik im Gesamten (vgl. Wußing 2009, S. 460 f.). Begründet durch die Gödelschen Unvollständigkeitssätze stößt das Vorgehen allerdings an dieser Stelle auf seine Grenzen (vgl. Wußing 2009, S. 460); eine Lösung in dieser Frage ist offen (vgl. Kowol 2009, S. 66 f.).

Im Hinblick auf die *Vollständigkeit* ist zwischen einer Vollständigkeit im logischen und inhaltlichen Verständnis zu unterscheiden (vgl. Filler 1993, S. 59).

Eine Theorie gilt als logisch vollständig, wenn jede im Rahmen der Theorie zu versprachlichende Aussage bewiesen oder widerlegt werden kann (vgl. Filler 1993, S. 59).¹³ Für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes gilt die logische Vollständigkeit auf der Grundlage des Kapitels „Der euklidische Raum – intern-perspektivisch“ (5.2). Das in dem Kapitel 5.2 Gezeigte liefert, dass jedes Modell der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes zum euklidischen Anschauungsraum respektive zu dessen mathematisch-arithmetischen Modell isomorph ist. Dabei stellt der euklidische Anschauungsraum selbst ein Modell der Theorie dar (siehe Kapitel 5.1). Für die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes gilt letztlich, dass je zwei ihrer Modelle zueinander isomorph sind. Allgemein wird eine solche Theorie als monomorph oder kategorisch bezeichnet (vgl. Kowol 2009, S. 64). Die Kategorizität der Theorie impliziert wiederum ihre Vollständigkeit im logischen Sinne; eine jede kategorische Theorie ist logisch vollständig (vgl. Mitschka 1977, S. 36). Anderenfalls stünde eben im Widerspruch zur Kategorizität die Existenz eines Modells, das sich von den übrigen Modellen durch genau eine Aussage bzw. durch ihre Negation unterscheidet (vgl. Mitschka 1977, S. 34–36).

Im inhaltlichen Sinne gilt eine Theorie als vollständig, wenn prinzipiell keine Aussage über das mit der Theorie zu Beschreibende offen bleibt (vgl. Filler 1993, S. 59 f.). Grundsätzlich

¹³Die logische Vollständigkeit ist nicht a priori uneingeschränkt gewollt; sie widerläuft etwa der Intention universeller mathematischer Theorien, die sich für sich in weitere Theorien differenzieren (vgl. Meschkowski 1966, S. 10 f.).

beschreibt die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes eine Axiomatisierung der euklidischen (Raum-)Geometrie (siehe „Einleitung“ (1) oder auch „Fazit & Ausblick“ (6.2) zur Zielsetzung im Einzelnen). Demzufolge ist die inhaltliche Vollständigkeit der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes basierend auf der zuvor dargelegten Kategorizität damit begründet, dass mit dem euklidischen Anschauungsraum ein Modell der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Die *Unabhängigkeit* eines Axiomensystems zeichnet sich dadurch aus, dass keines der verwendeten Axiome aus den übrigen des Systems nachweisbar ist (vgl. Filler 1993, S. 58). Dementsprechend wird der Begriff der Minimalität synonym verwendet (vgl. Filler 1993, S. 58). Für das Bestehen einer Theorie ist die Unabhängigkeit, insbesondere etwa im Vergleich zur Widerspruchsfreiheit, nicht zwingend (vgl. auch Filler 1993, S. 58); es besteht hier ein gewisser Spielraum (vgl. auch Meschkowski 1966, S. 9–16). Insbesondere vor dem Hintergrund des fachdidaktischen Aspekts der vorliegenden Arbeit wurde hiervon in der Entwicklung der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes Gebrauch gemacht. Grundsätzlich ist die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes unter dem Credo als unabhängig aufzufassen, dass die Axiomatik derart auf das Notwendigste reduziert ist, dass die Theorie sowohl der mathematischen Stringenz *als auch* dem fachdidaktischen Anspruch entsprechend der in der vorliegenden Arbeit verfolgten Zielsetzung gerecht wird. Hinsichtlich der mit einer Axiomatisierung verfolgten Zielsetzung sei an dieser Stelle in Bezug zu Meschkowski (1966, S. 9–16), dessen Aussage unterstrichen, dass ein solches „Axiomensystem [...] für den Aufbau einer Theorie brauchbarer sein [kann] als ein anderes, bei dem die Unabhängigkeitsbeweise geführt werden können“ (Meschkowski 1966, S. 16).

