Universität Koblenz-Landau – Fachbereich 8: Psychologie

DFG-Graduiertenkolleg „Unterrichtsprozesse“

GEGEBEN, GESUCHT, LÖSUNG?

SELBSTGENERIERTE REPRÄSENTATIONEN BEI DER BEARBEITUNG PROBLEMHALTIGER TEXTAUFGABEN

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor philosophiae

(Dr. phil.)

von Dipl.-Psych. Katharina Hohn

geboren am 09. November 1984 in Templin

Gutachter:

1. Prof. Dr. Wolfgang Schnotz (Universität Koblenz-Landau)

2. Prof. Dr. Renate Rasch (Universität Koblenz-Landau)

3. Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri (Universität Kassel)

Für meine Eltern …

… & Joachim

INHALTSVERZEICHNIS

TABELLENVERZEICHNIS IX

ABBILDUNGSVERZEICHNIS X

1. EINLEITUNG 1

2. TEXTAUFGABEN UND MATHEMATISCHE MODELLIERUNG 7

2.1 Sachrechnen und Textaufgaben 7

2.2 Problemhaltige Textaufgaben und Problemlösen 10

2.3 Mathematische Modellierung und Modellierungskreisläufe 14

2.4 Textaufgaben als Modellierungsaufgaben? 21

2.5 Die Kognitionspsychologische Sicht auf Mathematische Modellierung 23

2.6 Exkurs: Kognitive Entwicklung 24

3. REPRÄSENTATIONEN 27

3.1 Externe Repräsentationen 30

3.2 Interne Repräsentationen 32

3.3 Deskriptionale Repräsentationen 33

3.4 Depiktionale Repräsentationen 34

4. REPRÄSENTATIONEN UND TEXTAUFGABEN 37

5. ZIELE DER ARBEIT 45

6. FORSCHUNGSFRAGEN UND HYPOTHESEN 47

7. UNTERSUCHUNGSDESIGN 53

7.1 Verbindung von qualitativem und quantitativem Vorgehen 53

7.2 Videographie als Untersuchungsmethode 55

7.3 Teilnehmende oder nicht teilnehmende Beobachtung? 56

7.4 Ereignisstichprobe oder Zeitstichprobe? 57

7.5 Zeichensystem, Kategoriensystem oder Schätzskala? 57

8. PILOTSTUDIE 59

8.1 Stichprobe 59

8.2 Durchführung ... *59*

8.3 Materialüberprüfung ... *63*

8.4 Modellentwicklung ... *66*

8.4.1 Der Mathematische Modellierungskreislauf von Verschaffel, Greer & De Corte ... 69
8.4.2 Erweiterung des Mathematischen Modellierungskreislaufs ... 70
8.4.3 Entwicklung des Kodiersystems zur Erfassung der Lösungsprozesse ... 76
8.4.3.1 Zeichensystem ... 79
8.4.3.2 Kategoriensystem ... 88

9. HAUPTUNTERSUCHUNG ... 93

9.1 Stichprobe ... *93*

9.2 Durchführung ... *93*

9.3 Beobachterschulung und Videokodierung ... *98*

9.4 Beobachterübereinstimmung ... *99*

9.5 Ergebnisse ... *102*

9.5.1 Aufgabenschwierigkeiten und Abbruch der Bearbeitung ... 104
9.5.2 Analyseschritte und Bearbeitungszeiten ... 104
9.5.3 Überprüfung des Vorgehens und Revision ... 105
9.5.4 Forschungsfrage 1: Klassenstufe und Lösungserfolg ... 106
9.5.5 Forschungsfrage 2: Klassenstufe und Repräsentationsform ... 112
9.5.6 Forschungsfrage 3: Lösungserfolg und Repräsentationsform ... 121
9.5.7 Forschungsfrage 4: Lösungserfolg und Vorgehensweise ... 126
9.5.8 Schülermerkmale, Repräsentationsformen und Lösungserfolg ... 129

10. DISKUSSION ... 135

10.1 Ergebnisdiskussion ... *135*

10.2 Methodische Überlegungen ... *143*

10.3 Ausblick ... *147*

10.4 Fazit ... *151*

11. ZUSAMMENFASSUNG ... 153

LITERATURVERZEICHNIS ... 155

EHRENWÖRTLICHE ERKLÄRUNG ... XI

DANKSAGUNG ... XII

LEBENSLAUF ... XIII

TABELLENVERZEICHNIS

Tabelle 1:
Relative Lösungshäufigkeiten der Grundschüler in der Pilotstudie sortiert nach richtigen und teilweise richtigen Lösungen 64

Tabelle 2:
Im Kodiersystem verwendete Zeichen – Teil I 80

Tabelle 3:
Im Kodiersystem verwendete Zeichen – Teil II 82

Tabelle 4:
Im Kodiersystem verwendete Kategorien 88

Tabelle 5:
Stichprobengrößen pro Aufgabe und Klassenstufe für die weiteren Analysen........ 93

Tabelle 6:
Schematisierung der alternierenden Reihenfolge der Textaufgaben in der Haupterhebung 98

Tabelle 7:
Überblick über die einzelnen aufgabenunspezifischen Intraklassenkorrelationen (ICCs)........ 101

Tabelle 8:
Überblick über die einzelnen aufgabenspezifischen Intraklassenkorrelationen (ICCs)........ 102

Tabelle 9:
Durchschnittliche Verwendung der Repräsentationen in den mathematischen Modellen........ 110

Tabelle 10:
Veranschaulichung des Vorgehens für die Ermittlung eines Kennwertes für den flexiblen Umgang mit den verschiedenen Repräsentationsformen *innerhalb* der Aufgaben........ 115

Tabelle 11:
Veranschaulichung des Vorgehens für die Ermittlung eines Kennwertes für den flexiblen Umgang mit den verschiedenen Repräsentationsformen *zwischen* den Aufgaben 119

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1:
Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß 16

Abbildung 2:
Modellierungskreislauf nach Pollak 18

Abbildung 3:
Modifizierter Modellierungskreislauf nach Maaß 19

Abbildung 4:
Exemplarische Darstellung des Modellierungskreislaufs nach Verschaffel, Greer, & De Corte 20

Abbildung 5:
Beispiel zur Veranschaulichung der Spezifizierungen von Repräsentationen nach Palmer 28

Abbildung 6:
Schematisierung der vier unterschiedenen Repräsentationsformen 36

Abbildung 7:
Phasenmodell zum Verhältnis qualitativer und quantitativer Analyse nach Mayring 54

Abbildung 8:
Erweiterter mathematischer Modellierungskreislauf mit Repräsentationsformen. 71

Abbildung 9:
Veranschaulichung mehrerer Analyseschritte bei der Räuberaufgabe 73

Abbildung 10:
Schematisierung des Vorgehens bei der Entwicklung des Kodiersystems 77

Abbildung 11:
Aufbau des Arbeitsplatzes in der Haupterhebung 94

Abbildung 12:
Anzahl richtiger Lösungen für die einzelnen Klassenstufen 107

Abbildung 13:
Richtigkeit pro Aufgabe für Grundschüler und Gymnasiasten 108

Abbildung 14:
Relative Verwendungshäufigkeiten der einzelnen Repräsentationen
im mathematischen Modell 111

Abbildung 15:
Nutzung externe Repräsentationen in den mathematischen Modellen..................... 113

Abbildung 16:
Flexibler Einsatz der Repräsentationen *innerhalb* der Aufgaben
für die Klassenstufen 116

Abbildung 17:
Flexibler Einsatz der Repräsentationen *zwischen* den Aufgaben
für die einzelnen Klassenstufen.. 120

Abbildung 18:
Aufgaben- und klassenspezifische Verwendung multipler
Repräsentationsformen in den mathematischen Modellen...................................... 123

1. EINLEITUNG

„Eigentlich hätte ich die jetzt irgendwie gelöst."

Der Schulunterricht soll den Schüler[1] dazu befähigen „sich in der gegenwärtigen und zukünftigen Welt zu orientieren und an allen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens teilzunehmen" (Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz, 2007, S. 3). Dazu kann und soll also auch der Mathematikunterricht beitragen.

Infolgedessen lassen sich in den Rahmenplänen, sowohl der Grundschule als auch weiterführender Schulen, mathematische Kompetenzen wie z.B. „Probleme mathematisch lösen", „Mathematisch modellieren" oder auch „Mathematische Darstellungen verwenden" (Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz, 2007, S. 4f.) ausfindig machen. Ferner fallen Schlagworte wie: „mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden", „Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren)", „Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen", „Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen" oder „für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen" (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2005, S. 7f.). Das große Ziel im Rahmen des Mathematikunterrichts scheint die Vermittlung einer mathematischen Grundbildung zu sein. Darunter ist z.B. Folgendes zu verstehen:

> *Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as*

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird in der vorliegenden Arbeit auf die explizite Nennung der weiblichen Form verzichtet. Gemeint sind natürlich immer sowohl die männlichen als auch die weiblichen Vertreter von Personengruppen. In Fällen, in denen nur ein bestimmtes Geschlecht gemeint ist, wird dies ausdrücklich benannt.

> *a constructive, concerned and reflective citizen.* (OECD, 1999, S. 41, Hervorhebung im Original)

Zur Erreichung dieses doch sehr hohen Ziels, oder zumindest zur Annäherung an jenes Ziel, stehen im Mathematikunterricht verschiedene anspruchsvolle Aufgabenformen zur Verfügung, wie z.B. Knobelaufgaben, Modellierungsaufgaben oder auch Problemaufgaben. Jedoch stellen gerade solche Aufgaben für Schüler (und auch für ihre Lehrer) nach wie vor eine besondere Herausforderung dar. Dieses Phänomen zeigt sich sowohl in den Grundschulen als auch in den weiterführenden Schulen. Und selbst Studenten bereiten jene Aufgaben durchaus Schwierigkeiten. Für die korrekte Bearbeitung von solchen Aufgaben gibt es nämlich kein Patentrezept, kein Schema F, das bei konsequenter Anwendung zum richtigen Ergebnis führt. So zeigte z.B. TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*) 2007, dass lediglich 37% der deutschen Viertklässler die Kompetenzstufe IV[2] erreichen konnten: „*Die Schülerinnen und Schüler wenden ihre mathematischen Fertigkeiten und Fähigkeiten verständig beim Lösen einfacher Probleme an*. Sie lösen mit Hilfe der Grundrechenarten mehrschrittige Textaufgaben“ (Walther, Selter, Bonsen, & Bos, 2008, S. 68, Hervorhebung im Original).

In der vorliegenden Arbeit soll deswegen der Frage nachgegangen werden, auf welche Art und Weise einzelne Schüler verschiedener Klassenstufen anspruchsvolle Textaufgaben bearbeiten und inwieweit das jeweilige Lösungsvorgehen mit dem Lösungserfolg einhergeht. Im Fokus stehen dabei die Repräsentationsformen, die die Schüler bei ihren Lösungsvorgehen *selbst* generieren. Wird also bei der Aufgabenlösung im Kopf gerechnet, werden Rechnungen oder Gleichungen aufgeschrieben, werden Zeichnungen angefertigt, etc.? Das Augenmerk liegt also weniger auf dem Textverstehen, obwohl dies zweifelsohne von großer Bedeutung für die Bearbeitung von Textaufgaben ist, als vielmehr auf den Analyseschritten, die zur Lösungsfindung durch den einzelnen Schüler durchlaufen werden. An dieser Stelle wird schon deutlich, dass das individuelle Vorgehen im Mittelpunkt stehen soll. Die PISA-Konzeption mathematischer Grundbildung (*mathematical literacy*) wird also aufgegriffen, die die *individuellen* Kompetenzen hervorhebt.

[2] Insgesamt werden fünf Kompetenzstufen unterschieden (I bis V), die die Testleistung eines Schülers widerspiegeln. Schüler mit einer höheren Testleistung werden einer höheren Kompetenzstufe zugeordnet (Walther et al., 2008).

Durch die individuelle Bearbeitung der Textaufgaben und die Selbstgenerierung von Repräsentationsformen soll versucht werden, möglichst authentische Problemsituationen zu schaffen, auch wenn dies natürlich im Rahmen möglichst standardisierter Erhebungssituationen stattfindet. Denn viele (gerade alltägliche) Probleme müssen alleine bewältigt werden ohne zusätzliche Hilfestellungen à la „*Fertige zunächst eine Skizze an!*“.

Also wurde ein mixed-methods-Ansatz konzipiert, der es ermöglicht, verschiedene Forschungsmethoden miteinander zu kombinieren. Neben dem Einsatz von Video- und Interviewtechnik zur Aufzeichnung der individuellen Lösungsvorgehen von Schülern verschiedener Klassenstufen (Grundschulen: 3. und 4. Klassen; Gymnasien: 6. und 9. Klassen) bei der Bearbeitung von fünf problemhaltigen Textaufgaben wurden standardisierte Tests und Fragenbögen eingesetzt, um bspw. Leseverständnis oder auch mathematische Grundlagenkenntnisse zu erfassen.

Das gewonnene Videomaterial wurde anhand eines selbstentwickelten Kodiersystems quantifiziert. Dieses basiert u.a. auf der Erweiterung des mathematischen Modellierungskreislaufes von Verschaffel, Greer und De Corte (2000) um phasenspezifische, mögliche Repräsentationsformen. Darüber hinaus wurden als zweiter Grundpfeiler zur Exploration der individuellen Lösungsprozesse die mathematischen Denkstile nach Borromeo Ferri (2004) verwendet.

Das quantifizierte Videomaterial wurde anschließend statistisch ausgewertet und in Beziehung zu den Kennwerten gesetzt, die durch Tests und Fragenbögen gewonnen wurden. Somit erfolgt keine reine Deskription von Lösungsprozessen. Vielmehr soll versucht werden, Beziehungen zwischen verschiedenen Aspekten der Lösungsprozesse aufzudecken und diese in Bezug zu den Schülern und ihren Fähigkeiten zu setzen.

Abschließend sei noch angemerkt, dass es sich bei der vorliegenden Arbeit um ein teilweise exploratives Unterfangen handelt, da über selbstgenerierte Repräsentationsformen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben bisher äußerst wenig bekannt ist. Die hier berichteten Ergebnisse sind als vorläufige Ergebnisse zu verstehen, deren Überprüfung durch weiterführende Untersuchungen erfolgen muss. Dennoch ermöglichen sie einen ersten Einblick in die Lösungsprozesse von Schülern verschiedener Klassenstufen und erste Erkenntnisse über mögliche Einflussgrößen auf den Lösungserfolg.

Gegeben

TEXTAUFGABEN UND

MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

REPRÄSENTATIONEN

REPRÄSENTATIONEN UND TEXTAUFGABEN

2. TEXTAUFGABEN UND MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

„Ich hab' die Aufgabe irgendwie nicht so komplett verstanden. Weil das ist ja klar, dass es Schoko, Vanille und Himbeere gibt. [Das] ist ja 'ne Aufgabe irgendwas mit dem Geld. Aber so ganz verstehe ich die nicht. Also da komme ich wirklich nicht drauf."

2.1 Sachrechnen und Textaufgaben

Über das, was der Bereich des Sachrechnens beinhaltet, herrscht nach wie vor keine Einigkeit (Franke & Ruwisch, 2010). Dies wird schon durch die Vielzahl von Aufgabentypen deutlich, die unter diesem Begriff subsumiert werden können. Dazu zählen z.B. sogenannte authentische Aufgaben, Sachprobleme, Rechengeschichten, Kapitänsaufgaben (Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend, 2002), Problemaufgaben, Knobelaufgaben, Modellierungsaufgaben, Textaufgaben (Franke & Ruwisch, 2010), Anwendungsaufgaben (Müller & Wittmann, 1984) und viele andere.
Eine eindeutige Definition und Abgrenzung der einzelnen Aufgabentypen gibt es nicht (immer), was wiederum dazu führt, dass einzelne Aufgabentypen bspw. synonym verwendet werden oder auch ineinander überführbar sind. Die Grenzen zwischen einzelnen Aufgabentypen sind somit meist fließend.

Eine allgemeine, umfassende Definition von Sachaufgaben versuchen Franke und Ruwisch (2010). Ihrer Ansicht nach zählen dazu jene Aufgaben, „die außer einem mathematischen Problem – meist einer Rechnung – auch die Verarbeitung von Sachinformationen verlangen" (Franke & Ruwisch, 2010, S. 31).
So können Sachaufgaben zum einen das Verstehen mathematischer Phänomene fördern oder erleichtern, und zum anderen können (alltägliche) Phänomene mithilfe der Mathematik erschlossen werden. Darüber hinaus sollen sie dazu dienen, allgemeine Problemlösekompetenzen zu fördern (Franke & Ruwisch, 2010). Jedoch räumen Franke und Ruwisch (2010) ein, dass traditionelle Sachaufgaben Problemlösekompetenzen eher nicht fördern, da sie meist durch das Anwenden von Algorithmen bewältigbar sind. Die Autoren verweisen in diesem Zusammenhang auf Knobelaufgaben oder problemhaltige Textaufgaben (s. Kapitel 2.2): „Vor dem Hintergrund, dass [diese] Sachaufgaben nicht

algorithmisch gelöst werden können, sondern vielfach eigene Bearbeitungswege erst erschlossen werden müssen, erweist sich diese Forderung [nach der Entwicklung von Problemlösefähigkeiten] auch für das Sachrechnen als gerechtfertig“ (Franke & Ruwisch, 2010, S. 22).

Die Kultusministerkonferenz legte 2004 Vereinbarungen über Bildungsstandards für den Primarbereich vor, die am Ende der 4. Klasse erreicht sein sollen. Neben inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, die sich auf Inhaltsbereiche wie z.B. „Zahlen und Operationen“ oder auch „Muster und Strukturen“ beziehen, werden folgende fünf allgemeine mathematische Kompetenzen genannt, deren erfolgreiche Nutzung und Aneignung einen zentralen Stellenwert einnehmen sollen: Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Darstellen (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2005). Leider werden Sachaufgaben, die diese fünf prozessbezogenen Kompetenzen, oder zumindest einige davon, fördern (könnten), im Mathematikunterricht, sowohl der Grundschule als auch weiterführender Schulen, eher selten eingesetzt. Vorrangig ist der Einsatz von Sachaufgaben als „Anwendung des Rechnens“ (Franke & Ruwisch, 2010, S. 20). Somit tritt der realistische Sachbezug der Aufgaben entweder in den Hintergrund oder verschwindet (fast) gänzlich zugunsten von fiktiven und/oder überzogenen Situationen (Franke & Ruwisch, 2010). In diesem Zusammenhang gelten Textaufgaben als die Form von Sachaufgaben, die am häufigsten eingesetzt wird (Franke & Ruwisch, 2010). Unter Textaufgaben sind im Allgemeinen in „Textform dargestellte Aufgaben [zu verstehen], bei denen die Sache weitgehend bedeutungslos und austauschbar ist“ (Radatz & Schipper 1983, S. 130). Die Sache, die bei klassischen Sachaufgaben im Vordergrund steht, wird hier zweitrangig. Dadurch wirken solche Aufgaben meist künstlich, was an ihnen auch immer wieder kritisiert wird (Schneeberger, 2009).

Eine Differenzierung zwischen Sach- und Textaufgaben scheint nicht zwingend vordergründig, denn nach Lauter (1991) können letztere durchaus als Sachaufgaben in Textform aufgefasst werden. Auch Verschaffel und Kollegen (2000) teilen diese Sichtweise:

> In their most typical form, word problems take the form of brief texts describing the essentials of some situation wherein some quantities are explicitly given and others

> are not, and wherein the solver … is required to give a numerical answer to a specific question by making explicit and exclusive use of the quantities given in the text and mathematical relationships between those quantities inferred from the text. (S. ix)

Vielmehr ist von Bedeutung, dass solche Aufgaben dem Lösenden im Sinne Freudenthals (1968, S. 7) Folgendes ermöglichen: „What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality.“

Viele Forschungsarbeiten, die sich mit Textaufgaben beschäftigen, beziehen sich auf einfache Textaufgaben (z.B. Carpenter & Moser, 1984; Riley & Greeno, 1988; Cummins, 1991; Thevenot, 2010), welche häufig auch als Routineaufgaben bezeichnet werden (s.u.). Immer wieder lassen sich in diesem Zusammenhang die verschiedenen Arten von Textaufgaben nach Riley (1981) ausfindig machen, wonach drei Aufgabenarten unterschieden werden:

1. Kombinationsaufgaben (z.B. *Emma hat 3 Bauklötze. Paul hat 5 Bauklötze. Wie viele Bauklötze haben die beiden zusammen?*),
2. Vergleichsaufgaben (z.B. *Emma hat 5 Bauklötze. Paul hat 8 Bauklötze. Wie viele Bauklötze hat Paul mehr als Emma?*) und
3. Angleichungsaufgaben (z.B. *Am Anfang hatte Emma einige Bauklötze. Dann gab sie Paul 2 Bauklötze. Jetzt hat Emma 6 Bauklötze. Wie viele Bauklötze hatte sie am Anfang?*).

Carpenter und Moser (1984) explorierter in einer Längsschnittstudie die Veränderungen der Lösungsstrategien von Grundschülern zwischen dem ersten und dritten Schuljahr bei der Bearbeitung von (einfachen) Textaufgaben, deren Lösung mithilfe einfacher Additions- oder Subtraktionsaufgaben ermittelt werden konnte. Dabei stellten sie eine Entwicklung der Schüler vom direkten Operieren mit konkreten Objekten hin zu immer ausgeklügelteren Zählstrategien fest.

Riley, Greeno und Heller (1983) berichten unter Bezugnahme auf diverse Studien (z.B. Gibb, 1956; Schell & Burns, 1962; Shores & Underhill, 1976; Carpenter, Hiebert, & Moser, 1981; Riley, 1981), dass das korrekte Bearbeiten von Vergleichsaufgaben besonders jüngeren Kindern (im Kindergarten- und Grundschulalter) schwerfällt, während Kombinations- und Angleichungsaufgaben besser gelöst werden können.

Die in den beschriebenen Untersuchungen eingesetzten arithmetischen Textaufgaben eignen sich für manche Forschungszwecke sicherlich ausgezeichnet. Im Hinblick auf ihren Einsatz im Unterricht gelten sie jedoch oft als zu einfach, als stereotyp und werden dahingehend oft kritisiert, dass sie keiner bzw. kaum einer Reflexion bedürfen. In diesem Zusammenhang wird die oft oberflächliche Lösung von Textaufgaben diskutiert, bei der einzelne Schritte des Lösungsprozesses mehr oder weniger komplett übersprungen werden (Verschaffel et al., 2000). Die dargebotene Textaufgabe führt basierend auf oberflächlichen Eigenschaften, wie z.B. Signalworten, zur Auswahl spezifischer Strategien (*zusammen* suggeriert Addition, *weniger* suggeriert Subtraktion, etc.). Die Strategie wird anschließend auf die Zahlen angewandt, die in der Textaufgabe vorkommen, ohne Rückbezug auf die in der Textaufgabe beschriebene Situation zur Verifikation der gefundenen Lösung (Verschaffel et al., 2000). Solch ein Lösungsvorgehen wird durch stereotype Textaufgaben verstärkt. Winter sieht in solchen Aufgaben Routineaufgaben, in denen der Lösende „mehr oder weniger sofort einen bekannten (‚gehabten') Aufgabentyp erkennt. Die Aufgabe ist nur die Version einer Musteraufgabe“ (Winter, 1994b, S. 7).

Dass nicht alle Textaufgaben Routineaufgaben bzw. stereotype Aufgaben sein müssen, die mithilfe von Algorithmen meist richtig und in äußerst kurzer Zeit lösbar sind, zeigen die problemhaltigen Textaufgaben nach Rasch.

2.2 Problemhaltige Textaufgaben und Problemlösen

Bei problemhaltigen Textaufgaben handelt es sich um eine Aufgabengruppe, „der in der Regel anspruchsvolle mathematische Strukturen zugrunde liegen, die mitunter so in Sachsituationen eingebettet sind, dass die den Kindern vertrauten Grundmodelle der Rechenoperationen nicht ohne weiteres sichtbar bzw. nicht ohne Transformationsleistung anzuwenden sind“ (Rasch, 2001, S. 26).

Hinter der Bezeichnung „problemhaltige Textaufgaben“ verbirgt sich eine bunte Mischung von unterschiedlichsten Textaufgaben. Als Gemeinsamkeit, die die verschiedenen Aufgaben verbindet, nennt Rasch (2001) das Auslösen von Denk- und

Problemlöseprozessen. Auch nach Winter (1994b) ist das Lösen von Problemaufgaben ein „komplexer und anspruchsvoller geistiger Vorgang, ein Problemlöseprozeß, der uns unweigerlich mit der Problematik des Verstehens konfrontiert“ (S. 11). Nach Duncker entsteht ein Problem dann,

> wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht ‚weiß‘, wie es dieses Ziel erreichen soll. Wo immer der gegebene Zustand sich nicht durch bloßes Handeln (Ausführen selbstverständlicher Operationen) in den erstrebten Zustand überführen lässt, wird das Denken auf den Plan gerufen. (1974, S. 1)

Kongruent zum allgemeinen Problemlösen kann das mathematische Problemlösen definiert und beschrieben werden. Nach Mayer und Hegarty (1996, S. 31) kommt es zum mathematischen Problemlösen, „when a problem solver wishes to solve a mathematical problem but does not know how to solve it“.

Problemhaltige Textaufgaben sind, wie ihre Bezeichnung schon verdeutlicht, in erster Linie *Text*aufgabe. Die in ihnen beschriebenen Sachsituationen sind also zweitrangig und durchaus austauschbar, das Mathematisieren steht im Vordergrund, der Schwerpunkt liegt also eher auf innermathematischen Problemstellungen. Textaufgaben, die eine andere „Art“ der Problemhaltigkeit aufweisen, lassen sich bei Verschaffel und Kollegen (2000) finden. Sie verwenden in ihren Erhebungen sogenannte Standardtextaufgaben und stellen diesen problematische Textaufgaben (sogenannte „problematic items“) gegenüber „for which the appropriate mathematical model is less obvious, at least if one seriously takes into account the realities of the context evoked by the problem statement“ (Verschaffel et al., 2000, S. 19 ff.). Der Fokus dieser „problematischen“ Textaufgaben liegt auf dem realistischen Kontext, der für die korrekte mathematische Modellierung, und somit Lösung der Aufgabe, unbedingt berücksichtig werden muss. Eine solche Textaufgabe ist z.B. „Steve has bought 4 planks each 2.5 meters long. How many planks 1 meter long can he saw from these planks?“ (Verschaffel et al., 2000, S. 19). Das Problematische liegt hier also eher in der Sachsituation selbst, die unbedingt zu berücksichtigen ist. In den Textaufgaben von Rasch liegt das Problematische jedoch eher in den innermathematischen Strukturen und weniger in der Sachsituation. Folgende Aufgabe gehört z.B. zu jenen Aufgaben: „In Streblindes Bücherregal stehen 168 Bücher. Das Regal hat 3 Fächer. In jedem Fach stehen 10 Bücher mehr als im darunter liegenden. Wie viele Bücher stehen in jedem Fach?“ (Rasch, 2008, S. 94).

Von großer Bedeutung ist hier, sowohl bei den problemhaltigen Textaufgaben nach Rasch als auch bei anderen „problematischen“ Textaufgaben, dass es sich dabei keineswegs um Routineaufgaben handelt.

Winter (1994b) unterscheidet zwischen Problemaufgaben und Routineaufgaben, die er auf einer „Skala der Problemhaftigkeit“ (S. 7) verortet, d.h., dass Problemaufgaben mehr oder weniger problemhaft und Routineaufgaben mehr oder weniger routinemäßig sein können, in Abhängigkeit vom Aufgabenlösenden und seinen (kognitiven) Voraussetzungen. Eine Aufgabe wird dann zur Problemaufgabe, wenn „das Lösen ein Verständnis der Situation erfordert, um daraus geeignete Schritte zur Verarbeitung der geeigneten Information zu gewinnen“ (Winter, 1994b, S. 7). Probleme sind also von (Routine)aufgaben abzugrenzen, da sie anderer Bewältigungsstrategien bedürfen. (Routine)aufgaben können mithilfe von Algorithmen gelöst werden. Ein Algorithmus „ist ein mehrschrittiger, eindeutig festgelegter Lösungsweg für [eine Aufgabe] bzw. eine ganze Klasse gleichartiger [Aufgaben]; mehrschrittig bedeutet eine (endliche) Folge von elementaren Einzelschritten, eindeutig bedeutet eine bis ins Detail streng festgelegte Vorgehensweise ohne Freiheitsgrade“ (Funke, 2003, S. 28). Beim schriftlichen Dividieren von 20664 durch 56 gibt es bspw. ein festgelegtes Vorgehen, das, bei korrekter Anwendung, zur richtigen Lösung (369) führt.

Für die Lösung von Problemen gibt es solche Algorithmen nicht. Hier kann der Problemlösende lediglich auf Heuristiken zurückgreifen, also „rules of thumb or general plans of actions or strategies“ (Mayer, 1992, S. 178), die nicht zwingend zu einer richtigen Problemlösung führen müssen. Eine Sammlung heuristischer Strategien für die Lösung von Textaufgaben findet sich z.B. bei Polya (1995). In seinem „kleinen Wörterbuch der Heuristik“ erläutert er diverse heuristische Strategien, wie z.B. das Herstellen von Analogien, das Aufstellen von Gleichungen, die Verwendung von sogenannten Hilfsaufgaben oder auch das Anfertigen von Zeichnungen. Ob eine Textaufgabe letztendlich als Problem erachtet werden kann, hängt sowohl von den Aufgabenanforderungen als auch vom Lösenden mitsamt seinem Vorwissen, seinen Fähigkeiten, seinen Einstellungen, etc. ab (Verschaffel et al., 2000). So kann aus problemhaltigen Textaufgaben, genau wie aus allen anderen Problemen, durchaus Routine werden.

Neben der Betrachtung von Textaufgaben hinsichtlich ihres Ausmaßes an Problemhaltigkeit kann eine weitere Differenzierung zwischen Textaufgaben vorgenommen werden. Breidenbach (1969) unterscheidet im Hinblick auf Textaufgaben unterschiedlich schwierige Aufgabenstrukturen. Als leichteste Form nennt er Simplexe, also Aufgaben, die vom Lösenden nur eine Rechenoperation verlangen, wie z.B.

> Mutter putzt die Fenster. Es sind 4 Fenster in der Stube. Jedes Fenster hat 2 Scheiben. Wieviel Scheiben muß Mutter putzen? (S. 182)

Als etwas schwieriger stuft Breidenbach die Mehrfachsimplexe ein, also Aufgaben, die mehrere unabhängige Rechenoperationen verlangen, wie z.B.

> Herr Bartels fährt mit seinem Kleinwagen von Hannover nach Hamburg (160 km) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/Std.
>
> a) Wieviel Stunden beträgt die Fahrzeit?
>
> b) Unterwegs macht er eine halbe Stunde Aufenthalt. Wieviel Stunden und Minuten ist er im ganzen unterwegs?
>
> c) Er ist um 9.15 in Hannover abgefahren. Wann kommt er in Hamburg an? (S. 183)

Als schwierigste Form von Textaufgaben erachtet Breidenbach Komplexe, also Aufgaben, die mindestens zwei Rechenoperationen verlangen, die abhängig voneinander sind, wie z.B.

> Herr Bartels fährt mit seinem Kleinwagen von Hannover nach Hamburg (160 km) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/Std. Er bricht um 9.15 Uhr auf. In Uelzen besucht er einen Freund. Dadurch hat er eine halbe Stunde Aufenthalt. Wann kommt er in Hamburg an? (S. 186)

Die problemhaltigen Textaufgaben sind den Komplexen zuzuordnen. Wichtig ist an dieser Stelle, dass es sich beim Lösen dieser Aufgaben jedoch nicht um komplexes Problemlösen im Sinne von z.B. Frensch und Funke (1995) handelt, welches folgendermaßen beschrieben werden kann:

> Given state, goal state, and barriers between given state and goal state are complex, change dynamically during problem solving, and are intransparent. The exact properties of the given state, goal state, and barriers are unknown to the solver at the outset.” (S.18)

Zur Lösung mathematischer Problemstellungen werden unterschiedliche Problemlösemodelle diskutiert. Z.B. unterscheidet Polya (1995) vier Phasen der Problemlösung: Verstehen der Aufgabe, Ausdenken eines Plans, Ausführend des Plans und Rückschau halten (zur näheren Erläuterung s. Kapitel 8.4, S. 67). Darüber hinaus lassen sich verschiedene andere Modelle ausfindig machen, die sich der Beschreibung bzw. Analyse der Lösungen umfassenderer mathematischer Problemstellungen, z.B. in Form mathematischer Modellierungsaufgaben, widmen.

2.3 Mathematische Modellierung und Modellierungskreisläufe

Eine einheitliche Definition mathematischer Modellierung scheint es nicht zu geben (Kaiser & Sriraman, 2006). Der Begriff wird vielfach verwendet, z.B. in Bezug auf die Durchführung mathematischer Simulationen, das Generieren externer Repräsentationen während der Problemlösung oder auch das Lösen von Textaufgaben (English, 2010). Mehrfach findet sich die Auffassung, dass mathematische Modellierung das Lösen außermathematischer Probleme mithilfe mathematischer Modelle beschreibt (z.B. Pollak, 1979; Kaiser-Meßmer, 1986; Verschaffel et al., 2000; Borromeo Ferri, 2007; Eck, Garcke, & Knabner, 2008). Folgende Aufgabe gehört z.B. zu jenen Aufgaben:

> In der Bremer Bucht wurde 1884 direkt bei der Küste der 30,7 m hohe Leuchtturm ‚Roter Sand’ gebaut. Er sollte Schiffe durch sein Leuchtfeuer davor warnen, dass sie sich der Küste näher[n]. Wie weit war ein Schiff ungefähr von der Küste noch entfernt, wenn es zum ersten Mal den Leuchtturm sah? (Runde auf ganze km). (DISUM, 2005; zitiert nach Borromeo Ferri, 2011, S. 76)

Nach Schneeberger (2009) kann auch das „Verstehen und Lösen von anspruchsvollen Textaufgaben, eingebettet in eine Kultur des Problemlösens, … als Mathematisierung bzw. Modellierung bezeichnet [werden]“ (S. 21).

Gemeinsamer Bestandteil der verschiedenen Auffassungen mathematischer Modellierung ist das mathematische Modell. Mathematische Modelle bezeichnen „einen innermathematischen (in der Regel arithmetischen) Zusammenhang …, der seinerseits in Worten, Symbolen, Graphiken dargestellt ist und der als eine Interpretation, als ein (mathematisches) Deutungsmuster eines realen Phänomenbereichs dient“ (Winter, 1994a, S. 31).

Generell wird also zwischen einem Original und einem Modell unterschieden (Stachowiak, 1973). Stachowiak unterscheidet drei Hauptmerkmale eines Modells (S. 131 ff. Hervorhebung im Original):

1. Abbildungsmerkmal: „*Modelle sind stets Modelle* von etwas, *nämlich Abbildungen, Repräsentationen natürlicher oder künstlicher Originale, die selbst wieder Modelle sein können.*“
2. Verkürzungsmerkmal: „*Modelle erfassen im allgemeinen* nicht alle *Attribute des durch sie repräsentierten Originales, sondern nur solche, die den jeweiligen Modellerschaffern und/oder Modellnutzern relevant scheinen.*“
3. Pragmatisches Merkmal: „*Modelle sind ihren Originalen nicht per se eindeutig zugeordnet. Sie erfüllen ihre Ersetzungsfunktionen a) für* bestimmte – *erkennende und/oder handelnde, modellbenutzende* – Subjekte, *b) innerhalb* bestimmter Zeitintervalle *und c) unter Einschränkung auf* bestimmte gedankliche oder tatsächliche Operationen.“

Das mathematische Modell beinhaltet also bestimmte Elemente der Originalsituation, im besten Fall jene, die für die Aufgabenbewältigung relevant sind. Somit wird der Fokus durch den Aufgabenlösenden auf ausgewählte Aspekte des Originals gelegt.

Bei mathematischen Modellen werden u.a. deskriptive und normative Modelle unterschieden (Blum & Niss, 1991). Deskriptive Modelle sollen die Realität möglichst genau abbilden (Maaß, 2004), sie sind jedoch meist Idealisierungen, Vereinfachungen oder Schematisierungen des Originals. Bei einem Globus handelt es sich bspw. um ein deskriptives Modell der Erde. Normative Modelle hingegen dienen als Vorbild und nicht als Abbild des Originals (Greefrath, 2010). Sie werden z.B. für die Berechnung von Gehältern unter Berücksichtigung diverser Einflussgrößen wie Steuerklassen, Anzahl der Arbeitsstunden, etc. verwendet.

Die Bearbeitung mathematischer Modellierungsaufgaben wird meist in Form eines idealtypischen Kreislaufes schematisiert, der mehrere Phasen beinhaltet. Damit das Lösungsvorgehen als erfolgreich gilt, müssen diese verschiedenen Phasen vom Lösenden durchlaufen werden (Borromeo Ferri, 2011). Die Abfolge der Phasen ist jedoch nicht festgelegt, der Lösenden kann zwischen den verschiedenen Phasen „beliebig“ hin- und herspringen, indem er z.B. von der aufgestellten Gleichung zurück zum Text geht um etwas nachzulesen.

Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Erläuterung verschiedener mathematischer Modellierungskreisläufe soll an dieser Stelle kurz auf die einzelnen (möglichen) Phasen eingegangen werden. Als Grundlage dient der Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (2005, s. Abbildung 1), da dieser am ausdifferenziertesten zu sein scheint und somit alle Phasen aufweist, die in den nachfolgend dargestellten Modellierungskreisläufen (teilweise) vorkommen.

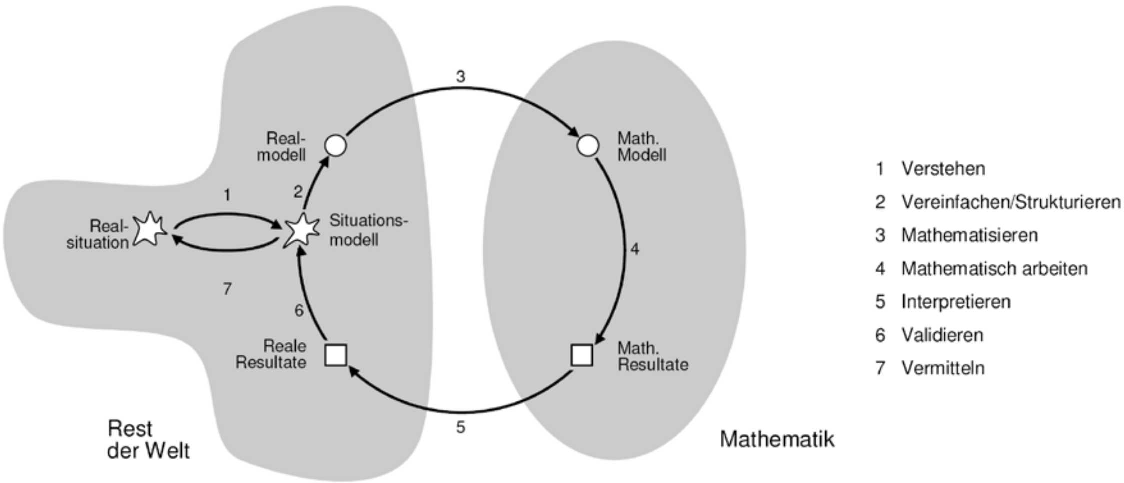

Abbildung 1: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005, S. 19).

Generell wird davon ausgegangen, dass sich der Prozess des mathematischen Modellierens über zwei „Welten“ erstreckt: der realen Welt und der Welt der Mathematik (z.B. Pollak, 1979; Burkhardt, 1981, Lesh & Doer, 2003).