Willentlich wurde die Unabhängigkeit im Aufbau der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes mit dem zugrunde Liegen einer Metrik außer Acht gelassen. Innerhalb des Raumes ließe sich bereits die Definitheit und Symmetrie der Abstandsfunktion umgehend basierend auf dem Linealaxiom herleiten (vgl. Venema 2012, S. 38). Ein Nachweis wäre allerdings zur fachdidaktisch motivierten Auffassung der aus dem Linealaxiom resultierenden Linealfunktionen als „Mathematisches Lineal“ konträr (siehe hierzu Kapitel 3.3) – ein Lineal dient zur Bestimmung von „bestehenden“ Abständen. Gleichwohl ließen sich in den Aufbau der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes zwei Minimalisierungen des zugrunde liegenden Axiomensystems integrieren. Zum einen ließ sich die Aussage des Zirkelaxioms bzw. dessen räumliche Erweiterung vollständig nachweisen (siehe Kapitel 3.2.1). Zum ande-

ren konnte die Aussage des Teilungsaxioms um die Forderung nach der Nichtleere reduziert werden (siehe Kapitel 4.1.1).

6.2 Fazit & Ausblick

Der axiomatisch-deduktive Aufbau der hiermit in der vorliegenden Arbeit entwickelten Theorie des *metrisch-normalen euklidischen Raumes* stellt den Kern der vorliegenden Arbeit dar. Dabei zeichnet sich die Arbeit durch ihre perspektivische Dualität aus. Die Axiomatisierung erfolgt unter Berücksichtigung der fachdidaktischen Anforderungen an Mathematiklehrkräfte der allgemeinbildenden Sekundarstufe I und II, betont ohne die mathematische Stringenz eines axiomatisch-deduktiven Vorgehens aufzugeben. Als Teil ihres Professionswissens sollten Mathematiklehrkräfte prinzipiell über ein Fachwissen verfügen, das in Bezug zur akademischen Mathematik den unterrichtlichen Anforderungen der schulischen Mathematik gerecht wird. Intention der vorliegenden Arbeit ist eine mathematische Grundlagenarbeit, auf der die Entwicklung eines adäquaten (geometrischen) Fachwissens fließend erfolgen kann. Die euklidische Geometrie als (schulisches) Themengebiet wiederum nimmt in Anlehnung an die Winterschen (1995) Grunderfahrungen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts einen besonderen Stellenwert ein. (Siehe „Einleitung“ zum Abschnitt.)

Betont sei die Abgrenzung der vorliegenden Arbeit in ihrer Zielsetzung von Arbeiten im Sinne der Stoffdidaktik (siehe hierzu „Einleitung“). Die vorliegende Arbeit erhebt den Anspruch, die Aspekte des Lernens und Lehrens von Geometrie mit einem aus mathematischer Perspektive stringenten Aufbau der euklidischen (Raum-)Geometrie zu verknüpfen. Die erfolgte Analyse der curricularen Richtlinien (mit Fokus auf die Bildungsstandards im Fach Mathematik, siehe Kapitel 2.1) wird in der Axiomatisierung des metrisch-normalen euklidischen Raumes im Einzelnen fachdidaktisch diskutiert und letztlich integriert. Exemplarisch sei an dieser Stelle auf die Darlegung der Grundbegriffe „Winkel“ (3.2.2) und „Kongruenz“ (3.4) verwiesen. Allgemein verstehen sich „Grundbegriffe“ (3) dabei im Kontext der vorliegenden Arbeit nicht aus einer rein mathematischen Perspektive, sondern als die mathematisch notwendigen Begriffe für das Lehren/Lernen der (Raum-)Geometrie.

Der metrisch-normale euklidische Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$: Er beschreibt grundlegend eine mindestens zweielementige Punktmenge \mathcal{P} , auf der eine Metrik d gegeben und hiermit

auf der Menge aller ungeordneten Punktpaare die Relation \equiv_d der Abstandsgleichheit definiert ist. Die Menge \mathcal{E} umfasst die *Ebenen* des Raumes; eine Ebene des Raumes beschreibt eine Punktmenge, die in Bezug zu zwei beliebigen verschiedenen, aber festen Punkten einen jeden Punkt derart enthält, dass die Relation der Abstandsgleichheit erfüllt ist. In der Menge \mathcal{G} sind die *Geraden* des Raumes zusammengefasst; diese beschreiben die Schnittmengen je zweier verschiedener, nicht disjunkter Ebenen. Letztlich ist der metrisch-normale euklidische Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, d_{\equiv})$ durch insgesamt sechs Axiome charakterisiert:

Verbindungsaxiom-Geraden

Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

Verbindungsaxiom-Ebenen

Durch drei nicht kollineare Punkte geht stets eine Ebene.

Parallelenaxiom

Es sei eine Gerade g und ein nicht auf der Geraden g liegender Punkt A gegeben. Dann geht durch den Punkt A genau eine Gerade, die zur Geraden g parallel ist (also gemeinsam mit der Geraden g in einer Ebene des Raumes liegt, aber keinen Punkt mit der Geraden g gemeinsam besitzt).

Linealaxiom

Für jede Gerade g existiert eine bijektive Funktion $f: g \rightarrow \mathbb{R}$, sodass der Abstand zweier auf der Geraden g liegender Punkte A und B gleich der Betragsmetrik ihrer Bildpunkte unter der Funktion f ist, d.h. es gilt die Gleichung $d(A, B) = |f(A) - f(B)|$.

Teilungsaxiom

Es sei eine Ebene ϵ gegeben. Für jede in der Ebene liegende Gerade g ist die Menge $\epsilon \setminus g$ gleich der Vereinigung zweier disjunkter Mengen derart, dass (i) die Strecke je zweier Punkte aus unterschiedlichen Mengen genau einen Punkt sowie (ii) die Strecke je zweier Punkte derselben Menge keinen Punkt mit der Geraden g gemeinsam besitzt.

Kongruenzaxiom

Es sei ein Parallelogramm (A, B, C, D) gegeben. Dann ist der Abstand $d(A, B)$ der Punkte A und B gleich dem Abstand $d(C, D)$ der Punkte C und D .

Elementar für eine euklidische Raumgeometrie unter fachdidaktischen Gesichtspunkten ist ihr Bezug zur ebenen Geometrie. Der Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes liegt hier die in meiner Masterarbeit (2018) entwickelte Theorie der metrisch-normalen euklidischen Ebene zugrunde. Diese ist in die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes integriert (siehe Kapitel 2.2): Innerhalb des Raumes beschreibt jede Ebene eine metrisch-normale euklidische Ebene, zum anderen ist die Restriktion auf eine Ebene des Raumes als metrisch-normale euklidische Ebene strukturgleich zu einer jeden metrisch-normalen euklidischen Ebene. In diesem Zusammenhang versteht sich die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes als räumliche Erweiterung. Im Rahmen dessen erfolgt eine „Räumliche Kontextualisierung“ (4) geometrischer Inhalte, wie sie sich für den Geometrieunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe als leitend erweist, derart, dass Zusammenhänge zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie in Bezug zur ebenen Geometrie untersucht werden. Inhaltlich steht hier in der vorliegenden Arbeit die „genuin-geometrische“ analysierende Geometrie (der Sekundarstufe I) im Vordergrund. Der Zusammenhang zur analytischen Geometrie (der Sekundarstufe II) ist allgemein dargelegt (siehe hierzu Kapitel 5). Zur Untersuchung der konstruierenden sowie messenden/berechnenden Geometrie kann die vorliegende Arbeit (im Sinne ihrer Zielsetzung) als Ausgangspunkt verstanden werden. Über den Blick auf die euklidische Geometrie hinaus lässt sich zudem der Frage nachgehen, ob die vorliegende Arbeit mit ihrer Zielsetzung und der damit verbundenen Intention auf andere Gebiete der Mathematik übertragbar ist.