Ausgangspunkt jedes Modellierungskreislaufes bildet stets eine Problemstellung, eine (möglichst) echte Situation. Dabei kann es sich z.B. um eine Modellierungs- oder Anwendungsaufgabe, aber auch um eine Textaufgabe handeln. Die Problemstellung muss zunächst vom Lösenden verstanden werden, ein Situationsmodell wird konstruiert (Blum & Leiß, 2007). Dabei handelt es sich um eine ganzheitliche Repräsentation, die durch die Integration der im Text enthaltenen Informationen mit bereits vorhandenem Wissen des Lösenden konstruiert wird (vgl. van Dijk & Kintsch, 1983). Danach wird die verstandene Situation vereinfacht, strukturiert und präzisiert (Blum & Niss, 1991), was in der Konstruktion eines Realmodells mündet. Dieses wird anschließend in ein mathematisches Modell überführt. Die beschriebene Ausgangssituation wird also in die „mathematische Sprache“ übersetzt, z.B. durch Aufschreiben einer Rechnung (Franke & Ruwisch, 2010, S. 75). Das Lösen des mathematischen Modells resultiert in einen bzw. mehreren mathematischen Ergebnissen (Franke & Ruwisch, 2010). Diese werden in einem weiteren Schritt interpretiert, also zurückübersetzt in die echte Welt, wodurch sie zu realen Resultaten werden (Blum & Leiß, 2007). Diese werden anschließend validiert, d.h., es wird z.B. anhand von eigenen Erfahrungen überprüft, ob sie plausibel erscheinen (Franke & Ruwisch, 2010). Werden die Resultate als nicht richtig oder nicht sinnvoll erachtet, so wird der Modellierungskreislauf erneut durchlaufen. Scheinen sie jedoch richtig und sinnvoll, so werden die realen Resultate in einem letzten Schritt noch dargelegt, was klassischerweise in Form eines Antwortsatzes geschieht (Franke & Ruwisch, 2010).

Genauso wie es keine einheitliche Definition von mathematischer Modellierung gibt, so lässt sich auch kein einheitlicher, idealtypischer mathematischer Modellierungskreislauf finden. Je nach Auffassung von mathematischer Modellierung, und damit einhergehend der Art von Aufgabenstellung, ergeben sich diverse Darstellungen (vgl. Borromeo Ferri, 2006). Borromeo Ferri (2006) unterscheidet hier vier verschiedene Auffassungen von mathematischer Modellierung, und damit einhergehend vier verschiedene Darstellungen idealtypischer Modellierungskreisläufe, auf die im Nachfolgenden eingegangen werden soll.

1. *Mathematische Modellierung wird vor dem Hintergrund angewandter Mathematik verstanden.*

Vertreter dieser Auffassung, allen voran Henry Pollak, verwenden meist realistische und komplexe Problemstellungen als Ausgangpunkt und postulieren keinen zusätzlichen Schritt zwischen der realen Situation und dem mathematischen Modell (Borromeo Ferri, 2006), d.h. aus der realen Situation wird direkt ein mathematisches Modell abgeleitet: „In applied mathematics, typically one does not distinguish a real-world model from a mathematical model, but the transition from a real life situation into a mathematical problem is regarded as the core of modelling” (Kaiser & Schwarz, 2006, S. 197). Es geht letztendlich darum, die reale Welt mithilfe der mathematischen Modellierung besser zu verstehen (Pollak, 1979). Die Problemstellung wird hier bereits durch die „Brille“ der Mathematik bzw. der zur Verfügung stehenden mathematischen Werkzeuge wahrgenommen (Borromeo Ferri, 2011). Der Modellierungskreislauf von Henry Pollak als Beispiel für einen Modellierungskreislauf basierend auf dieser ersten Auffassung von mathematischer Modellierung findet sich in Abbildung 2. Pollak (1979) geht davon aus, dass die gesamte Mathematik zwei interagierende Subsysteme beinhaltet: die klassische angewandte Mathematik und die anwendbare Mathematik. Die reale Welt (bei Pollak „rest of the world“) kann mithilfe dieser beiden Subsysteme modelliert werden.

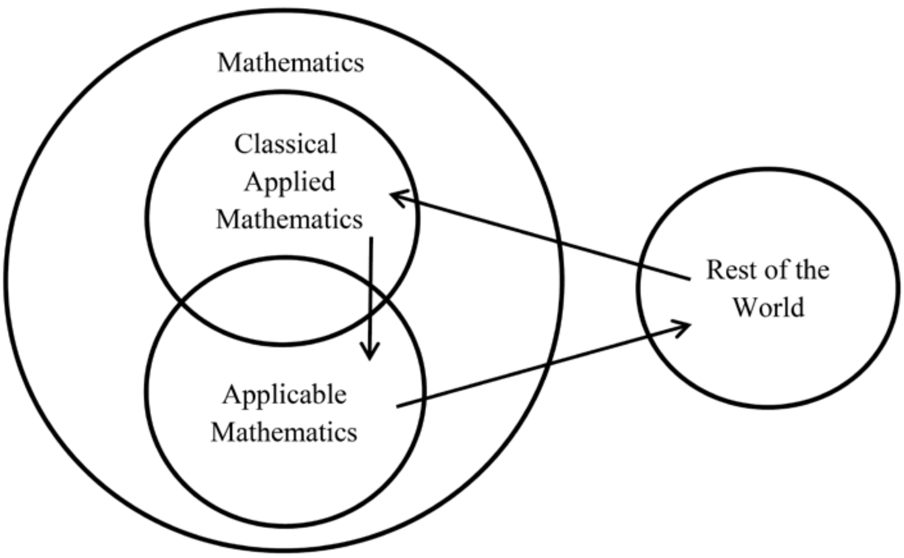

Abbildung 2: Modellierungskreislauf nach Pollak (1979, S. 233).

2. *Mathematische Modellierung wird vor dem Hintergrund ihrer Anwendung als Hilfestellung für den Mathematikunterricht verstanden.*

Die Vertreter dieser Auffassung (z.B. Blum, 1985; Kaiser, 1995; Maaß, 2004) plädieren für eine Vereinfachung von Modellierungskreisläufen mit dem Ziel des ökonomischen und verständlichen Einsatzes „als metakognitive Hilfe für Lernende“ (Borromeo Ferri, 2011, S. 16). Der Modellierungskreislauf von Maaß (2004) als Beispiel für einen Modellierungskreislauf basierend auf dieser zweiten Auffassung von mathematischer Modellierung findet sich in Abbildung 3. Maaß wollte damit ein schematisches Modell für den prototypischen Ablauf bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben schaffen, das im Unterricht der Sekundarstufe I einsetzbar, also für die Schüler verständlich und nachvollziehbar, ist.

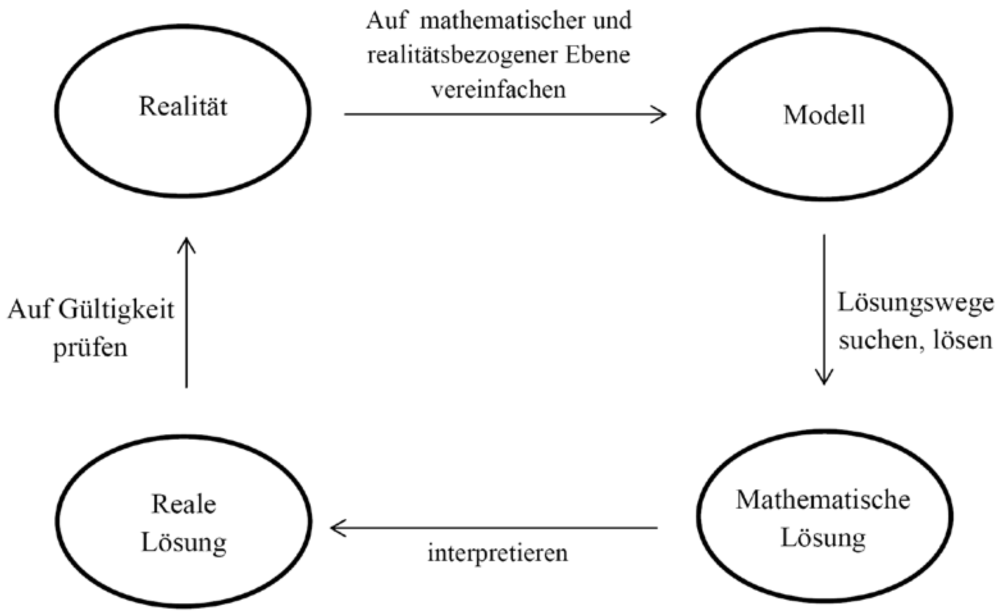

Abbildung 3: Modifizierter Modellierungskreislauf nach Maaß (2004, S. 290).

3. *Mathematische Modellierung wird vor dem Hintergrund des (individuellen) Lösungsprozesses bei der Bearbeitung von Textaufgaben verstanden.*

Vertreter dieser Richtung (z.B. Kintsch & Greeno, 1985; Reusser, 1990, Verschaffel et. al, 2000; Nesher, Hershkowitz, & Novotna 2003) gehen der Frage nach, wie Individuen Textaufgaben, meist im Sinne von Nichtmodellierungsaufgaben, lösen (Borromeo Ferri, 2011). Spezifisch für diese Modellierungskreisläufe die ist Phase der Konstruktion eines

Situationsmodells. Dieses wird hier nicht explizit vom Realmodell getrennt, beide verschmelzen also zu einer Phase im Modellierungskreislauf (Borromeo Ferri, 2006). Blum und Niss (1991) erklären dies mit der geringen Komplexität von Textaufgaben. Ihrer Ansicht nach gibt es bei Textaufgaben eine abgekürzte, eingeschränkte Verbindung zwischen der „realen“ Situation und dem mathematischen Modell, da mathematische Problemstellungen hier durch einen Text nur „verschleiert“ werden. Bei den in Textaufgaben beschriebenen Situationen handelt es sich also bereits um vereinfachte Darstellungen der Realität (Borromeo Ferri, 2011). Der Modellierungskreislauf von Verschaffel und Kollegen (2000) als Beispiel für einen Modellierungskreislauf basierend auf dieser dritten Auffassung von mathematischer Modellierung findet sich Abbildung 4. Da dieser Modellierungskreislauf die Grundlage der vorliegenden Arbeit bildet, wird er in Kapitel 8.4.1 (S. 69) detailliert beschrieben.

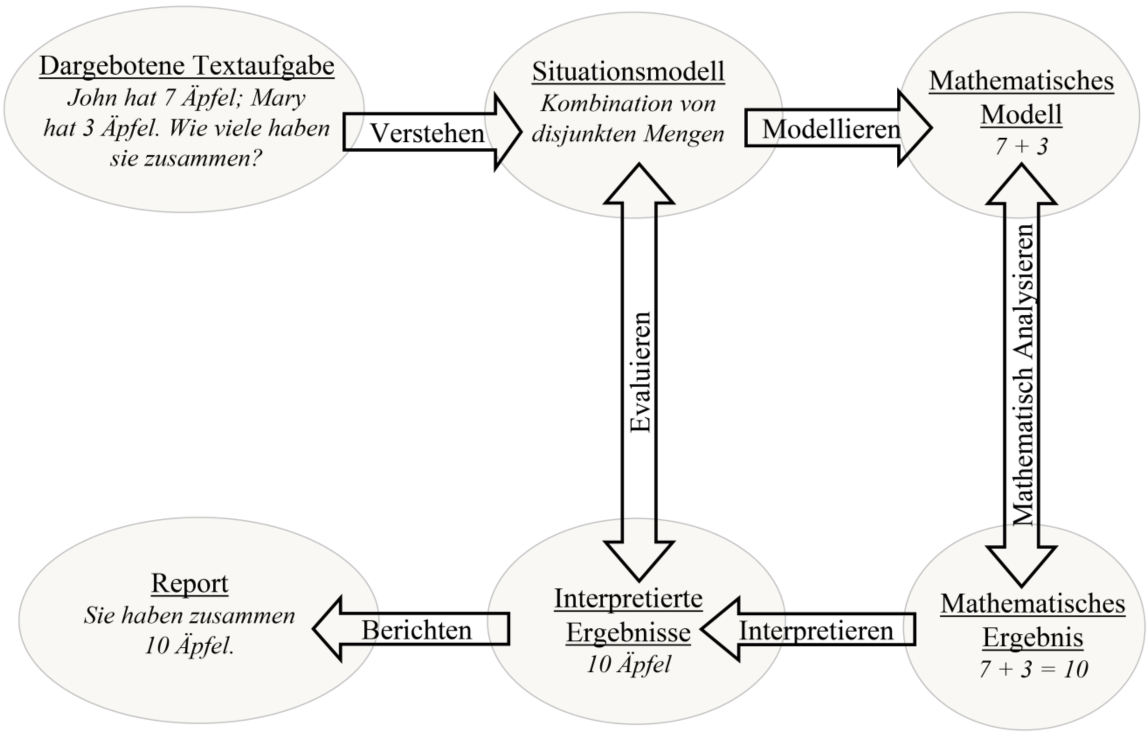

Abbildung 4: Exemplarische Darstellung des Modellierungskreislaufs nach Verschaffel, Greer, & De Corte (2000, vgl. S. 134).

4. *Mathematische Modellierung wird vor dem Hintergrund des (individuellen) Lösungsprozesses bei der Bearbeitung von (komplexen) Modellierungsaufgaben verstanden.*

Das in den Modellierungskreislauf zur Beschreibung von (individuellen) Lösungsprozessen bei der Bearbeitung von Textaufgaben integrierte Situationsmodell wurde in letzter Zeit auch in Modellierungskreisläufe aufgenommen, die sich mit dem Lösen (komplexer) Modellierungsaufgaben (im Gegensatz zu „einfachen“ Textaufgaben) befassen (Borromeo Ferri, 2011). Das Situationsmodell wird hier als eigenständige Phase zwischen der realen Situation und dem realen Modell angesehen. Dabei wird das Situationsmodell als eine der wichtigsten Phasen, wenn nicht sogar als wichtigste Phase, im Modellierungsprozess erachtet (Borromeo Ferri, 2011). Zu den Vertretern dieser Richtung zählen u.a. Blum und Leiß (2005). Deren Modellierungskreislauf als Beispiel für einen Modellierungskreislauf basierend auf dieser vierten Auffassung von mathematischer Modellierung findet sich in Abbildung 1 (S. 16).

Nach Borromeo Ferri (2011) eignen sich die Modellierungskreisläufe, die vor dem Hintergrund des (individuellen) Lösungsprozesses bei der Bearbeitung von sowohl Textaufgaben als auch (komplexen) Modellierungsaufgaben dargestellt wurden, „in hervorragender Weise zur Analyse tatsächlicher Modellierungsprozesse beziehungsweise zur Aufschlüsselung der Bearbeitung von Textaufgaben“ (S. 21). Im Einklang damit wird in der vorliegenden Arbeit der Modellierungskreislauf von Verschaffel und Kollegen (2000) als Analysegrundlage verwendet.

2.4 Textaufgaben als Modellierungsaufgaben?

Ob Textaufgaben als mathematische Modellierungsaufgaben angesehen werden können, wird in der Literatur kontrovers diskutiert. Pollak (1969) sieht in Textaufgaben keine Modellierungs- oder Anwendungsaufgaben, denn es handele sich dabei lediglich um „simple specific problems whose solution require[s] only the direct translation of the story into mathematical terms and the application of standard mathematical technique” (S. 398).

Blum und Niss (1991) sehen in der Bearbeitung von Textaufgaben einen verkürzten Modellierungsprozess. Dies führen sie auf die geringere Komplexität von Textaufgaben im Gegensatz zu Modellierungsaufgaben zurück.

Galbraith (2007) sieht zwar Ähnlichkeiten zwischen Text- und Modellierungsaufgaben, teilt jedoch den Standpunkt, dass mathematische Modellierungsaufgaben nicht dasselbe sind wie Textaufgaben. Seiner Meinung nach fehlten letzteren meist die Sinnhaftigkeit und der Bezug zur Realität.

Winter hingegen sieht im Modellieren bzw. in der Modellbildung das „Herzstück des Sachrechnens“ (1994b, S. 32). Er lehnt zwar Textaufgaben in der Funktion als Routineaufgaben ab, geht aber davon aus, dass Text- bzw. Problemaufgaben durchaus das Potential haben, als Ausgangsposition für das mathematische Modellieren fungieren zu können. Dabei sei die Modellbildung „ein konstruktiver, ein kreativer Akt“ (Winter, 1994b, S. 32). Das mathematische Modell wird nicht mit der gegebenen Situation mitgeliefert, sondern muss erschlossen, konstruiert werden. Somit handelt es sich beim mathematischen Modellieren bzw. Mathematisieren der Situation um einen Problemlöseprozess (Winter, 1994a). Die Modellbildung wird wiederum vom Lösenden selbst beeinflusst, speziell durch dessen Vorwissen im Sinne von Wissen über Begriffe, Symbole, mathematische Prozeduren, etc. (Winter, 1994a).

Auch Verschaffel und Kollegen sehen in Textaufgaben Modellierungsaufgaben: „Even the simplest word problem can be viewed as a modeling exercise” (Verschaffel et al., 2000, S. 134). Ihrer Auffassung nach sind Textaufgaben nicht als künstliche, puzzelähnliche Aufgaben konzipiert, die immer eindeutig durch die Verarbeitung der gegebenen Zahlen mithilfe einer bzw. mehrerer der vier Grundrechenarten gelöst werden können. Vielmehr handele es sich um echte Übungen mathematischen Modellierens. Die Ansicht, die Verschaffel und Kollegen vertreten, scheint mit der Definition problemhaltiger Textaufgaben gut vereinbar.

Franke und Ruwisch (2010) sehen in Textaufgaben ebenfalls Modellierungsaufgaben, sofern die Aufgabenstellung für den Lösenden in der Tat eine Problemstellung darstellt. In diesem Fall sind Textaufgaben also nicht nur Modellierungsaufgaben sondern auch Problemlöseaufgaben.

Die vorliegende Arbeit schließt sich den letztgenannten Betrachtungsweisen an und erachtet problemhaltige Textaufgaben als Modellierungsaufgaben, da davon ausgegangen wird, dass sie für die Schüler keine Routineaufgaben darstellen und deswegen nicht mithilfe von Algorithmen gelöst werden können. Zur erfolgreichen Aufgabenbewältigung muss also ein mathematisches Modell vom Lösenden selbst konstruiert werden.

2.5 Die Kognitionspsychologische Sicht auf Mathematische Modellierung

Mathematische Modellierung kann unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden. Die kognitive bzw. kognitionspsychologische Betrachtung mathematischer Modellierung stellt ein noch sehr junges Feld dar (Kaiser & Sriraman, 2006). Mathematische Modellierungsprozesse werden hier weniger normativ als vielmehr deskriptiv betrachtet, da im Vordergrund die Rekonstruktion individueller Modellierungsrouten (mit all ihren Hürden und Schwierigkeiten) steht (Kaiser & Sriraman, 2006).

Eine Studie, die sich in diesem Forschungszweig verorten lässt, stammt von Treilibs, Burkhardt und Low (1980). Sie ermittelten u.a. anhand von zwei Modellierungsaufgaben die 16 besten und die 16 schwächsten Modellierer unter 115 17-jährigen Schülern mit hohen mathematischen Fähigkeiten. In Gruppen von je 4 Schülern sollten innerhalb einer Stunde zwei Modellierungsaufgaben gelöst werden. Das Vorgehen der einzelnen Gruppen wurde audiographiert und durch einen Beobachter festgehalten. Anschließend wurden die Prozesse der Schüler mithilfe eines Kategoriensystems ausgewertet und mittels sogenannter „Flowcharts“ rekonstruiert. Die Vergleiche der „Flowcharts“ über die beiden Fähigkeitsgruppen ergaben z.B., dass gute Modellierer stringenter vorgehen als schwache Modellierer, die sich eher in Details verlieren.

Eine weitere qualitative Untersuchung mathematischer Modellierungsprozesse unter kognitionspsychologischer Betrachtung hat Borromeo Ferri (2011) vorgelegt. Darin untersuchte sie bei 35 Schülern der 10. Klassen (Gymnasium) und ihren Lehrern mithilfe von Fragebögen, Interviews, Unterrichtsvideographie und Audiographie u.a. „inwieweit mathematische Denkstile sich als Einflussfaktor auf Modellierungsprozesse von Individuen und Gruppen im Mathematikunterricht auswirken“ (S. 169). Es konnte z.B. gezeigt werden, dass Schüler mit einem eher analytischen Denkstil relativ schnell von der realen Situation in die Mathematik wechseln, Schüler mit einem eher visuellen Denkstil bilden jedoch zunächst ein reales Modell unter Verwendung bildlichen Vorstellungen bevor sie beginnen, zu mathematisieren. Darüber hinaus konnte Borromeo Ferri „Minikreisläufe“ identifizieren (2011). Dabei werden mehrere mathematische Modelle konstruiert, wobei ein mathematisches Ergebnis (Zwischenergebnisse) als Ausgangpunkt für die Konstruktion eines darauf aufbauenden mathematischen Modells dient.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur kognitionspsychologischen Sicht auf mathematische Modellierungsprozesse leisten, indem die individuellen Lösungsprozesse von Schülern verschiedener Klassenstufen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben im Hinblick auf selbstgenerierte Repräsentationen untersucht werden sollen.

Da sowohl Grundschüler als auch Gymnasiasten betrachtet und auch miteinander verglichen werden, erfolgt anschließend ein kurzer Überblick über kognitive Entwicklungsprozesse. Dies ist deshalb wichtig, da sich die Schüler der beiden Schulformen grundlegend hinsichtlich ihrer kognitiven Entwicklung unterscheiden sollten und dies sicherlich einen Einfluss auf deren Lösungsvorgehen bei der Bearbeitung der problemhaltigen Textaufgaben hat.

2.6 Exkurs: Kognitive Entwicklung

Kognitive Entwicklungsprozesse können anhand verschiedener theoretischer Ansätze erläutert werden (z.B. Piagets Theorie, soziokulturelle Theorien, Theorien des Kernwissens). An dieser Stelle soll sich lediglich auf den Informationsverarbeitungsansatz bezogen werden. Dessen Vertreter gehen davon aus, dass sich kognitive Entwicklungen vor allem auf Basis von vier Veränderungsmechanismen vollziehen: *Automatisierung*, *Kodierung*, *Generalisierung* und *Strategieentwicklung* (Siegler, 2001).

Automatisierung bezieht sich auf den Umstand, dass mit steigendem Alter geistige Prozesse immer häufiger ausgeführt werden, wodurch sie schließlich automatisch, also ohne viel Aufmerksamkeit, ablaufen. Dadurch werden Kapazitäten frei, die für die Verarbeitung anderer Informationen verwendet werden können (Strauss, 2000). Aufgrund dessen können Schüler höherer Klassenstufen z.B. effiziente Rechenstrategien anwenden oder auch Ergebnisse einfacher Rechnungen aus dem Gedächtnis abrufen. Dies ist Schülern niedrigerer Klassenstufen noch nicht möglich, sie müssen bspw. auf Zählstrategien zurückgreifen.

Kodierung bezieht sich darauf, „die informativsten Eigenschaften von Objekten und Ereignissen zu erkennen und diese Eigenschaften zu nutzen, um sich ein gedankliches

Bild von ihnen zu machen“ (Sieger, 2001, S. 11). Dies ist auch beim Lösen von Textaufgaben bedeutsam, denn dadurch können irrelevante Informationen von relevanten unterschieden werden und nur letztere werden kodiert.

Generalisierung beschreibt den Transfer von Wissen, also dessen Übertragung von einem Kontext auf einen anderen. Schüler höherer Klassenstufen sind also in der Lage bestimmte Lösungsstrategien (z.B. das Aufstellen eines Gleichungssystems) auf unterschiedlichste Aufgaben anzuwenden. Auch ist ihnen eine größere Bandbreite von Aufgaben- oder Problemstellungen bereits bekannt.

Strategieentwicklung beschreibt die Entdeckung bisher unbekannter Vorgehensweisen, wodurch bspw. Probleme bewältigt werden können. Schüler höherer Klassenstufen verfügen also im Vergleich zu Schülern niedrigerer Klassenstufen über ein breiteres Repertoire von Lösungsstrategien.

3. REPRÄSENTATIONEN

„Ich nehme das [Depiktionen] immer als letzte Möglichkeit wenn ich nicht mehr weiter weiß.“

Eine Repräsentation ist in erster Linie etwas, das für etwas anderes steht (Palmer, 1978). D.h., es existiert ein zu repräsentierender Inhalt, der mittels Abbildungsrelation in eine Repräsentation des Inhalts überführt wird (Schnotz, 1996). Eine Repräsentation ist somit ein Modell des zu repräsentierenden Inhalts bzw. der zu repräsentierenden Dinge (Palmer, 1978). Die Abbildungsrelation ist eine Art Code oder Übersetzungsregel, wodurch festgelegt wird, auf welche Art und Weise einzelne Eigenschaften des zu repräsentierenden Inhalts widergespiegelt werden (Schnotz, 1996). Dabei muss es sich nicht um eine 1:1-Übersetzung handeln, d.h., die Repräsentation muss nicht alle Elemente des zu repräsentierenden Inhalts aufweisen: „The job of the representing world is to reflect some aspects of the represented world in some fashion. Not all aspects of the represented world need to be modeled; not all aspekts of the representing world need to model an aspect of the represented world” (Palmer, 1978, S. 262). Zur genaueren Spezifizierung von Repräsentationen schlägt Palmer (1978) fünf Kriterien vor, die nachfolgend anhand eines Beispiels erläutert werden sollen. Zur besseren Veranschaulichung siehe Abbildung 5.

1. Es muss erläutert werden, worum es sich beim zu repräsentierenden Inhalt handelt, also was der Originalinhalt ist.

   Es werden vier verschiedene Bäume betrachtet.

2. Es muss erläutert werden, worum es sich beim repräsentierenden Inhalt handelt, also was die Repräsentation des Originalinhalts ist.

   Jeder zu betrachtende Baum wird lediglich durch eine vertikale Linie schematisch dargestellt.

3. Es muss erläutert werden, welche Aspekte des Originalinhalts modelliert werden.

   Bei den vier verschiedenen Bäumen wird nur deren Höhe modelliert. Es interessiert also nicht, wie alt die Bäume sind, welchen Umfang die Baumstämme haben, ob es sich um Laub- oder Nadelbäume handelt, etc.

4. Es muss erläutert werden, durch welche Aspekte der Repräsentation der Originalinhalt modelliert wird.

   Das Modellieren der Baumhöhe erfolgt durch die Länge der jeweiligen vertikalen Linien.

5. Es muss erläutert werden, wie die Entsprechungen zwischen Originalinhalt und Repräsentation des Originalinhalts aussehen. Ohne diese sogenannten operationalen Relationen kann eine Repräsentation bedeutungslos erscheinen, weil nicht erkannt werden kann, welche Bedeutung bzw. welchen Sinn die Repräsentation hat.

   Eine längere vertikale Linie steht für eine größere Baumhöhe.[3]

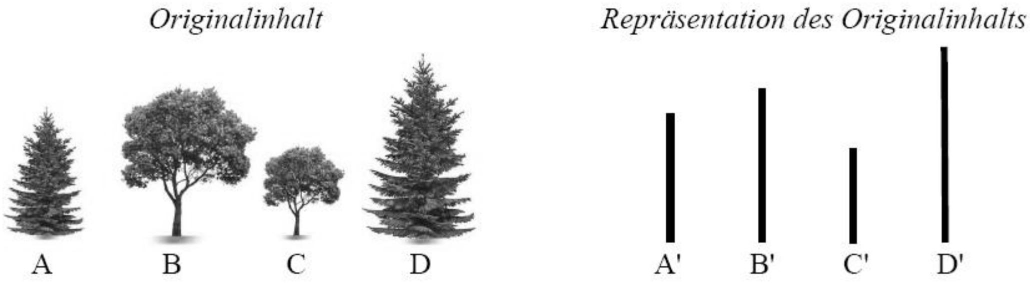

Abbildung 5: Beispiel zur Veranschaulichung der Spezifizierungen von Repräsentationen nach Palmer (1978).

Beachtet werden muss an dieser Stelle, dass die Bäume im Beispiel keine „echten" Bäume sind. Der Originalinhalt ist hier also auch schon eine Repräsentation eines anderen Originals, wie z.B. echter Bäume in einem Park.

Ein Originalinhalt kann auf verschiedene Art und Weise repräsentiert werden, d.h., zu einem Original kann es mehrere, unterschiedliche Repräsentationen geben (Palmer, 1978).

[3] Dass die Länge der vertikalen Linie die Baumhöhe abbildet, ist intuitiv sehr eingänglich. Alternativ hätte die Baumhöhe auch über z.B. den Durchmesser von Kreisen oder verschiedenfarbige Punkte repräsentiert werden können. Wird dann nicht erläutert, dass ein größerer Kreisdurchmesser oder aber ein hellerer Punkt mit einer größeren Baumhöhe einhergeht, kann dieser Zusammenhang nicht automatisch erkannt werden. Die Bedeutung der Repräsentation wird dann u.U. nicht erkannt.

Diese Unterschiedlichkeit kann entweder auf verschiedene repräsentierte Relationen zurückgeführt werden (*nicht äquivalente Repräsentationen*) oder darauf, dass dieselben Relationen auf unterschiedliche Weise modelliert werden (*informational äquivalente Repräsentationen*); Repräsentationen, bei denen dieselben Relationen auf dieselbe Art und Weise dargestellt werden, bezeichnet man als *komplett äquivalente Repräsentationen* (Palmer, 1978). Für das Baumhöhenbeispiel bedeutet das Folgendes:

Nicht äquivalente Repräsentationen: Eine Repräsentation A' bildet bspw. die Höhe der Bäume ab und eine Repräsentation B' die Umfänge der Baumstämme. Die beiden Repräsentationen bilden somit unterschiedliche Informationen ab und sind deshalb nicht gleich gut geeignet um bspw. dieselbe Frage zu beantworten. Mithilfe von Repräsentation B' kann z.B. nicht beantwortet werden, welcher Baum der höchste ist.

Informational äquivalente Repräsentationen: Eine Repräsentation A' bildet die Höhe der Bäume auf eine Art a' ab und eine Repräsentation B' auf eine Art b'. Sie repräsentieren also dieselbe Information, nur in unterschiedlicher Form. So könnte eine Repräsentation A' die Höhe der Bäume wie in Abbildung 5 repräsentieren (vertikalen Linien, wobei längere Linien für eine größere Baumhöhe stehen), die Repräsentation B' könnte dieselbe Information in Form von unterschiedlichen großen Kreisen repräsentieren, wobei bspw. ein größerer Kreisdurchmesser für einen höheren Baum steht.

Komplett äquivalente Repräsentationen: Eine Repräsentation A' bildet die Höhe der Bäume auf dieselbe Art und Weise ab wie eine Repräsentation B'. Beide Repräsentationen bilden hier also die Höhe der Bäume bspw. mithilfe von vertikalen Linien ab, wobei längere Linien für eine größere Baumhöhe stehen.

Natürlich kann mithilfe einer Repräsentation mehr als nur ein Aspekt des Originalinhalts modelliert werden, was in der Realität auch meist der Fall ist. Solche Repräsentationen werden dann als *komplex* bezeichnet (Palmer, 1978). Dies ist z.B. bei Landkarten der Fall. Hier werden Städte durch Punkte repräsentiert, wobei größere Punkte für größere Städte stehen. Die Lage der Städte zueinander wird durch die Lage der Punkte zueinander abgebildet. Die physische Beschaffenheit einer Region oder eine Landes wird über verschiedene Farbgebungen repräsentiert, die unterschiedliche Landeshöhen darstellen oder aber auch Meerestiefen, etc.

Im Allgemeinen kann zwischen verschiedenen Repräsentationsformen unterschieden werden. Im Nachfolgenden werden jene näher erläutert, die im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit berücksichtigt wurden. Eine solche Einteilung findet sich z.B. bei Schnotz (2005), welcher zum einen zwischen internen und externen, und zum anderen zwischen deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationen differenziert.

3.1 Externe Repräsentationen

Externe Repräsentationen sind direkt beobachtbare, unmittelbar wahrnehmbare Gestaltungsstrukturen, wie z.B. Worte, Bilder, Gleichungen, Diagramme, etc. Schreibt ein Schüler also eine Rechnung auf oder fertigt er eine Skizze an, handelt es sich dabei um externe Repräsentationen, da sie direkt beobachtbar sind.

Die Konstruktion von Repräsentationen kann aus zweierlei Gründen geschehen: Repräsentationen werden erstens zur ausschließlichen persönlichen Nutzung externalisiert oder zweitens im Hinblick auf den Austausch mit anderen. Die Konstruktionsursache hat Konsequenzen für die „Qualität“ der externen Repräsentation. Repräsentationen, die ausschließlich zur persönlichen Nutzung externalisiert werden, können weniger genau sein im Bezug auf ihre Beschriftung und Exaktheit (Cox, 1999). Auch ist hier eine nur teilweise Externalisierung möglich (Cox, 1999). Die Konstruktion einer Repräsentation zur persönlichen Nutzung kann auch als Möglichkeit einer Kommunikation mit sich selbst betrachtet werden: Das Individuum wechselt hier immer wieder zwischen seiner Rolle als Zeichenproduzent und -empfänger (Schnotz, Baadte, Müller, & Rasch, 2010). Repräsentationen, die im Hinblick auf den Austausch mit anderen konstruiert werden, sind hingegen genauer im Bezug auf ihre Beschriftung, Konstruktion und vollständige Darstellung. Sie verursachen also mehr „Kosten“ auf Seiten des Repräsentationsproduzenten (Zhang, 1997).

In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus auf Repräsentationen die zur persönlichen Nutzung, also nicht primär zum Austausch mit anderen, konstruiert werden.

Allgemein wird davon ausgegangen, dass externe Repräsentationen kognitive Prozesse unterstützen können. Die Externalisierung mentaler Prozesse, bspw. durch das Aufschreiben einer Gleichung oder das Anfertigen einer Skizze, führt zu einer Entlastung des Arbeitsgedächtnisses (vgl. Sweller, van Merrienboer, & Paas, 1998; Sweller, 2005; Schnotz & Kürschner, 2007). Dadurch gewinnt das Individuum Kapazitäten, die für die Problemlösung und nicht mehr für die „alleinige“ mentale Repräsentation eines komplexen Sachverhalts verwendet werden können.

In diesem Zusammenhang werden weitere Vorteile der Externalisierung interner Prozesse diskutiert, die das Problemlösen erleichtern können, wie z.B. die Reorganisation von gegebenen Informationen, das Explizieren fehlender Informationen, die Steuerung der Aufmerksamkeit oder auch der Selbsterklärungseffekt (Cox, 1999). Darüber hinaus weisen externe Repräsentationen im Vergleich zu internen Repräsentationen (s.u.), die im begrenzten Arbeitsgedächtnis (Baddeley, 2002) gehalten werden müssen, eine höhere Stabilität auf (Schnotz et al., 2010).

Des Weitern kann bei externen Repräsentationen zwischen selbstgenerierten bzw. selbstkonstruierten und fremdgenerierten bzw. fremdkonstruierten Repräsentationen unterschieden werden. Gerade die Konstruktion von und der Umgang mit selbstgenerierten Repräsentationen gilt aus konstruktivistischer Perspektive als bedeutsames Element im Lernprozess (z.B. Papert, 1993). Der Lernende konstruiert hier eine persönliche Version der dargebotenen Informationen auf Basis einer dynamischen Auseinandersetzung mit den internen und externen Modellen (Reisberg, 1987). Schwamborn, Thillmann, Leopold, Sumfleth und Leutner (2010) verglichen den Lernerfolg von Neuntklässler, die sich in unterschiedlichen Bedingungen (Text und Bildpräsentation, Text und Bildgenerierung, Test und Bildgenerierung und Bildpräsentation, nur Text) Wissen über das Thema „Waschen mit Wasser und Seife“ aneignen sollten. Dabei wurden die Schüler explizit zur Nutzung bereits vorhandener Bilder bzw. zur Generierung von Zeichnungen instruiert. Die sowohl selbst- als auch fremdgenerierten Bilder fungierten hier vordergründig als Textverstehenshilfen. Schüler, die Bilder zum Text selbst generieren mussten, schnitten hinsichtlich des Lernerfolgs am besten ab.

3.2 Interne Repräsentationen

Interne Repräsentationen sind mentale Stellvertreter für Gegebenheiten der Umwelt, also innere Vorstellungen (Goldin & Kaput, 1996). Sie werden entweder im direkten Umgang mit der Umwelt gebildet, man liest also bspw. einen Text und konstruiert dabei ein sogenanntes mentales Modell (bzw. ein Situationsmodell), das den Inhalt des Gelesenen, unter Berücksichtigung des Vorwissens des Lesers, abbildet: „a mental model is a representation of the situation described by the text, what the text is about, rather than a representation of the text … itself“ (Glenberg, Meyer, & Lindem, 1987, S. 70). Interne Repräsentationen können aber auch alleine basierend auf Vorwissen, Erfahrungen, Erinnerungen, etc. konstruiert werden, indem man sich bspw. an ein Bild und einzelne Details dessen erinnert, ohne dass man das Bild direkt vor Augen hat.

Interne Repräsentationen sind nicht direkt beobachtbar und können nur über Externalisierung (mehr oder weniger gut und vollständig) erschlossen werden. Das mentale Modell, das der Leser zum Text konstruiert oder auch das Bild mit seinen Details, an das man sich erinnert, kann nur dadurch erschlossen werden, dass eine Person Auskunft über ihre internen Repräsentationen gibt. Hier stellt sich natürlich die Frage, inwieweit diese überhaupt ausgedrückt werden können und dem Bewusstsein zugänglich sind. Jedoch kann davon ausgegangen werden, dass Menschen durchaus dazu in der Lage sind, z.B. indem sie darüber berichten:

> Allerdings darf keine perfekte Übereinstimmung zwischen Gedanken und Verbalisierungen erwartet werden, da zum einen nicht alle bewussten Gedanken verbalisiert werden und zum anderen aufgrund von Routine bzw. Expertise einige Schritte nicht mehr bewusstseinspflichtig sein dürften, somit nicht verbalisiert werden können und unbewusst ablaufen.“ (Betsch, Funke, & Plessner, 2011, S. 193)

Externe Repräsentationen sind jedoch, nur weil sie direkt wahrnehmbar sind, nicht „objektiv“ oder „absolut“ im Gegensatz zu den „subjektiven“, internen Repräsentationen, die nicht direkt wahrnehmbar bzw. beobachtbar sind (Goldin & Kaput, 1996). Denn externe Repräsentationen können nur basierend auf den eigenen internen Repräsentationen des Rezipienten der externen Repräsentationen (z.B. eines Beobachters) verstanden, analysiert, klassifiziert, etc. werden.

Externe und interne Repräsentationen stehen in einer wechselseitigen Beziehung zueinander (Goldin & Kaput, 1996). Externe Repräsentationen können also auf Basis von internen Repräsentationen gebildet werden, interne Repräsentationen wiederum auf Basis von externen. Dabei wird in aller Regel der Inhalt repräsentiert, der im Original bereits vorhanden ist. Wir können einerseits einen Gedanken, den wir haben, aufschreiben oder die Idee für eine Zeichnung in die Tat umsetzen. Andererseits können wir auf Grundlage eines Textes, den wir lesen, eine Vorstellung der beschriebenen Szene entwickeln. Dies geschieht unter Berücksichtigung bereits vorhandener kognitiver Schemata, d.h., Externalisierung und Internalisierung erfolgen auf Basis von bereits vorhandenem Wissen. Das Externalisieren interner Repräsentationen ist hier genauso wenig wie das Internalisieren externer Repräsentationen eine reine 1:1-Übersetzung (Schnotz, 2002).

Sowohl bei den externen als auch bei den internen Repräsentationen kann zudem zwischen graphischen und linguistischen Repräsentationen unterschieden werden (Cox, 1999). Eine solche Differenzierung findet sich auch bei Schnotz (2005), der deskriptionale (beschreibende) und depiktionale (abbildende) Repräsentationsformen unterscheidet. Auf diese beiden Formate soll im Nachfolgenden näher eingegangen werden.

3.3 Deskriptionale Repräsentationen

Deskriptionale Repräsentationen bestehen aus arbiträren Symbolzeichen, wie z.B. Buchstaben, Zahlen, etc. (Schnotz, 2005). Das tatsächliche Aussehen eines Apfels hat bspw. keine Ähnlichkeit mit dem Wort *Apfel*. Gesprochene und geschriebene Sprachen sind weit verbreitete Vertreter deskriptionaler Repräsentationen.

Ferner wird beim Abzählen von Äpfeln eine direkte Verbindung der einzelnen Äpfel mit einer Sequenz von natürlichen, aufeinanderfolgenden Zahlen hergestellt, wobei dem ersten Apfel die natürliche Zahl *1* zugeordnet wird. Auch hier haben die einzelnen Zahlen, oder das Endresultat des Zählvorgangs, keinerlei Ähnlichkeit mit den einzelnen Äpfeln oder der Gesamtmenge an Äpfeln: „The linking is non-iconic: it is not based on similarities between individual numbers and empirical objects“ (Wiese, 2003, S. 386). Die Verbindung zwischen dem zu Repräsentierenden und einer deskriptionalen Repräsentation ist also willkürlich und basiert auf Konventionen (Wiese, 2003). Bei der Konstruktion von Sätzen werden bspw. Nomen verwendet, um Objekte oder Subjekte zu kennzeichnen, Verben und Propositionen hingegen beschreiben Relationen der Objekte oder Subjekte zueinander oder zu wiederum anderen Objekten oder Subjekten (vgl. Schnotz & Bannert, 2003).

Weitere Beispiele für deskriptionale Repräsentationen sind z.B. Rechnungen (5+3=8), oder Gleichungen (8x-5=11) oder auch Formeln ($[a+b]^2=a^2+2ab+b^2$). Darüber hinaus können mathematisch-symbolische Repräsentationen in Kombination mit sprachlich-symbolischen Repräsentationen auftreten. Dies ist z.B. bei mathematischen Textaufgaben der Fall (*Emma hat 8 Bauklötze. Sie hat 3 Bauklötze mehr als Paul. Wie viele Bauklötze hat Paul?*).

3.4 Depiktionale Repräsentationen

Depiktionale Repräsentationen bestehen aus ikonischen Zeichen, wodurch eine Ähnlichkeit oder eine andere strukturelle Gemeinsamkeit zwischen dem zu Repräsentierenden und der Repräsentation erzeugt wird (Schnotz, 2005). Depiktionen können zum einen zweidimensional sein, wie Fotografien, Bilder, Zeichnungen, Skizzen, Landkarten, Strichlisten, Funktionsgrafen, Diagramme, etc. Sie können zum anderen auch dreidimensional sein, wie z.B. Miniaturmodelle von Gebäuden, Skulpturen, etc.

Je nach Verwendungszweck eignen sich deskriptionale und depiktionale Repräsentationen mehr oder weniger gut.

So sind deskriptionale Repräsentationen für das Ausdrücken von Konjunktionen (*und*, *oder*, *allerdings*, etc.), abstrakten Inhalten (*Gerechtigkeit*, *Freiheit*, etc.) oder auch Oberbegriffen (*Tier*, *Pflanze*, etc.) sehr nützlich (vgl. Schnotz, 2005). Auch eigenen sie sich besser zur Darstellung allgemeiner Verneinungen („*Haustiere sind nicht gestattet*“) oder Disjunktionen („*Kreislaufprobleme können durch Nikotingenuss oder Bewegungsmangel bedingt werden*“) (Schnotz, 2003, S. 578). Um jene Begriffe oder Aussagen depiktional zu repräsentieren, bedarf es eines größeren Aufwands in Form von z.B. mehreren Bildern. Darüber hinaus eignen sich depiktionale Repräsentationen zur Darstellung von Mengen nur für einen relativ kleinen Zahlenraum (Wiese, 2003). Eine Strichliste, die aus 12 Strichen besteht, mag noch überschaubar sein, eine Strichliste, die jedoch aus 112 Strichen besteht, nicht mehr.

Depiktionen eigenen sich hingegen gut zur Abbildung von konkreten und spezifischen Inhalten (Schnotz, 2003). Sie haben darüber hinaus den Vorteil informational vollständig zu sein und sind deshalb besser als Grundlage für das Ziehen von Schlussfolgerungen (Schnotz, 2005), da neue Informationen direkt aus der Repräsentation abgelesen werden können: „depictive representations … can be interpreted and manipulated in novel ways" (Kosslyn, 1994, S. 339). Liest man den Satz *„Die Vase steht auf einem Tisch*" kann man keine Aussagen darüber treffen, wo genau die Vase auf dem Tisch steht, wie groß sie in Relation zur Tischplatte ist, etc. Die Abbildung der Vase auf dem Tisch liefert jedoch genau solche Informationen.

Natürlich können unterschiedliche Repräsentationsformen auch miteinander kombiniert werden. Dies wird als multiple Repräsentation(en) bezeichnet. Darunter wird im Nachfolgenden die Kombination von Depiktion und Deskription verstanden, unabhängig davon, ob diese intern und/oder extern repräsentiert werden. Multiple Repräsentationen werden als durchaus hilfreich angesehen zur Unterstützung von kognitiven Prozessen, die beim Lernen neuer Inhalte oder beim Lösen von Problemen ablaufen (Ainsworth, 1999). Dieses Phänomen wird im Bereich des multimedialen Lernens auch als Multimediaprinzip bezeichnet: „People learn more deeply from words and pictures than from words alone" (Mayer, 2005, S. 31). Allerdings werden in diesem Zusammenhang auch Phänomene diskutiert, die einen eher gegenläufigen Trend beschreiben, wonach Lernen mit multiplen Repräsentationen im Sinne von z.B. Text und Bild nicht per se zu besserem Lernerfolg führen muss. So wird bspw. das Kohärenzprinzip beschrieben, wonach die zusätzliche Darbietung interessanter, aber irrelevanter Informationen die Lernleistung beeinträchtigen kann (Moreno & Mayer, 2000). Dies wäre z.B. der Fall, wenn zu einem lernrelevanten Text dekorative Bilder präsentiert würden.

Ferner muss für das Lösen eines Problems nicht starr ein und dieselbe Repräsentationsform verwendet werden. Vielmehr kann zwischen verschiedenen Repräsentationen hin und her gesprungen werden (Cox, 1996), d.h. von einer Repräsentation wird in eine andere übergegangen. Solche Wechsel können einerseits im Hinblick auf die Anforderungen der Aufgabenstellung wohlüberlegt erfolgen („judicious swichting"). Andererseits kann ein Repräsentationswechsel stattfinden, indem eine fehlerhafte oder schlecht konstruierte Repräsentation zugunsten einer adäquateren aufgegeben wird („trashing"). Lesh, Post und Behr (1987) betonen die Bedeutung des

Einsatzes verschiedener Repräsentationsformen: „Good problem solvers tend to be sufficiently flexible in their use of a variety of relevant representational systems that they instinctively switch to the most convenient representation to emphasize at any given point in the solution process" (S. 38). Somit ist nicht jede Repräsentationsform immer gleich effektiv, sie muss zu den Anforderungen der Aufgabenstellung und dem Lösenden passen.

Des Weiteren handelt es sich bei Repräsentationen, genauso wie bei den zu repräsentierenden Inhalten, keineswegs um rein statische „Dinge", sie können auch Inhalte darstellen, die sich über die Zeit verändern (Ainsworth & Van Labeke, 2004). So kann z.B. der Prozess der Klimaveränderung in den letzten Jahrzehnten mithilfe einer Animation depiktional repräsentiert werde.

Bei der Lösung von Textaufgaben kann der Lösenden verschiedenen Repräsentationsformen selbst generieren. Er kann z.B. eine Gleichung aufschreiben (extern deskriptional) oder sich eine Skizze anfertigen (extern depiktional) oder aber auch im Kopf rechnen (intern deskriptional) oder sich ein Bild vorstellen (intern depiktional), etc. Die verschiedenen Repräsentationsformen können je nach Problemstellung und Eigenschaften des Problemlösenden mehr oder weniger gut geeignet sein.

Vor diesem Hintergrund wird also in der vorliegenden Arbeit auf eine Einteilung von Repräsentationsformen zurückgegriffen, die im Vier-Felder-Schema in Abbildung 6 noch einmal zusammenfassend dargestellt wird.

	Depiktional	Deskriptional
Extern		
Intern		

Abbildung 6: Schematisierung der vier unterschiedenen Repräsentationsformen.

4. REPRÄSENTATIONEN UND TEXTAUFGABEN

„Weil man bei solchen Aufgaben immer eine Gleichung aufstellen muss. So mit x.“

Eine Vielzahl von Forschungsarbeiten, die sich mit der Lösung von Textaufgaben befassen, fokussiert auf den Prozess des Verstehens der Textaufgabe oder auf Faktoren, die das Verstehen beeinflussen (z.B. Cohen & Stover, 1981; Hegarty, Mayer, & Monk, 1995; Cummins, 1997; Thevcenot, 2010). Dies ist zweifelsfrei von großer Bedeutung. Doch was geschieht, nachdem eine Textaufgabe verstanden wurde, gerade wenn es sich dabei nicht um eine einfache Routinetextaufgabe handelt? Um ein differenziertes Bild davon zu erhalten, welche Prozesse nach dem Verstehen der Textaufgabe ablaufen, soll anhand von problemhaltigen Textaufgaben das individuelle Lösungsvorgehen, unter Berücksichtigung selbstgenerierter Repräsentationen, in unterschiedlichen Klassenstufen exploriert werden.

Bei verschiedenen Themengebieten des Mathematikunterrichts, und auch darüber hinaus, kann auf unterschiedliche Repräsentationsformen zurückgegriffen werden. Jedoch scheint der Schwerpunkt, speziell auch im Mathematikunterricht, häufig auf rein deskriptionalen Repräsentationen im Sinne von Rechnungen oder Gleichungen zu liegen. Dies war auch in früheren Forschungsarbeiten z.T. der Fall (z.B. Carpenter & Moser, 1984; De Corte, Verschaffel, 1985).

Dabei könnten und sollten nicht nur bei der Lösung von Textaufgaben, sondern bei der Bearbeitung vielfältiger mathematischer Aufgaben und Probleme, verschiedene Repräsentationsformen zum Einsatz kommen. Nach Kaput (1987a) werden diese im Rahmen des Mathematikunterrichts jedoch viel zu wenig berücksichtigt: „There is a common tendency to underestimate the role of representation systems in the standard curriculum. For example, we usually assume the mathematics curriculum in the first 8 years of school is about numbers” (S. 20).

Es gibt aber auch andere Betrachtungsweisen. Bruner (1974) z.B. unterscheidet drei verschiedene, entwicklungsbedingt aufeinander aufbauende Repräsentationsebenen, auf denen Wissen dargestellt bzw. vermittelt werden kann. Auf der enaktiven Ebene werden konkrete Materialien manipuliert. Um die Summe aus fünf und drei zu ermitteln, kann ein Kind zu fünf Äpfeln noch drei hinzulegen und dann die Gesamtmenge abzählen. Auf der ikonischen Ebene wird auf bildhafte Darstellungen oder auch Vorstellungen zurückgegriffen. Hier zeichnet das Kind z.B. fünf Kreise und dann noch einmal drei Kreise und zählt wieder die Gesamtmenge. Auf der symbolischen Ebene werden, wie die bereits Bezeichnung nahelegt, symbolische Repräsentationen verwendet. Das Kind ist hier in der Lage, die Aufgabe mit Hilfe der symbolischen Repräsentation „5+3=__“ zu lösen. Diese Ansicht ist natürlich nicht nur für die Bearbeitung von Textaufgaben gültig, kann aber ohne Weiteres darauf angewandt werden.

Skemp (1986) differenziert, sowohl auf der externen als auch auf der internen Repräsentationsebene, zwischen visuellen und verbal-algebraischen Repräsentationen, die für das Lehren und Lernen von Mathematik von großer Bedeutung sind. Gerade die visuellen Repräsentationsformen erachtet er als durchaus wichtig: „there is no doubt that visual symbols are often very useful and may be a great deal more understandable than a verbal-algebraic representation of the same ideas” (S. 89).

Dass bei der Lösung von Textaufgaben „eine gegenständliche oder bildliche Repräsentation (Skizze) verwandt werden“ kann, beschreiben z.B. auch Franke und Ruwisch (2010, S. 75). Eine ähnliche Differenzierung lässt sich auch bei Reusser (1985) finden: „one can even differentiate between two levels of mathematical models: the non-numerical but already abstract or scematic mathematical problem model and the formal or numerical (or algebraic) mathematical problem model“ (S. 13).

Auch im Rahmen der PISA-Studien wird, neben der Modellierungs- und Problemlösekompetenz, u.a. die sogenannte Repräsentationsfähigkeit als bedeutsame Teilkompetenz erachtet, die eine Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung von Mathematik darstellt:

> A very basic competency that is critically important to *mathematical literacy* is the capacity to successfully use and manipulate a variety of different kinds of representations of mathematical objects and situations. This may include such representations as graphs, tables, charts, photographs, diagrams and text, as well as, algebraic and other symbolic mathematical representations. Central to this

> competence is the ability to understand and make use of interrelationships among these different representations. (OECD, 2009, S. 33, Hervorhebung im Original)

Gerade der Nutzen von depiktionalen Repräsentationen für das Lösen von Problemen im Allgemeinen, aber auch für das Lösen von Textaufgaben, wird häufig diskutiert (z.B. van Essen & Hamaker, 1990; Bauer & Johnson-Laird, 1993; Franke & Ruwisch, 2010).

Van Essen und Hamaker (1990) konnten z.B. im Rahmen ihrer Interventionsstudie an Fünftklässlern zeigen, dass die Schüler, die zusätzlich zum Mathematikunterricht das Anfertigen von Zeichnungen zu Textaufgaben übten, im Posttest mehr Zeichnungen zu Textaufgaben anfertigten und eine verbesserte Leistung bei deren Lösen aufwiesen als die Schüler, die lediglich am regulären Mathematikunterricht teilnahmen. Van Essen und Hamaker (1990) kommen jedoch zu der Schlussfolgerung, dass das Anfertigen einer Zeichnung nicht per se zur richtigen Lösung führen muss: „Generating a drawing does not guarantee that one finds the correct solution, but merely increases the chance that a problem will be conceptualized correctly“ (S.309).

Schnotz und Kollegen (2010) sehen in der Verwendung von depiktionalen und deskriptionalen Repräsentationen ein Schlüsselkonzept: „we consider the combined use of different representations – especially descriptive and depictive ones – as a key concept for teaching mathematics and for thinking and problem solving in mathematics” (S. 32).

Darüber hinaus wird von vielen Autoren (z.B. Dreyfus and Eisenberg, 1996; Pape & Tchoshanov, 2001; Baroody, 2003; Heinze, Star, & Verschaffel, 2009) betont, dass ein flexibler bzw. adaptiver Umgang mit Repräsentationsformen für das Lösen mathematischer Probleme von großer Wichtigkeit sei, und dass es sich dabei um eine Kompetenz handele, die im Rahmen des Mathematikunterrichts unbedingt berücksichtigt werden sollte: „the facility to use multiple representations and to flexibly switch between a range of representations (including graphical, tabular, algebraic and verbal ones) is a critical component of the skill of solving mathematical problems“ (Heinze et al., 2009, S. 536).

Dass im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Textaufgaben nicht nur das Zurückgreifen auf verschiedene Repräsentationsformen, sondern auch unterschiedliche Vorgehensweisen von Bedeutung sind, konnte z.B. Borromeo Ferri (2004) mit ihrer Konzeption mathematischer Denkstile zeigen. Darunter versteht sie „die von einem

Individuum bevorzugte Art und Weise, mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge durch gewisse interne Vorstellungen und/oder externe Darstellungen zu repräsentieren und durch gewisse Vorgehensweisen zu verarbeiten, genauer: zu durchdenken und zu verstehen“ (S. 50). Sie unterscheidet bei den mathematischen Denkstilen zwei Komponenten: 1.) interne Vorstellung bzw. externalisierte Darstellung und 2.) ganzheitliche und zergliedernde Vorgehensweise (für nähere Erläuterungen s. Kapitel 8.4.3.2, S. 90). Bei den internen und externen Repräsentationen wird ebenso zwischen bildlichen und symbolisch-formalen/verbalen Repräsentationen unterschieden.

Dass zum Lösen von Problemen auf unterschiedliche *selbstgenerierte* Repräsentationsformen zurückgegriffen werden kann, betonen u.a. Chi, Feltovich und Glaser (1981): „A *problem representation* is a cognitive structure corresponding to a problem, constructed by a solver on the basis of his domain-related knowledge and its organization. A representation can take a variety of forms“ (S. 121 f., Hervorhebung im Original). Dies gilt genauso für das Lösen von Textaufgaben.

Der Einsatz von depiktionalen Repräsentationen erfolgt jedoch meist entweder in Form von externen, *fremdgenerierten* Repräsentationen (z.B. Nathan, Kintsch, & Young, 1992), wie es auch in Schulbüchern oft der Fall ist, oder in Form von *selbstgenerierten* Repräsentationen, zu deren Konstruktion jedoch explizit aufgefordert wird (z.B. Cohen & Stover, 1981; Carpenter et al., 1981; De Corte & Verschaffel, 1987; van Essen & Hamaker, 1990; Brenner, Mayer, Mosely, Brar, Durán, Reed, & Web, 1997). Van Essen und Hamaker (1990) sehen im Anfertigen von Zeichnungen zu *arithmetischen* Textaufgaben diverse Vorteile:

1. Zeichnungen entlasten das Arbeitsgedächtnis.
2. Durch das Anfertigen einer Zeichnung (als auch durch die Verwendung konkreter Materialien) wird das Problem greifbarer.
3. Probleminformationen können durch eine Zeichnung reorganisiert werden.
4. Problemeigenschaften können mithilfe einer Zeichnung leichter erschlossen werden, da sie explizit gemacht werden.

Inwieweit die beobachteten Lösungsprozesse bei der Vorgabe fremdgenerierter Repräsentationen oder bei der Instruktion zu selbstgenerierten (depiktionalen) Repräsentationen mit den tatsächlichen, spontanen Lösungsprozessen und den dabei verwendeten (selbstgenerierten) Repräsentationenformen der Lösenden übereinstimmen, bleibt unklar. Die große Frage, die sich stellt, ist, auf welche Repräsentationsformen Schüler verschiedener Klassenstufen *tatsächlich* zurückgreifen, wenn sie problemhaltige Textaufgaben selbstständig lösen sollen.

Gesucht

ZIELE DER ARBEIT

FORSCHUNGSFRAGEN UND HYPOTHESEN

5. ZIELE DER ARBEIT

„Ich rechne einfach so ohne zu denken."

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Exploration spontaner, individueller Lösungsprozesse von Schülern unterschiedlicher Klassenstufen bei der Lösung problemhaltiger Textaufgaben. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf den verschiedenen Repräsentationsformen, auf die die Schüler dabei zurückgreifen. In diesem Zusammenhang stellt sich besonders die Frage, welche Repräsentationsformen die Schüler selbst generieren und inwieweit dies zum Lösungserfolg führt.

Die verwendeten Textaufgaben werden dabei im Sinne von z.B. Verschaffel und Kollegen (2000) als Modellierungsaufgaben aufgefasst bzw. aus einer Modellierungsperspektive betrachtet. Allerdings wurden keine klassischen Modellierungsaufgaben verwandt, da, wie Schneeberger (2009) betont, sich die Verwendung von Textaufgaben besonders gut zur Untersuchung von Denkprozessen eignet, „weil einerseits ihre Lösungen eindeutig sind und weil andererseits der Stoff zwar komplex, aber trotzdem übersichtlich ist" (S. 20f).

Die Bearbeitung mathematischer Modellierungsaufgaben wird klassisch als Gruppenaktivität verstanden und operationalisiert (z.B. Treilibs et al., 1980; Maaß, 2004; Kaiser & Schwarz, 2006; English, 2010). Darauf wurde jedoch verzichtet, da der Fokus auf den *individuellen* Lösungsprozessen lag. Dieser Ansatz entspricht der Auffassung von z.B. Franke und Ruwisch (2010, S. 79f): „Als keineswegs trivial hat sich jedoch erwiesen herauszufinden, welche Prozesse im Kopf eines Schüler bzw. einer Schülerin beim Bearbeiten einer mathematischer Sachaufgabe ablaufen und woran es liegt, wenn dabei Fehler entstehen".

Vor diesem Hintergrund wurde im Jahr 2010 eine erste explorativ angelegte Videostudie zu selbstgenerierten Repräsentationsformen von Grundschülern bei der individuellen Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben durchgeführt. Bevor die Pilotstudie detaillierter beschrieben wird, soll zunächst auf die Forschungsfragen bzw. Hypothesen und das Untersuchungsdesign näher eingegangen werden.

6. FORSCHUNGSFRAGEN UND HYPOTHESEN

„Muss man rechnen? Also muss man 'was mit Zahlen machen?“

Im Hinblick auf die Lösungsprozesse von Schülern bei der Bearbeitung von problemhaltigen Textaufgaben, und unter besonderer Berücksichtigung der verschiedenen Repräsentationsformen, die Schüler dabei generieren können, ergeben sich, neben sicherlich vielen anderen, folgende Fragestellungen bzw. Annahmen:

Forschungsfrage 1: Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Klassenstufe und dem Lösungserfolg?

Da sich kognitive Entwicklungsprozesse nach Vertretern des Informationsverarbeitungsansatzes vor allem auf Basis der vier Veränderungsmechanismen *Automatisierung, Kodierung, Generalisierung* und *Strategieentwicklung* vollziehen (s. Kapitel 2.6, S. 24), kann davon ausgegangen werden, dass die Schüler einer höheren Klassenstufe, aufgrund von einer längeren Beschulungszeit, und somit aufgrund von mehr mathematischem Vorwissen und Erfahrungen im Umgang mit verschiedenen Textaufgaben, und u.U. auch verschiedenen Problemstellungen, in der Lage sein sollten, die problemhaltigen Textaufgaben eher richtig zu lösen als die Schüler niedrigerer Klassenstufen. Dies scheint auch deswegen naheliegend, da die zu lösenden Textaufgaben vordergründig für den Einsatz in der Primarstufe konzipiert wurden.

Daraus ergibt sich folgende Hypothese:

1.1: Je höher die Klassenstufe, desto mehr richtige Lösungen werden gefunden.

Darüber hinaus sollten Schüler höherer Klassenstufen auch seltener auf willkürliche Lösungsstrategien zurückgreifen. Zu willkürlichen Lösungsstrategien zählen z.B. das Raten der Lösung oder aber auch die beliebige Verrechnung der in der Aufgabe gegebenen Zahlen ohne dass dahinter ein Ziel oder Sinn erkennbar ist.

Daraus ergibt sich folgende Hypothese:

1.2: Je höher die Klassenstufe, desto seltener werden willkürliche Lösungsstrategien angewandt.

Forschungsfrage 2: Wie werden die Repräsentationsformen in den verschiedenen Klassenstufen eingesetzt um problemhaltige Textaufgaben zu lösen?

Die „Überlegenheit" von Schülern höherer Klassenstufen gegenüber Schülern niedrigerer Klassenstufen hinsichtlich der oben beschriebenen Mechanismen Automatisierung, Kodierung, Generalisierung und Strategieentwicklung sollte dazu führen, dass Schüler höheren Klassenstufen, besonders aufgrund eines höheren Grades an Automatisierung, mehr freie kognitive Kapazitäten zur Verfügung haben, um die Textaufgaben mental, also unter Verwendung interner Repräsentationen, lösen zu können.

Daraus ergibt sich folgende Hypothese:

2.1: Je höher die Klassenstufe, desto seltener wird bei der Aufgabenlösung auf externe Repräsentationen zurückgegriffen.

Ferner sollten die Schüler höherer Klassenstufen vertrauter im Umgang mit Textaufgaben sein, ihnen sollten also auch mehr Lösungsvarianten bekannt sein. Darüber hinaus scheinen Schüler höherer Klassenstufen aufgrund ihrer kognitiven Entwicklung eher die Ressourcen für den flexiblen Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen mitzubringen.

Daraus ergibt sich folgende Hypothese:

2.2: Je höher die Klassenstufe, desto flexibler erfolgt der Umgang mit unterschiedlichen Repräsentationsformen.

Forschungsfrage 3: Wie sind Unterschiede in der Verwendung der verschiedenen Repräsentationsformen mit dem Lösungserfolg verbunden?

Einige Interventionsstudien konnten bereits zeigen, dass sich die zusätzliche Verwendung von depiktionalen Repräsentationen günstig auf den Lösungserfolg auswirkt.

Da es sich bei den hier verwendeten problemhaltigen Textaufgaben um mehrschrittige Textaufgaben handelt, wird hier besonders auf die Konstruktion des mathematischen Modells im ersten Minikreislauf innerhalb des „großen“ Modellierungskreislaufs fokussiert, also auf das mathematische Modell im ersten Analyseschritt (vgl. Abbildung 9, S. 73).Die Initiation der Lösung bzw. die Findung eines Lösungsansatzes steht hier im Mittelpunkt.

Daraus ergibt sich folgende Hypothese:

3.1: Die Verwendung von multiplen Repräsentationen bei der Konstruktion des mathematischen Modells sollte mit einem höheren Lösungserfolg einhergehen.

Ein flexibler Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen scheint generell günstig für das Lösen von Problemen im Allgemeinen wie auch im Hinblick auf mathematische Probleme zu sein.

Daraus ergibt sich folgende Hypothese:

3.2: Ein flexibler Umgang mit den Repräsentationsformen sollte mit einem höheren Lösungserfolg einhergehen.

Forschungsfrage 4: Wie hängt die Vorgehensweise bei der Aufgabenlösung (ganzheitlich, zergliedernd) mit dem Lösungserfolg zusammen?

Sowohl eine ganzheitliche, als auch eine zergliedernde Vorgehensweise kann zu einer richtigen Lösung führen. Generell scheint ein ganzheitliches Vorgehen jedoch weniger fehleranfällig zu sein, wenn man davon ausgeht, dass bei jedem Lösungsschritt ein Fehler unterlaufen könnte.

Daraus ergibt sich folgende Hypothese:

4: *Ganzheitliche Vorgehensweisen sollten eher zu richtigen Lösungen führen als zergliedernde.*

Um die Forschungsfragen zu beantworten und die postulierten Hypothesen zu testen, wurde zunächst unter Verwendung von Videographie als Untersuchungsmethode eine Pilotstudie durchgeführt. Auf Basis des gewonnenen Videomaterials wurde ein Kodiersystem entwickelt. Dieses diente zur Auswertung bzw. Quantifizierung der Videos aus der Haupterhebung. Da sowohl in der Pilotstudie als auch in der Haupterhebung auf Videotechnik zurückgegriffen wurde, soll im Nachfolgenden näher auf das Untersuchungsdesign eingegangen werden.

Lösung

UNTERSUCHUNGSDESIGN

PILOTSTUDIE

HAUPTUNTERSUCHUNG

7. UNTERSUCHUNGSDESIGN

„Die hätten eigentlich 5 Euro zurückbekommen!“

7.1 Verbindung von qualitativem und quantitativem Vorgehen

Der Schwerpunkt in der vorliegenden Arbeit liegt auf qualitativen Methoden (Videostudie und halbstrukturiertes Interview), da „[a] major advantage of the qualitative approach is that it more easily allows for the discovery of new ideas and unanticipated occurrences. Such research helps focus novel questions, formulate hypotheses, develop useful measures, and produce grounded theory” (Jacobs, Kawanaka, & Stigler, 1999, S. 781). Darüber hinaus kommen aber auch ergänzend quantitative Methoden zum Einsatz: „qualitative research can be used to generate new questions and theories, which are then tested through quantitative means, and later revised or expanded through further qualitative study, and so on” (Jacobs et al., 1999, S. 781).

Die Durchführung der Pilotstudie und die damit verbundene Entwicklung eines Kodiersystems sind im Bereich qualitativer Analysen zu verorten. Die Anwendung des Kodiersystems auf die in der Haupterhebung gewonnenen Videodaten impliziert eine Quantifizierung des Videomaterials und ist somit im Bereich der quantitativen Analysen anzusiedeln. Hier erfolgt auch die statistische Überprüfung der formulierten Hypothesen. Bei der anschließenden Interpretation der Ergebnisse handelt es sich wiederum um einen qualitativen Analyseschritt. Abbildung 7 zeigt den zeitlichen Ablauf der Untersuchung, sowie die Einordnung einzelner Untersuchungsschritte in das Phasenmodell zum Verhältnis qualitativer und quantitativer Analyse (vgl. Mayring, 2008, S. 20).

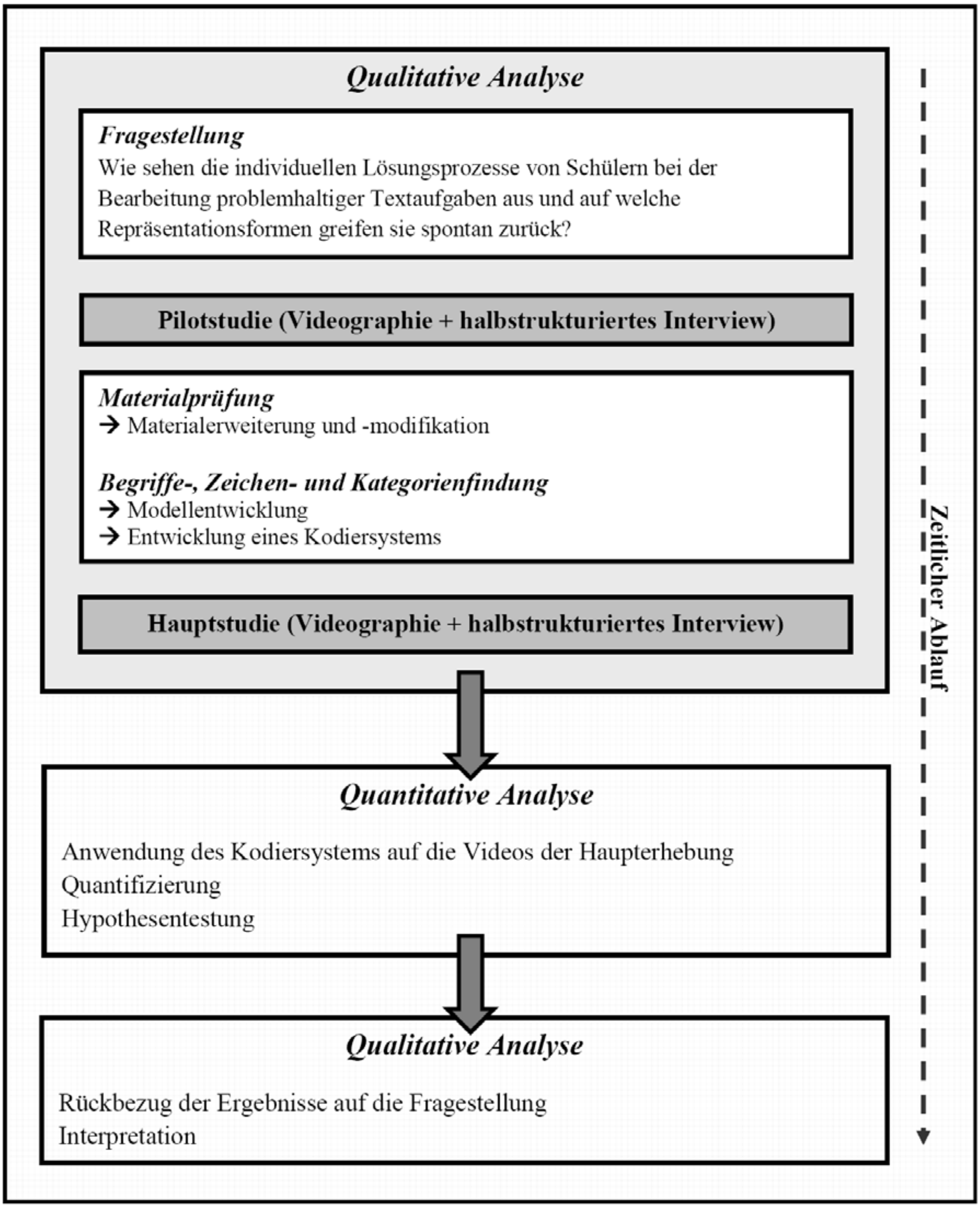

Abbildung 7: Phasenmodell zum Verhältnis qualitativer und quantitativer Analyse nach Mayring (2008, S.20).

7.2 Videographie als Untersuchungsmethode

Der Einsatz von Videotechnik findet immer mehr Verwendung bei der Durchführung empirischer Forschung im Bereich der Sozial- und Bildungswissenschaften (z.B. Klieme & Bos, 2000; van Aufschnaiter & Welzel, 2001; Prenzel, Duit, Euler, Lehrke, & Seidel, 2001; Reusser, Pauli, & Waldis, 2010).

Ein solches Vorgehen birgt vielerlei Vorteile. Videographierte Ereignisse können mehrfach und wenn nötig in verlangsamter (oder auch beschleunigter) Form zu einem späteren Zeitpunkt abgespielt werden, wodurch auch kurze und/oder komplexe Ereignisse detailliert analysiert werden können: „The investigative potential of *video study* lies in the fact that complex phenomena and events captured on video are available for analysis that can focus *ex-post facto* on various aspects of the material under investigation" (Janík, Seidel, & Najvar, 2009, S.7, Hervorhebung im Original).
Auch kann dasselbe Videomaterial hier von verschiedenen Personen auf unterschiedliche Art und Weise betrachtet werden, „z. B. aus fachwissenschaftlicher, fachdidaktischer, pädagogischer und psychologischer Sicht" (Mayring, Gläser-Zikuda, & Ziegelbauer, 2005, S. 4). Die Beantwortung verschiedenster Fragestellungen ist also möglich.
Videos können darüber hinaus aufgrund ihrer hohen Anschaulichkeit dazu dienen, die untersuchten Ereignisse oder auch deren Auswertung zu illustrieren. die fachsprachliche Verständigung zu erleichtern und die Kluft zwischen Theorie und Praxis zu verringern (Petko, Waldis, Pauli, & Reusser, 2003).
Videoaufnahmen können außerdem, wie andere Forschungsmethoden auch, im Rahmen von Triangulation eingesetzt werden, also der „Betrachtung eines Forschungsgegenstandes von (mindestens) zwei Punkten aus" (Flick, Kardorff, & Steinke, 2010, S. 309).

Den genannten Vorteilen stehen auch einige Nachteile gegenüber. Das Gewinnen von Videomaterial, deren Aufbereitung und Analyse geht mit einem hohen Zeit- und Personalaufwand einher; auch können hier erhebliche finanzielle Kosten entstehen (Hodel, Waldis, Gautschi, & Reusser, 2006). Darüber hinaus können Kameraeffekte auftreten. Die Anwesenheit von Kameras kann dazu führen, dass die videographierten Ereignisse nicht repräsentativ sind, also nicht das „natürliche" Ereignis zeigen (z.B. den alltäglichen Unterricht), sondern eine Verzerrung dessen (Hodel et al., 2006). Dies gilt es zu vermeiden.

Da das Lösen problemhaltiger Textaufgaben mit einer Abfolge von relativ vielen und kleinen Lösungsschritten einhergehen kann, die sich darüber hinaus in einem sehr begrenzten Zeitfenster zeigen können, und dies durch bloße teilnehmende Beobachtung nicht gänzlich erfassbar ist, wurde sowohl in der Pilotstudie als auch in der Haupterhebung auf Videotechnik zurückgegriffen, um die individuellen Lösungsprozesse im Nachhinein möglichst detailliert rekonstruieren und analysieren zu können.

Durch das Durchführen einer Videostudie erhält man zunächst eine Menge an aufgezeichneten Phänomenen, die im Nachhinein gezielt ausgewertet werden müssen. Dafür ist das systematische Beobachten des Videomaterials von großer Bedeutung. Dies ist definiert als andauerndes, explizites, methodisches Beobachten und Paraphrasieren von sozialen Situationen in Relation zu ihren natürlich vorkommenden Kontexten (nach Weick, 1985, S. 568). *Paraphrasieren* impliziert hier einen selektiven und aktiv interpretierenden Beobachter. *Soziale Situationen* beziehen sich auf den Beobachtungsgegenstand und bestehen aus drei Aspekten: dem oder den Handelnden, der Handlungsumgebung und der Handlung selbst. Systematisches Beobachten wird also abgegrenzt von flüchtigen, unbewussten, ungeplanten und unorganisierten Beobachtungen (Pedhazur & Pedhazur Schmelkin, 1991).

Im Hinblick auf die Durchführung einer Videostudie und der damit verbundenen Datenauswertung wurden einige grundlegende, methodische Aspekte bedacht. Diese werden im Nachfolgenden näher erläutert.

7.3 Teilnehmende oder nicht teilnehmende Beobachtung?

Da die Kodierung des Videomaterials erst nach der Erhebung stattfand und nicht schon während des Lösungsvorgehens der einzelnen Schüler, erfolgte die Beobachtung offen und nicht teilnehmend: „[Der] Beobachter ist nicht Teil der Untersuchungssituation, gleichzeitig wissen die Beobachteten aber, dass sie beobachtet werden, z. B. Kamerapersonen filmen Unterrichtsgeschehen im Klassenzimmer“ (Seidel & Prenzel, 2010, S. 143). Davon ist die Rolle der Versuchsleitung abzugrenzen, die hier ebenfalls eine Beobachterfunktion übernahm. Dabei handelt es sich jedoch um eine teilnehmende und offene Beobachtung: „Beobachter ist erkennbar zugegen und Teil der Beobachtungssituation“ (Seidel & Prenzel, 2010, S. 143).

7.4 Ereignisstichprobe oder Zeitstichprobe?

Je nach Fragestellung kann das videographierte Phänomen auf unterschiedliche Art und Weise beobachtet werden. In diesem Zusammenhang werden zwei Vorgehensweisen unterschieden: Ereignisstichprobe und Zeitstichprobe (Bortz & Döring, 2009). Der Begriff *Stichprobe* bezieht sich hier nicht auf die Untersuchungsteilnehmer, sondern auf die Beobachtungseinheiten, die bei der Videokodierung berücksichtigt werden sollen. In der vorliegenden Forschungsarbeit wurde eine Ereignisstichprobe gewählt, d.h., das Beobachtungsmaterial wurde nicht in vorher festgelegte Zeitabschnitte gegliedert, wobei die Kodierung eines Phänomens dann zu bestimmten Zeitpunkten erfolgt (z.B. alle 10 Sekunden kodieren, was der Schüler gerade tut). Es sollte vielmehr durch die Beobachter festgestellt werden, ob sich zu beobachtenden Phänomene oder Kombinationen von Phänomenen zeigten und darüber hinaus z.T. wie lange diese andauerten bzw. wie häufig sie auftraten. Es sollte z.B. erfasst werden, auf welche Repräsentation(en) ein Schüler bei der Konstruktion des mathematischen Modells zurückgreift oder wie viele Analyseschritte er durchläuft. Die Entscheidung für eine Ereignisstichprobe bringt folgende Vorteile mit sich (Kerlinger, 1979; zitiert nach Bortz & Döring, 2009, S. 270):

- Die Ereignisse sind Bestandteile natürlicher Situationen und können deshalb auf vergleichbare Situationen verallgemeinert werden.
- Das Verhalten wird nicht fragmentarisch, sondern vollständig in seinem kontinuierlichen Verlauf beobachtet.
- Es können auch Ereignisse untersucht werden, die relativ selten auftreten.

Darüber hinaus wurde dieses Vorgehen auch gewählt, weil das Untersuchungsdesign die Kombination von Videographie und halbstrukturiertem Interview beinhaltet und eine Ereignisstichprobe die Integration der Informationen aus beiden Quellen ermöglicht.

7.5 Zeichensystem, Kategoriensystem oder Schätzskala?

Unabhängig von der Wahl einer Zeit- oder Ereignisstichprobe kann auf unterschiedliche Beobachtungssysteme zurückgegriffen werden. Feger (1983) unterscheidet Zeichensysteme, Kategoriensysteme und Schätzskalen (Rating-Verfahren).

Zeichensysteme werden verwendet, um lediglich das Auftreten eines oder mehrerer Phänomene zu erfassen. Ist also ein bestimmtes Phänomen vorhanden, wird dies durch ein vorher festgelegtes Zeichen ausgedrückt (Grewe & Wentura, 1997). Dies kann z.B. durch eine einfache Strichliste erfolgen. Der große Vorteil von Zeichensystemen liegt darin, dass Mehrfachnennungen möglich sind (Grewe & Wentura, 1997). So kann bspw. die mathematische Analyse eines Schülers sowohl depiktional als auch deskriptional repräsentiert sein, wenn mithilfe von Einerwürfel und Zehnerstangen[4] bestimmte Mengen aufaddiert werden.