Wie eingangs dargelegt, zeichnet sich die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes in ihrer perspektivischen Dualität aus; Intention ist eine mathematische Grundlagenarbeit, auf der im Sinne des Professionswissens von Mathematiklehrkräften die Entwicklung eines adäquaten (geometrischen) Fachwissens fließend erfolgen kann. Dabei trägt die Dualität zugleich der universitären Praxis Rechnung. In der Regel erfolgt die fachspezifische Ausbildung von (Mathematik-)Lehrkräften getrennt von ihrer fachdidaktischen Ausbildung, wobei die Erstere im Allgemeinen gemeinsam mit den Fachstudierenden eines Faches erfolgt. Lehramtsstudierenden bietet die Theorie des metrisch-normalen euklidischen Raumes die Möglichkeit, in Bezug zu ihrer fachdidaktischen Ausbildung ein adäquates Fachwissen als Teil ihres Professionswissens zu entwickeln. Zugleich stellt die Theorie aufgrund ihrer mathematischen Stringenz eine Grundlegung der euklidischen (Raum-)Geometrie dar, die den Anforderungen eines Fachstudiums gerecht wird.

Quellenverzeichnis

- [Ableitinger/Steinbauer 2022] Ableitinger, C. / Steinbauer, R. (2022): Beiträge der fachlichen Ausbildung zur Bewältigung von Anforderungen der Unterrichtspraxis. – In: Halverscheid, S. / Kersten, I. / Schmidt-Thieme, B. (Hrsg.): Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung. Analyse, Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen. (Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik). Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden. S. 119–138.
- [Baumert/Kunter 2006] Baumert, J. / Kunter, M. (2006): Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. – In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaften, Jg. 9, H. 4, S. 469–520.
- [Bender 1982] Bender, P. (1982): Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jg. 14, H. 1, S. 9–24.
- [Benölken et al. 2018] Benölken, R. / Gorski, H.-J. / Müller-Philipp, S. (2018): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 7. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden.
- [Beutelspacher 2014] Beutelspacher, A. (2014): Lineare Algebra. Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen. 8. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden.
- [Biehler/Blum 2016] Biehler, R. / Blum, W. (2016): Didaktisch orientierte Rekonstruktion von Mathematik als Basis von Schulmathematik und Lehrerbildung – Editorial. – In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg. 37, H. 1, S. 1–4.
- [Birkhoff 1932] Birkhoff, G. D. (1932): A Set of Postulates for Plane Geometry. Based on Scale and Protractor. – In: Annals of Mathematics, Jg. 33, H. 2, S. 329–345.
- [Blum 2015] Blum, W. (2015): Zur Konzeption der Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. – In: Blum, W. / Vogel, S. / Drüke-Noe, C. / Roppelt, A. (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig. S. 16–30.