Kategoriensysteme fokussieren im Gegensatz zu Zeichensystemen nicht nur auf das Vorhandensein eines Phänomens, sondern auf dessen Klassifizierung nach festgelegten Kriterien (Grewe & Wentura, 1997). So kann bspw. erfasst werden, ob die ermittelte Lösung für eine Textaufgabe völlig richtig, teilweise richtig oder falsch ist. Die einzelnen Kategorien sind hier disjunkt. Ist also die Lösung als völlig richtig klassifiziert, kann sie nicht mehr als teilweise richtig oder falsch kodiert werden. Mehrfachnennungen sind also nicht möglich.

Rating- oder Schätzsysteme dienen der Beurteilung eines Phänomens hinsichtlich seines Ausprägungsgrades auf einer vorher festgelegten Dimension (Grewe & Wentura, 1997). Hier könnte es bspw. um die Frage nach der Qualität des Lösungsprozesses eines Schülers bei einer spezifischen Textaufgabe gehen und dies könnte mittels einer Ratingskala beurteilt werden, die von „*sehr schlecht*“ bis „*sehr gut*“ reicht.

Das Hauptaugenmerk der vorliegenden Arbeit liegt auf der Entwicklung und Verwendung eines Kodiersystems, das sowohl Zeichen als auch Kategorien umfasst. Im Hinblick auf die Entwicklung des Kodiersystems wurde eine Pilotstudie durchgeführt, auf die nachfolgend detailliert eingegangen wird.

[4] Unter Einerwürfeln und Zehnerstangen sind materiale Anschauungshilfen zu verstehen, die verwendet werden können, um bspw. Mengen zu modellieren oder Rechenwege zu unterstützen. Zehnerstangen bestehen dabei aus zehn zusammenhängenden (und nicht trennbaren) Einerwürfeln.

8. PILOTSTUDIE

"Wenn sie das Buch auf der nächsten gleich aufschlägt, muss sie 30 mal umblättern."

Zunächst wurde eine Pilotstudie in einer zweiten und einer viertel Klasse durchgeführt. Das hier gewonnene Videomaterial wurde zum einen dafür verwendet, das Forschungsdesign inklusive der entwickelten Untersuchungsmaterialen hinsichtlich ihrer Praktikabilität zu überprüfen und zum anderen dienten die Videos als Grundlage für die Entwicklung eines Modells, das die spontanen Lösungsprozesse der Schüler bei der Lösung der verschiedenen problemhaltigen Textaufgaben unter Berücksichtigung der durch die Schüler selbst generierten Repräsentationsformen abbildet. Auf Basis dieses Modells wurde in einem weiteren Schritt ein Kodiersystem konzipiert, womit die in der Haupterhebung gewonnenen Videos kodiert bzw. quantifiziert werden konnten.

8.1 Stichprobe

An der Pilotstudie nahmen 35 Grundschüler der 2. und 4. Klasse teil. Davon waren 19 Zweitklässler (8 Mädchen, 7 Jungen, 4 ohne Angabe) und 16 Viertklässler (9 Mädchen, 6 Jungen, 1 ohne Angabe). Der gesamte Lösungsprozess wurde, nach Einverständnis der Eltern zur Teilnahme ihrer Kinder an der Untersuchung, videographiert. Jeder Schüler hatte zu jedem Zeitpunkt die Möglichkeit, seine Teilnahme an der Studie abzubrechen.

8.2 Durchführung

Den in der Pilotstudie als Versuchleiter agierenden Personen, wurde ein Versuchsleiterguide samt Interviewleitfaden an die Hand gegeben, um das Vorgehen bei den jeweiligen Schülern möglichst einheitlich zu gestalten.

Jeder Schüler erhielt zunächst eine kurze Instruktion über den Verlauf der Videostudie. Danach wurde mit der Videoaufzeichnung begonnen.

Fünf problemhaltige Textaufgaben wurden den Grundschülern in individuellen Settings zur Lösung vorgelegt. Um sicher zu stellen, dass die Grundschüler die jeweilige Textaufgabe verstehen und die Exploration der spontanen Lösungsprozesse nicht an mangelnden Lesefertigkeiten der Schüler scheitert, wurde die Textaufgabe durch die Versuchsleitung einmal, auf Wunsch des Schülers auch zweimal, vorgelesen.

Die Textaufgaben wurden so ausgewählt, dass eine möglichst große Bandbreite problemhaltiger Textaufgaben abgedeckt werden konnte. Dies geschah sowohl im Hinblick auf unterschiedliche Sachsituationen als auch verschiedene mathematisch-logische Aspekte. Einen Überblick über die in der Pilotstudie eingesetzten Textaufgaben, ihre richtigen Lösungen und die zugehörigen kurzen Aufgabenklassifizierungen (vgl. Rasch, 2001; 2008) finden sich nachfolgend:

1) Räuberaufgabe: Zwei Räuber entdecken einen vergrabenen Schatz, 2 Beutel Goldmünzen. Sie zählen die Münzen. In einem Beutel sind 34 Münzen, in dem anderen sind 52 Münzen. Sie wollen die Beute unter sich gerecht teilen. Wie viele Münzen müssen sie aus dem volleren Beutel herausnehmen und in den anderen füllen, damit in beiden Beuteln gleich viele Münzen sind?
   Richtige Lösung: **9 Münzen** müssen aus dem vollen Beutel in den leereren umgefüllt werden.
   Aufgabenklassifizierung: Ausgleichsaufgabe – Textaufgaben, die Geschichten erzählen.

2) Eisaufgabe: Streblinde, Quicki und Murks möchten sich ein Eis kaufen. Jedes Kind hat Geld für 2 Kugeln Eis. Der Eisverkäufer bietet 3 Sorten Eis an: Schoko, Vanille und Himbeereis. Was für ein Eis könnte sich Quicki kaufen? Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?
   Richtige Lösungen: Quicki hat entweder **6 Möglichkeiten** (Schoko – Vanille; Schoko – Himbeere: Vanille – Himbeere; Schoko – Schoko; Vanille – Vanille; Himbeere – Himbeere) **oder 9 Möglichkeiten** (Schoko – Vanille; Vanille – Schoko; Schoko – Himbeere; Himbeere – Schoko; Vanille – Himbeere; Himbeere – Vanille; Schoko – Schoko; Vanille – Vanille; Himbeere – Himbeere).

Aufgabenklassifizierung: Aufgabe mit kombinatorischem Hintergrund – Personen und Geschehnisse, mit denen sich Kinder identifizieren können.

3) Dampferaufgabe: Mutti, Vati und Murks fahren mit dem Dampfer. Für Kinder kostet es nur die Hälfte. Sie bezahlen insgesamt 30€. Wie viel kostet die Karte für einen Erwachsenen und wie viel kostet sie für ein Kind?
Richtige Lösung: Mutti und Vati bezahlen jeweils **12€**, Murks bezahlt **6€**.
Aufgabenklassifizierung: Aufgabe zur Verhältnisverteilung – Texte mit Bezug zum Alltag und den Vorerfahrungen des Grundschulkindes.

4) Schneckenaufgabe: Eine Schnecke in einem 20m tiefen Brunnen will nach oben auf die Wiese. Sie kriecht am Tag immer 5m hoch und rutscht nachts im Schlaf wieder 2m nach unten. Am wievielten Tag erreicht sie den Brunnenrand.
Richtige Lösung: Die Schnecke erreicht den Brunnenrand am **6. Tag**.
Aufgabenklassifizierung: Bewegungsaufgabe – Rechengeschichten zu Raum und Zeit.

5) Teufelaufgabe: Der Teufel sagte zu einem armen Manne: „Wenn du über diese Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln, doch musst du jedes Mal, wenn du zurückkommst, 8 Taler für mich ins Wasser werfen.“ Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Heller mehr. Wie viel hatte er anfangs?
Richtige Lösung: Der Mann hatte am Anfang **7 Taler**.
Aufgabenklassifizierung: Aufgabe mit unbekanntem Anfangszustand – Textaufgaben mit einer Vorgeschichte.

Die einzelnen Textaufgaben, mit Ausnahme der Räuberaufgabe, wurden den Schülern in lateinisch-quadratischer Anordnung präsentiert (Bortz & Döring, 2009). Da die Räuberaufgabe als am wenigsten problemhaltig angesehen wurde, fungierte sie bei allen Schülern als erste Textaufgabe, die dargeboten wurde, um den Schülern die Möglichkeit zu geben, sich mit der Prozedur vertraut zu machen. Die anschließenden vier Aufgaben wurden danach mithilfe sogenannter zyklischer Permutationen (Bortz & Döring, 2009) in alternierender Reihenfolge dargeboten.

Nach dem Vorlesen der Textaufgabe wurde der Schüler zunächst darum gebeten, einzuschätzen, wie schwierig er die Textaufgabe findet. Dafür standen vier Antwortoptionen zur Verfügung: „*sehr schwer*“, „*schwer*“, „*leicht*“ und „*sehr leicht*“. Um den Grundschülern die Beantwortung zu erleichtern, wurden die vier Antwortoptionen durch entsprechende Smileys veranschaulicht.

Nach der Schwierigkeitseinschätzung wurde dem Schüler das Aufgabenblatt vorgelegt und er konnte mit der Aufgabenlösung beginnen. Das Aufgabenblatt enthielt als einzige Information die bereits vorgelesene Textaufgabe. Um kein bestimmtes Lösungsvorgehen zu suggerieren, handelte es ich bei den Aufgabenblättern um weiße (und nicht karierte) Blätter. Für die Aufgabenbearbeitung hatte der Schüler neben dem Aufgabenblatt und verschiedenfarbigen Stiften noch Einerwürfel und Zehnerstangen zur Verfügung um bspw. Mengen modellieren zu können. Wie der jeweilige Schüler die Aufgabe bearbeitete, blieb ihm jedoch vollkommen selbst überlassen. Auch konnte sich jeder Schüler für die Aufgabenbearbeitung so viel Zeit lassen, wie er brauchte. Die Versuchsleitung war jedoch dazu angehalten, dass die Gesamtdauer der Videostudie pro Schüler 30 Minuten nicht überschritt.

Von Seiten der Versuchsleitung wurden dem Schüler keine expliziten Hilfestellungen zur jeweiligen Aufgabe gegeben, jedoch durfte auf die Arbeitsmaterialien, die dem Schüler zur Verfügung standen, verwiesen werden (z.B. „Vielleicht können dir die Materialien hier beim Lösen helfen.“) oder es durfte dazu angeregt werden, die Textaufgabe noch einmal zu lesen. Nach der Bearbeitung *jeder* Textaufgabe folgte ein kurzes halbstrukturiertes Interview, um weitere Einsichten in den jeweiligen Lösungsprozess des Schülers gewinnen zu können (s.u.). Entsprechend diesem Vorgehen wurde mit allen fünf problemhaltigen Textaufgaben verfahren.

Halbstrukturiertes, retrospektives Interview

Zusätzlich zur Videographie des individuellen Lösungsvorgehens wurde, sowohl in der Pilotstudie als auch in der Haupterhebung, im Anschluss an *jede* bearbeitete Textaufgabe ein halbstrukturiertes Interview durchgeführt, dem klassischerweise ein Interviewleitfaden zugrunde gelegt wurde, „der dem Interviewer mehr oder weniger verbindlich die Art und die Inhalte des Gesprächs vorschreibt“ (Bortz & Döring, 2009, S. 239).

Diese Methode wurde gewählt, da sie der Versuchsleitung ermöglichte, auf individuelles Vorgehen bei der Aufgabenlösung im Interview einzugehen. Denn neben den vorgegebenen Fragen, die in aller Regel allen Schülern gestellt wurden, war er so möglich, zum einen gezielt Nachfragen zu stellen, falls einzelne Aspekte des Lösungsvorgehens noch unklar waren, und zum anderen zusätzliche Fragen zu stellen, die sich auf spezifisches, individuelles Lösungsverhalten beziehen. Darüber hinaus war es der Versuchsleitung möglich, Fragen auszulassen, falls diese durch den Lösenden schon im Vorfeld beantwortet wurden.

Für das halbstrukturierte Interview wurde ein Leitfaden entwickelt, der sowohl geschlossene als auch offene Fragen enthält. Die Fragen wurden unter Berücksichtigung der von Hron (1994, S. 120 f.) verfassten Richtlinien für die Frageformulierung entwickelt: „Einfache Formulierung“, „Keine langen Fragen“, „Eindeutige Fragen“, „Keine Überforderung des Befragten“, „Konkrete, keine allgemeinen Fragen“ und „Neutrale, nicht suggestive Fragen“. Eine detaillierte Beschreibung der Interviewfragen befindet sich in Kapitel 9.2.

Das retrospektive Vorgehen, also die Befragung des Lösenden *nach* jeder Aufgabenbearbeitung, wurde verwendet, weil die spontanen Lösungsprozesse der Schüler nicht, durch z.B. Verfahren wie das laute Denken oder Zwischenfragen von Seiten der Versuchsleitung, gestört oder verändert werden sollten. Um trotzdem möglichst detaillierte Informationen zu erhalten, wurde das Interview sofort nach jeder bearbeiteten Aufgabe durchgeführt.

8.3 Materialüberprüfung

Die im Rahmen der Pilotstudie gewonnenen Videodaten wurden zunächst dafür verwendet, die eingesetzten Materialien hinsichtlich ihrer Praktikabilität zu überprüfen. Im Fokus standen hier folgende Fragen:

1) Sind die Grundschüler in der Lage, die vorgelegten problemhaltigen Textaufgaben zu lösen?

2) Sind die den Grundschülern zur Verfügung gestellten Arbeitsmaterialien hilfreich und ausreichend?

3) Kann durch das Interview, das sich jeder Aufgabenbearbeitung anschließt, der Lösungsprozess möglichst detailliert erfragt werden? Verstehen die Schüler die Fragen? Sind weitere Fragen notwendig bzw. sinnvoll?
4) Sollen Aspekte des Vorgehens im Rahmen der Videostudie verändert werden, um die spontanen Lösungsprozesse der Schüler vergleichbarer zu machen?

Unter Berücksichtigung diese Fragen ergaben sich folgende Änderungen hinsichtlich der Durchführung der Haupterhebung:

1) Generell war zu erwarten, da es sich bei den vorgelegten problemhaltigen Textaufgaben um anspruchsvolle Aufgaben handelt, dass der Großteil der Grundschüler die einzelnen Aufgaben nicht vollständig richtig löst. Da im Vordergrund der Untersuchung der individuelle und spontane Lösungsprozess steht, erscheint dies weniger problematisch, denn (zu) leichte Textaufgaben würden (zu) wenig beobachtbare Prozesse mit sich bringen. Trotzdem sollte zumindest ein gewisser Anteil der Grundschüler in der Lage sein, die einzelnen Textaufgaben richtig zu lösen bzw. richtige Teillösungen dafür zu finden. Bei vier der fünf Aufgaben war dies auch der Fall (s. Tabelle 1). Die Teufelaufgabe wurde jedoch von keinem der Schüler richtig gelöst. Deswegen wurde diese Aufgabe im Hinblick auf die Haupterhebung durch eine andere ersetzt (Märchenaufgabe, s. Kapitel 9.2).

Tabelle 1: Relative Lösungshäufigkeiten der Grundschüler in der Pilotstudie sortiert nach richtigen und teilweise richtigen Lösungen.

	Räuber	Dampfer	Eis	Schnecke	Teufel
Vollständig richtig gelöst	11,4%	34,3%	14,3%	22,9%	0,0%
Teilweise richtig gelöst	54,3%	25,7%	45,7%	34,3%	37,1%
Insgesamt	65,7%	60,0%	60,0%	57,2%	37,1%

2) Die den Grundschülern zur Verfügung gestellten Arbeitsmaterialien wurden als hilfreich und generell ausreichend erachtet. Alle Arbeitsmaterialien fanden im Rahmen der spontanen Aufgabenlösungen durch die Schüler Anwendung. Trotzdem wurden kleine Änderungen vorgenommen. Den Schülern standen in der Haupterhebung mehr Einerwürfel und Zehnerstangen zur Verfügung um möglichst kein spezifisches Lösungsvorgehen zu suggerieren. Schüler, die bspw. die 52 und 34 Goldmünzen aus der Räuberaufgabe durch Einerwürfel abbilden wollten, sollten dazu auch die Möglichkeit haben und nicht dazu verleitet werden, die Zehner auch tatsächlich mit den zur Verfügung stehenden Zehnerstangen zu modellieren. Darüber hinaus lag den Schülern in der Haupterhebung ein Lineal als zusätzliches Arbeitsmaterial vor, wodurch die Möglichkeit sichergestellt werden sollte, dass exakter gearbeitet werden kann (z.B. bei der Konstruktion eines Zahlenstrahls), da die Aufgabenblätter keinerlei Vorstrukturierung aufwiesen.

3) Den Grundschülern fiel es relativ schwer, die einzelnen Interviewfragen zu beantworten, was oft dazu führte, dass die Schüler ihre Antworten lediglich wiederholten. Um dies in der Haupterhebung zu vermeiden und konkretere Informationen über das Lösungsvorgehen der Schüler zu erhalten, wurden möglichst konkrete und einfache Fragen für das halbstrukturierte Interview in der Haupterhebung formuliert, z.B. „*Hast du dir beim Lösen etwas im Kopf vorgestellt, z.B. ein Bild?*“. Darüber hinaus wurden aufgabenspezifische Fragen für die Haupterhebung formuliert. Im Bezug auf die Dampferaufgabe sollte, falls der Schüler durch das Ausprobieren mehrerer Zahlenkombinationen auf die Lösung kam, erfasst werden, mit welchen Zahlen probiert wurde: „*Kannst du dich noch daran erinnern, mit welchen Zahlen du probiert hast, das Ergebnis zu finden. Welchen waren das?*“. Im Bezug auf die Eisaufgabe sollte, falls der Schüler nur die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten nennt, erfasst werden, welche konkreten Möglichkeiten bei der Aufgabenlösung in Betracht gezogen wurden: „*Kannst du mir sagen, was für Möglichkeiten das alles waren?*“. Detailliertes Nachfragen von Seiten der Versuchsleitung sollte stets möglich sein und war ausdrücklich erwünscht.

4) Um die spontanen Lösungsprozesse der Schüler vergleichbarer zu machen, wurde das Vorgehen im Rahmen der Videostudie noch etwas mehr standardisiert. Dafür wurde zum einen grundlegend auf Hilfestellungen von Seiten der Versuchsleitung verzichtet. Zum anderen gab es keine Option auf zweimaliges Vorlesen der Textaufgabe. Dadurch sollten die Bedingungen der einzelnen Schüler identischer und mögliche Verzerrung bei Zeitenmessungen eingedämmt werden, da einige Schüler in der Pilotstudie bereits während des zweiten Vorlesens mit der Aufgabenlösung begannen (zumindest diejenigen, die die Aufgaben im Kopf lösten).

8.4 Modellentwicklung

Die in der Pilotstudie gewonnenen Videodaten wurden neben der Materialüberprüfung dafür verwendet, ein Modell zu entwickeln, das die spontanen Lösungsprozesse von Schülern bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben abbildet. Dabei sollten im Besonderen die durch die Schüler selbst generierten Repräsentationsformen Berücksichtigung finden. Das Modell diente im weiteren Verlauf als Grundlage für die Entwicklung eines Kodiersystems, mithilfe dessen das Videomaterial der Haupterhebung quantifiziert werden sollte. Sowohl die Modellentwicklung, als auch die Ausarbeitung des Kodiersystems basierte auf der Anwendung inhaltsanalytischer Verfahren (vgl. Bos & Tarnai, 1999). Ziel solcher Verfahren ist die „sozialwissenschaftliche[ ] Analyse von Interaktion und Kommunikation“ (Lange, 2008, S. 51).

Die Entwicklung des Kodiersystems erfolgte zum einen auf Grundlage des Videomaterials aus der Pilotstudie und zum anderen basierend auf bereits vorhandenen Theorien. Somit wurde sowohl induktiv als auch deduktiv vorgegangen. Induktive Vorgehensweisen sind jene, bei denen ein Kodiersystem aus dem vorliegenden Material (in diesem Fall das Videomaterial aus der Pilotstudie) gewonnen wird, deduktive Vorgehensweisen hingegen tragen ein theoriegeleitetes Kodiersystem an das vorliegende Material heran (Bortz & Döring, 2009). Die verschiedenen Vorgehensweisen bei der Entwicklung eines Kodiersystems werden immer wieder (kritisch) diskutiert. Flick weist daraus hin, dass „keiner dieser Fälle in Reinform zu erwarten [ist]. Weder wird der Forscher völlig vorbehaltlos aus den Daten heraus, noch völlig bruchlos aufgrund seines theoretischen Hintergrundes kategorisieren“ (Flick, 1991, S. 165).

Auf eine Transkription des Videomaterials wurde verzichtet, da während der eigentlichen Aufgabenlösung keinerlei verbale Kommunikation stattfand. Ein Großteil des Lösungsprozesses konnte also durch die Videographie des eigentlichen Lösungsvorgehens und u.U. unter Zuhilfenahme des entsprechenden Aufgabenblattes rekonstruiert werden. Durch das nachfolgende halbstrukturierte Interview wurden dann meist relativ wenig oder gar keine zusätzlichen Informationen gewonnen. Die einzige Ausnahme bilden jene Schüler, die ihren gesamten Lösungsprozess intern vollziehen. Hier stellt das Interview die einzige Informationsquelle zur Rekonstruktion des Lösungsvorgehens dar. Trotzdem erschienen die Kosten für die Transkriptionen der einzelnen Videos in keinem Verhältnis zu ihren Nutzen zu stehen.

Im Rahmen der Modellentwicklung wurde in einem ersten Schritt, basierend auf dem zur Verfügung stehenden Videomaterial aus der Pilotstudie, ein vorläufiges Modell entwickelt, wobei immer wieder überprüft wurde, inwieweit die postulierten Modellelemente sich auch tatsächlich im Videomaterial wiederfinden ließen. Dafür wurde das vorläufige Modell durch unabhängige Personen auf zufällig ausgewählte Videos aus der Pilotstudie angewandt. Dadurch sollte einerseits überprüft werden, inwieweit die einzelnen, bisher postulierten Modellaspekte wirklich beobachtbar bzw. im Videomaterial vorhanden waren und andererseits sollten neue Modellaspekte identifiziert werden, die dann wiederum an weiteren Videos überprüft wurden. Ziel war eine möglichst naive und unbeeinflusste, aber realitätsnahe Abbildung der tatsächlichen Lösungsprozesse.

Mittels Literaturrecherche wurden in einem zweiten Schritt bereits vorhandene mathematische Lösungsmodelle bzw. -prozesse ermittelt, die eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit dem entworfenen Rohmodell aufzeigten. In diesem Zusammenhang schienen, wie die Bezeichnung problemhaltige Textaufgaben eigentlich nahelegt, Modelle geeignet, die idealtypische Problemlöseprozesse abbilden. Diese Idee musste jedoch verworfen werden, da die in jenen Modellen postulierten Phasen das Lösungsvorgehen nicht detailliert genug abbilden, um die verfolgten Fragestellungen beantworten zu können. Dies soll beispielhaft an George Polyas Problemlösemodell aufgezeigt werden.

Polya (1995) geht davon aus, dass das mathematische Problem zunächst verstanden werden muss. Dies ist bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgabe natürlich auch der Fall. Jedoch liegt der Fokus im vorliegenden Forschungsvorhaben auf den Prozesses, die sich dem Problemverständnis anschließen. Deshalb sollte der Verständnisprozess der

Schüler möglichst unterstützt werden. Dies wurde durch das Vorlesen der Textaufgabe von Seiten der Versuchsleitung und die Möglichkeit, die Aufgabe jederzeit selbstständig nachzulesen, realisiert. Darüber hinaus wurden solche Aufgaben verwendet, die möglichst kurze und einfache Sätze aufwiesen.

Polya geht dann davon aus, dass nach dem Verstehen des Problems eine Planung der Problemlösung erfolgt. Die durchgeführte Pilotstudie zeigte jedoch, dass die Grundschüler spontan und sehr schnell mit der Bearbeitung der Textaufgaben begannen und sich in diesem Zusammenhang die Frage stellt, ob überhaupt eine Planung der Lösung erfolgt. Sowohl Video- als auch Interviewmaterialien deuten nicht auf Planungsphasen hin. Alternativ ist es natürlich möglich, dass Planungsverhalten stattfindet, jedoch mithilfe des gewählten Untersuchungsdesigns nicht oder nur sehr schwer erfassbar scheint, weil z.B. diese Phase im Lösungsprozess zeitlich enorm kurz ist oder aber den Schülern nicht bewusst ist, weshalb sie keine Auskunft dazu geben (können). Des Weiteren stellt sich bei der Bearbeitung von problemhaltigen Textaufgaben sicherlich die Frage, inwieweit diese einer Planungsphase bedürfen.

Da bei den Grundschülern kein Planungsverhalten ersichtlich war, schließt dies die durch Polya als „Durchführung des Plans“ bezeichnete anschließende Phase aus. Im Grunde verbirgt sich hinter dieser Phase aber der eigentliche Lösungsprozess, der in der vorliegenden Forschungsarbeit von großem Interesse ist. Jedoch ist dafür eine detailliertere Beschreibung einzelner, voneinander abgrenzbarer, kleiner Lösungsschritte von Nöten.

Im Bezug auf die nach Polya letzte Phase im Lösungsprozess („Rückschau halten“) weisen Video- und Interviewmaterialien aus der Pilotstudie darauf hin, dass nur sehr wenige Grundschüler ihr Vorgehen noch einmal überprüfen.

Da sich Problemlösemodelle zur Beschreibung des Lösungsvorgehens von Schülern bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben anscheinend weniger gut eignen, wurde letzten Endes auf mathematische Modellierungskreisläufe zurückgegriffen. In diesem Zusammenhang erwies sich das bereits erwähnte Modell von Verschaffel und Kollegen (2000) als sehr geeignet, welches im Nachfolgenden ausführlich beschrieben werden soll.

8.4.1 Der Mathematische Modellierungskreislauf von Verschaffel, Greer & De Corte

Der von Verschaffel und Kollegen (2000) postulierte Modellierungskreislauf basiert auf dem Modellierungsmodell und Überlegungen von Burkhardt (1981). Dieser fokussiert auf die Lösung von realen Problemen, denen man im alltäglichen Leben begegnen kann, unter Zuhilfenahme der Mathematik.

Verschaffel und Kollegen legen mit ihrem mathematischen Modellierungskreislauf ein schematisches Modell vor, das sowohl zur Beschreibung der Anwendung von Mathematik auf reale Situationen als auch zur Beschreibung der Lösung von Textaufgaben dienen kann (Verschaffel et al., 2000). Auch diesem Modell liegt die Idee zugrunde, dass es sich beim Weg vom Ausgangszustand (z.B. der Textaufgabe) hin zur Lösung eher um einen zyklischen als um einen linearen Prozess handelt (vgl. Burkhardt, 1981; Blum & Niss, 1991; Borromeo Ferri, 2011). Der Modellierungskreislauf nach Verschaffel und Kollegen (2000, s. Abbildung 4, S. 20) lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Ausgangpunkt ist der zu modellierende Ausschnitt aus der Wirklichkeit bzw. die dargebotene Textaufgabe. Da die vorliegende Arbeit den Fokus auf das Lösen von Textaufgaben richtet, wird im Weiteren der Modellierungsprozess nur im Bezug auf das Bearbeiten jener erörtert und die mathematische Modellierung der Wirklichkeit wird ausgespart. Die postulierten idealtypischen Prozesse sind jedoch für beide Aufgabenstellungen identisch.

Als erste Stufe im Modellierungsprozess wird die Konstruktion eines mentalen Modells angenommen. In Anlehnung an sowohl Kintsch und Greeno (1985) als auch Reusser (1990) bezeichnen Verschaffel und Kollegen dies als Situationsmodell. Kintsch (1986) sieht darin „a mental representation of the situation described by the text“ (S. 88). D.h., der Lösende konstruiert zunächst aktiv eine mentale Repräsentation der im Text beschriebenen Situation unter Zuhilfenahme seines Vorwissens (van Dijk & Kintsch, 1983; Schnotz, 2005).

Als zweite Stufe wird das Aufstellen einer mathematischen Gleichung oder mehrerer Gleichungen angenommen. Dafür wird das Situationsmodell in ein mathematisches Modell übersetzt, wobei die lösungsrelevanten Informationen und ihre Relationen zueinander identifiziert und mathematisch ausgedrückt werden müssen.

Die mathematischen Gleichungen werden im Anschluss gelöst und führen somit zur dritten Stufe im Modellierungsprozess, den sogenannten mathematischen Ableitungen („mathematical derivations“), wobei es sich in aller Regel um numerische Ergebnisse handelt. Falls lediglich eine mathematische Gleichung für die Aufgabenlösung notwendig ist, wird diese ebenfalls gelöst und führt dann zu einem mathematischen bzw. numerischen Ergebnis.

Auf der vierten Stufe wird die mathematische Ableitung interpretiert, also wieder in Bezug gesetzt zur Situation der Textaufgabe. Darüber hinaus wird die mathematische Ableitung anhand des konstruierten Situationsmodells evaluiert. D.h., die Aufgabenlösung wird hinsichtlich ihrer Plausibilität überprüft. Wird die Lösung als plausibel erachtet, folgt die letzte Stufe, der Report. Falls dem nicht so ist, sollte der Modellierungskreislauf erneut durchlaufen werden, wobei der Lösende u.U. Änderungen vornehmen oder gar ein anderes, alternatives Lösungsvorgehen einschlagen kann.

In einem zweiten Schritt wurden die im Modellierungskreislauf von Verschaffel und Kollegen beschriebenen Stufen durch selbstgenerierte Repräsentationsformen erweitert. Dies geschah sowohl unter Verwendung des Videomaterials aus der Pilotstudie als auch auf Grundlage bereits vorhandener Forschungsarbeiten.

8.4.2 Erweiterung des Mathematischen Modellierungskreislaufs

Es wird angenommen, dass alle Schüler weitgehend dieselben Modellstufen bei der Lösung von Textaufgaben durchlaufen, unabhängig von ihrer Häufigkeit und Reihenfolge. Dies zeigten auch die Videomaterialen, die im Rahmen der Pilotstudie gewonnen wurden. Die einzelnen Modellstufen wurden jedoch durch die Schüler auf unterschiedliche Art und Weise repräsentiert. Der von Verschaffel und Kollegen postulierte Modellierungskreislauf wurde deswegen basierend auf dem Videomaterial der Pilotstudie um die Repräsentationsformen erweitert, auf die die Schüler beim Lösen der Textaufgaben tatsächlich zurückgriffen bzw. theoretisch hätten zurückgreifen können (s. Abbildung 8).

Die Dimensionalisierung der Modellstufen erfolgte also sowohl theoriegeleitet als auch auf Basis des Videomaterials aus der Pilotstudie. Dabei wurden zwei Repräsentationsaspekte unterschieden. Zum einen wurde den Stufen im Modellierungskreislauf zugeordnet, ob sie depiktional und/oder deskriptional in der

Pilotstudie repräsentiert wurden bzw. depiktional und/oder deskriptional theoretisch repräsentiert werden können. Zum anderen wurde differenziert, ob die jeweilige Stufe intern und/oder extern repräsentiert wurde bzw. repräsentiert werden kann.

Im Nachfolgenden werden die einzelnen Modellstufen und die ihnen zugeordneten Repräsentationsformen näher beschrieben.

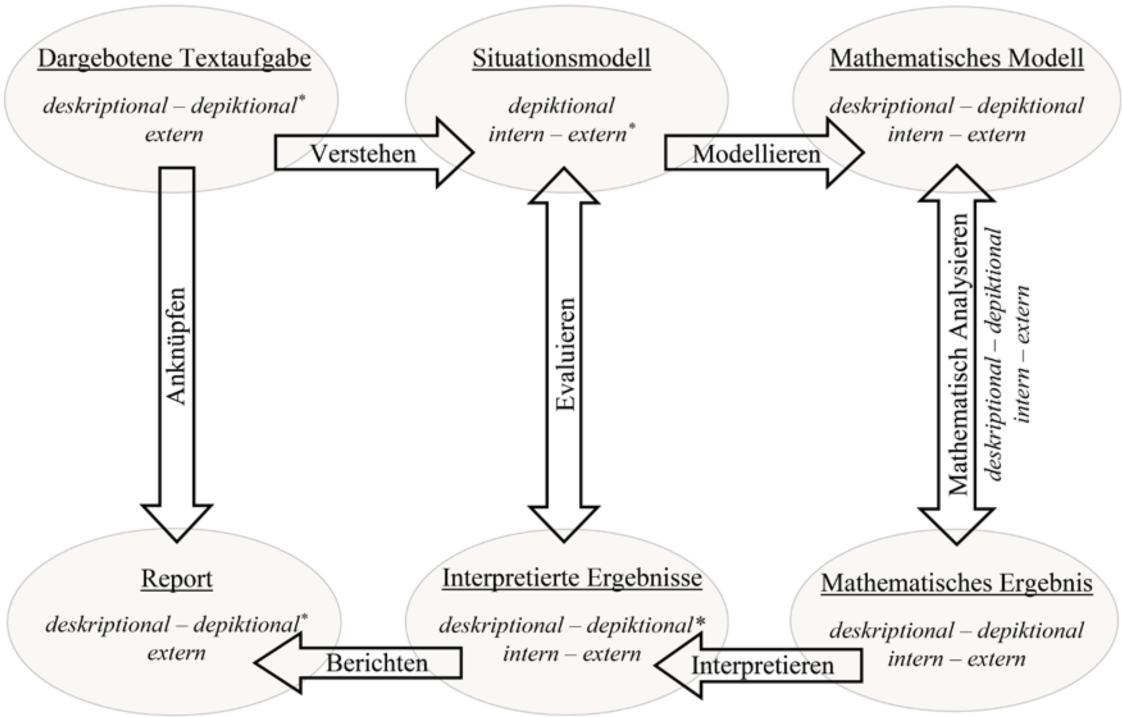

Abbildung 8: Erweiterter mathematischer Modellierungskreislauf mit Repräsentationsformen.
Anmerkung. * theoretisch mögliche Repräsentationsform.

Die dargebotene Textaufgabe ist der Ausgangspunkt der Aufgabenbearbeitung. Hier befindet sich der Lösende auf der Ebene der sogenannten realen Welt. Da die Textaufgabe den Schülern in reiner Textform dargeboten wurde, ist diese immer deskriptional und extern repräsentiert. Sicherlich ist eine Erweiterung um eine depiktionale Komponente denkbar, sofern die Textaufgabe durch jegliche Abbildungsformate begleitet würde. Dies war in der vorliegenden Untersuchung jedoch nicht der Fall.

Die dargebotene Textaufgabe muss vom Schüler zunächst verstanden werden, ein Situationsmodell wird konstruiert. Dafür wird der deskriptional dargebotene Text in eine depiktionale Repräsentation überführt (Schnotz & Bannert, 2003). Es wird davon ausgegangen, dass ein Situationsmodell eher intern repräsentiert wird. Aber auch eine externe Repräsentation ist möglich, wenn Schüler z.B. den beschriebenen Sachverhalt der Textaufgabe bildlich darstellen oder gar szenisch nachspielen. Dies war jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht der Fall.

Um die Textaufgabe nun lösen zu können, muss sich der Lösende von der in der Aufgabe beschriebenen mehr oder weniger realen Welt in die sogenannte mathematische Welt begeben. Die im Situationsmodell enthaltenen Informationen werden im Hinblick auf die Aufgabenlösung vereinfacht, auf lösungsrelevante Informationen reduziert und letztendlich in ein mathematisches Modell überführt, welches mathematisch analysiert wird und somit zur Erlangung eines mathematischen Ergebnisses bzw. mehrerer mathematischer Ergebnisse führt. Die Überführung der Informationen in ein mathematisches Modell ist keine reine 1:1-Übersetzung, sondern das aktive Konstruieren eines Modells (Schneeberger, 2009). Das Agieren in der mathematischen Welt wird als dynamischer Prozess verstanden, in dem der Lösende mehrere mathematische Teilmodelle aufstellen, diese mathematisch analysieren und somit, über mehrere mathematische Teilergebnisse, zum mathematischen Endergebnis bzw. zu Endergebnissen gelangen kann. Dies wird durch den Doppelpfeil, der das mathematische Modell mit dem mathematischen Ergebnis über die mathematische Analyse verbindet, deutlich. Borromeo Ferri (2011) spricht in diesem Zusammenhang von „Minikreisläufen“, welche durch die jeweilige Aufgabenstruktur beeinflusst werden. Die Konstruktion mehrerer mathematischer (Teil)modelle, deren Analyse und die daraus resultierenden mathematischen (Teil)ergebnisse, die wiederum als Grundlage für die Konstruktion neuer mathematischer (Teil)modelle dienen, werden im Weiteren als Analyseschritte bezeichnet. Zur Veranschaulichung siehe Abbildung 9. Da es sich bei den hier verwendeten problemhaltigen Textaufgaben um mehrschrittige Textaufgaben handelt, sollten, zumindest für richtige Aufgabenlösungen, bei allen Aufgaben mehrere Analyseschritte durchlaufen werden.

1. mathematisches Teilmodell: ***52 + 34***	2. mathematisches Teilmodell: ***86 ÷ 2***	3. mathematisches Teilmodell: ***52 - 43***
1. math. Analyse	2. math. Analyse	3. math. Analyse
1. mathematisches Teilergebnis ***= 86***	2. mathematisches Teilergebnis ***= 43***	3. mathematisches Teilergebnis ***= 9***
1. Analyseschritt	*2. Analyseschritt*	*3. Analyseschritt*

Abbildung 9: Veranschaulichung mehrerer Analyseschritte bei der Räuberaufgabe.

An dieser Stelle soll auf eine Besonderheit im weiterentwickelten Modellierungskreislauf hingewiesen werden. Grundlegend wird der Fokus auf die Dimensionalisierung der Modellstufen gelegt und nicht auf die Phasen zwischen zwei Modellstufen. So ist z.B. von Interesse, auf welche Art und Weise ein mathematisches Modell repräsentiert wird. Über die Phase des Modellierens werden folglich keinerlei Aussagen gemacht. Die einzige Ausnahme bildet hier die mathematische Analyse. Sie ist im Vergleich zu den anderen Phasen relativ gut beobachtbar bzw. im Rahmen des Interviews gut rekonstruierbar. Darüber hinaus scheint diese Phase für das Explorieren individueller Lösungsprozesse bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben bedeutsam, da diese einen innermathematischen Schwerpunkt aufweisen.

Das Agieren in der mathematischen Welt kann sowohl extern als auch intern erfolgen. Dabei kann bei jedem Übergang vom mathematischen (Teil)modell zur mathematischen (Teil)analyse, von der mathematischen (Teil)analyse zum mathematischen (Teil)ergebnis oder aber auch vom mathematischen (Teil)ergebnis zu einem weiteren mathematischen (Teil)modell zwischen externen und internen Repräsentationsformen gewechselt werden. Ein Schüler kann bspw. ein mathematisches Modell externalisieren, indem er eine Rechnung aufschreibt, diese dann intern analysieren, indem er im Kopf rechnet, und das mathematische Ergebnis wiederum externalisieren, indem er es aufschreibt. Darüber hinaus kann das Agieren in der mathematischen Welt sowohl depiktional als auch deskriptional erfolgen. Ein Schüler kann bspw. eine Gleichung aufstellen und diese dann lösen, wobei der gesamte Lösungsprozess dann deskriptional wäre. Ein Schüler kann aber auch die Einwürfel und Zehnerstangen zur Aufgabenlösung verwenden oder sich eine Skizze machen, wobei der Lösungsprozess dann depiktionale Anteile hätte. In diesem

Zusammenhang sind also alle Kombinationen von Repräsentationsformen und Repräsentationswechsel, sowohl innerhalb eines Analyseschrittes als auch zwischen verschiedenen Analyseschritten, denkbar.

Um ein depiktionales mathematisches Modell vom depiktionalen Situationsmodell abgrenzen zu können, wurde folgendes Unterscheidungskriterium festgelegt: Ein mathematisches Modell ist dann depiktional repräsentiert, wenn sich der Schüler bei der Aufgabenlösung und/oder im Interview auf lösungsrelevante Details bezieht. Beschreibt ein Schüler bspw. bei der Räuberaufgabe, dass er sich zwei Räuber vorgestellt hat, die sich in einem dunklen Wald befanden und dort viele Tiere waren, wird dies der depiktionalen Repräsentation des Situationsmodells zugeordnet. Um ein depiktionales mathematisches Modell würde es sich jedoch handeln, wenn sich der Schüler z.B. die beiden Mengen von Münzen vorstellt (intern) oder sie darstellt (extern).