- [Blum et al. 2015] Blum, W. / Vogel, S. / Druke-Noe, C. / Roppelt, A. (Hrsg.) (2015): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig.
- [Blumenthal 1935] Blumenthal, O. (1935): Lebensgeschichte. – In: Hilbert, D. (Hrsg.): Analysis. Grundlagen der Mathematik. Physik. Verschiedenes. Lebensgeschichte. (David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3). Springer Verlag, Berlin. S. 388–429.
- [Büchter/Holzäpfel 2018] Büchter, A. / Holzäpfel, L. (2018): Messen. – In: mathematik lehren, Nr. 210, S. 2–7.
- [DBS 2022] DBS – DEUTSCHER BILDUNGSSERVER (2022): Lehrpläne der einzelnen Bundesländer. <https://www.bildungsserver.de/lehrplaene-400-de.html> [14.10.2022].
- [Dohrmann/Kuzle 2015] Dohrmann, C. / Kuzle, A. (2015): Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. – In: Ludwig, M. / Filler, A. / Lambert, A. (Hrsg.): Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden. S. 29–42.
- [Dreher et al. 2022] Dreher, A. / Lindmeier, A. / Heinze, A. (2022): Welches Fachwissen brauchen Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe? – In: Halverscheid, S. / Kersten, I. / Schmidt-Thieme, B. (Hrsg.): Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung. Analyse, Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen. (Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik). Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden. S. 297–319.
- [Etzold 2017] Etzold, H. (2017): Winkel aus der Sicht von Informationen. – In: Filler, A. / Lambert, A. (Hrsg.): Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen. Konkrete Lernsituationen für den Geometrieunterricht. Vorträge auf der 32. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 11. bis 13. September 2015 und auf der 33. Herbsttagung vom 09. bis 11. September 2016 in Saarbrücken. Franzbecker Verlag, Hildesheim. S. 35–44.
- [Filler 1993] Filler, A. (1993): Euklidische und nichteuklidische Geometrie. (Mathematische Texte. Studienbücher zur Lehrerbildung und zum Studium von Anwendungsgebieten der Mathematik, Bd. 7). Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim.

- [Franke/Ruwisch 2010] Franke, M. / Ruwisch, S. (2010): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 2. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- [Franke/Reinhold 2016] Franke, M. / Reinhold, S. (2016): Didaktik der Geometrie. In der Grundschule. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 3. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin.
- [Griesel 2015] Griesel, H. (2015): Arnold Kirsch und der Begriff Größenbereich. – In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 98, S. 14–17.
- [Halverscheid et al. 2022] Halverscheid, S. / Kersten, I. / Schmidt-Thieme, B. (Hrsg.) (2022): Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung. Analyse, Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen. (Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik). Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden.
- [Henn/Filler 2015] Henn, H.-W. / Filler, A. (2015): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). Springer Spektrum Verlag, Berlin.
- [Hilbert 1987] Hilbert, D. (1987): Grundlagen der Geometrie. Mit Supplementen von Prof. Dr. Paul Bernays. 13. Aufl., B. G. Teubner Verlag, Stuttgart.
- [Holland 1974] Holland, G. (1974): Geometrie für Lehrer und Studenten. Band 1. Kongruenzgeometrie. Hermann Schroedel Verlag, Hannover.
- [Holland 1977] Holland, G. (1977): Geometrie für Lehrer und Studenten. Band 2 (mit Aufgabenlösungen). Hermann Schroedel Verlag, Hannover.
- [Hölzl 2018] Hölzl, R. (2018): Ähnlichkeit. – In: Weigand, H.-G. / Filler, A. / Hölzl, R. / Kuntze, S. / Ludwig, M. / Roth, J. / Schmidt-Thieme, B. / Wittmann, G. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 3. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin. S. 203–225.
- [ISB 2022a] ISB – Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (2022a): Mathematik 5. Gymnasium. Fachlehrpläne. Online veröffentlicht: <https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/5/mathematik> [13.07.2022].
- [ISB 2022b] ISB – Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (2022b): Mathematik 6. Gymnasium. Fachlehrpläne. Online veröffentlicht: <https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/6/mathematik> [13.07.2022].