Besonders die Erweiterung der Analyseschritte um eine depiktionale Komponente scheint der Hauptunterschied zum ursprünglichen Modellierungskreislauf von Verschaffel und Kollegen zu sein. Dies ist jedoch sinnvoll, da gerade Grundschüler über ein begrenztes mathematisches Vorwissen und begrenzte mathematische Fähigkeiten verfügen und deswegen bei der Bearbeitung von anspruchsvollen (Text)aufgaben, wie den problemhaltigen Textaufgaben, auf zusätzliche, alternative mathematische Modelle zurückgreifen müssten. Auch Ruwisch und Franke (2010) sehen, wie bereits erläutert, im Lösen von Textaufgaben kein rein symbolisches Operieren, sondern erachten das Verwenden von bildlichen Repräsentationen als wichtiges Hilfsmittel für Grundschüler. An dieser Stelle soll jedoch erwähnt werden, dass Depiktionen in der vorliegenden Arbeit nicht nur als „Hilfsmittel“ für die deskriptionalen Repräsentationen erachtet werden sollen. D.h., dass ein deskriptional repräsentierter Analyseschritt wird nicht als qualitativ besser betrachtet wird als ein depiktional repräsentierter bzw. ein durch Depiktion begleiteter deskriptionaler Analyseschritt.

Im Modellierungskreislauf werden nach der Ermittlung des mathematischen Ergebnisses bzw. der mathematischen Ergebnisse diese in einem nächsten Schritt interpretiert, also in ein interpretiertes Ergebnis bzw. interpretierte Ergebnisse übersetzt. An dieser Stelle sollte das ermittelte Ergebnis evaluiert, also in Bezug zum Situationsmodell gesetzt werden. Der Lösende stellt sich hier im Sinne einer Plausibilitätsüberprüfung in erster Linie die Frage, ob das ermittelte (interpretierte) Ergebnis sinnvoll erscheint, also zur Ausgangssituation bzw. zum konstruierten Situationsmodell passt. Ist dem nicht so, sollte der Modellierungskreislauf erneut durchlaufen werden.

Die interpretierten Ergebnisse können entweder extern deskriptional, intern deskriptional, extern depiktional oder auch intern depiktional repräsentiert werden. Bei einer externen deskriptionalen Repräsentation würde der Lösende entweder die Interpretation aufschreiben bzw. laut benennen (z.B. „*9 Münzen*"). Bei einer internen deskriptionalen Repräsentation würde der Lösende die Interpretation mental benennen. Bei einer depiktionalen Repräsentation würde der Lösende die Interpretation bildlich darstellen bzw. sie sich vorstellen. Die neun Münzen müssten hier also möglichst realistisch abgebildet werden. Sie sollten eindeutig als solche identifizierbar sein. Depiktionale Repräsentationen der interpretierten Ergebnisse kamen jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht vor.

Der idealtypische Lösungsprozess wird durch den Report abgeschlossen. Die ermittelte, interpretierte Lösung wird berichtet. Dies geschieht klassischerweise in Form eines Antwortsatzes, wodurch der Report extern und deskriptional repräsentiert werden würde. Darüber hinaus ist aber auch eine externe depiktionale Repräsentation denkbar. Dies könnte wahrscheinlich nur mithilfe mehrerer Bilder umgesetzt werden. Depiktionale Repräsentationen im Rahmen des Reports kamen in der vorliegenden Arbeit nicht vor.

Das Anknüpfen an die dargebotene Textaufgabe bei der Formulierung des Reports stellt eine zusätzliche Phase im erweiterten Modellierungskreislauf dar. Dabei handelt es sich um ein explizites Zurückgehen zur ursprünglichen Textaufgabe und der daraus resultierenden Formulierung eines äquivalenten Reports. Das Anknüpfen wird hier nicht als notwendige Phase im Lösungsprozess betrachtet, aber als eine durchaus mögliche. Der Lösende kann also auch ohne explizites Anknüpfen einen Report formulieren. In diesem Fall bezieht er sich auf die im Arbeitsgedächtnis vorhandenen Informationen aus der Textaufgabe.

Um die individuellen Lösungsprozesse von Schülern bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben, basierend auf dem weiterentwickelten Modellierungskreislauf, näher beschreiben und analysieren zu können, wurde in einem weiteren Schritt ein Kodiersystem entwickelt.

8.4.3 Entwicklung des Kodiersystems zur Erfassung der Lösungsprozesse

Um individuelle Lösungsprozesse beschreiben und analysieren zu können, wurde nun ein Kodiersystem entwickelt, in dessen Mittelpunkt das weiterentwickelte Modell mathematischer Modellierung stand. Dies erfolgte basierend auf der Anwendung inhaltsanalytischer Verfahren (vgl. Bos & Tarnai, 1999). In Abbildung 10 ist das (zyklische) Vorgehen dabei durch die Schritte 1 bis 3 (*Theorie*, *Entwicklung eines Kodiersystems*, *Vortest*) schematisch dargestellt; die Schritte 4 (*Kodierung und Datenanalyse*) und 5 (*Interpretation der Ergebnisse*) wurden erst im Rahmen der Haupterhebung durchlaufen.

Die bereits erläuterten theoretischen Grundlagen der vorliegenden Arbeit und die sich daraus ergebenden Forschungsfragen (Schritt 1: *Theorie*) dienten als Basis für das Kodiersystem. Die Zeichen- und Kategorienbildung erfolgte dabei sowohl induktiv als auch deduktiv (Schritt 2: *Entwicklung eines Kodiersystems*).

Die Pilotstudie ist hier hauptsächlich bei den Schritten 2 (*Entwicklung eines Kodiersystems*) und 3 (*Vortest*), die Durchführung der Haupterhebung beim Übergang von Schritt 3 (*Vortest*) zu Schritt 4 (*Kodierung und Datenanalyse*) zu verorten. Die Schritte 4 (*Kodierung und Datenanalyse*) und 5 (*Interpretation der Ergebnisse*) beziehen sich auf die Auswertung des Videomaterials.

Bei der Entwicklung des Kodiersystems wurde sich an Forschungsarbeiten orientiert, die basierend auf Videomaterialien ebenfalls Kodiersysteme entwickelt haben (z.B. Seidel, Prenzel, Duit, & Lehrke, 2003; Mayring et al., 2005).

Beim vorliegenden Kodiersystem handelt es sich um ein niedrig bis mittel inferentes System, mit dem direkt beobachtbare Aspekte des Lösungsprozesses erfasst werden können (Petko et al., 2003). Dabei sind die einzelnen Zeichen und Kategorien möglichst präzise definiert, wodurch der Beobachter eine möglichst objektive Entscheidung treffen kann, die „wenig schlussfolgernde Kognitionen von Seiten des Beobachters“ (Hodel et al., 2006, S. 171) bedarf. Folglich sollte auf Basis eines niedrig inferenten Kodiersystems eine hohe Beobachterübereinstimmung im Sinne einer hohen Reliabilität erzielt werden. Hoch inferente Schätzverfahren hingegen verlangen dem Beobachter qualitative Entscheidungen ab, was sich in einer geringern Reliabilität niederschlagen kann (Seidel et al., 2003).

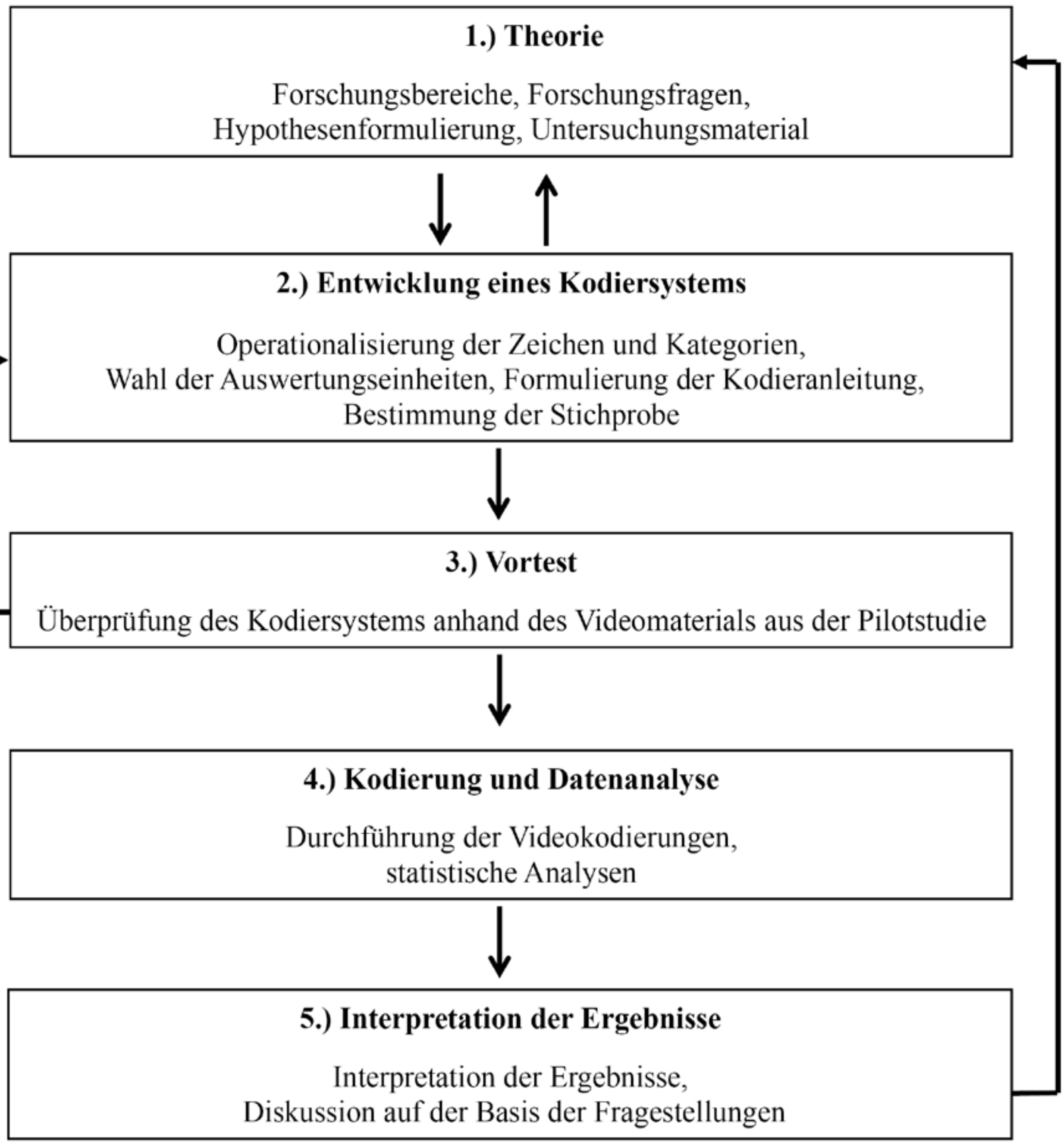

Abbildung 10: Schematisierung des Vorgehens bei der Entwicklung des Kodiersystems (vgl. Bos & Tarnai, 1999, S. 667; Seidel et al., 2003, S.104).

Das hier entwickelte Kodiersystem umfasst sowohl Zeichen als auch Kategorien.

Bei der Entwicklung der sogenannten qualitativen Merkmale, also der (dichotomen) Zeichen und (polytomen) Kategorien wurden Genauigkeitskriterium, Exklusivitätskriterium und Exhaustivitätskriterium (Bortz & Döring, 2009) berücksichtigt.

Das Genauigkeitskriterium fordert eine exakte Definition der Kategorien, also „präzise definierte, operationale Indikatoren für die einzelnen Kategorien des Merkmals, deren Vorhandensein oder Nichtvorhandensein über die Zugehörigkeit der

Untersuchungsobjekte zu den einzelnen Merkmalskategorien entscheidet“ (Bortz & Döring, 2009, S. 140).

Das Exklusivitätskriterium fordert, dass sich einzelne Kategorien gegenseitig ausschließen müssen, was bedeutet, dass ein Objekt nicht gleichzeitig mehreren Kategorien zugeordnet werden kann. Löst bspw. ein Schüler eine Aufgabe richtig, dann darf die Aufgabenrichtigkeit nicht gleichzeitig als „*richtig*“ und „*nicht richtig*“ oder „*teilweise richtig*“ kategorisiert werden. Nur eine der Kategorien ist pro Schüler und pro Aufgabe zutreffend. Auch dürfen hier keine Kategorien auftreten, die dasselbe meinen, wie z.B. „*richtig*“ und „*korrekt*“.

Das Exhaustivitätskriterium fordert, dass ein Merkmal erschöpfend beschrieben wird, wodurch jedes Objekt einer Kategorie eindeutig zugeordnet werden kann. Kategorien wie z.B. „*Sonstige*“ sollten entweder gar nicht notwenig sein oder aber sehr selten auftreten.

Die verschiedenen Kodiereinheiten wurden anhand von Videos aus der Pilotstudie immer wieder durch mehrere unabhängige Beobachter überprüft und bei Bedarf verändert bzw. erweitert bis das Kodiersystem in seiner endgültigen Fassung vorlag. In diesem Zusammenhang entstanden sukzessive ein Kodierhandbuch und ein Kodierbogen.

Der Kodierbogen wurde dabei so gestaltet, dass alle Zeichen und Kategorien direkt durch Ankreuzen vorgegebener Antwortoptionen kodiert werden konnten. Alle weiteren zu kodierenden Aspekte (wie z.B. die Anzahl der Analyseschritte) wurden explizit erfragt und konnten direkt, z.B. durch die Angabe von Häufigkeiten, kodiert werden. Dadurch sollte eine maximale Übersichtlichkeit des Kodiersystems erreicht werden, wodurch zeitintensive Kodierungen vermieden werden sollten. Pro Schüler wurden fünf Kodierbögen verwendet, für jede Aufgabe einer.

Das Kodierhandbuch enthielt neben der kurzen Erläuterung des Forschungszweckes eine ausführliche Beschreibung der einzelnen Aspekte des Kodiersystems samt Kodiervorschriften, Bespielen und wenn nötig Besonderheiten.

Eine genauere Beschreibung der eigentlichen Videokodierung im Rahmen der Haupterhebung findet sich in Kapitel 9.3 (S. 98).

Das Kodiersystem wurde anhand des Videomaterials aus der Pilotstudie fortwährend überprüft (vgl. Abbildung 10, Schritt 3: *Vortest*). Dafür kodierten drei Beobachter unabhängig voneinander dasselbe Videomaterial. Die Kodierungen wurden dann gemeinsam diskutiert und hinsichtlich ihrer Übereinstimmung per Augenschein überprüft. Dieses Vorgehen wurde solange wiederholt, bis die verschiedenen Beobachter unabhängig voneinander dasselbe Videomaterial auf möglichst dieselbe Art und Weise kodierten.

Im Nachfolgenden wird das Kodiersystem im Detail beschrieben. Dies erfolgt getrennt für das Zeichen- und für das Kategoriensystem.

8.4.3.1 Zeichensystem

Ein Zeichensystem besteht aus mehreren Facetten, denen jeweils ein oder mehrere Zeichen zugeordnet werden können. Im Gegensatz zu einem Kategoriensystem ist keine eindeutige Zuordnung einer Facette zu einem Zeichen erforderlich, Mehrfachantworten sind also möglich.

Dies wurde genutzt, um die jeweiligen Repräsentationsformen, auf die die Schüler bei der Bearbeitung einer problemhaltigen Textaufgabe spontan zurückgriffen, im Bezug auf die einzelnen Phasen des Lösungsprozesses, genauer zu klassifizieren. Die Repräsentationen wurden dabei im Hinblick auf zwei Dimensionen beurteilt: Zum einen wurde kodiert, ob es sich bei der vorliegenden Repräsentationsform um eine externe oder interne Repräsentation handelt. Zum anderen wurde kodiert, ob es sich dabei um eine depiktionale oder deskriptionale Repräsentation handelt. Wie bereits erwähnt, waren Mehrfachantworten, auch im Sinne multipler Repräsentationen, möglich.

Tabelle 2 stellt den ersten Teil des Zeichensystems mit seinen Facetten und Zeichen im Überblick dar.

Tabelle 2: Im Kodiersystem verwendete Zeichen – Teil I.

Facette	Zeichen	
Mathematisches (Teil)Modell	deskriptional	extern
	deskriptional	intern
	depiktional	extern
	depiktional	intern
Mathematische (Teil)Analyse	deskriptional	extern
	deskriptional	intern
	depiktional	extern
	depiktional	intern
Mathematisches (Teil)Ergebnis	deskriptional	extern
	deskriptional	intern
	depiktional	extern
	depiktional	intern

Da die Zeichen für alle drei Facetten identisch sind, werden sie nachfolgend lediglich anhand der unterschiedlichen Repräsentationsmöglichkeiten im Bezug auf die mathematischen (Teil)Modelle exemplarisch näher erläutert.

Facette: Mathematisches (Teil)Modell

Grundregel: Zuordnung einer oder mehrere Repräsentationsformen (Zeichen) zu den einzelnen mathematischen (Teil)Modellen (Facette):

- Zeichen 1: deskriptional extern
- Zeichen 2: deskriptional intern
- Zeichen 3: depiktional extern
- Zeichen 4: depiktional intern

Besonderheit: Hier können auch mehrere Zeichen gleichzeitig kodiert werden.

Zeichen 1: extern deskriptional

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn das mathematische Modell direkt beobachtbar ist und deskriptional repräsentiert wird.

Beispiel: Der Schüler schreibt ein Gleichungssystem auf.

Zeichen 2: intern deskriptional

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn das mathematische Modell *nicht* direkt beobachtbar ist und deskriptional repräsentiert wird.

Beispiel: Der Schüler rechnet im Kopf.

Besonderheit: Diese Repräsentationsform muss basierend auf dem Interview kodiert werden, da die alleinige Videographie des Lösungsprozesses keinen Zugang zu internen Repräsentationsformen bietet.

Zeichen 3: extern depiktional

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn das mathematische Modell direkt beobachtbar ist und depiktional repräsentiert wird.

Beispiel: Der Schüler macht eine Skizze *oder* modelliert Mengen mithilfe der Einerwürfel und Zehnerstangen.

Besonderheit: Dieses Zeichen wird nur dann kodiert, wenn die depiktionale Repräsentation für die Aufgabenlösung relevante Details enthält. Dadurch soll die depiktionale Repräsentation eines mathematischen Modells von der depiktionalen Repräsentation des Situationsmodells abgegrenzt werden. Dekorative Bilder oder ein für den Lösungsprozess nicht bedeutsames Hantieren mit Einerwürfeln oder Zehnerstangen werden nicht als depiktionale Repräsentationen gewertet.

Zeichen 4: intern depiktional

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn das mathematische Modell *nicht* direkt beobachtbar ist und depiktional repräsentiert wird.

Beispiel: Der Schüler stellt sich ein Bild vor.

Besonderheit: Diese Repräsentationsform muss basierend auf dem Interview kodiert werden, da die alleinige Videographie des Lösungsprozesses keinen Zugang zu internen Repräsentationsformen bietet. Dieses Zeichen wird nur dann kodiert, wenn die depiktionale Repräsentation für die Aufgabenlösung relevante Details enthält. Dadurch soll die depiktionale Repräsentation eines mathematischen Modells von der depiktionalen Repräsentation des Situationsmodells abgegrenzt werden.

Neben diesem ersten Teil des Kodiersystems wurden weitere Zeichen zur Beobachtung einzelner Details im Lösungsprozess berücksichtigt. Tabelle 3 stellt den zweiten Teil des Zeichensystems mit seinen Facetten und Zeichen im Überblick dar.

Tabelle 3: Im Kodiersystem verwendete Zeichen – Teil II.

Facette	Zeichen
Multiple Repräsentation im mathematischen Modell	Multiple Repräsentation vorhanden Keine multiple Repräsentation vorhanden
Überprüfung des Vorgehens	Überprüfung vorhanden Keine Überprüfung vorhanden
Abbruch der Bearbeitung	Abbruch vorhanden Kein Abbruch vorhanden
Revision im Interview	Revision vorhanden Keine Revision vorhanden
Lösungsstrategie	Willkürliches Vorgehen vorhanden Kein willkürliches Vorgehen vorhanden
Anknüpfen bei der Rückinterpretation des mathematischen Ergebnisses	Anknüpfen vorhanden Kein Anknüpfen vorhanden

Facette: Multiple Repräsentation im mathematischen Modell

Grundregel: Zuordnung des Lösungsvorgehens zu einem der zwei Zeichen (disjunktes Zeichensystem):

- Zeichen 1: Multiple Repräsentation vorhanden
- Zeichen 2: Keine multiple Repräsentation vorhanden

Zeichen 1: Multiple Repräsentation vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn sowohl ein depiktionales als auch ein deskriptionales mathematisches Modell zur Aufgabenlösung konstruiert wird. Dabei ist nicht von Bedeutung, ob das mathematische Modell extern oder intern repräsentiert wird.

Beispiel: Der Schüler bearbeitet eine Aufgabe, indem er zunächst eine Skizze von aufgabenrelevanten Inhalten anfertigt (depiktionales mathematisches Modell) und anschließend eine Rechnung aufschreibt (deskriptionales mathematisches Modell).

Besonderheiten: Die depiktional und deskriptional repräsentierten mathematischen Modelle müssen aufgabenrelevant sein. Dekorative Bilder oder ein für den Lösungsprozess nicht bedeutsames Hantieren mit Einerwürfeln oder Zehnerstangen werden nicht als depiktionale Repräsentation gewertet.

Zeichen 2: Keine multiple Repräsentation vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn die Aufgabenlösung alleine mithilfe eines depiktionalen *oder* deskriptionalen mathematischen Modells erfolgt, d.h., es gibt *keine* Kombination von depiktionaler oder deskriptionaler Repräsentationsform. Dabei ist nicht von Bedeutung, ob das mathematische Modell extern oder intern repräsentiert wird.

Beispiel: Der Schüler bearbeitet eine Aufgabe indem er ein Gleichungssystem aufstellt. Er verzichtet dabei auf jegliche Skizzen, den Einsatz der Einerwürfel und Zehnerstangen oder die Zuhilfenahme seiner Finger.

Facette: Überprüfung des Vorgehens

Grundregel: Zuordnung des gesamten Lösungsvorgehens zu einem der beiden Zeichen (disjunktes Zeichensystem):

- Zeichen 1: Überprüfung vorhanden
- Zeichen 2: Keine Überprüfung vorhanden

Zeichen 1: Überprüfung vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn der Schüler sein Lösungsvorgehen überprüft.

Beispiel: Der Schüler rechnet noch einmal nach.

Besonderheit: An jeder Stelle des Lösungsprozesses kann etwas überprüft werden. Im Grunde kann auch mehrfach überprüft werden. Dies wird an diese Stelle jedoch nicht erfasst.

Das Überprüfen des Vorgehens geht somit über die Modellphase des Evaluierend hinaus.

Zeichen 2: Keine Überprüfung vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn der Schüler sein Lösungsvorgehen *nicht* überprüft.

Beispiel: Der Schüler rechnet *nicht* noch einmal nach.

Facette: Abbruch der Bearbeitung

Grundregel: Zuordnung des gesamten Lösungsvorgehens zu einem der beiden Zeichen (disjunktes Zeichensystem):

- Zeichen 1: Abbruch
- Zeichen 2: Kein Abbruch

Zeichen 1: Abbruch vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn der Schüler sein Lösungsvorgehen abbricht.

Beispiel: Der Schüler sagt, dass er die Aufgabe nicht mehr bearbeiten will.

Besonderheit: Die Schüler haben jederzeit die Möglichkeit, die Aufgabe abzubrechen. Bei sehr langen Lösungszeiten ohne erkennbaren Lösungsforschritt kann auch die Versuchsleitung dem Schüler anbieten, die Aufgabe abzubrechen. Auch dies wird als Abbruch kodiert.

Zeichen 2: Kein Abbruch vorhanden

Nähere Erläuterung: Diese Kategorie wird ausgewählt, wenn der Schüler sein Lösungsvorgehen *nicht* abbricht.

Beispiel: Der Schüler sagt *nicht*, dass er die Aufgabe nicht mehr bearbeiten will.

Facette: Revision im Interview

Grundregel: Zuordnung des gesamten Lösungsvorgehens zu einem der beiden Zeichen (disjunktes Zeichensystem):

- Zeichen 1: Revision
- Zeichen 2: keine Revision

Zeichen 1: Revision vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn der Schüler im Verlauf des *Interviews* zur Erkenntnis kommt, dass sein Lösungsvorgehen nicht richtig und/oder unvollständig war.

Beispiel: Der Schüler sagt, dass er bei der Aufgabenlösung etwas falsch gemacht oder etwas vergessen hat.

Besonderheit: Diese Kategorie wird auch dann ausgewählt, wenn die Revision durch den Schüler nicht näher erläutert wird oder die Revision zu einer Falschlösung führt. Bei der Prozesskodierung wird nur die erste, spontane Aufgabenlösung berücksichtigt, also das, was der Schüler tut *bevor* er signalisiert, mit der Aufgabenbearbeitung fertig zu sein. Bearbeitet der Schüler die Aufgabe erneut *nachdem* er bereits signalisiert hat, mit der Aufgabenbearbeitung fertig zu sein, so wird die Kategorie „Revision ja“ ebenfalls ausgewählt, der „neue“ Lösungsweg wird jedoch nicht kodiert!

Zeichen 2: keine Revision vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn der Schüler im Verlauf des *Interviews* nicht äußert, dass sein Lösungsvorgehen nicht richtig und/oder unvollständig war.

Beispiel: Der Schüler sagt *nicht*, dass er bei der Aufgabenlösung etwas falsch gemacht oder etwas vergessen hat.

Facette: Lösungsstrategie

Grundregel: Zuordnung des gesamten Lösungsvorgehens zu einem der beiden Zeichen (disjunktes Zeichensystem):

- Zeichen 1: willkürliches Vorgehen vorhanden
- Zeichen 2: kein willkürliches Vorgehen vorhanden

Zeichen 1: willkürliches Vorgehen vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn der Schüler die in der Textaufgabe gegebenen Informationen in einer *nicht* nachvollziehbaren Art und Weise verwendet *oder* wenn er eine mögliche Aufgabenlösung rät.

Beispiel: Der Schüler berichtet den Preis für eine Eiskugel *oder* er verwendet die in der Textaufgabe gegebenen Zahlen und verrechnet diese in einer Art und Weise, deren Sinn er nicht näher erläutert bzw. erläutern kann (z.B. Schnecke: 20 - 5 + 2 = 17).

Besonderheit: Auch ein willkürliches Vorgehen kann zu einem scheinbar richtigen numerischen Ergebnis führen!

Zeichen 2: kein willkürliches Vorgehen vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn der Schüler die in der Textaufgabe gegebenen Informationen in einer nachvollziehbaren Art und Weise verwendet.

Beispiel: Durch das Vorgehen des Schülers wird deutlich, dass die in der Textaufgabe gegebenen Zahlen nicht in irgendeiner Art und Weise verrechnet werden, sondern dass dahinter lösungsrelevante Überlegungen liegen.

Besonderheit: Kein willkürliches Vorgehen wird auch dann kodiert, wenn der Schüler die Aufgabe missverstanden hat und nun basierend auf seinem „falschen“ Situationsmodell korrekt agiert *oder* wenn der Schüler sich z.B. verrechnet.

Facette: Anknüpfen bei der Rückinterpretation des mathematischen Ergebnisses

Grundregel: Zuordnung des gesamten Lösungsvorgehens zu einem der beiden Zeichen (disjunktes Zeichensystem):

- Zeichen 1: Anknüpfen vorhanden
- Zeichen 2: kein Anknüpfen vorhanden

Zeichen 1: Anknüpfen vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn sich der Schüler beim Berichten seiner Aufgabenlösung explizit auf die Textaufgabe bezieht.

Beispiel: Der Schüler liest die Textaufgabe noch einmal bevor er seinen Antwortsatz formuliert.

Zeichen 2: kein Anknüpfen vorhanden

Nähere Erläuterung: Dieses Zeichen wird ausgewählt, wenn sich der Schüler beim Berichten seiner Aufgabenlösung *nicht* explizit auf die Textaufgabe bezieht.

Beispiel: Der Schüler liest die Textaufgabe *nicht* noch einmal durch und formuliert seinen Antwortsatz „aus dem Gedächtnis“.

8.4.3.2 *Kategoriensystem*

Um den Lösungsprozess noch näher spezifizieren zu können, wurde zusätzlich zum Zeichen- ein Kategoriensystem konzipiert. Die Kategorisierung erfolgte hier auf Basis des gesamten Lösungsprozesses pro Aufgaben und Schüler, also über die verschiedenen Analyseschritte hinweg.

Tabelle 4 stellt das Kategoriensystem mit seinen Facetten und den entsprechenden Kategorien im Überblick dar.

Tabelle 4: Im Kodiersystem verwendete Kategorien.

Facette	**Kategorie**
Richtigkeit der Lösung	richtige Lösung partiell inkongruente Lösung total inkongruente Lösung
Lösungsvorgehen (Denkstil)	ganzheitliches Lösungsvorgehen zergliederndes Lösungsvorgehen kombinierendes Lösungsvorgehen

Im nachfolgenden werden die einzelnen Kategorien näher erläutert.

Facette: Richtigkeit der Lösung

Grundregel: Zuordnung der ermittelten Lösung samt Lösungsvorgehen pro Schüler und Aufgabe zu einer der drei Kategorien (disjunktes Kategoriensystem):

- Kategorie 1: richtige Lösung
- Kategorie 2: partiell inkongruente Lösung
- Kategorie 3: total inkongruente Lösung

Kategorie 1: richtige Lösung

Nähere Erläuterung: Diese Kategorie wird ausgewählt, wenn der vom Schüler gewählte Lösungsweg richtig und nachvollziehbar ist und zu einem richtigen, numerischen Ergebnis führt. D.h. mathematisches Modell, mathematische Analyse und mathematisches Ergebnis müssen richtig sein. Rechenfehler führen somit nicht zu einer richtigen Lösung.

Beispiel: Der Schüler bearbeitet eine Aufgabe, indem er ein für die Aufgabenlösung adäquates Gleichungssystem aufstellt und dieses korrekt löst.

Besonderheit: Eine Lösung wird nur dann als richtig kodiert, wenn der vom Schüler gewählte Lösungsweg richtig und nachvollziehbar ist. Kommt der Schüler durch einen falschen Lösungsweg zum vermeintlich richtigen, numerischen Ergebnis, wird die Lösung nicht als richtig kodiert.
Lösungen werden jedoch auch dann als richtig kodiert, wenn der Lösende von sich aus keinen Antwortsatz im Sinne eines Reports formuliert, im nachfolgenden Interview zur Aufgabenlösung jedoch eine korrekte Interpretation des mathematischen Ergebnisses erkennbar ist.

Kategorie 2: partiell inkongruente Lösung

Nähere Erläuterung: Diese Kategorie wird ausgewählt, wenn der vom Schüler gewählte Lösungsweg zum Großteil richtig und nachvollziehbar ist, jedoch kleinere Mängel aufweist.

Beispiel: Der Schüler bearbeitet eine Aufgabe, indem er ein für die Aufgabenlösung adäquates Gleichungssystem aufstellt, dieses jedoch nicht *korrekt* löst. *Oder* der Schüler berichtet ein Teilergebnis anstelle des Endergebnisses.

Kategorie 3: total inkongruente Lösung

Nähere Erläuterung: Diese Kategorie wird ausgewählt, wenn der vom Schüler gewählte Lösungsweg nicht richtig und nicht nachvollziehbar ist.

Beispiele: Der Schüler bearbeitet eine Aufgabe, indem er eine völlig neue Aufgabe aus den ihm zur Verfügung stehenden Informationen formt und z.B. bei der Eisaufgabe den Preis des Eises berechnet und nicht die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten.

Facette: Lösungsvorgehen (Denkstil)

Grundregel: Zuordnung des gesamten Lösungsvorgehens zu einer der drei Kategorien (disjunktes Kategoriensystem):

- Kategorie 1: ganzheitliches Lösungsvorgehen
- Kategorie 2: zergliederndes Lösungsvorgehen
- Kategorie 3: kombinierendes Lösungsvorgehen

Kategorie 1: ganzheitliches Lösungsvorgehen

Nähere Erläuterung: Diese Kategorie wird ausgewählt, „wenn der Lösungsweg bzw. die Situation als Ganzes erfasst werden“ (Borromeo Ferri, 2004, S. 49).

Beispiel: Der Schüler bearbeitet eine Aufgabe indem er ein Gleichungssystem aufstellt und dieses löst.

Kategorie 2: zergliederndes Lösungsvorgehen

Nähere Erläuterung: Diese Kategorie wird ausgewählt, „wenn der Lösungsweg schrittweise erfolgt bzw. die Situation schrittweise erfasst wird“ (Borromeo Ferri, 2004, S. 49)

Beispiel: Der Schüler bearbeitet die Räuberaufgabe, indem er jede Münze einzeln aus dem volleren Beutel herausnimmt und in den leereren tut bis am Ende in beiden Beuteln gleich viele Münzen sind. Dies kann deskriptional repräsentiert sein, indem der Schüler immer bei der Anzahl der Münzen im volleren Beutel „-1“ rechnet und bei der Anzahl der Münzen im leereren Beutel „+1“ bis auf beiden Seiten dieselbe Zahl („43“) steht. Dies kann auch durch eine depiktionale Repräsentation unterstützt werden, indem zusätzlich Einerwürfel von einer Ausgangmenge von 52 Einerwürfeln zu einer zweiten Menge von 34 Einerwürfeln verschoben werden, bis beide Mengen dieselbe Anzahl von Einerwürfeln umfassen (43).

Kategorie 3: kombinierendes Lösungsvorgehen

Nähere Erläuterung: Diese Kategorie wird ausgewählt, „wenn der Lösungsweg bzw. die Situation sowohl ganzheitliche als auch zergliedernde Elemente enthält“ (Borromeo Ferri, 2004, S. 50).

Beispiel: Der Schüler beginnt die Lösung der Schneckenaufgabe, indem er zunächst die Wegstrecken pro Tag und Nacht getrennt verrechnet („+5“ und „-2“). Dann erkennt er die zugrunde liegende Regel und schreibt eine entsprechende Gleichung auf und löst sie.

Neben den bisher erläuterten Zeichen und Kategorien wurde die Anzahl der Analyseschritte pro Aufgabe ermittelt, die jeder Schüler für die Bewältigung der jeweiligen Aufgabe durchlief, sowie die Zeit, die dafür benötigt wurde.

Darüber hinaus wurde die Schwierigkeitseinschätzung der jeweiligen Textaufgabe durch den Schüler kodiert. Nach dem Vorlesen jeder Aufgabe durch die Versuchsleitung sollten die Schüler einschätzen, wie schwierig sie die Textaufgaben finden. Dafür konnten sie auf einer Antwortkarte zwischen den vier Antwortoptionen, „*sehr schwer*“, „*schwer*“, „*leicht*“ und „*sehr leicht*“ wählen. Da die Schüler nicht dadurch irritiert werden sollten, dass die Versuchsleitung ihre Antwort notiert oder noch weitere Personen im Raum sind, wurde die Schwierigkeitseinschätzung also „nachträglich“ kodiert.

Das Kodiersystem wurde für die Auswertung der im Rahmen der Haupterhebung gewonnen Videos eingesetzt, wodurch die Datengrundlage für die quantitative Analyse gelegt wurde (vlg. Abbildung 10, Schritt 4: *Kodierung und Datenanalyse*). Bevor das genaue Vorgehen dabei beschrieben werden soll, wird die Durchführung der Haupterhebung detailliert erläutert.

9. HAUPTUNTERSUCHUNG

„6 Tage. Ach nein, lieber 7 Tage. Falls vielleicht noch Wind kommt.“

9.1 Stichprobe

An der Haupterhebung nahmen insgesamt 270 Schüler teil. Davon waren 62 Drittklässler, 87 Viertklässler, 83 Sechstklässler und 38 Neuntklässler. Die Dritt- und Viertklässler nahmen am Schuljahresanfang an der Untersuchung teil, die Sechst- und Neuntklässler am Schuljahresende. Im Rahmen der Videokodierung, die sich der Durchführung der Videostudie anschloss, wurden einzelne Videos aus verschiedenen Gründen (z.B. nicht Rekonstruierbarkeit der Lösungsprozesse, technische Probleme, etc.) teilweise oder gänzlich von der weiteren Analyse ausgeschlossen. Dadurch ergeben sich für die unterschiedlichen Aufgaben verschiedene Stichprobengrößen (s. Tabelle 5).

Tabelle 5: Stichprobengrößen pro Aufgabe und Klassenstufe für die weiteren Analysen.

	Räuber	Dampfer	Schnecke	Märchen	Eis
3. Klasse	52	50	55	52	54
4. Klasse	82	80	82	84	77
6. Klasse	81	78	78	79	74
9. Klasse	38	37	36	37	27
gesamt	253	245	251	252	232

9.2 Durchführung

Der Ablauf der Haupterhebung folgte im Wesentlichen dem in der Pilotstudie.

Nachdem sich Schulen zur Teilnahme an der Untersuchung bereit erklärten, wurden in den entsprechenden Klassenstufen Elternbriefe ausgegeben, durch die die Eltern über das genaue Vorgehen der Studie informiert wurden. Die Eltern konnten dann entscheiden, ob ihr Kind an der Untersuchung teilnehmen durfte oder nicht. Bei der Datenerhebung wurden nur jene Schüler berücksichtigt, die bis spätestens zum ersten Erhebungstag eine unterschriebene Elterngenehmigung vorlegten. Selbstverständlich konnten die Schüler ihre Teilnahme an der Studie jederzeit ohne Angabe von Gründen abbrechen.

Als erstes wurden klassenweise Variablen erhoben, die einen Einfluss auf den Lösungsprozess der Schüler bei der Bearbeitung der problemhaltigen Textaufgaben haben können (Schulnoten in Deutsch und Mathematik, Rechenfertigkeiten, Leseverständnis). Die geschah mithilfe von Fragebögen und standardisierten Tests. In den 6. und 9. Klassen wurden lediglich die Schulnoten im letzten Zeugnis in den Fächern Deutsch und Mathematik erfasst, die als Indikatoren für sprachliche bzw. mathematische Fähigkeiten erachtet wurden. Da in den 3. Klassen der Grundschulen noch keine Noten vorlagen, wurden hier der ELFE1-6 (Ein Leseverständnistest für Erst- bis Sechstklässler: Lenhard & Schneider, 2006) zur Erfassung des Leseverständnisses und der HRT1-4 (Heidelberger Rechentest: Haffner, Baro, Parzer, & Resch, 2005) zur Erfassung mathematischer Grundlagenkenntnisse verwandt. Der HRT1-4 wurde jedoch aus ökonomischen Gründen nicht komplett durchgeführt. Hier wurden lediglich einige Untertests ausgewählt.

Anschließend begann die eigentliche Videostudie, an der die Schüler in Einzelsettings teilnahmen. Diese fand in einem gesonderten Raum statt, in dem sich die Kameraausrüstung, Untersuchungsmaterialien, Versuchsleitung und der jeweilige Schüler befanden. Dabei wurde darauf geachtet, dass die Arbeitsplätze für alle Schüler identisch waren (s. Abbildung 11).

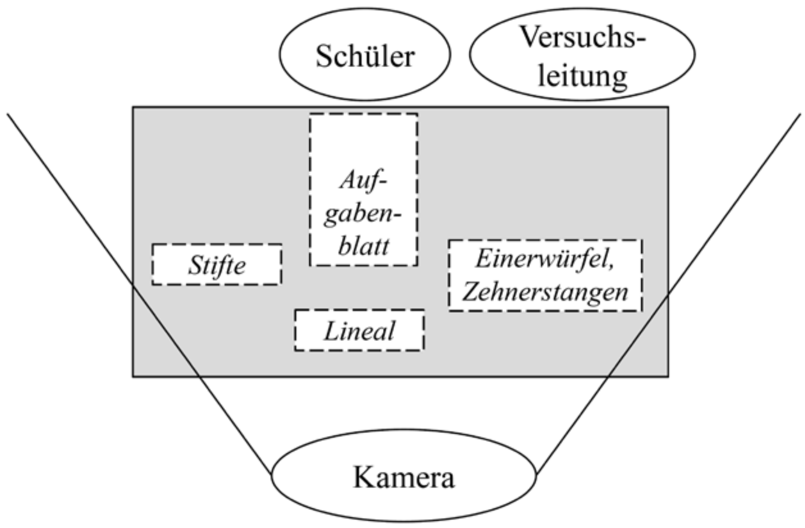

Abbildung 11: Aufbau des Arbeitsplatzes in der Haupterhebung.