- [IQ-MV 2013] IQ-MV – Institut für Qualitätsentwicklung Mecklenburg-Vorpommern (Hrsg.) (2013): Sicheres Wissen und Können. Geometrie im Raum Sekundarstufe I. 2. Aufl., Universitätsdruck Rostock, Rostock.
- [Kadunz/Sträßer 2008] Kadunz, G. / Sträßer, R. (2008): Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I. 2. Aufl., Franzbecker Verlag, Hildesheim.
- [Karzel et al. 1973] Karzel, H. / Sörensen, K./ Windelberg, D. (1973): Einführung in die Geometrie. (Mathematische Lehrbücher, Band 1). Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, Göttingen.
- [Kasten/Vogel 2018] Kasten, H. / Vogel, D. (2018): Grundlagen der ebenen Geometrie. Springer Spektrum Verlag, Berlin.
- [Kirsche 2006] Kirsche, P. (2006): Einführung in die Abbildungsgeometrie. Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeiten und Affinitäten. (mathematik-abc für das Lehramt). 2. Aufl., B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden.
- [KMK 1997] KMK – Kultusministerkonferenz (1997): Grundsätzliche Überlegungen zu Leistungsvergleichen innerhalb der Bundesrepublik Deutschland. Konstanzer Beschluss. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 24.10.1997. Online veröffentlicht: https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1997/1997_10_24-Konstanzer-Beschluss.pdf [02.02.2019].
- [KMK 2005] KMK – Kultusministerkonferenz (2005): Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung. (Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz). Luchterhand Verlag (Wolters Kluwer), München.
- [KMK 2012] KMK – Kultusministerkonferenz (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. Online veröffentlicht: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf [14.10.2022].
- [KMK 2021] KMK – Kultusministerkonferenz (2021): Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe und der Abiturprüfung. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.07.1972 i. d. F. vom 18.02.2021. Online veröffentlicht: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/1972/1972_07_07-VB-gymnasiale-Oberstufe-Abiturpruefung.pdf [14.10.2022].

- [KMK 2022] KMK – Kultusministerkonferenz (2022): Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022. Online veröffentlicht: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf [14.10.2022].
- [Kowol 2009] Kowol, G. (2009): Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene. Birkhäuser Verlag, Basel.
- [Krainer 1990] Krainer, K. (1990): Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes. (Europäische Hochschulschriften, Bd. 409). Peter Lang Verlag, Frankfurt am Main.
- [Krauss et al. 2008] Krauss, S. / Neubrand, M. / Blum, W. / Baumert, J. / Brunner, M. / Kunter, M. / Jordan, A. (2008): Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. – In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg. 29, H. 3/4, S. 223–258.
- [Krauss et al. 2011] Krauss, S. / Blum, W. / Brunner, M. / Neubrand, M. / Baumert, J. / Kunter, M. / Besser, M. / Elsner, J. (2011): Konzeptionalisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. – In: Kunter, M. / Baumert, J. / Blum, W. / Klusmann, U. / Krauss, S. / Neubrand, M. (Hrsg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramm COACTIV. Waxmann Verlag, Münster. S. 135–162.
- [Krauter/Bescherer 2013] Krauter, S. / Bescherer, C. (2013): Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 2. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin.
- [Kultusministerkonferenz] Kultusministerkonferenz, siehe KMK
- [Lauer 2018] Lauer, Y. (2018): Ebene Euklidische Geometrie. Eine Grundlage für den Geometrieunterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe I und II. Masterarbeit (unveröffentlicht), Universität Trier, Trier.
- [Leuders 2015] Leuders, T. (2015): Die Leitidee Messen. – In: Blum, W. / Vogel, S. / Driecke-Noe, C. / Roppelt, A. (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. Bildungshaus Schulbuchverlage, Braunschweig. S. 41–50.