Der Versuchsleitung lag ein Versuchsleiterguide vor, durch den sichergestellt werden sollte, dass alle Schüler die gleiche Prozedur durchlaufen. Dieser enthielt u.a. Informationen zum Aufbau des Arbeitplatzes, eine vorformulierte Instruktion für die teilnehmenden Schüler, Informationen über mögliche bzw. zu unterlassende Verhaltensweisen während der Interaktionen mit dem Schüler, den Interviewleitfaden für das halbstrukturierte Interview und Informationen über die Abbruchkriterien.

Fünf problemhaltige Textaufgaben wurden in der Haupterhebung eingesetzt. Vier davon kamen bereits in der Pilotstudie zum Einsatz (Räuber, Dampfer, Schnecke, Eis). Da sich die Teufelaufgabe in der Pilotstudie als zu schwierig erwies, wurde sie durch eine andere Aufgabe ersetzt (Märchen). Bei der Märchenaufgabe wurden die Zahlen verkleinert, da die ursprüngliche Version für die Zweitklässler zu schwierig schien. Generell wurden die in den Textaufgaben vorkommenden Phantasienamen (Quicki, Streblinde und Murks) durch „echte“ Namen (Tim, Emma und Paul) ersetzt. Einen Überblick über die in der Haupterhebung verwendeten Textaufgaben und die zugehörigen Aufgabenklassifizierungen (vgl. Rasch, 2001; 2008) finden sich nachfolgend:

1) Räuberaufgabe: Zwei Räuber entdecken einen vergrabenen Schatz, 2 Beutel Goldmünzen. Sie zählen die Münzen. In einem Beutel sind 34 Münzen, in dem anderen sind 52 Münzen. Sie wollen die Beute unter sich gerecht teilen. Wie viele Münzen müssen sie aus dem volleren Beutel herausnehmen und in den anderen füllen, damit in beiden Beuteln gleich viele Münzen sind?
   Richtige Lösung: **9 Münzen** müssen aus dem vollen Beutel in den leereren umgefüllt werden.
   Aufgabenklassifizierung: Ausgleichsaufgabe – Textaufgaben, die Geschichten erzählen.

2) Dampferaufgabe: Mutti, Vati und Paul fahren mit dem Dampfer. Für Kinder kostet es nur die Hälfte. Sie bezahlen insgesamt 30€. Wie viel kostet die Karte für einen Erwachsenen und wie viel kostet sie für ein Kind?
   Richtige Lösung: Mutti und Vati bezahlen jeweils **12€**, Paul bezahlt **6€**.

Aufgabenklassifizierung: Aufgabe zur Verhältnisverteilung – Texte mit Bezug zum Alltage und den Vorerfahrungen des Grundschulkindes.

3) Eisaufgabe: Emma, Tim und Paul möchten sich ein Eis kaufen. Der Eisverkäufer bietet 3 Sorten Eis an: Schoko, Vanille und Himbeereis. Emma kauft sich 2 Kugeln. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat sie?
Richtige Lösungen: Emma hat entweder **6 Möglichkeiten** (Schoko – Vanille; Schoko – Himbeere: Vanille – Himbeere; Schoko – Schoko; Vanille – Vanille; Himbeere – Himbeere) **oder 9 Möglichkeiten** (Schoko – Vanille; Vanille – Schoko; Schoko – Himbeere; Himbeere – Schoko; Vanille – Himbeere; Himbeere – Vanille; Schoko – Schoko; Vanille – Vanille; Himbeere – Himbeere).
Aufgabenklassifizierung: Aufgabe mit kombinatorischem Hintergrund – Personen und Geschehnisse, mit denen sich Kinder identifizieren können.

4) Märchenaufgabe: Emma liest Paul und Tim aus einem Märchenbuch vor. Am Abend beendet sie das Vorlesen auf Seite 69. Das ist eine rechte Buchseite. Das Märchen endet auf Seite 130. Wie oft muss Emma noch umblättern?
Richtige Lösung: Emma muss noch **31-mal** umblättern.
Aufgabenklassifizierung: Aufgabe zum Verhältnis von Zwischenraum und Begrenzung.

5) Schneckenaufgabe: Eine Schnecke in einem 20m tiefen Brunnen will nach oben auf die Wiese. Sie kriecht am Tag immer 5m hoch und rutscht nachts im Schlaf wieder 2m nach unten. Am wievielten Tag erreicht sie den Brunnenrand?
Richtige Lösung: Die Schnecke erreicht den Brunnenrand am **6. Tag**.
Aufgabenklassifizierung: Bewegungsaufgabe – Rechengeschichten zu Raum und Zeit.

Generell wurde in der Haupterhebung darauf geachtet, dass den Schülern nicht im Vorfeld mitgeteilt wurde, um wie viele zu lösende Textaufgaben es sich handelt. Dadurch sollte vermieden werden, dass die Schüler sich demotiviert fühlten. Weiterhin wurden keine Rückmeldungen zur Richtigkeit einzelner Lösungen gegeben. Dadurch sollte einerseits verhindert werden, dass die Schüler untereinander richtige Lösungen weitergaben und andererseits sollten die Schüler nicht demotiviert oder frustriert werden, falls sie keine der Aufgaben richtig lösen konnten.

Den Schülern wurde mitgeteilt, dass sie die Aufgabenbearbeitung jederzeit abbrechen durften. D.h., sie konnten sowohl die Bearbeitung einer speziellen Aufgabe abbrechen und zur nächsten übergehen als auch die gesamte Teilnahme an der Videostudie beenden. Darüber hinaus gab es ein Zeitlimit von 30 Minuten. Die gesamte Videostudie sollte pro Schüler diese Zeitgrenze nicht überschreiten. Dies war den Schülern nicht bekannt, denn sie sollten sich nicht unter Zeitdruck gesetzt fühlen, sondern diente lediglich der Versuchsleitung als Orientierung.

Zunächst wurde der Schüler über den Verlauf der Untersuchung informiert. Gab es von Seiten des Schülers keine weiteren Fragen, begann die eigentliche Videostudie. Das Vorgehen dabei war bei allen fünf Textaufgaben identisch. Dem Schüler wurde die erste Aufgabe durch die Versuchsleitung vorgelesen. Danach wurde der Schüler gebeten, einzuschätzen, wie schwierig er die gehörte Textaufgabe fand. Dafür konnte er auf einer Antwortkarte zwischen den vier Antwortoptionen, „*sehr schwer*“, „*schwer*“, „*leicht*“ und „*sehr leicht*“ wählen. In der Grundschule wurde versucht, die Antwortoptionen durch entsprechende Smileys etwas anschaulicher zu machen, darauf wurde im Gymnasium verzichtet.

Im Anschluss daran erhielt der Schüler das Aufgabenblatt, auf dem sich lediglich die bereits vorgelesene Textaufgabe befand, und konnte mit der Aufgabenlösung beginnen. Für die Bearbeitung standen dem Schüler neben dem Aufgabenblatt noch vier verschiedenfarbige Stifte, ein Lineal, 200 Einerwürfel und 20 Zehnerstangen zur Verfügung. War der Schüler mit der Bearbeitung der Aufgabe fertig, so signalisierte er dies durch das Umdrehen des Aufgabenblattes.

Nun schloss sich das halbstrukturierte Interview an, welches dazu diente, den Lösungsprozess noch etwas detaillierter nachvollziehen zu können. Der Versuchsleitung standen dafür vorformulierte Fragen zur Verfügung, wie z.B. „*Was hast du genau gemacht um die Aufgabe zu lösen?*“, „*Hast du dabei im Kopf gerechnet?*“ oder auch „*Hast du dir beim Lösen etwas im Kopf vorgestellt, z.B. ein Bild?*“. Des Weiteren gab es zwei aufgabenspezifische Fragen. So wurde bei der Eisaufgabe noch einmal detailliert nach den Kombinationen gefragt, wenn durch den Schüler lediglich die Anzahl der Kombinationen

benannt wurde: „*Kannst du mir sagen, was für Möglichkeiten das alles waren?*“.
Fand der Schüler bei der Dampferaufgabe seine Lösung, indem er verschiedene Zahlenkombinationen ausprobiert hat, wurde noch einmal explizit danach gefragt: „*Kannst du dich noch daran erinnern, mit welchen Zahlen du probiert hast, das Ergebnis zu finden. Welche waren das?*“. Darüber hinaus konnten aber auch zusätzliche, spezifische Fragen gestellt werden. Im Anschluss an das Interview folgte die nächste Textaufgabe.

Auch in der Haupterhebung wurden den Schülern die Aufgaben, abgesehen von der ersten Aufgabe, die für alle Schüler identisch war, in alternierender Reihenfolge vorgelegt (s. Tabelle 6). Da die Räuberaufgabe als am wenigstens problemhaltig angesehen wurde, sollte sie dazu dienen, dass die Schüler sich orientieren und an das Vorgehen gewöhnen konnten.

Tabelle 6: Schematisierung der alternierenden Reihenfolge der Textaufgaben in der Haupterhebung.

Teilnehmer	1. Aufgabe	2. Aufgabe	3. Aufgabe	4. Aufgabe	5. Aufgabe
1	Räuber	Eis	Dampfer	Schnecke	Märchen
2	Räuber	Märchen	Eis	Dampfer	Schnecke
3	Räuber	Schnecke	Märchen	Eis	Dampfer
4	Räuber	Dampfer	Schnecke	Märchen	Eis
…	Räuber	Eis	Dampfer	Schnecke	Märchen

Die in der Haupterhebung gewonnenen Videos wurden durch drei Beobachter kodiert. Die Beobachter wurden zunächst intensiv im Umgang mit dem Videomaterial und dem Einsatz von Kodierbogen und Kodierhandbuch geschult.

9.3 Beobachterschulung und Videokodierung

Da die drei Beobachter auch als Versuchleitung in der Haupterbung mitwirkten, waren sie über Ziel und Design der Studie schon sehr gut informiert. Darüber hinaus waren sie mit dem Videomaterial bereits sehr vertraut. Nachdem sich die Beobachter zunächst theoretisch mit dem Kodierhandbuch und dem Kodierbogen vertraut gemacht hatten, und alle aufkommenden Unklarheiten diesbezüglich ausgeräumt werden konnten, wurden Videos aus der Pilotstudie zu Übungszwecken kodiert. Die einzelnen Kodierungen wurden immer wieder gemeinsam besprochen, bis die einzelnen Beobachter unabhängig voneinander dasselbe Videomaterial in einem ausreichenden Maß auf dieselbe Art und Weise kodierten.

Danach wurden die Videos aus der Haupterhebung unter den drei Beobachtern zufällig aufgeteilt. Dabei wurde ein Viertel der Videos von Beobachter 1 kodiert, ein Viertel von Beobachter 2, ein Viertel von Beobachter 3 und ein Viertel, zum Zweck der Ermittelung der Beobachterübereinstimmung, von allen drei Beobachtern. Die Beobachter trafen sich während des Kodierungsprozesses in regelmäßigen Abständen, um eventuell auftretende Probleme oder Unklarheiten bei der Kodierung einzelner Videos zu besprechen. Dabei wurden auch einzelne Videos vollständig oder teilweise ausgeschlossen (z.B. aus Gründe der Nichtrekonstruierbarkeit). Auch wurden im Rahmen dieser Treffen die gemeinsamen, unanhängigen Kodierungen einzelner, ausgewählter Videos besprochen. Dies diente dazu, das Kodierungsverhalten der einzelnen Beobachter über den Kodierungsprozess hinweg möglichst konstant und synchron zu halten.

Nach Abschluss der Videokodierung wurden auf Basis der Videos, die durch die drei Beobachter kodiert wurden, die Beobachterübereinstimmungen für die einzelnen Variablen berechnet. Dabei wurde sich am vorgeschlagenen Vorgehen von Wirtz und Caspar (2002) orientiert.

9.4 Beobachterübereinstimmung

Um zu überprüfen, ob unabhängige „Beurteiler mit gleichem Wissensstand zu einem ähnlichen Urteil kommen“ (Wirtz & Caspar, 2002, S. 15), wurden verschiedene Kennwerte berechnet, die als Indikatoren für die jeweilige Beobachterübereinstimmung angesehen werden können. Dies geschah auf Grundlage jener Variablen, die durch die gemeinsame Kodierung von zufällig ausgewählten Videos aus der Haupterhebung (N=67) durch die drei Beobachter gewonnen wurden. Dabei wurden in Abhängigkeit von den verschiedenen Skalenniveaus, entsprechende Kennwerte mithilfe von SPSS19 bestimmt.

Für die ordinalskalierte Variable *Richtigkeit der Lösung* wurde Kendalls Konkordanzkoeffizient W berechnet (Wirtz & Caspar, 2002). Dieser nimmt für die einzelnen Textaufgaben folgende Werte an: $W_{Räuber} = .97$, $W_{Dampfer} = .97$, $W_{Märchen} = .91$, $W_{Schnecke} = .97$ und $W_{Eis} = .96$. Dies bedeutet, dass die unterschiedlichen Beobachter in einem sehr zufriedenstellenden Ausmaß zu identischen bzw. ähnlichen Urteilen im Bezug auf das Videomaterial kamen.

Für die ordinalskalierte Variable *Schwierigkeit der Aufgabe* wurde ebenfalls Kendalls Konkordanzkoeffizient W berechnet. Dieser nimmt für die einzelnen Textaufgaben folgende Werte an: $W_{Räuber} = .98$, $W_{Dampfer} = .99$, $W_{Märchen} = .87$, $W_{Schnecke} = .99$ und $W_{Eis} = .99$. Auch diese Werte sprechen für eine sehr zufriedenstellende Beobachterübereinstimmung.

Für die intervallskalierten und dichotomen Variablen wurden unjustierte Intraklassenkorrelationen (ICCs) berechnet. Nach Wirtz und Caspar sind „Unjustierte Maße … dann anzuwenden, wenn die Ratingwerte unabhängig vom individuellen Standard des betreffenden Raters weiter verwertet werden“ (2002, S. 232). Da die vorher ausgewählten Videos von allen drei Beobachtern kodiert wurden und diese als zufällige Auswahl aus einer möglichen Population von potenziellen Beobachtern betrachtet werden, wurde die ICC(2, 1) als adäquates Maß verwendet: „To measure the agreement of these judges, ICC(2, 1) is used, and the judges are considered random effects; in this instance the question being asked is whether the judges are interchangeable“ (Shrout & Fleiss, 1979, S. 425).

Dichotome Variabeln werden hier als Spezialfall intervallskalierter Variablen aufgefasst, da zum einen lediglich zwei Skalenpunkte vorhanden sind und somit das Kriterium der Äquidistanz als erfüllt betrachtet werden kann (Wirtz & Caspar, 2002). Zum anderen kann angenommen werden, zumindest bei jenen dichotomen Variablen, die anzeigen, ob ein bestimmtes Merkmal oder Verhalten vorhanden bzw. nicht vorhanden ist,

> dass bestimmte Indikatoren für ein Merkmal eine gewisse Intensität besitzen oder eine Schwelle überschreiten müssen, damit ein Rater das Merkmal registriert. Nach dieser Betrachtungsweise kann ein solches dichotomes Merkmal in Bezug auf die Intensität der Indikatoren wie eine künstlich dichotomisierte Variable … behandelt werden. (Wirtz & Caspar, 2002, S. 87)

Ferner wurde das Lösungsvorgehen, welches ursprünglich die drei Ausprägungen *ganzheitliches Lösungsvorgehen*, *zergliederndes Lösungsvorgehen* und *kombinierendes Lösungsvorgehen* aufwies, ebenfalls dichotomisiert, da die Kategorie *kombinierendes*

Lösungsvorgehen kaum vorkam. Über alle Aufgaben und Schüler war dies lediglich neunmal der Fall. Die Fälle, bei denen ein kombinierendes Lösungsvorgehen vorkam, wurden der Einfachheit halber in der Datenauswertung nicht weiter berücksichtigt.

Darüber hinaus wurden die ICCs bei den Variablen, die anzeigen, ob die mathematischen Modell, die mathematischen Analysen und die mathematischen Ergebnisse intern depiktional repräsentiert wurden, lediglich für alle Aufgaben und nicht aufgabenspezifisch ermittelt. Dies ist hier nicht anders möglich, da interne Depiktionen nur selten berichtet wurden, wodurch bei der Anzahl gemeinsam kodierter Videos kein adäquater Kennwert auf Aufgabenebene errechnet werden konnte. Dasselbe galt auch für die Variablen *Abbruch* und *Revision im Interview*.

Die Berechnung aller ICCs ergab im Mittel einen Wert von .89 (ICC_{min} = .54; ICC_{max} = 1.00), was darauf hindeutet, dass die unterschiedlichen Beobachter in einem zufriedenstellenden Ausmaß zu identischen bzw. ähnlichen Urteilen im Bezug auf das Videomaterial kamen. Lediglich zwei ICCs lagen unter .60, wobei es sich bei den zu beobachtenden Ereignissen um selten auftretende handelt. Eine detaillierte Auflistung der einzelnen aufgabenunspezifischen ICCs befindet sich in Tabelle 7; in Tabelle 8 befinden sich die aufgabenspezifischen ICCs.

Tabelle 7: Überblick über die einzelnen aufgabenunspezifischen Intraklassenkorrelationen (ICCs).

Variable	**ICCs**
MaMo intern depiktional	.82
MaAna intern depiktional	.86
MaErg intern depiktional	.79
Abbruch der Bearbeitung	.97
Revision im Interview	.91

Anmerkungen. MaMo = Mathematische (Teil)Modelle; MaAna = Mathematische (Teil)Analysen; MaErg = Mathematische (Teil)Ergebnisse.

Tabelle 8: Überblick über die einzelnen aufgabenspezifischen Intraklassenkorrelationen (ICCs).

Variable	**ICCs**				
	Räuber	Dampfer	Schnecke	Märchen	Eis
MaMo extern deskriptional	.99	.94	.96	.94	.95
MaMo extern depiktional	.93	.91	.90	.95	.86
MaMo intern deskriptional	.96	.93	.75	.91	.54†
MaAna extern deskriptional	.99	.93	.95	.96	.94
MaAna extern depiktional	.90	.87	.84	.94	.85
MaAna intern deskriptional	.96	.93	.82	.91	.76
MaErg extern deskriptional	.90	.94	.91	.91	.85
MaErg extern depiktional	.95	.87	.89	.95	.89
MaErg intern deskriptional	.94	.87	.85	.90	.79
Überprüfung des Vorgehens	.82	.68	.81	.77	.69
Lösungsstrategie (willkürlich)	.74	.87	.98	.93	.98
Lösungsvorgehen*	.95	.97	.97	.87	.88
Multiple Repräsentation im mathematischen Modell	.90	.79	.93	.89	.58†
Anzahl der Analyseschritte	.99	.96	.98	.99	.99
Bearbeitungszeit	.99	.99	.99	.99	1.00

Anmerkungen. MaMo = Mathematische (Teil)Modelle; MaAna = Mathematische (Teil)Analysen; MaErg = Mathematische (Teil)Ergebnisse. *nachträglich dichotomisierte Variable. †sehr selten auftretendes Ereignis.

9.5 *Ergebnisse*

Die Datenanalyse erfolgte mithilfe von SPSS19 und Mplus (Version 6.12). Dafür wurde aus den Videos, die durch die drei unabhängigen Beobachter kodiert wurden, pro Schüler eine Kodierung zufällig ausgewählt. Für die übrigen Videos existierte lediglich eine Kodierung, da sie nur einem der drei Beobachter im Vorfeld zufällig zugewiesen wurden.

Zunächst soll auf die Facette *Anknüpfen bei der Rückinterpretation des mathematischen Ergebnisses* näher eingegangen werden. Da es sich bei jener Facette um eine Erweiterung des ursprünglichen Modellierungskreislaufes handelt, soll überprüft werden, ob diese überhaupt sinnvoll ist. Im Anschluss daran werden allgemeine Befunde im Bezug auf die Lösungsprozesse beschrieben bevor im Detail auf die Forschungsfragen und postulierten Hypothesen eingegangen wird.

Anknüpfen

Die Facette *Anknüpfen bei der Rückinterpretation des mathematischen Ergebnisses* wurde in der nachfolgenden Datenanalyse nicht weiter berücksichtigt. Da sie jedoch eine Erweiterung des ursprünglichen Modellierungskreislaufes darstellt, sollte überprüft werden, ob ein solches Anknüpfen überhaupt bei der Textaufgabenbearbeitung auftritt (und somit eine sinnvolle Erweiterung des Modellierungskreislaufes darstellt) und wenn ja, ob dies mit zufriedenstellender Beobachterübereinstimmung kodiert werden kann. Bei allen Aufgaben zeigte sich zunächst, dass die Schüler relativ selten explizit an die in der Textaufgabe beschriebene Situation anknüpfen. So konnte bei 61.4% der Schüler kein Anknüpfen beobachtet werden, bei den übrigen 38.6% der Schüler konnte Anknüpfen jedoch bei mindestens einer Aufgabe beobachtet werden.

Da die Facette *Anknüpfen bei der Rückinterpretation des mathematischen Ergebnisses* dichotom kodiert war (0 = anknüpfen nicht vorhanden; 1 = anknüpfen vorhanden), wurden aufgabenspezifische ICCs ermittelt. Diese fielen für die einzelnen Aufgaben folgendermaßen aus: $ICC_{Räuber} = .85$; $ICC_{Dampfer} = .70$; $ICC_{Schnecke} = .83$; $ICC_{Märchen} = .82$; $ICC_{Eis} = .68$. Alle ICCs deuten darauf hindeutet, dass die unterschiedlichen Beobachter in einem zufriedenstellenden Ausmaß zu identischen bzw. ähnlichen Urteilen im Bezug auf die Kodierung der Facette kamen.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass die Erweiterung des Modellierungskreislaufes um die Phase des Anknüpfens durchaus sinnvoll erscheint und sich ein solches Verhalten auch in zufriedenstellendem Maße beobachten lässt. Auch ist sicherlich denkbar, dass jene Phase bei umfassenderen, komplexeren und noch anspruchsvolleren Aufgaben als den hier verwendeten problemhaltigen Textaufgaben u.U. häufiger zu beobachten sein könnte.

Nachfolgend werden allgemeine Befunde im Bezug auf die Lösungsprozesse beschrieben. Im Anschluss daran wird auf die einzelnen in Kapitel 6 ausgeführten Forschungsfragen Bezug genommen, indem die postulierten Hypothesen statistisch überprüft werden.

9.5.1 Aufgabenschwierigkeiten und Abbruch der Bearbeitung

Die Einschätzung der Aufgabenschwierigkeit ergab über alle Schüler einen Mittelwert von 2.66 (*SD* = 0.46). Auffällig ist dabei, dass sich die Grundschüler in ihren Schwierigkeitseinschätzungen kaum von den Gymnasiasten unterschieden (Grundschüler: *M* = 2.56, *SD* = 0.48; Gymnasiasten: *M* = 2.78, *SD* = 0.49). Im Durchschnitt wurden die Aufgaben also von allen Schülern als mittelschwer eingeschätzt.

Trotz des relativ hohen Anspruchniveaus der einzelnen Textaufgaben gab es nur wenig Abbrüche der Aufgabenbearbeitung. So bearbeiteten 81% der Schüler alle Aufgaben, 13% brachen die Bearbeitung bei lediglich einer Aufgabe ab, die übrigen 6% der Schüler brachen die Bearbeitung von zwei oder mehr Aufgaben ab. Nur bei einem Schüler konnten nicht alle Aufgaben innerhalb von maximal 30 Minuten bearbeitet werden, sodass die Aufgabenbearbeitung von Seiten der Versuchsleitung beendet werden musste.

9.5.2 Analyseschritte und Bearbeitungszeiten

Da die verschiedenen Textaufgaben unterschiedliche Anforderungen an den Lösenden stellen, ist es wenig verwunderlich, dass je nach Aufgabe unterschiedlich viele Analyseschritte benötigt wurden: Räuber: *M* = 3.00 (*SD* = 2.86); Dampfer: *M* = 3.57 (*SD* = 2.30); Märchen: *M* = 5.57 (*SD* = 10.16); Schnecke: *M* = 5.78 (*SD* = 4.39) und Eis: *M* = 3.37 (*SD* = 2.61). Interessant ist jedoch, dass sich die Grundschüler nur bei einer einzigen Aufgabe im Bezug auf die Anzahl der Analyseschritte von den Gymnasiasten unterschieden. Dabei handelte es sich um die Eisaufgabe (t (210) = -6.43, $p < .01$). Die Grundschüler verwendeten hier signifikant weniger Analyseschritte (*M* = 2.38, *SD* = 2.44) als die Gymnasiasten (*M* = 4.49, *SD* = 2.34).

Ein ähnliches Bild ergab die Betrachtung der Bearbeitungszeiten. Diese umfassen die Zeit vom Beginn der Konstruktion des mathematischen Modells bis zur Findung des endgütlichen mathematischen (numerischen) Ergebnisses. Sie variierten je nach Aufgabe zwischen im Mittel 89 Sekunden und 122 Sekunden. Wieder gab es nur eine Aufgabe, bei der sich die Lösungszeiten der Grundschüler von denen der Gymnasiasten signifikant unterschieden (t-Test für ungleiche Varianzen: t (216) = 2.52, $p < .01$). Die Räuberaufgabe war somit die einzige Aufgabe, bei der die Gymnasiasten signifikant schneller waren (M = 100.65, SD = 61.34) als die Grundschüler (M = 126.31, SD = 94.75).

9.5.3 Überprüfung des Vorgehens und Revision

Um zu betrachten, wie häufig die Schüler ihr Vorgehen überprüften, wurde zunächst ein Summenscore gebildet. Dieser spiegelt dabei die Anzahl der Aufgaben wider, bei denen Schüler ihr Vorgehen an mindestens einer Stelle im Modellierungskreislauf überprüften. Der Summenscore kann Werte zwischen null (bei keiner Aufgabe wurde das Vorgehen überprüft) und fünf (bei allen Aufgaben wurde das Vorgehen überprüft) annehmen. Für die einzelnen Klassenstufen ergaben sich folgende Mittelwerte: 3. Klasse: M = 0.95 (SD = 1.15), 4. Klasse: M = 1.36 (SD = 1.36), 6. Klasse: M = 2.21 (SD = 1.35) und 9. Klasse: M = 2.37 (SD = 1.40). Mit höherer Klassenstufe wurde das Vorgehen also bei mehr Aufgaben überprüft, jedoch noch lange nicht bei allen. Grundschüler und Gymnasiasten unterschieden sich dabei signifikant voneinander (t (257) = -6.45, p < .01), die Grundschüler überprüften ihre Vorgehen signifikant seltener als die Gymnasiasten.

Für die Betrachtung der Revisionen der jeweiligen Lösungen im Interview wurde genauso verfahren wie bei der Betrachtung der Überprüfungen des Vorgehens. Ein Summenscore wurde gebildet, der Werte zwischen null (bei keiner Aufgabe hat der Schüler im Interview sein Vorgehen revidiert) und fünf (bei allen Aufgaben hat der Schüler im Interview sein Vorgehen revidiert) annehmen kann. Für die einzelnen Klassenstufen ergaben sich dabei folgende Mittelwerte: 3. Klasse: M = 0.33 (SD = 0.55), 4. Klasse: M = 0.21 (SD = 0.47), 6. Klasse: M = 0.20 (SD = 0.46) und 9. Klasse: M = 0.16 (SD = 0.44). Revisionen kommen somit kaum vor. Signifikante Unterschiede zwischen den Klassenstufen ließen sich nicht finden. Ist die Aufgabe einmal gelöst, scheint die Lösung als solche angenommen und nicht weiter hinterfragt zu werden. Zumindest lies sich ein gegenteiliges Verhalten nicht beobachten.

Nach der Beschreibung allgemeiner Aspekte der Lösungsprozesse sollen im Nachfolgenden die spezifischen Forschungsfragen anhand der statistischen Überprüfung der postulierten Hypothesen beantwortet werden.

9.5.4 Forschungsfrage 1: Klassenstufe und Lösungserfolg

Im Fokus der ersten Forschungsfrage stand der Zusammenhang zwischen der Klassenstufe und dem Lösungserfolg hinsichtlich der fünf zu bearbeitenden problemhaltigen Textaufgaben. Um diesen Zusammenhang näher zu beleuchten, wurden zwei Hypothesen postuliert, die nachfolgend überprüft werden sollen.

Hypothese 1.1: Je höher die Klassenstufe, desto mehr richtige Lösungen werden gefunden.

Allgemein kann zunächst gesagt werden, dass alle Schüler Schwierigkeiten bei der Lösung der fünf Textaufgaben aufwiesen. So gab es nicht einen Schüler, der alle fünf Aufgaben richtig lösen konnte.

Zur Überprüfung der ersten Hypothese wurden die Variablen, die pro Aufgabe die Richtigkeit der Lösung anzeigen, dichotomisiert, richtige Lösungen wurden mit 1 kodiert, falsche oder nur teilweise richtige Lösungen mit 0. Anschließend wurde ein Summenscore gebildet. Dieser spiegelt dabei die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben wider und kann Werte zwischen null (keine Aufgabe richtig gelöst) und fünf (alle Aufgaben richtig gelöst) annehmen. Für die einzelnen Klassenstufen ergaben sich dabei folgende Mittelwerte: 3. Klasse: M = 0.45 (SD = 0.69), 4. Klasse: M = 0.83 (SD = 1.11), 6. Klasse: M = 2.16 (SD = 0.96) und 9. Klasse: M = 2.61 (SD = 1.04). Zur besseren Veranschaulichung der Mittelwerte und Streuungen in den einzelnen Klassenstufen siehe Abbildung 12.

Um nun zu überprüfen, ob mit höherer Klassenstufe auch mehr Aufgaben richtig gelöst wurden, wurde eine Produkt-Moment-Korrelation zwischen der Klassenstufe und der Anzahl richtiger Lösungen gebildet. Diese deutet auf einen signifikant positiven Zusammenhang zwischen Klassenstufe und der Anzahl richtiger Lösungen hin (r = .60, p < .01). Schüler höherer Klassenstufen konnten also mehr problemhaltige Textaufgaben richtig lösen als Schüler niedrigerer Klassenstufen. Trotzdem ist zu berücksichtigen, dass selbst die Neuntklässler im Mittel lediglich zwei bis drei von den fünf vorgegebenen Aufgaben richtig lösten. Im Nachfolgenden soll der Zusammenhang zwischen der Klassenstufe und dem Lösungserfolg detaillierter betrachtet werden.

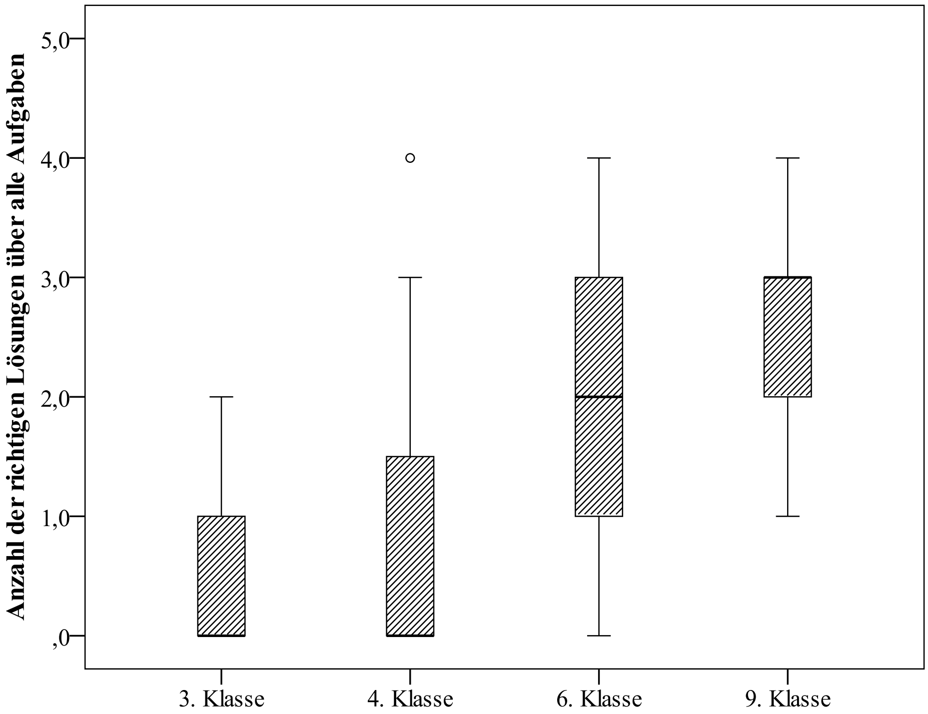

Abbildung 12: Anzahl richtiger Lösungen für die einzelnen Klassenstufen.

Klassenspezifische Analysen

Um die Unterschiede zwischen den einzelnen Klassenstufen differenzierter zu betrachten, wurde eine einfaktorielle Varianzanalyse durchgeführt. Diese ergab im Bezug auf die Klassenstufen signifikante Abweichungen zwischen den Mittelwerten (F (3, 152) = 35.95, $p < .01$). Die anschließenden Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests zeigen, dass weder zwischen den Grundschülern der 3. und 4. Klassen ($p = .60$) noch zwischen den Gymnasiasten der 6. und 9. Klassen ($p = .52$) ein signifikanter Unterschied zwischen der Anzahl der richtig gelösten Aufgaben zu bestehen scheint. Lediglich zwischen den Grundschülern und den Gymnasiasten zeigt sich durchweg ein signifikanter Unterschied (alle *p*s < .01). Die Gymnasiasten lösen somit signifikant mehr Aufgaben richtig als die Grundschüler.

Aufgabenspezifische Analysen

An dieser Stelle soll nun der aufgabenspezifische Lösungserfolg näher betrachtet werden. Der Einfachheit halber werden lediglich die Schultypen Grundschule und Gymnasium verglichen. Da es sich somit bei den beiden Variablen um künstlich dichotomisierte handelt (0 = falsche Lösung, 1 = richtige Lösung; 0 = Grundschule, 1 = Gymnasium), wurden mithilfe von Mplus tetrachorische Korrelationen als Assoziationsmaß berechnet (Bortz & Döring, 2009).

Ein signifikanter Zusammenhang zwischen dem Schultyp und dem Lösungserfolg ließ sich für vier der fünf Aufgaben ausfindig machen: Räuber: $r_{tet} = .87$ ($p < .01$), Dampfer: $r_{tet} = .66$ ($p < .01$), Märchen: $r_{tet} = .74$ ($p < .01$) und Eis: $r_{tet} = .59$ ($p < .01$). Die einzige Ausnahme bildet also die Schneckenaufgabe ($r_{tet} = .13$, $p = .23$). Somit werden nicht alle Aufgaben im selben Maße von den Gymnasiasten besser bewältigt als von den Grundschülern. Die Ergebnisse bei der Schneckenaufgabe deuten darauf hin, dass es durchaus Aufgaben zu geben scheint, die mit einer höheren Klassenstufe nicht per se besser gelöst werden können. Solche Aufgaben scheinen an ihrer Problemhaltigkeit wenig „einzubüßen“. Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge siehe Abbildung 13.

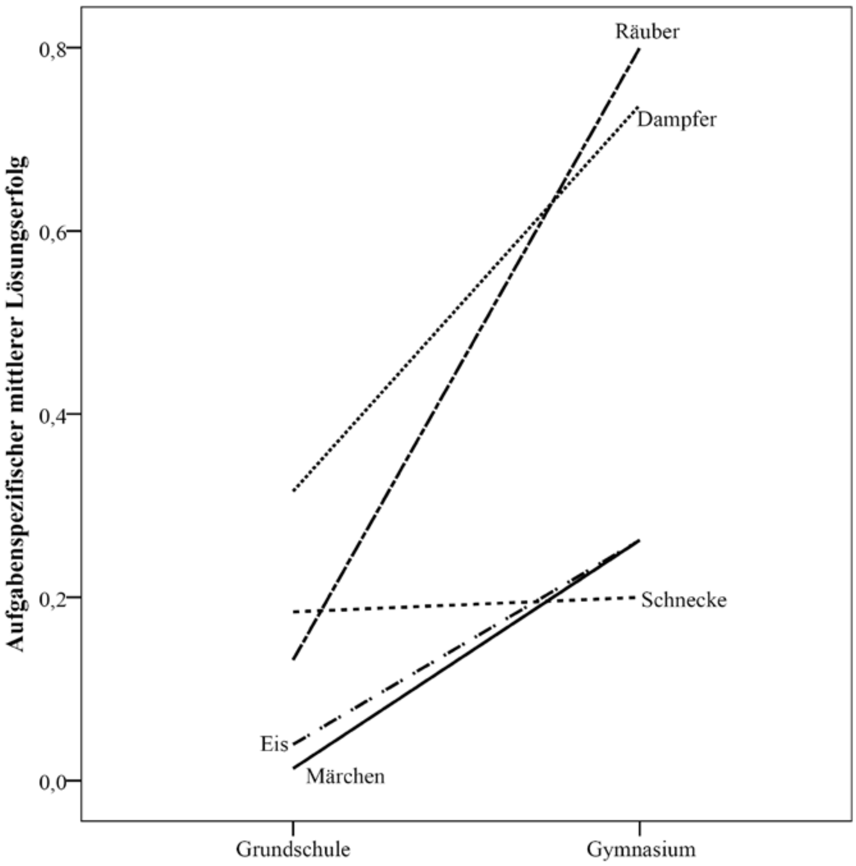

Abbildung 13: Richtigkeit pro Aufgabe für Grundschüler und Gymnasiasten.

Hypothese 1.2: Je höher die Klassenstufe, desto seltener werden willkürliche Lösungsstrategien angewandt.

Zur Überprüfung der zweiten Hypothese wurde zunächst ein Summenscore gebildet. Dieser spiegelt dabei die Anzahl der Aufgaben wider, bei denen willkürliche Lösungsstrategien eingesetzt wurden und kann Werte zwischen null (bei keiner Aufgabe wurden willkürliche Lösungsstrategien eingesetzt) und fünf (bei allen Aufgaben wurden willkürliche Lösungsstrategien eingesetzt) annehmen. Für die einzelnen Klassenstufen ergaben sich dabei folgende Mittelwerte: 3. Klasse: $M = 1.60$ ($SD = 1.49$), 4. Klasse: $M = 0.98$ ($SD = 1.34$), 6. Klasse: $M = 0.72$ ($SD = 0.41$) und 9. Klasse: $M = 0.08$ ($SD = 0.27$).

Um nun zu überprüfen, ob mit höherer Klassenstufe auch weniger willkürliche Lösungsstrategien angewandt wurden, wurde eine Produkt-Moment-Korrelation zwischen der Klassenstufe und der Anzahl willkürlicher Lösungsstrategien gebildet. Diese deutet auf einen signifikant negativen Zusammenhang zwischen Klassenstufe und der Anzahl willkürlicher Lösungsstrategien hin ($r = -.43$, $p < .01$). Schüler höherer Klassenstufen gingen also bei ihrem Lösungsvorgehen seltener willkürlich vor als Schüler niedrigerer Klassenstufen.

Klassenspezifische Analysen

Um nun näher zu betrachten, zwischen welchen Klassenstufen es signifikante Unterschiede hinsichtlich der Verwendung von willkürlichen Lösungsstrategien gibt, wurde eine einfaktorielle Varianzanalyse durchgeführt. Diese ergab im Bezug auf die Klassenstufen signifikante Abweichungen zwischen den Mittelwerten (F (3, 254) = 29.32, $p < .01$). Die anschließenden Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests zeigten signifikante Mittelwertsunterschiede zwischen allen Klassenstufen (alle ps < .01), außer zwischen den 6. und 9. Klassen ($p = 1.00$). Somit lösten die Viertklässler signifikant weniger Aufgaben unter Verwendung willkürlicher Lösungsstrategien als die Drittklässler und die Sechst- und Neuntklässler lösten wiederum signifikant weniger Aufgaben unter Verwendung willkürlicher Lösungsstrategien als die Drittklässler und Viertklässler.

Nach der Betrachtung des Zusammenhangs zwischen den Klassenstufen und dem Lösungserfolg soll nun allgemein auf die verschiedenen Repräsentationsformen und ihre

Verwendungshäufigkeiten bezüglich der einzelnen Aufgaben eingegangen werden, weil die Repräsentationsformen anschließend im Mittelpunkt der Analysen stehen werden.

Verwendete Repräsentationsformen in den mathematischen Modellen

Bei der näheren Betrachtung der verschiedenen Repräsentationen soll sich auf die mathematischen Modelle beschränkt werden. Dies geschieht zum einen der Übersichtlichkeit halber und zum anderen, weil das Hauptaugenmerk in den nachfolgenden Analysen auf die mathematischen Modelle gelenkt wird, da ihre Konstruktion, neben dem Verstehen der jeweiligen Aufgabe, als entscheidende Stelle für die erfolgreiche Aufgabenbearbeitung angesehen werden kann. Die mathematische Analyse scheint weniger problematisch zu sein, da in den Aufgaben kleine, natürlich Zahlen vorkommen und dem Lösenden relativ einfach Rechenoperationen abverlangt werden.

Pro Repräsentationsform (extern deskriptional, intern deskriptional, extern depiktional, intern depiktional) gab es eine dichotome Variable, die anzeigt, ob eine bestimmte Repräsentationsform im Rahmen eines mathematischen Modells verwendet wurde oder nicht (0 = die Repräsentationsform wurde nicht verwendet; 1 = die Repräsentationsform wurde verwendet). Aufgabenspezifisch wurde pro Repräsentationsform ein Mittelwert über alle Schüler gebildet. Dieser konnte Werte zwischen null (keiner der Schüler hat bei der Aufgabe eine bestimmte Repräsentationsform verwendet) und eins (alle Schüler haben bei der Aufgabe eine bestimmte Repräsentationsform verwendet) annehmen. Die einzelnen aufgabenspezifischen Mittelwerte befinden sich in Tabelle 9.

Tabelle 9: Durchschnittliche Verwendung der Repräsentationen in den mathematischen Modellen.

	extern deskriptional		extern depiktional		intern deskriptional		intern depiktional	
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Räuber	.59	.49	.10	.30	.53	.50	.03	.18
Dampfer	.39	.49	.08	.27	.84	.37	.01	.10
Märchen	.50	.50	.14	.35	.61	.49	.13	.34
Schnecke	.47	.50	.23	.42	.74	.44	.06	.23
Eis	.08	.27	.50	.50	.10	.30	.69	.46

Bei vier der fünf Aufgaben werden sehr häufig deskriptionale Repräsentationen verwendet (sowohl intern als auch extern). Die einzige Ausnahme scheint hier die Eisaufgabe zu sein. Dies kann sicherlich auf die Aufgabenanforderungen zurückgeführt werden. Denn kaum einem Schüler in den untersuchten Klassenstufen ist ein rein deskriptionaler Ansatz zur Bearbeitung einer kombinatorischen Aufgabe geläufig (im Sinne der entsprechenden Formel für z.B. geordnete Stichproben mit Zurücklegen). Somit greifen die Schüler bei dieser Aufgabe entsprechend häufiger auf (sowohl interne als auch externe) depiktionale Repräsentationen zurück. Depiktionen scheinen jedoch bei den übrigen vier Aufgaben eine deutlich untergeordnete Rolle zu spiele. In Abbildung 14 sind die Verwendungshäufigkeiten der Repräsentationsformen für die einzelnen Aufgaben noch einmal veranschaulicht.

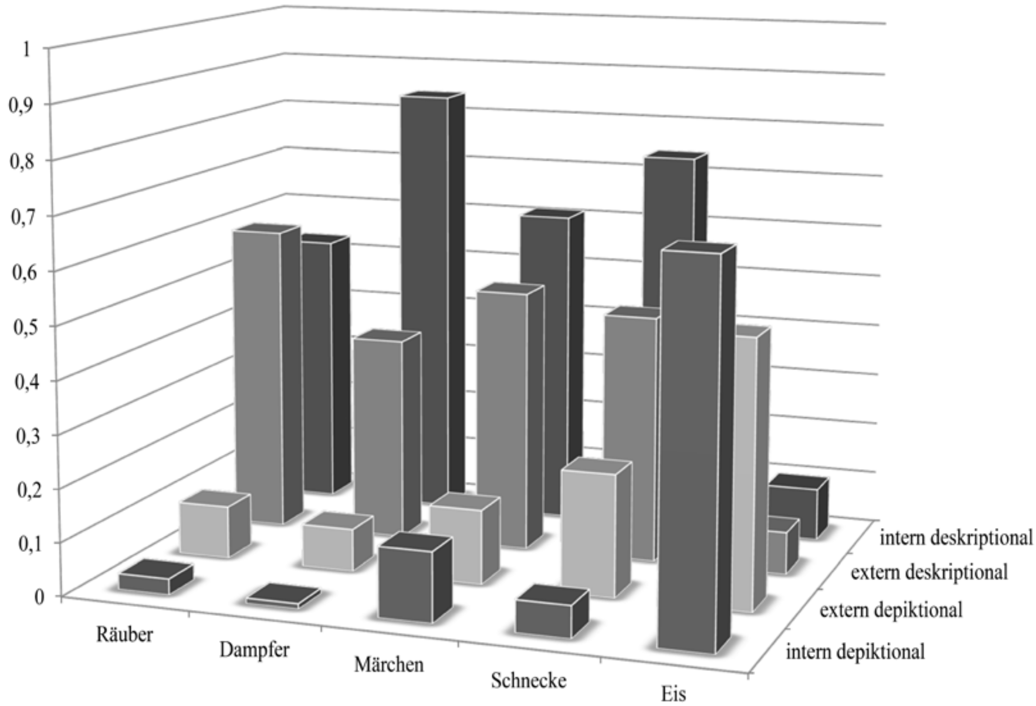

Abbildung 14: Relative Verwendungshäufigkeiten der einzelnen Repräsentationen im mathematischen Modell.

9.5.5 Forschungsfrage 2: Klassenstufe und Repräsentationsform

Im Fokus der zweiten Forschungsfrage stand der Zusammenhang zwischen der Klassenstufe und den verschiedenen Repräsentationsformen, auf die die Schüler spontan zurückgreifen. Um dies näher zu beleuchten, wurden zwei Hypothesen postuliert, die nachfolgend überprüft werden sollen.

Hypothese 2.1: Je höher die Klassenstufe, desto seltener wird bei der Aufgabenlösung auf externe Repräsentationen zurückgegriffen.

Zur Überprüfung dieser Hypothese wurde eine aufgabenspezifische Variablen gebildet, die anzeigt, ob das jeweilige mathematische Modell extern repräsentiert wurde. Diese binäre Variable umfasst somit lediglich zwei Werte: 0 gibt dabei an, dass das mathematische Modell nicht extern repräsentiert wurde, 1 gibt dabei an, dass es extern repräsentiert wurde. Über diese aufgabenspezifische Variable wurde in einem weiteren Schritt ein Summenscore gebildet, der angibt, bei wie vielen Aufgaben auf externe Repräsentationsformen zurückgegriffen wurde. Dieser kann Werte zwischen null (bei keiner Aufgabe wurden externe Repräsentationen verwendet) und fünf (bei allen Aufgaben wurden externe Repräsentationen verwendet) annehmen.

Für die einzelnen Klassenstufen ergaben sich dabei folgende Mittelwerte:
3. Klasse: $M = 1.07$ ($SD = 1.41$), 4. Klasse: $M = 2.25$ ($SD = 1.55$), 6. Klasse: $M = 3.28$ ($SD = 1.27$) und 9. Klasse: $M = 3.71$ ($SD = 1.11$).

Zur besseren Veranschaulichung der verschiedenen Mittelwerte in den einzelnen Klassenstufen siehe Abbildung 15.

Um nun zu überprüfen, ob Schüler höherer Klassenstufen eher weniger auf externe Repräsentationsformen zurückgreifen, wurde eine Produkt-Moment-Korrelation zwischen der Klassenstufe und der Anzahl externer Repräsentationen in den mathematischen Modellen berechnet. Diese deutet auf einen signifikant positiven Zusammenhang zwischen Klassenstufe und der Anzahl externer Repräsentationen hin ($r = .51$, $p < .01$). Entgegen der Annahme greifen Schüler höherer Klassenstufen bei ihrer Lösung der problemhaltigen Textaufgaben hinsichtlich der mathematischen Modelle signifikant häufiger auf externe Repräsentationsformen zurück als Schüler niedrigerer

Klassenstufen. Ein solcher Zusammenhang ließ sich auch für jede einzelne Aufgabe finden. Deswegen wird auf das Berichten aufgabenspezifischer Ergebnisse hier verzichtet.

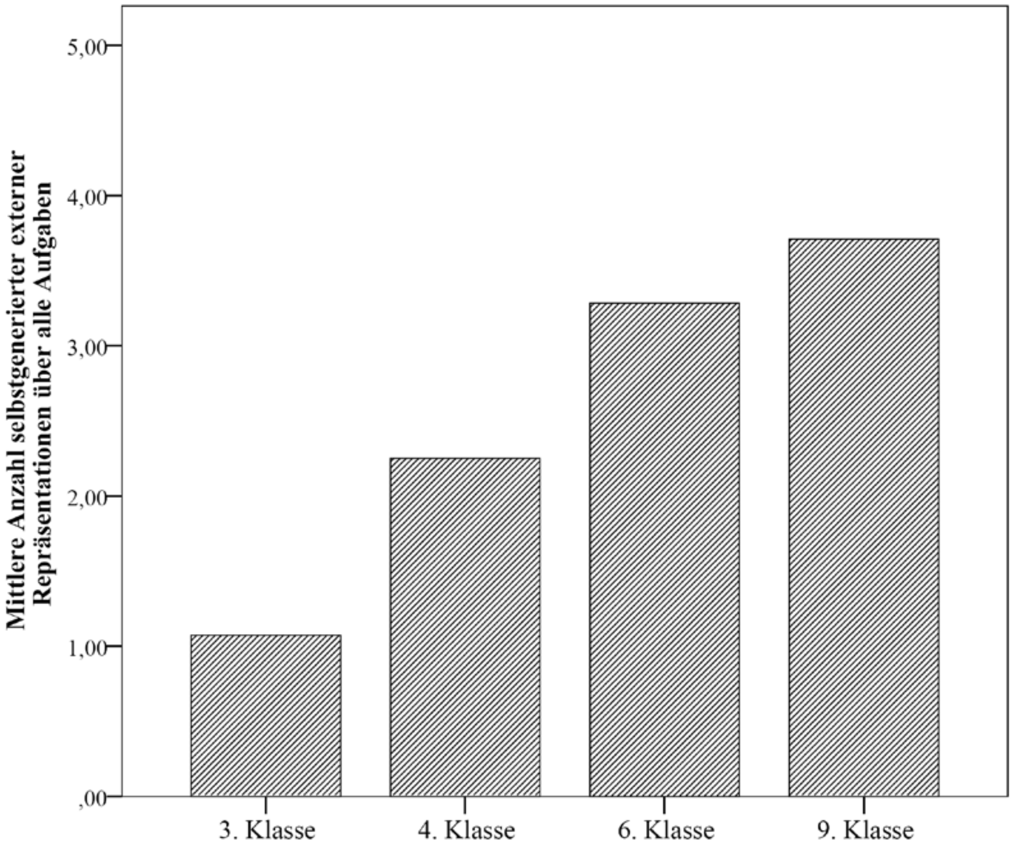

Abbildung 15: Nutzung externe Repräsentationen in den mathematischen Modellen.

Klassenspezifische Analysen

Um näher zu betrachten, zwischen welchen Klassenstufen es signifikante Unterschiede hinsichtlich der Verwendung externer Repräsentationen in den mathematischen Modellen gibt, wurde eine einfaktorielle Varianzanalyse durchgeführt. Diese ergab im Bezug auf die Klassenstufen signifikante Abweichungen zwischen den Mittelwerten (F (3, 254) = 39.08, $p < .01$).

Die anschließenden Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests zeigten zwischen allen Klassenstufen signifikante Mittelwertsunterschiede (alle *p*s < .01), außer zwischen den 6. und 9. Klassen ($p = .70$). Somit greifen die Drittklässler signifikant seltener zu externen

Repräsentationen als die Viertklässler und die Viertklässler verwenden signifikant seltener externe Repräsentationen als die Sechstklässler.

Hypothese 2.2: Je höher die Klassenstufe, desto flexibler erfolgt der Umgang mit unterschiedlichen Repräsentationsformen.

Die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen einem flexiblen Umgang mit den Repräsentationsformen und der Klassenstufe erfolgte auf zweierlei Weise. Zum einen wurde der flexible Umgang mit den Repräsentationen *innerhalb* einzelner Aufgaben betrachtet, zum anderen *zwischen* den verschiedenen Aufgaben.

Auch der Einsatz von multiplen Repräsentationen wird als eine Form von Flexibilität aufgefasst. Würde also bei einer Aufgabe eine multiple Repräsentation generiert werden und bei einer anderen nicht, so würde dies ebenfalls für einen flexiblen Einsatz der Repräsentationsformen sprechen.

Flexibilität innerhalb der Aufgaben

Zunächst wird der flexible Umgang *innerhalb* einzelner Aufgaben näher betrachtet. Dabei soll der Fokus erneut auf die jeweiligen mathematischen Modelle gelegt werden.

Da es sich bei den betrachteten problemhaltigen Textaufgaben um mehrschrittige Textaufgabe handelt, ist die Konstruktion mehrerer mathematischer (Teil)modelle für die erfolgreiche Aufgabenbewältigung vonnöten. Somit ist ein repräsentationaler Wechsel innerhalb einer Aufgabe überhaupt erst möglich.

Um nun den Zusammenhang zwischen dem flexiblen Umgang mit den Repräsentationen *innerhalb* einer Aufgabe und der Klassenstufe zu betrachten, wurde ein Kennwert gebildet, der die aufgabenspezifische Flexibilität widerspiegelt.

Für die Kennwertbestimmung wurde pro Aufgabe ein Summenscore über die vier verschiedenen Repräsentationsformen (extern deskriptional, intern deskriptional, extern depiktional, intern depiktional) gebildet. Die ursprünglichen Variablen waren hier dichotom kodiert und gaben an, ob eine Repräsentationsform bei einer Aufgabe verwendet wurde (1) oder nicht (0). Es ergaben sich also fünf Summenscores, die jeweils Werte von eins (nur eine Repräsentationsform wurde bei der Aufgabe verwendet) bis vier (alle

Repräsentationsformen wurden bei der Aufgabe verwendet) annehmen konnten. Danach wurden die fünf Summenscores so umkodiert, dass eine neue dichotome Variable entstand, die angab, ob bei der jeweiligen Aufgabe flexibel mit den verschiedenen Repräsentationsformen umgegangen wurde oder nicht. Einem Summenscore, der ursprünglich den Wert 1 annahm, wurde nun der Wert 0 zugewiesen, was keinen flexiblen Umgang mit den Repräsentationsformen innerhalb der Aufgabe widerspiegelt. Bei den verschiedenen mathematischen Teilmodellen innerhalb der Aufgabe wurde nämlich stets auf dieselbe Repräsentationsform zurückgegriffen. Summenscores, die ursprünglich die Werte 2, 3 oder 4 annahmen, wurde nun der Wert 1 zugewiesen, was einen gewissen flexiblen Umgang mit den Repräsentationsformen innerhalb der Aufgabe widerspiegelt. Bei den verschiedenen mathematischen Teilmodellen innerhalb der Aufgabe wurde nämlich auf unterschiedliche (und u.U. auch multiple) Repräsentationsformen zurückgegriffen. Abschließend wurden die aufgabenspezifischen Flexibilitätskennwerte aufsummiert. Dieser Summenscore konnte Werte zwischen null (bei keiner Aufgabe wurden die Repräsentationsformen flexibel eingesetzt) und fünf (bei allen Aufgaben wurden die Repräsentationsformen flexibel eingesetzt) annehmen. Zur Veranschaulichung des Vorgehens für die Ermittlung dieses Flexibilitätskennwertes siehe Tabelle 10.

Tabelle 10: Veranschaulichung des Vorgehens für die Ermittlung eines Kennwertes für den flexiblen Umgang mit den verschiedenen Repräsentationsformen *innerhalb* der Aufgaben.

		Aufgaben				
		Räuber	Dampfer	Schnecke	Märchen	Eis
ursprüngliche Kodierung	extern des.	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1
	intern des.	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1
	extern dep.	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1
	intern dep.	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1
Schritt 1 aufsummieren über Reprä-sentationen		Range Summe: 1-4	Range Summe: 1-4	Range Summe: 1-4	Range Summe: 1-4	Range Summe: 1-4
Schritt 2 umkodieren		1 → 0* 2 → 1** 3 → 1** 4 → 1**	1 → 0* 2 → 1** 3 → 1** 4 → 1**	1 → 0* 2 → 1** 3 → 1** 4 → 1**	1 → 0* 2 → 1** 3 → 1** 4 → 1**	1 → 0* 2 → 1** 3 → 1** 4 → 1**
Schritt 3 aufsummieren über Aufgaben		→ Range Summe: 0-5 (bei keinen Aufgaben flexible Nutzung der Repräsentationen - bei allen Aufgaben flexible Nutzung der Repräsentationen)				

Anmerkungen. * kein flexibler Umgang. ** flexibler Umgang. des = deskriptional. dep = depiktional.

Für die einzelnen Klassenstufen ergaben sich für die mathematischen Modelle folgende Mittelwerte: 3. Klasse: $M = 0.62$ ($SD = 1.06$), 4. Klasse: $M = 1.30$ ($SD = 1.34$), 6. Klasse: $M = 1.94$ ($SD = 1.18$) und 9. Klasse: $M = 2.08$ ($SD = 1.26$). Zur besseren Veranschaulichung der verschiedenen Mittelwerte in den einzelnen Klassenstufen siehe Abbildung 16. Im Allgemeinen scheint ein flexibler Umgang mit den Repräsentationen *innerhalb* der Aufgaben durchaus selten vorzukommen, da dieser im Mittel bei maximal zwei von fünf Aufgaben auftrat.

Um nun zu überprüfen, ob Schüler höherer Klassenstufen einen flexibleren Umgang mit den Repräsentationsformen *innerhalb* der Aufgaben aufweisen, wurde eine Produkt-Moment-Korrelationen zwischen der Klassenstufe und der Anzahl der Aufgaben, bei denen ein flexibler Umgang mit den Repräsentationsformen auftrat, gebildet. Diese deutet auf einen signifikant positiven Zusammenhang zwischen der Klassenstufe und der Anzahl der Aufgaben, bei denen ein flexibler Umgang mit den Repräsentationsformen auftrat, hin ($r = .36$, $p < .01$). Schüler höherer Klassenstufen scheinen also bei mehr Aufgaben die Repräsentationsformen flexibel einzusetzen als Schüler niedrigerer Klassenstufen.

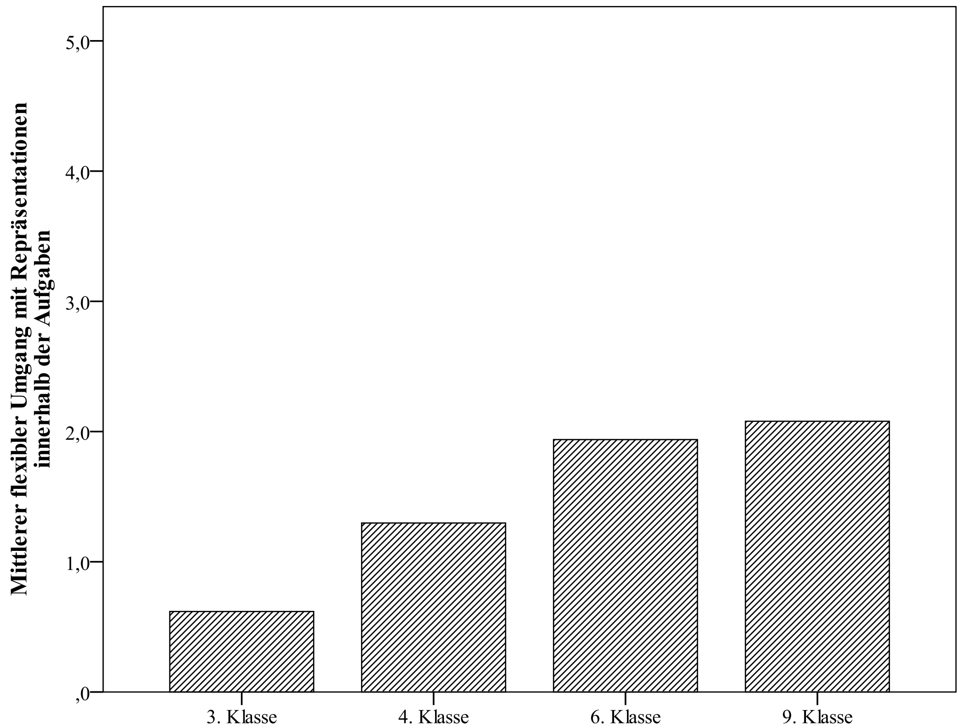

Abbildung 16: Flexibler Einsatz der Repräsentationen *innerhalb* der Aufgaben für die Klassenstufen. *Anmerkung*. Dargestellt sind über alle Aufgaben gemittelte Werte.

Flexibilität innerhalb der Aufgaben – Klassenspezifische Analysen

Um nun näher zu betrachten, zwischen welchen Klassenstufen es signifikante Unterschiede hinsichtlich ihrer Flexibilität gibt, wurde eine einfaktorielle Varianzanalyse durchgeführt. Diese ergab im Bezug auf die Klassenstufen signifikante Abweichungen zwischen den Mittelwerten (F (3, 254) = 16.55, p < .01).

Die anschließenden Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests zeigten signifikante Mittelwertsunterschiede zwischen allen Klassenstufen (alle ps < .01) außer den 6. und den 9. Klassen (p = 1.00). Die Zunahme der Flexibilität zwischen den 3. und 4. Klassen und zwischen den 4. und 6. Klassen ist somit jeweils signifikant. Die Drittklässler sind also am wenigsten flexibel in ihrem Umgang mit den Repräsentationen, gefolgt von den Viertklässler, die etwas flexibler sind. Das größte Ausmaß an Flexibilität ließ sich bei den Sechst- und Neuntklässler finden. Nachfolgend soll der flexible Umgang mit den Repräsentationsformen noch aufgabenspezifisch betrachtet werden.

Flexibilität innerhalb der Aufgaben – Aufgabenspezifische Analysen

Für die aufgabenspezifische Betrachtung der Flexibilität wird nun der Zusammenhang zwischen jeweils einer dichotomen Variable, die angibt, ob Flexibilität vorlag (0 = kein flexibler Umgang mit Repräsentationen; 1 = flexibler Umgang mit Repräsentationen) und der dichotomen Variable, die den Schultyp widerspiegelt (0 = Grundschule; 1 = Gymnasium), betrachtet. Als Assoziationsmaß wurden tetrachorische Korrelationen verwendet.

Die einzelnen tetrachorischen Korrelationen deuten darauf hin, dass sich die Grundschüler bei vier Aufgaben signifikant von den Gymnasiasten unterschieden, was den flexiblen Umgang mit den Repräsentationsformen betrifft (Märchen: r_{tet} = .45, p < .01; Schnecke: r_{tet} = .33, p < .01; Eis: r_{tet} = .44, p < .01; Dampfer: r_{tet} = .27, p = .01). Die Grundschüler zeigten bei den vier Aufgaben signifikant weniger Flexibilität. Lediglich bei der Räuberaufgabe lässt sich dieser signifikante Unterschied nicht finden (Räuber: r_{tet} = -.08, p = .46;). Eine mögliche Erklärung dafür könnte sein, dass die Gymnasiasten besser differenzieren können, bei welchem Aufgabentyp ein flexibles Vorgehen notwendig ist und wann nicht. Gerade die Räuberaufgabe ist für sie, aufgrund ihrer längeren Beschulungszeit und somit vielfältigeren Erfahrungen mit diversen Text- oder auch

Problemaufgaben, relativ leicht zu bearbeiten. (Kognitiver) Aufwand, im Sinne eines flexiblen Umgangs mit verschiedenen Repräsentationsformen, scheint sich für sie im Anbetracht der Aufgabenschwierigkeit hier nicht zu lohnen.

Flexibilität zwischen den Aufgaben

Für die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen einem flexiblen Umgang mit den Repräsentationsformen *zwischen* den einzelnen Aufgaben und der Klassenstufe, wurde zunächst ein Kennwert berechnet, der das Ausmaß der Flexibilität im Bezug auf die verschiedenen Repräsentationsformen über alle fünf Textaufgaben widerspiegelt. Dabei wurde sich wieder auf die Betrachtung der mathematischen Modelle beschränkt.

Für die Kennwertbestimmung wurde als erstes ein Summenscore pro Repräsentationsform (extern deskriptional, intern deskriptional, extern depiktional, intern depiktional) über alle fünf Aufgaben gebildet. Die ursprünglichen Variablen waren dichotom kodiert und gaben an, ob eine Repräsentationsform bei einer Aufgabe verwendet wurde (1) oder nicht (0). Es ergaben sich also vier Summenscores, die jeweils Werte von null (bei keiner Aufgabe wurde die Repräsentationsform verwendet) bis fünf (bei allen fünf Aufgaben wurde die Repräsentationsform verwendet) annehmen konnten. Danach wurden die vier Summenscores umkodiert, sodass ein neuer dreistufiger Kennwert entstand, der das Ausmaß an Flexibilität angab. Wurde eine Repräsentationsform über alle Aufgaben immer (5) oder nie (0) verwendet, spricht das für keine Flexibilität. Schülern, die diese Summenscores hatten, wurde als neuer Kennwert eine 0 zugewiesen. Wurde eine Repräsentationsform über alle Aufgaben fast immer (4) oder fast nie (1) verwendet, spricht das für relativ wenig Flexibilität. Schülern, die diese Summenscores hatten, wurde als neuer Kennwert eine 1 zugewiesen. Wurden Repräsentationsformen über alle Aufgaben zwei- oder dreimal verwendet, spricht dies für eine hohe Flexibilität. Schülern, die diese Summenscores (2 oder 3) hatten, wurde als neuer Kennwert eine 2 zugewiesen. Somit entstanden vier Kennwerte, die das Ausmaß an repräsentationaler Flexibilität pro Repräsentationsform *zwischen* den Aufgaben angaben. Diese vier Kennwerte wurden in einem letzten Schritt aufaddiert, wodurch ein einziger Flexibilitätskennwert entstand, der Werte zwischen null und acht annehmen kann, wobei höhere Werte eine höhere Flexibilität widerspiegeln. Zur Veranschaulichung des beschriebenen Vorgehens für die Ermittlung dieses Flexibilitätskennwertes siehe Tabelle 11.

Tabelle 11: Veranschaulichung des Vorgehens für die Ermittlung eines Kennwertes für den flexiblen Umgang mit den verschiedenen Repräsentationsformen *zwischen* den Aufgaben.

		Repräsentationsformen			
		extern des.	intern des.	extern dep.	intern dep.
ursprüngliche Kodierung	Räuber	0/1	0/1	0/1	0/1
	Dampfer	0/1	0/1	0/1	0/1
	Schnecke	0/1	0/1	0/1	0/1
	Märchen	0/1	0/1	0/1	0/1
	Eis	0/1	0/1	0/1	0/1
Schritt 1 aufsummieren über Aufgaben		→ Range Summe: 0-5	→ Range Summe: 0-5	→ Range Summe: 0-5	→ Range Summe: 0-5
Schritt 2 umkodieren		0 → 0* 5 → 0* 1 → 1** 4 → 1** 2 → 2*** 3 → 2***	0 → 0* 5 → 0* 1 → 1** 4 → 1** 2 → 2*** 3 → 2***	0 → 0* 5 → 0* 1 → 1** 4 → 1** 2 → 2*** 3 → 2***	0 → 0* 5 → 0* 1 → 1** 4 → 1** 2 → 2*** 3 → 2***
Schritt 3 aufsummieren über Rep.		→ Range Summe: 0-8 (keine Flexibilität bis hohe Flexibilität)			

Anmerkungen. * keine Flexibilität. ** mittlere Flexibilität. *** hohe Flexibilität. des = deskriptional. dep = deskriptional. Rep. = Repräsentationen.

Für die einzelnen Klassenstufen ergaben sich für die mathematischen Modelle folgende Mittelwerte: 3. Klasse: M = 2.49 (SD = 1.35), 4. Klasse: M = 3.42 (SD = 1.45), 6. Klasse: M = 4.79 (SD = 1.53) und 9. Klasse: M = 3.97 (SD = 1.79).

Zur besseren Veranschaulichung der verschiedenen Mittelwerte in den einzelnen Klassenstufen siehe Abbildung 17.

Um nun zu überprüfen, ob Schüler höherer Klassenstufen einen flexibleren Umgang mit den Repräsentationsformen *zwischen* den Aufgaben aufweisen, wurde eine Produkt-Moment-Korrelationen zwischen der Klassenstufe und dem Kennwert gebildet, der das Ausmaß des flexiblen Umgangs mit den Repräsentationsformen *zwischen* den Aufgabe angibt. Diese deutet auf einen signifikant positiven Zusammenhang zwischen der Klassenstufe und dem Ausmaß an Flexibilität hin (r = .33, p < .01). Schüler höherer

Klassenstufen scheinen *wischen* den Aufgaben mit den Repräsentationsformen flexibler umzugehen als Schüler niedrigerer Klassenstufen.

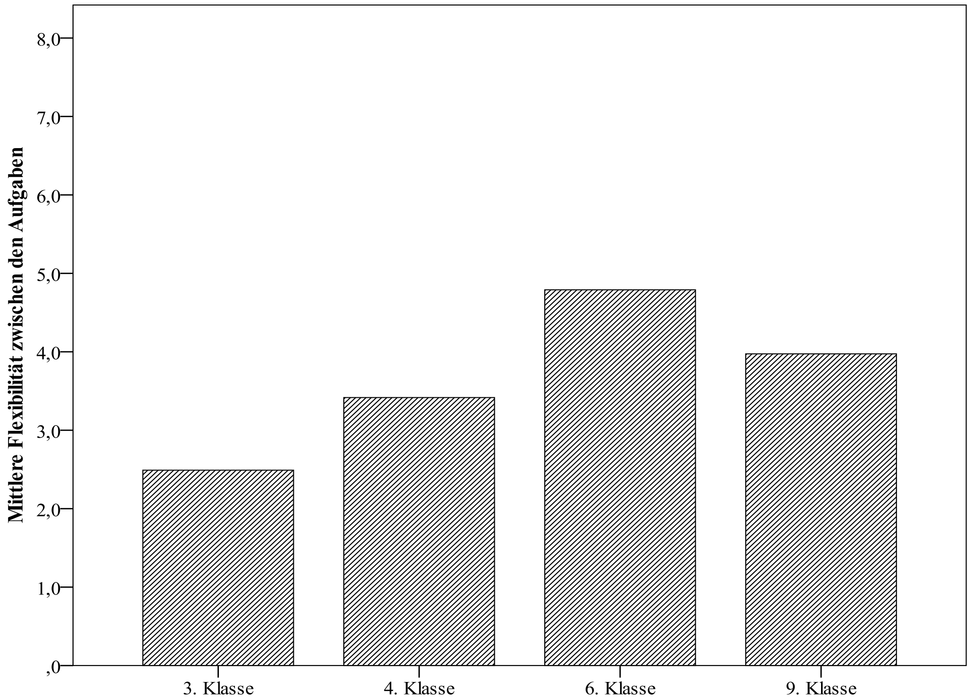

Abbildung 17: Flexibler Einsatz der Repräsentationen *zwischen* den Aufgaben für die einzelnen Klassenstufen.

Die Betrachtung der Flexibilität *zwischen* den Aufgaben lässt natürlich keine aufgabenspezifischen Analysen zu. Somit soll abschließend die klassenspezifische Betrachtung der Flexibilität *zwischen* den Aufgaben erfolgen.

Flexibilität zwischen der Aufgaben – Klassenspezifische Analysen

Für die nähere Betrachtung der repräsentationalen Flexibilität *zwischen* den Aufgaben in den einzelnen Klassenstufen wurde eine einfaktorielle Varianzanalyse durchgeführt. Diese ergab im Bezug auf die Klassenstufen signifikante Abweichungen zwischen den Mittelwerten (F (3, 254) = 27.22, p < .01). Die anschließenden Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests zeigten signifikante Mittelwertsunterschiede zwischen allen Klassenstufen (alle ps < .01), außer den 4. und 9. Klassen (p = .36). Die Drittklässer zeigten somit am wenigsten Flexibilität zwischen den Aufgaben hinsichtlich des Einsatzes verschiedener Repräsentationsformen. Die Viert- und Neuntklässler zeigten mehr Flexibilität als die

Drittklässler, unterschieden sich jedoch nicht voneinander. Das höchste Ausmaß an Flexibilität zeigten die Sechstklässler.

9.5.6 Forschungsfrage 3: Lösungserfolg und Repräsentationsform

Im Fokus der dritten Forschungsfrage stand der Zusammenhang zwischen dem Lösungserfolg und den verschiedenen Repräsentationsformen, auf die die Schüler bei der Bearbeitung der problemhaltigen Textaufgaben zurückgriffen. Um diesen Zusammenhang näher zu beleuchten, wurden zwei Hypothesen postuliert, die nachfolgend überprüft werden sollen.

Hypothese 3.1: Die Verwendung von multiplen Repräsentationen bei der Konstruktion des mathematischen Modells sollte mit einem höheren Lösungserfolg einhergehen.

Zur Überprüfung dieser Hypothese wurden die dichotomen Variablen, die angaben, ob bei der Konstruktion des aufgabenspezifischen, mathematischen Modells auf multiple Repräsentationen zurückgegriffen wurde (1 = das mathematische Modell wurde sowohl depiktional als auch deskriptional repräsentiert) oder nicht (0 = das mathematische Modell wurde lediglich depiktional *oder* deskriptional repräsentiert), über alle Aufgaben aufsummiert. Der so ermittelte Summenscore gab an, bei wie vielen Aufgaben auf eine multiple Repräsentation bei der Konstruktion des mathematischen Modells zurückgegriffen wurde. Jener Summenscore konnte Werte zwischen null (bei keiner Aufgabe wurde das mathematische Modell multipel repräsentiert) und fünf (bei allen Aufgaben wurde das mathematische Modell multipel repräsentiert) annehmen.

Für die einzelnen Klassenstufen ergaben sich dabei folgende Mittelwerte: 3. Klasse: M = 0.80 (SD = 1.15), 4. Klasse: M = 0.83 (SD = 1.13), 6. Klasse: M = 1.21 (SD = 0.96) und 9. Klasse: M = 1.18 (SD = 0.95). Die Mittelwerte deuten schon darauf hin, dass in allen Klassenstufen selten auf multiple Repräsentationen bei der Konstruktion der mathematischen Modelle zurückgegriffen wurde.

Um nun zu überprüfen, ob die Verwendung von multiplen Repräsentationen bei der Konstruktion mathematischer Modelle mit einem höheren Lösungserfolg einhergeht, wurde eine Produkt-Moment-Korrelation zwischen der Anzahl multipler Repräsentationen und der Anzahl richtig gelöster Aufgaben gebildet.

Diese deutet auf einen signifikant positiven Zusammenhang zwischen der Anzahl multipler Repräsentationen und der Anzahl richtig gelöster Aufgaben hin (r = .17, p = .03). In der Tat scheint das Generieren von sowohl depiktionalen als auch deskriptionalen Repräsentationen bei der Konstruktion eines mathematischen Modells mit einem höheren Lösungserfolg einherzugehen. Da jedoch bereits gezeigt wurde, dass mit einer höheren Klassenstufe auch ein höheren Lösungserfolg einhergeht, wurde der Zusammenhang zwischen der Anzahl multipler Repräsentationen und der Anzahl richtig gelöster Aufgaben erneut betrachtet, und zwar diesmal unter Herauspartialisierung der Klassenstufe. Dies ergab einen marginal signifikanten Zusammenhang (pr = .15, p = .07).

Darüber hinaus zeigte sich ein signifikant negativer Zusammengang zwischen der Anzahl total inkongruenter Lösungen (Summenscore, der Werte von null bis fünf annehmen kann; 0 = bei keiner Aufgabe total inkongruente Lösung; 5 = bei allen Aufgaben total inkongruente Lösung) und der Verwendung einer multiplen Repräsentation beim mathematischen Modell (r = -.19, p = .03). Dies deutet darauf hin, dass der Einsatz multipler Repräsentationen eine Art präventive Wirkung im Bezug auf eine total inkongruente Lösung hat. Trotzdem ist eine multiple Repräsentation noch kein Garant für eine richtige Aufgabenlösung. Auch hier könnte der Zusammenhang durchaus durch den Einfluss der Klassenstufe bedingt sein. Deswegen wurde der Zusammenhang zwischen der Anzahl multipler Repräsentationen und der Anzahl total inkongruenter Lösungen erneut betrachtet, und zwar unter Herauspartialisierung der Klassenstufe. Dies ergab einen weiterhin signifikant negativen Zusammenhang (pr = -.13, p = .04). Dies deutet darauf hin, dass multiple Repräsentationen durchaus präventiv wirken können und dies unabhängig von der Klassenstufe.

Um ein differenzierteres Bild über die Verwendung multipler Repräsentationsformen im Rahmen des mathematischen Modells und ihrem Zusammenhang mit dem Lösungserfolg zu erhalten, wurden sowohl aufgaben- als auch klassenspezifische Analysen durchgeführt. Zur Veranschaulichung der aufgaben- und klassenspezifischen Verwendung multipler Repräsentationsformen siehe Abbildung 18.

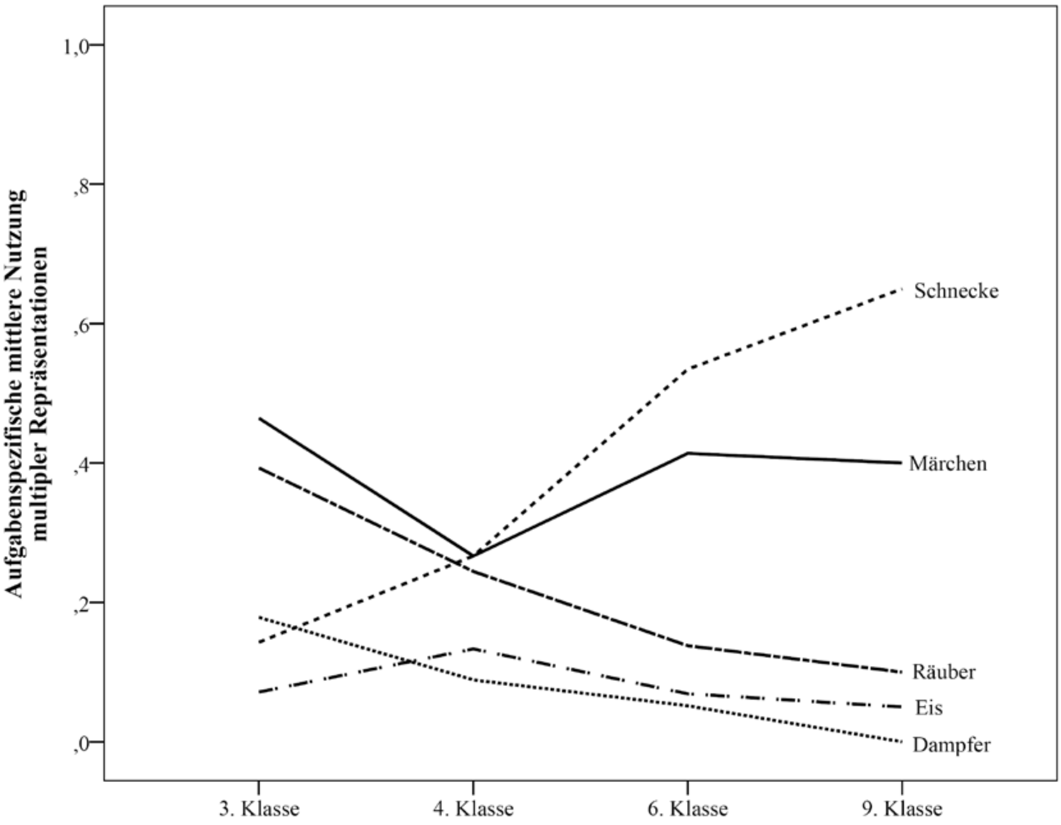

Abbildung 18: Aufgaben- und klassenspezifische Verwendung multipler Repräsentationsformen in den mathematischen Modellen.