- [Maier 1999] Maier, P. H. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen. Mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht. Auer Verlag, Donauwörth.
- [Martin 1975] Martin, G. E. (1975): The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane. (Undergraduate Texts in Mathematics). Springer Verlag, New York.
- [MBK-SL 2014a] MBK-SL – Ministerium für Bildung und Kultur Saarland (Hrsg.) (2014a): Lehrplan Mathematik. Gymnasium. Klassenstufe 5. Online veröffentlicht: https://www.saarland.de/SharedDocs/Downloads/DE/mbk/Lehrplaene/Lehrplaene_Gymnasium/Mathe/Mathe_5_Gym_2014.pdf?__blob=publicationFile&v=1 [13.07.2022].
- [MBK-SL 2014b] MBK-SL – Ministerium für Bildung und Kultur Saarland (Hrsg.) (2014b): Lehrplan Mathematik. Gymnasium. Klassenstufe 6. Online veröffentlicht: https://www.saarland.de/SharedDocs/Downloads/DE/mbk/Lehrplaene/Lehrplaene_Gymnasium/Mathe/Mathe_6_Gym_2014.pdf?__blob=publicationFile&v=1 [13.07.2022].
- [Meschkowski 1966] Meschkowski, H. (1966): Grundlagen der euklidischen Geometrie. Bibliographisches Institut Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim.
- [Millman/Parker 1991] Millman, R. S. / Parker, G. D. (1991): Geometry. A Metric Approach with Models. (Undergraduate Texts in Mathematics). 2. Aufl., Springer Verlag, New York.
- [Mitchelmore/White 1998] Mitchelmore, M. / White, P. (1998): Development of Angle Concepts: A Framework for Research. – In: Mathematics Education Research Journal, Jg. 10, H. 3, S. 4–27.
- [Mitschka 1977] Mitschka, A. (1977): Axiomatik in der Geometrie. (sm - Studienbücher Mathematik). Herder Verlag, Freiburg.
- [Mitschka et al. 1998] Mitschka, A. / Strehl, R. / Hollmann, E. (1998): Einführung in die Geometrie. Grundlagen, Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen. Franzbecker Verlag, Hildesheim.
- [Moise 1990] Moise, E. E. (1990): Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. 3. Aufl., Addison-Wesley Publishing Company, New York.
- [MSB-SH 2014] MSB-SH – Ministerium für Schule und Berufsbildung Schleswig-Holstein (Hrsg.) (2014): Fachanforderungen Mathematik. Allgemein bildende Schulen. Sekundarstufe I. Sekundarstufe II. Stamp Media, Kiel.
- [Nicholson 2019] Nicholson, N. R. (2019): A Transition to Proof. An Introduction to Advanced Mathematics. (Textbooks in Mathematics). CRC Press, Boca Raton (Florida).

- [Peter-Koop/Nührenbörger 2011] Peter-Koop, A. / Nührenbörger, M. (2011): Größen und Messen. – In: Walther, G. / van den Heuvel-Panhuizen, M. / Granzer, D. / Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. (Lehrerbücherei Grundschule). 5. Aufl., Cornelsen Verlag, Berlin. S. 89–117.
- [Quaisser 1989] Quaisser, E. (1989): Bewegungen in der Ebene und im Raum. – In: Quaisser, E. / Sprengel, H.-J. (Hrsg.): Geometrie in Ebene und Raum. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main. Teil II.
- [Quaisser/Sprengel 1989] Quaisser, E. / Sprengel, H.-J. (1989): Räumliche Geometrie. – In: Quaisser, E. / Sprengel, H.-J. (Hrsg.): Geometrie in Ebene und Raum. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main. Teil I.
- [Roppelt et al. 2019] Roppelt, A. / Blum, W. / Pöhlmann, C. / Mahler, N. / Greefrath, G. (2019): Beschreibung der untersuchten mathematischen Kompetenzen (Konzeptuelle Grundlagen des IQB-Bildungstrends 2018). – In: Stanat, P. / Schipolowski, S. / Mahler, N. / Weirich, S. / Henschel, S. (Hrsg.): IQB-Bildungstrend 2018. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I im zweiten Ländervergleich. Waxmann Verlag, Münster. S. 21–35.
- [Roth/Wittmann 2018] Roth, J. / Wittmann, G. (2018): Ebene Figuren und Körper. – In: Weigand, H.-G. / Filler, A. / Hölzl, R. / Kuntze, S. / Ludwig, M. / Roth, J. / Schmidt-Thieme, B. / Wittmann, G. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 3. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin. S. 107–147.
- [Schmidt-Thieme/Weigand 2018] Schmidt-Thieme, B. / Weigand, H.-G. (2018): Symmetrie und Kongruenz. – In: Weigand, H.-G. / Filler, A. / Hölzl, R. / Kuntze, S. / Ludwig, M. / Roth, J. / Schmidt-Thieme, B. / Wittmann, G. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 3. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin. S. 179–202.
- [Schröder 1985] Schröder, E. M. (1985): Geometrie euklidischer Ebenen. Mathematische Grundlegung der Schulgeometrie. Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn.
- [Schröder 1991] Schröder, E. M. (1991): Vorlesungen über Geometrie. Band 2: Affine und projektive Geometrie. Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- [Schröder 2014a] Schröder, E. M. (2014a): Ebene und räumliche euklidische Geometrie. Band 1: Ebene euklidische Geometrie. Bookboon.

- [Schröder 2014b] Schröder, E. M. (2014b): Ebene und räumliche euklidische Geometrie. Band 2: Räumliche euklidische Geometrie. Bookboon.
- [Sekretariat-KMK 2021] SEKRETARIAT-KMK – Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2021): Das Bildungswesen in der Bundesrepublik Deutschland 2018/2019. Darstellung der Kompetenzen, Strukturen und bildungspolitischen Entwicklungen für den Informationsaustausch in Europa. Online veröffentlicht: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Eurydice/Bildungswesen-dt-pdfs/dossier_de_ebook.pdf [14.10.2022].
- [Shulman 1986] Shulman, L. S. (1986): Those Who Understand: Knowledge in Growth Teaching. – In: Educational Researcher, Jg. 15, H. 2, S. 4–14.
- [Smoczyk 2019] Smoczyk, K. (2019): Geometrie für das Lehramt. BoD - Books on Demand, Norderstedt.
- [Sträßer 2015] Sträßer, R. (2015): Grundbegriffe, Grundvorstellungen und Nutzungen der Geometrie. – In: Ludwig, M. / Filler, A. / Lambert, A. (Hrsg.): Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden. S. 1–11.
- [Strehl 1983] Strehl, R. (1983): Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff. – In: mathematica didactica, Jg. 6, S. 129–146.
- [Venema 2012] Venema, G. A. (2012): Foundations of Geometry. 2. Aufl., Pearson Verlag, Boston.
- [Walter 1986] Walter, R. (1986): Einführung in die lineare Algebra. 2. Aufl., Vieweg Verlag, Braunschweig.
- [Walz 2017] Walz, G. (Hrsg.) (2017): Lexikon der Mathematik: Band 3. Inp bis Mon. 2. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin.
- [Weigand 2018a] Weigand, H.-G. (2018a): Geometrie und Geometrieunterricht. – In: Weigand, H.-G. / Filler, A. / Hölzl, R. / Kuntze, S. / Ludwig, M. / Roth, J. / Schmidt-Thieme, B. / Wittmann, G. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 3. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin. S. 255–270.
- [Weigand 2018b] Weigand, H.-G. (2018b): Ziele des Geometrieunterrichts. – In: Weigand, H.-G. / Filler, A. / Hölzl, R. / Kuntze, S. / Ludwig, M. / Roth, J. / Schmidt-Thieme, B. / Wittmann, G. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 3. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin. S. 1–20.

-
- [Weigand et al. 2018] Weigand, H.-G. / Filler, A. / Hölzl, R. / Kuntze, S. / Ludwig, M. / Roth, J. / Schmidt-Thieme, B. / Wittmann, G. (Hrsg.) (2018): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II). 3. Aufl., Springer Spektrum Verlag, Berlin.
- [Winter 1995] Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. – In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61, S. 37–46.
- [Wußing 2009] Wußing, H. (2009): 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart. (Vom Zählstein zum Computer). Springer Verlag, Berlin.