Klassenspezifische Analysen

Zunächst wurden die Grundschüler mit den Gymnasiasten im Hinblick auf die Häufigkeit des Einsatzes multipler Repräsentationen beim mathematischen Modell über alle Aufgaben verglichen. Ein t-Test (für ungleiche Varianzen) ergab einen signifikanten Gruppenunterschied (t (255.94) = -2.94, $p < .01$) dahingehend, dass die Gymnasiasten signifikant häufiger auf multiple Repräsentationen zurückgriffen als die Grundschüler. Trotzdem wurden multiple Repräsentationsformen nur selten eingesetzt. Im Hinblick auf die einzelnen Aufgaben unterschieden sich Gymnasiasten und Grundschüler unterschiedlich stark voneinander. Da es sich bei der Schulform um eine künstlich dichotomisierte Variable (0 = Grundschule, 1 = Gymnasium), bei den multiplen Repräsentationsformen jedoch um eine natürlich dichotome Variable (0 = multiple Repräsentation nicht vorhanden, 1 = multiple Repräsentation vorhanden) handelt, wurde als Assoziationsmaß der Phi-Koeffizient verwendet (Bortz & Döring, 2009), welcher Werte zwischen -1 und +1 annehmen kann (Wirtz & Nachtigall, 2004). Die ermittelten

Phi-Koeffizienten deuten darauf hin, dass sich die beiden Schultypen in ihrer Verwendung multipler Repräsentationen bei der Konstruktion eines mathematischen Modells lediglich bei der Märchenaufgabe signifikant voneinander unterschieden ($\varphi = .40$, $p < .01$). Sowohl für die Schnecken- als auch für die Dampferaufgabe ließen sich marginal signifikante Zusammenhänge finden (Schnecke: $\varphi = .12$, $p = .07$; Dampfer: $\varphi = -.13$, $p = .06$), für die Räuber- und Eisaufgabe ließen sich keine signifikanten Zusammenhänge finden (Räuber: $\varphi = -.09$, $p = .17$; Eis: $\varphi = -.03$, $p = .66$). Auffällig ist, dass zumindest bei der Dampferaufgabe die Grundschüler tendenziell eher eine multiple Repräsentation verwendeten als die Gymnasiasten.

Aufgabenspezifische Analysen

Abschließend soll nun noch aufgabenspezifisch der Zusammenhang zwischen der Verwendung multipler Repräsentationen bei der Konstruktion mathematischer Modelle und der Aufgabenrichtigkeit betrachtet werden. Da es sich bei den Variablen einerseits um eine künstlich dichotomisierte Variable (0 = Aufgabe nicht richtig gelöst, 1 = Aufgabe richtig gelöst) und andererseits um eine natürlich dichotome Variable (0 = multiple Repräsentation nicht vorhanden, 1 = multiple Repräsentation vorhanden) handelt, wurde als Assoziationsmaß erneut der Phi-Koeffizient verwendet. Dieser deutet auf ein sehr interessantes Muster hin. So ließen sich bei der Räuber- und Dampferaufgabe signifikant negative Zusammenhänge finden (Räuber: $\varphi = -.13$, $p = .05$; Dampfer: $\varphi = -.18$, $p = .01$), was darauf hindeutet, dass bei diesen beiden Aufgaben die Verwendung multipler Repräsentationen bei der Konstruktion eines mathematischen Modells eher mit einer nichtrichtigen Lösung einhergeht (entweder partiell inkongruent oder total inkongruent). Sowohl bei der Märchen- als auch bei der Schneckenaufgabe ließen sich hingegen signifikant positive Zusammenhänge ausfindig machen (Märchen: $\varphi = .25$, $p < .01$; Schnecke: $\varphi = .17$, $p = .01$). Dies deutet darauf hin, dass die Verwendung multipler Repräsentationen bei der Konstruktion eines mathematischen Modells hier eher mit einer richtigen Lösung einherging. Bei der Eisaufgabe konnte kein signifikanter Zusammenhang nachgewiesen werden ($\varphi = -.04$, $p = .59$).

Das Muster der Phi-Koeffizienten kann darauf hindeuten, dass nicht bei jeder Aufgabe der Einsatz multipler Repräsentationsformen erfolgsversprechend ist.

Im Anschluss soll nun die Betrachtungsweise etwas erweitert werden. Bisher ging es lediglich um die Konstruktion des ersten mathematischen Modells im ersten Analyseschritt und die Frage, auf welche Repräsentationsformen die Schüler dabei zurückgreifen. Nachfolgend soll nun die Gesamtheit der Analyseschritte bei der Aufgabenlösung betrachtet werden.

Hypothese 3.2: Ein flexibler Umgang mit den Repräsentationsformen sollte mit einem höheren Lösungserfolg einhergehen.

Die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen einem flexiblen Umgang mit den Repräsentationsformen und dem Lösungserfolg erfolgte auf zweierlei Weise, nämlich ein flexibler Umgang *innerhalb* einzelner Aufgaben und ein flexibler Umgang *zwischen* den verschiedenen Aufgaben.

Flexibilität innerhalb der Aufgaben

Zunächst wird der flexible Umgang *innerhalb* einzelner Aufgaben näher betrachtet.

Dafür wurde eine Produkt-Moment-Korrelation zwischen der Anzahl richtig gelöster Aufgaben und der Anzahl der Aufgaben, bei denen ein flexibler Umgang mit den Repräsentationsformen auftrat, gebildet (zur detaillierten Beschreibung der Kennwertbildung s.o.). Diese deutet auf einen signifikant positiven Zusammenhang zwischen der Anzahl richtig gelöster Aufgaben und der Anzahl der Aufgaben, bei denen ein flexibler Umgang mit den Repräsentationsformen auftrat, hin ($r = .32$, $p < .01$). Ein flexibler Umgang mit den Repräsentationen *innerhalb* der jeweiligen Aufgaben geht also mit einem höheren Lösungserfolg einher.

Da bereits gezeigt werden konnte, dass Schüler höherer Klassenstufen eine höhere Flexibilität und ebenfalls einen höheren Lösungserfolg aufweisen, soll nun näher betrachtet werden, ob die gefundene positive Korrelation zwischen der Flexibilität und dem Lösungserfolg lediglich durch den Einfluss der Klassenstufe verursacht wird. Deshalb wurde eine Partialkorrelation zwischen der Flexibilität und dem Lösungserfolg berechnet unter Berücksichtigung der Klassenstufe. Diese ergab einen nichtsignifikanten Zusammenhang zwischen der Flexibilität *innerhalb* der Aufgaben und dem Lösungserfolg ($pr = .10$, $p = .21$). Es scheint somit keinen direkten Zusammenhang zwischen der

Flexibilität bei der Verwendung verschiedener Repräsentationsformen *innerhalb* der einzelnen Aufgaben und dem Lösungserfolg zu geben. Nachfolgend soll der flexible Umgang *zwischen* den einzelnen Aufgaben näher betrachtet werden.

Flexibilität zwischen den Aufgaben

Um nun zu überprüfen, ob ein flexibler Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen *zwischen* den einzelnen Aufgaben mit einem größeren Lösungserfolg einhergeht, wurde eine Produkt-Moment-Korrelation zwischen der Anzahl richtig gelöster Aufgaben und dem Flexibilitätskennwert ermittelt (zur detaillierten Beschreibung der Kennwertbildung s.o.). Die Korrelation deutet auf einen signifikant positiven Zusammenhang zwischen der Anzahl richtig gelöster Aufgaben und der Flexibilität im Umgang mit den Repräsentationsformen hin ($r = .44$, $p < .01$). Ein flexibler Umgang mit den Repräsentationen geht also mit einem höheren Lösungserfolg einher. An dieser Stelle wurde ebenfalls überprüft, ob der gefundene Zusammenhang durch die Klassenstufe bedingt ist, da mit höherer Klassenstufe der Lösungserfolg und auch das Ausmaß an Flexibilität zunehmen. Die Partialkorrelation ergab, dass der positive Zusammenhang zwischen der Flexibilität und dem Lösungserfolg auch unter Berücksichtigung der Klassenstufe erhalten bleibt ($pr = .25$, $p < .01$). Unabhängig von der Klassenstufe scheint der flexible Einsatz von Repräsentationen je nach Aufgabe also einen positiven Einfluss auf den Lösungserfolg zu haben.

9.5.7 Forschungsfrage 4: Lösungserfolg und Vorgehensweise

Im Fokus der vierten Forschungsfrage stand der Zusammenhang zwischen dem Lösungserfolg und der Vorgehensweise bei der Bearbeitung der problemhaltigen Textaufgaben (ganzheitlich oder zergliedernd). Um diesen Zusammenhang näher zu beleuchten, wurde folgende Hypothese postuliert, die nun überprüft werden soll.

Hypothese 4: Ganzheitliche Vorgehensweisen sollten eher zu richtigen Lösungen führen als zergliedernde.

Bei der Überprüfung dieser Hypothese wurden nur jene Schüler berücksichtigt, die entweder ein ganzheitliches oder ein zergliederndes Vorgehen bei ihrer Aufgabenlösung zeigten. Schüler, die ein kombinierendes Vorgehen verwendeten, wurden der Einfachheit halber bei den nachfolgenden Analysen nicht berücksichtigt. Dies war hinsichtlich aller Aufgaben und aller Schüler lediglich neunmal der Fall.

Zunächst wurde eine aufgabenspezifische dichotome Variable gebildet, die anzeigt, ob eine ganzheitliche Vorgehensweise gewählt wurde (1) oder nicht (0). Wurde keine ganzheitliche Vorgehensweise gewählt, impliziert dies automatisch ein zergliederndes Vorgehen. Über diese aufgabenspezifische Variable wurde in einem weiteren Schritt ein Summenscore gebildet, der angab, bei wie vielen Aufgaben ein ganzheitliches Vorgehen vorkam. Jener konnte Werte zwischen null (bei keiner Aufgabe wurde ganzheitlich vorgegangen) und fünf (bei allen Aufgaben wurde ganzheitlich vorgegangen) annehmen.

Um nun zu überprüfen, ob eine ganzheitliche Vorgehensweise mit einem höheren Lösungserfolg einhergeht, wurde eine Produkt-Moment-Korrelation zwischen der Anzahl ganzheitlich bearbeiteter Aufgaben und der Anzahl richtig gelöster Aufgaben gebildet. Diese deutet darauf hin, dass es, entgegen der ursprünglichen Annahme, keinen Zusammenhang zwischen der Vorgehensweise und dem Lösungserfolg zu geben scheint ($r = -.04$, $p = .63$). Nachfolgend sollen die verschiedenen Vorgehensweisen differenzierter betrachtet werden.

Klassenspezifische Analysen

Sicherlich kann aufgrund der unterschiedlichen Beschulungsdauer, und somit der Erfahrung und Vertrautheit mit diversen Aufgabentypen und Lösungsstrategien, davon ausgegangen werden, dass die verschiedenen Klassenstufen in unterschiedlichem Ausmaß auf die beiden Vorgehensweisen zurückgreifen. Dem soll nun nachgegangen werden.

Über alle fünf problemhaltigen Textaufgaben verwendeten die Schüler je nach Klassenstufe unterschiedlich häufig ein ganzheitliches Vorgehen. Für die einzelnen Klassenstufen zeigten sich folgende Mittelwerte: 3. Klasse: $M = 2.20$ ($SD = 1.11$),

4. Klasse: $M = 2.12$ ($SD = 1.19$), 6. Klasse: $M = 2.64$ ($SD = 1.25$) und 9. Klasse: $M = 3.21$ ($SD = 0.99$).

Um nun näher zu betrachten, zwischen welchen Klassenstufen signifikante Unterschiede hinsichtlich der Verwendung eines ganzheitlichen Lösungsvorgehens auftraten, wurde eine einfaktorielle Varianzanalyse durchgeführt. Diese ergab im Bezug auf die Klassenstufen signifikante Abweichungen zwischen den Mittelwerten (F (3, 253) = 9.15, $p < .01$). Die anschließenden Bonferroni-korrigierten post-hoc Tests zeigten signifikante Mittelwertsunterschiede zwischen den Klassenstufen 3 und 9 ($p < .01$), 4 und 6 ($p = .03$) und 4 und 9 ($p < .01$). Diese Befunde legen nahe, dass Schüler höherer Klassenstufen eher zu einem ganzheitlichen Vorgehen neigen.

Aufgabenspezifische Analyse

Für die aufgabenspezifische Betrachtung wurde jeweils der Zusammenhang zwischen der Vorgehensweise (0 = zergliedernd, 1 = ganzheitlich) und dem Lösungserfolg (0 = falsche Lösung, 1 = richtige Lösung) über alle Klassenstufen ermittelt. Da es sich bei beiden Variablen um künstlich dichotomisierte Variablen handelt, wurden tetrachorische Korrelationen als Assoziationsmaße berechnet. Ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Vorgehensweise und dem Lösungserfolg ließ sich lediglich bei der Schneckenaufgabe ($r_{tet} = -.57$, $p < .01$) und bei der Dampferaufgabe ($r_{tet} = -.41$, $p < .01$) ausmachen. Entgegen der ursprünglichen Annahmen, handelte es sich hierbei jedoch um negative Zusammenhänge. Ein zergliederndes Vorgehen ging also mit einem höheren Lösungserfolg bei den beiden Aufgaben einher. Bei der Märchenaufgaben zeigte sich ein marginal signifikanter Zusammenhang in derselben Richtung ($r_{tet} = -.28$, $p = .06$). Bei den übrigen zwei Aufgaben ließ sich kein Zusammenhang zwischen der Vorgehensweise und dem Lösungserfolg finden (Räuber: $r_{tet} = .12$, $p = .36$; Eis: $r_{tet} = -.13$, $p = .46$).

Für einen Teil der problemhaltigen Textaufgaben ließ sich also ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Vorgehensweise und dem Lösungserfolg ausfindig machen, jedoch nicht in der oben angenommen Art und Weise. Eine höhere Aufgabenrichtigkeit ging eher mit einem zergliedernden Vorgehen einher. Somit scheint eine spezifische Vorgehensweise (entweder ganzheitlich oder zergliedernd) nicht per se mit einem höheren

Lösungserfolg assoziiert zu sein. Vielmehr ist dies von den Anforderungen und Spezifika der Aufgabe (und sicherlich auch von den Fähigkeiten des Lösenden) abhängig.

9.5.8 Schülermerkmale, Repräsentationsformen und Lösungserfolg

Abschließend soll untersucht werden, ob, und wenn ja, inwieweit die Schulnoten in den Fächern Deutsch und Mathe bzw. das Leseverständnis und die mathematischen Grundlagenkenntnisse mit den selbstgenerierten Repräsentationsformen und dem Lösungserfolg zusammenhängen. Dies geschah anhand von Korrelationen bzw. Partialkorrelationen über die einzelnen Summenwerte, die bereits über einzelne Kennwerte der fünf Aufgaben gebildet wurden.

Mathematische Fähigkeiten und Grundlagenkenntnisse

Da in den Grundschulen nur ausgewählte Untertests des HRT1-4 durchgeführt wurden, konnten keine am Alter normierten Kennwerte gebildet werden. Es lagen lediglich Summenrohwerte vor, die anzeigten, dass die Drittklässler deutlich weniger Punkte erzielen konnten als die Viertklässler. Dies ist naheliegend, scheint jedoch wenig aussagekräftig im Bezug auf die tatsächlichen mathematischen Grundkenntnisse zu sein, da der Altersunterschied der Schüler keine Berücksichtigung fand. Deswegen wurde pro Klassenstufe ein Mediansplit durchgeführt, der sowohl die Drittklässler als auch die Viertklässler jeweils in eine Gruppe von Schülern mit höheren und ein Gruppe mit geringeren mathematischen Grundkenntnissen aufteilte. So wurde auch in den 6. und 9. Klassen verfahren. Jedoch erfolgte der Mediansplit hier auf Basis der Mathenote. Dadurch entstanden zwei Gruppen von Schülern über alle Klassenstufen: eine Gruppe mit höheren mathematischen Fähigkeiten und eine mit niedrigeren.

Die korrelativen Analysen konnten zeigen, dass die Anzahl richtig gelöster Aufgaben positiv mit den mathematischen Fähigkeiten zusammenhing ($r = .27$, $p < .01$). Die mathematischen Fähigkeiten waren jedoch weder mit der Anzahl multipler Repräsentationen bei der Konstruktion mathematischer Modelle ($r = .01$, $p = .91$), noch mit dem flexiblen Umgang mit den Repräsentationen *zwischen* den Aufgaben ($r = .07$,

$p = .29$) oder auch dem flexiblen Umgang mit den Repräsentationen *innerhalb* der Aufgaben ($r = -.02$, $p = .75$) assoziiert.

Somit hatten die mathematischen Fähigkeiten auch wenig bzw. keinen Einfluss auf den Zusammenhang zwischen multiplen Repräsentationen und dem Lösungserfolg ($pr = .18$, $p = .03$), der Flexibilität *zwischen* den Aufgaben und dem Lösungserfolg ($pr = .45$, $p < .01$) und Flexibilität *innerhalb* der Aufgaben und dem Lösungserfolg ($pr = .34$, $p < .01$). Schüler mit höheren mathematischen Fähigkeiten sind also in der Lage, mehr Aufgaben richtig zu lösen. Darüber hinaus scheinen aber sowohl Schüler mit höheren als auch Schüler mit niedrigeren mathematischen Fähigkeiten auf eine ähnliche Art und Weise die Repräsentationsformen einsetzen zu können und davon durchaus zu profitieren. Somit stellt sich die Frage, ob ein spezifischer Umgang mit den Repräsentationsformen einen zusätzlichen Beitrag zur Matheleistung im Hinblick auf den Lösungserfolg hat.

Dafür wurden schrittweise multiple Regressionen gerechnet. Alle Werte wurden vorher z-standardisiert. Als abhängige Variable wurde die Anzahl richtiger Lösungen verwendet. In einem ersten Block wurde als Prädiktor lediglich die Matheleistung der Schüler gewählt. In einem zweiten Block wurden als zusätzliche Prädiktoren die Anzahl multipler Repräsentationen und sowohl der flexible Umgang mit Repräsentationen *innerhalb* der Aufgaben auch *zwischen* den Aufgaben aufgenommen. So konnte überprüft werden, ob diese drei Variablen einen signifikant zusätzlichen Einfluss zur Matheleistung auf den Lösungserfolg haben. Die Regressionsanalyse ergab eine signifikante Änderung im R^2 von 6.7% der Gesamtvarianz auf 24.8% ($F(3, 148) = 13.12$, $p < .01$). Zusätzlich zur Matheleistung ($\beta = .25$, $t = 3.49$, $p < .01$) wurde lediglich die Flexibilität im Bezug auf die Verwendung der Repräsentationsformen *zwischen* den Aufgaben im zweiten Schritt signifikant ($\beta = .35$, $t = 4.20$, $p < .01$). Die Flexibilität scheint unabhängig von der Matheleistung den Lösungserfolg positiv zu beeinflussen. Dieser Effekt bleibt auch unter Berücksichtigung der Klassenstufe als weiterer Prädiktor erhalten.

Sprachliche Fähigkeiten und Leseverständnis

Da mit dem ELFE1-6 spezifisch das Leseverständnis erfasst wurde und die Deutschnote ein doch eher allgemeines Maß sprachlicher Fähigkeiten zu sein scheint, wurden die Zusammenhänge hier getrennt für die Grundschüler und Gymnasiasten betrachtet. Auf die

Bildung eines allgemeinen klassenübergreifenden Kennwertes wurde also verzichtet. Die war auch deshalb möglich, weil, im Gegensatz zum HRT1-4, die Werte vom ELFE1-6 in altersnormierter Form vorlagen.

Bei den Grundschülern ergab sich folgendes Bild. Hier zeigten die korrelativen Analysen signifikant positive Zusammenhänge zwischen dem Testergebnis im ELFE1-6 und der Anzahl richtiger Lösungen (r = .46, p < .01), der Verwendung multipler Repräsentationen bei der Konstruktion mathematischer Modelle (r = .20, p = .02), dem flexiblen Umgang mit den Repräsentationen *innerhalb* der Aufgaben (r = .20, p = .03) und auch *zwischen* den Aufgaben (r = .25, p < .01). Das Textverständnis scheint bei den Grundschülern also in einem hohen Maße das Lösungsverhalten und den Lösungserfolg zu beeinflussen. Schrittweise multiple Regressionen mit z-standardisierten Werten zeigten bei den Grundschülern jedoch, dass durch die drei Repräsentationsvariablen keine zusätzliche Varianz zu den ELFE1-6-Testwerten hinsichtlich des Lösungserfolgs aufgeklärt werden kann (F(3, 69) = 0.40, p = .76).

Bei den Gymnasiasten ergab sich folgendes Bild. Die korrelativen Analysen zeigten einen signifikanten Zusammenhang der Deutschnote mit dem Lösungserfolg (r = -.28, p = .01) und dem flexiblen Umgang mit den Repräsentationen *zwischen* den Aufgaben (r = -.18, p = .05). Schüler mit einer schlechteren Deutschnote scheinen also weniger Aufgaben richtig zu lösen und weniger flexibel mit den Repräsentationsformen *zwischen* den einzelnen Aufgaben umzugehen. Die Deutschnote hing jedoch weder mit der Anzahl multipler Repräsentationen bei der Konstruktion mathematischer Modelle (r = -.05, p = .58) noch mit dem flexiblen Umgang mit den Repräsentationen *innerhalb* der Aufgaben (r = -.05, p = .62) zusammen. Die Deutschnote scheint bei den Gymnasiasten das Lösungsverhalten und den Lösungserfolg zu beeinflussen. Schrittweise multiple Regressionen mit z-standardisierten Werten zeigten, dass auch hier durch die drei Repräsentationsvariablen keine zusätzliche Varianz zu der Deutschnote hinsichtlich des Lösungserfolgs aufgeklärt werden kann (F(3, 75) = 1.50, p = .22).

Antwort

DISKUSSION

ZUSAMMENFASSUNG

10. DISKUSSION

„Und da dachte ich, ich mach für die Erwachsenen den hohen Preis. Die sind ja groß."

Nachdem die theoretischen und empirischen Grundlagen erläutert, das Untersuchungsdesign und -vorgehen vorgestellt und die daraus resultierenden Daten und Ergebnisse in den vorangegangenen Kapiteln beschrieben wurden, soll dies in einem ersten Schritt noch einmal kritisch reflektiert und diskutiert werden. In einem zweiten Schritt werden mögliche Ansätze für zukünftige Forschungsarbeiten und die Übertragung der hier gewonnenen Erkenntnisse in die Praxis erörtert.

10.1 Ergebnisdiskussion

Die vorliegende Arbeit hatte die Untersuchung von Lösungsprozessen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben durch Schüler verschiedener Klassenstufen zum Ziel. Dabei standen besonders die Repräsentationsformen im Mittelpunkt, auf die die Schüler dabei zurückgreifen. Die bereits berichteten (quantitativen) Ergebnisse sollen im Nachfolgenden noch etwas differenzierter betrachtet werden.

Im Hinblick auf die Vergleiche von den Grundschülern mit den Gymnasiasten sei ein Punkt bereits hier angesprochen, der für viele im Nachfolgenden diskutierte Ergebnisse gelten kann. Bei den Grundschülern handelt es sich, im Gegensatz zu den Gymnasiasten, um eine sehr heterogene Gruppe. Hier lässt sich das ganze Spektrum an Leistungsfähigkeit finden. Die Gymnasiasten hingegen sind eine durchaus selektive Gruppe; hier lassen sich im Großen und Ganzen die leistungsstärkeren Schüler verorten. Somit sind die Vergleiche zwischen den beiden Gruppen mit Vorsicht zu betrachten, denn die Gruppen unterscheiden sich nicht nur im Bezug auf die Beschulungszeit und den damit verbunden Erfahrungen hinsichtlich z.B. Aufgabentypen, Repräsentationsformen oder Lösungsvorgehen. Die Gruppen*zusammensetzungen* sind hier durchaus unterschiedlich. Ob, und wenn ja, wie sich dies auf die Lösungsprozesse der Schüler auswirkt, kann hier nicht beantwortet werden. Dafür müsste eine eher homogene, leistungsstarke Gruppe von Grundschülern mit den Gymnasiasten verglichen werden.

Ferner handelt es sich bei den hier betrachteten Schülern um eine Gelegenheitsstichprobe. Die Ergebnisse können also nicht uneingeschränkt verallgemeinert werden. Dafür bedarf es weiterer Forschung an repräsentativen Stichproben.

Allgemeine Befunde im Bezug auf die Lösungsprozesse

Die erste Betrachtung allgemeiner Aspekte der Lösungsprozesse ergab einige interessante Erkenntnisse. So schätzten die Grundschüler die Aufgaben im Mittel genauso schwierig ein wie die Gymnasiasten. Hier würde man eigentlich davon ausgehen, dass dieselben Aufgaben von den Gymnasiasten als leichter beurteilt werden sollten als von den Grundschülern, gerade wenn man bedenkt, dass die Aufgaben für den Primarbereich konzipiert wurden. In Anbetracht der Tatsache, dass der Lösungserfolg bei (fast) allen Schülern eher mäßig ausfiel, liegt die Einschätzung nahe, dass die Gymnasiasten den Anspruch der Aufgaben wohl realistischer einschätzen können als die Grundschüler. Dies kann mehrere Ursachen haben. Zum einen ist es denkbar, dass die Grundschüler durch das einmalige Vorlesen der Textaufgaben diese gar nicht umfassend verstehen konnten, zumal die Schwierigkeitseinschätzung direkt nach dem Vorlesen erfolgte. Zum anderen ist es aber auch möglich, dass die Grundschüler die Tragweite der Aufgaben nicht erkannten. Dies könnte u.U. auf geringere metakognitive Kompetenzen zurückgeführt werden (vgl. Kuhn, 1999; für einen Überblick s. Schneider, 2008). Ferner kann es durchaus sein, dass die Grundschüler, aufgrund weniger Erfahrungen im Umgang mit Anwendungs- und Problemaufgaben, gar keine Vergleichsstandards haben, um die Aufgaben realistisch einschätzen zu können und deswegen eventuell auf ihre Erfahrungen im Umgang mit „normalen" Textaufgaben zurückgreifen. Mit diesem Punkt ließe sich vielleicht auch die Tatsache erklären, dass die Grundschüler ähnlich viele Analyseschritte durchliefen wie die Gymnasiasten und ähnlich kurze Bearbeitungszeiten hatten.

Die erste Betrachtung allgemeiner Aspekte der Lösungsprozesse ergab darüber hinaus, dass das Lösungsvorgehen durch die Schüler relativ selten überprüft wurde, auch wenn die Gymnasiasten dies signifikant häufiger taten als die Grundschüler. Des Weiteren gab es im Rahmen der Interviews kaum Revisionen des Lösungsvorgehens von Seiten der

Schüler. Somit schien es generell wenig bis gar keine Reflexionen über das eigene Vorgehen gegeben zu haben. Dies ist gerade deswegen so bedenklich, weil dieses Überprüfen im Rahmen jedes Problemlöseprozesses einen elementaren Teilaspekt darstellt. Darüber hinaus soll der Mathematikunterricht den Schülern „Werkzeuge“ an die Hand geben, mit denen sie ihr (alltägliches) Leben bewältigen können. Und dazu sollte, neben allen rechnerischen, geometrischen oder kombinatorischen Fähigkeiten, vor allem das Überprüfen als allgemeine Kompetenz gehören.

Nachfolgend sollen die Kernergebnisse bezüglich der einzelnen Forschungsfragen noch einmal aufgegriffen und reflektiert werden.

Forschungsfrage 1: Klassenstufe und Lösungserfolg

Die Analysen, die im Rahmen dieser Forschungsfrage durchgeführt wurden, legen nahe, dass mit einer höheren Klassenstufe auch mehr problemhaltige Textaufgaben richtig gelöst werden können. Es konnten jedoch keine Unterschiede zwischen den Dritt- und Viertklässlern und zwischen den Sechst- und Neuntklässlern gefunden werden. Dies könnte dafür sprechen, dass der Zugewinn hinsichtlich des Lösungserfolges nur äußerst langsam vonstattengeht. Der nichtsignifikante Unterschied zwischen den Sechstklässlern und Neuntklässlern könnte eventuell auch darauf hindeuten, dass es eine Asymptote gibt, an die sich der Lösungserfolg annährt. Es würden mit höherer Klassenstufe bzw. höherem Alter nicht immer mehr Aufgaben richtig gelöst werden. Alternativ wäre aber auch ein lineares Wachstum denkbar, besonders wenn man vielleicht zusätzlich zu Schülern auch Studenten berücksichtigt. Für die Überprüfung dieser Annahmen bedarf es jedoch weiterer (längsschnittlicher) Untersuchungen.

Was jedoch auffällt, ist, dass auch die Neuntklässler im Mittel lediglich die Hälfte der Aufgaben richtig gelöst haben. Gerade vor dem Hintergrund, dass es sich bei den Aufgaben um problemhaltige Textaufgaben für die *Primarstufe* handelt, scheint das eher einen geringen Lösungserfolg widerzuspiegeln. Die Aufgaben, oder zumindest einige von ihnen, scheinen also ihren anspruchsvollen Charakter nicht zu verlieren. An dieser Stelle stellt sich jedoch die Frage, was von den Gymnasiasten erwartet werden darf. Was wäre also die erwünschte Erfolgsquote? Sollen alle Gymnasiasten alle Aufgaben richtig lösen können? Das würde dann dafür sprechen, dass die Aufgaben ihre Problemhaltigkeit verloren hätten und lediglich Routineaufgaben wären. Oder ist das richtige Lösen der Hälfte der Aufgaben ein sehr gutes Ergebnis? Somit stellt sich hier, und auch in der Grundschule, die Frage nach Standards, zumindest wenn man den Lösungserfolg betrachten möchte. Werden solche Aufgaben zur Förderung von Repräsentationsfähigkeiten oder Problemlösekompetenzen eingesetzt, sollten solche Standards, die sich am Lösungserfolg orientieren, eher zweitrangig sein.

Forschungsfrage 2: Klassenstufe und Repräsentationsformen

Die Analysen, die im Rahmen dieser Forschungsfrage durchgeführt wurden, legen nahe, dass mit einer höheren Klassenstufe, entgegen der Annahme, mehr auf externe Repräsentationen zurückgegriffen wird. Dies könnte auf die längere Beschulungszeit zurückgeführt werden, während der bestimmte Lösungsprozeduren eingeübt und automatisiert wurden. Dies ist insofern nicht verwunderlich, da Repräsentationen im Schulkontext meist nicht nur ausschließlich zur Kommunikation des Schülers mit sich selbst konstruiert werden, sondern zum Austausch mit anderen. So will der Lehrer z.B. das Vorgehen des Schülers bei der Bearbeitung einer Aufgabe auch dann nachvollziehen können, wenn der Schüler nicht anwesend ist und sein Vorgehen nicht kommentieren kann. Dies ist bspw. dann der Fall, wenn Klassenarbeiten durch die Lehrkraft korrigiert und bewertet werden. Daher sind es die Schüler höherer Klassenstufen gewöhnt, ihr Vorgehen zu externalisieren.

Es wurde bereits darauf eingegangen, dass die Schüler höherer Klassenstufe auch mehr Aufgaben richtig lösen konnten als Schüler niedrigerer Klassenstufen. Trotzdem scheint die Schlussfolgerung, dass die Verwendung externer Repräsentationen per se mit einem höheren Lösungserfolg einhergeht, zweifelhaft. Sicherlich hat die Verwendung externer Repräsentationen durchaus Vorteile, aber trotzdem führt ein falsches, extern repräsentiertes mathematisches Modell genauso zum falschen Ergebnis wie ein falsches, intern repräsentiertes. Genau dies scheint bei den Grundschülern der Fall gewesen zu sein. Hier waren die vordergründigen Schwierigkeiten das Verstehen der Textaufgaben und die Konstruktion adäquater mathematischer Modelle, unabhängig davon, ob die Schüler interne oder externe Repräsentationen verwendeten.

Im Rahmen der zweiten Forschungsfrage wurde auch betrachtet, inwieweit die Klassenstufe mit dem flexiblen Umgang mit Repräsentationsformen *innerhalb* der einzelnen Aufgaben und *zwischen* allen Aufgaben einhergeht. Hier scheint eine höhere Klassenstufe mit einem höheren Ausmaß an Flexibilität einherzugehen, sowohl *zwischen* den Aufgaben als auch *innerhalb* der Aufgaben. Dies scheint naheliegend, da Schüler höherer Klassenstufen mehr Erfahrungen mit diversen Aufgabentypen und Lösungsstrategien mitbringen, die sie vielfältig einsetzen können.

Von großem Interesse ist nun natürlich, inwieweit der Einsatz von verschiedenen Repräsentationsformen mit dem Lösungserfolg zusammenhängt. Dies sollte mit der dritten Forschungsfrage geklärt werden.

Forschungsfrage 3: Lösungserfolg und Repräsentationsform

Die Analysen, die im Rahmen dieser Forschungsfrage durchgeführt wurden, zeigten zum einen, dass der Zusammenhang zwischen der Anzahl multipler Repräsentationen bei der Konstruktion mathematischer Modelle mit der Anzahl richtiger Lösungen zumindest z.T. durch die Klassenstufe bedingt ist. Hier kann also keine klare Aussage darüber gemacht werden, ob multiple Repräsentationen tatsächlich bei allen Aufgaben mit einem höheren Lösungserfolg einhergehen. Dies sollte durch weitere Forschungsarbeiten näher untersucht werden. In diesem Zusammenhang waren die aufgabenspezifischen Analysen auch nicht eindeutig. Dies kann als Hinweis darauf betrachtet werden, dass die Verwendung multipler Repräsentationen nicht per se zum Lösungserfolg führt, sondern nur bei bestimmten Aufgaben. Sicherlich ist auch eine Person-Aufgabe-Interaktion denkbar. Die Verwendung multipler Repräsentation würde dann nur bei bestimmten Personen und bei bestimmten Aufgaben mit einem höheren Lösungserfolg einhergehen. Dies scheint durchaus plausibel. Solche Phänomene lassen sich z.B. im Bereich des multimedialen Lernens ausfindig machen. So wäre es z.B. möglich, dass Lösende bei bestimmten Aufgaben durch die Konstruktion einer multiplen Repräsentation Redundanz erzeugen, was sich negativ auf den Lösungserfolg auswirken könnte: „The expertise reversal effec ... occurs because information that is essential for novices becomes redundant for more expert learners" (Sweller, 2005, S. 27).

Darüber hinaus eignen sich unterschiedliche Aufgabenformate eventuell mehr oder weniger gut für die Konstruktion multipler Repräsentationen. Bei Kombinatorikaufgaben mag die Konstruktion einer depiktionalen Repräsentation im mathematischen Modell u.U. relativ leicht sein (z.B. indem man verschiedenfarbige Eissorten aufzeichnet), die zusätzliche Konstruktion eines deskriptionalen mathematischen Modells scheint jedoch enorm schwierig, gerade dann, wenn man kein Vorwissen über die adäquaten mathematischen Formeln hat. Ferner sollte bedacht werden, dass die Verwendung multipler Repräsentationen einen Lösungserfolg nicht garantieren kann, sie kann ihn höchstens wahrscheinlicher machen.

Zum anderen konnte jedoch im Rahmen der Datenauswertung gezeigt werden, dass der negative Zusammenhang zwischen der Verwendung multipler Repräsentationen und der Anzahl von Aufgaben, bei denen totale Inkongruenz auftrat, auch unter Kontrolle der Klassenstufe, bestanden blieb. Somit scheinen multiple Repräsentationen im Rahmen des mathematischen Modells den Lösenden durchaus davon abhalten zu können, in eine völlig falsche Richtung zu laufen, selbst wenn die Lösung nicht in einem richtigen Ergebnis mündet, sondern nur in einem teilrichtigen. Bei der Bearbeitung von Arithmetikaufgaben könnten Depiktionen eine Art Zwischenschaltstelle zwischen dem Situationsmodell und dem deskriptionalen mathematischen Modell darstellen. Anhand der Depiktionen werden hier explizit die aufgabenrelevanten Informationen gefiltert und zueinander in Beziehung gesetzt, wodurch eventuell ein tieferes Aufgabenverständnis erzeugt werden kann (vgl. z.B. *Learner-Generated Drawing*, für einen Überblick s. Van Meter & Garner, 2005). Erst im Anschluss daran wird die Deskription in Form einer Gleichung gebildet. Hier ist natürlich von enormer Bedeutung, dass die Person überhaupt in der Lage ist, diese verschiedenen Repräsentationsformen *selbst* zu konstruieren. Dennoch ist sicherlich nicht jede Person bei jeder Aufgabe auf die Hilfe einer solchen Schnittstelle angewiesen.

Nachdem der Zusammenhang zwischen dem Einsatz multipler Repräsentationen und dem Lösungserfolg näher betrachtet wurde, soll nun auf den flexiblen Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen eingegangen werden. Die in dieser Hinsicht durchgeführten Analysen deuten darauf hin, dass lediglich der flexible Umgang mit den Repräsentationsformen *zwischen* den Aufgaben mit einem höheren Lösungserfolg einhergeht. Es scheint also bedeutsam zu sein, dass man je nach Anforderungen und Spezifika einer Aufgabe die adäquaten Repräsentationsformen findet. Auch dies spricht wieder für die Idee einer Person-Aufgabe-Interaktion. Man muss also nicht nur die Repräsentation verwenden, die gut auf die Aufgabe passt, sondern die auch gut auf die eigenen Erfahrungen und das eigene Vorwissen passt. Ähnliche Überlegungen lassen sich auch bei Acevedo Nistal, Van Dooren, Clarebout, Elen und Verschaffel (2009) finden. Sie gehen davon aus, dass für eine (flexible) Repräsentationsauswahl drei Komponenten in Betracht gezogen müssen: die Aufgabencharakteristika, die Eigenschaften des Lösenden und der Kontext, in dem die Aufgabe präsentiert wird.

Forschungsfrage 4: Lösungserfolg und Vorgehensweise

Im Rahmen der letzten Forschungsfrage sollte untersucht werden, ob ein ganzheitliches Vorgehen einem zergliedernden hinsichtlich des Lösungserfolgs überlegen ist. Dies konnte nicht festgestellt werden.

Die aufgabenspezifischen Analysen legen jedoch nahe, dass es Aufgaben zu geben scheint, bei denen ein zergliederndes Vorgehen eher zu einer richtigen Lösung führt. Sicherlich kann ein solches Vorgehen fehleranfälliger sein, denn je mehr Lösungsschritte man macht, desto mehr Möglichkeiten hat man, einen Fehler zu begehen. Und trotzdem lassen sich bei zwei bzw. drei von den fünf verwendeten Aufgaben Zusammenhänge zwischen dem Lösungserfolg und einem zergliedernden Vorgehen finden. Aber warum? Weil ein solches Vorgehen u.U. den Lösenden davor bewahrt, voreilige Schlüsse zu ziehen, die zu nicht richtigen Lösungen führen. So stellt sich bei einem zergliedernden Vorgehen nicht die Frage, ob man 30.5-mal umblättern, oder ob die Schnecke am 6.7-ten Tag den Brunnenrand erreichen kann. Denn hier werden genau diese Klippen umschifft.

Doch sicherlich kann nicht angenommen werden, dass eine Vorgehensweise einer anderen per se überlegen ist. Vielleicht mögen ganzheitliche Lösungen eleganter und zeiteffizienter sein, wenn sie jedoch zur falschen Lösung führen, scheint ihr Nutzen fragwürdig. Beide Vorgehensweisen haben ihre Vor- und Nachteile, gerade im Hinblick auf die Anforderungen einer Aufgabe und die Eigenschaften des Lösenden.

Abschließend soll noch auf den Zusammenhang von Schülermerkmalen, der Verwendung von Repräsentationsformen und dem Lösungserfolg eingegangen werden.

Schülermerkmale, Repräsentationsformen und Lösungserfolg

Anhand der durchgeführten Analysen konnten zwei Erkenntnisse gewonnen werden. Zum einen scheint der flexible Umgang mit Repräsentationsformen *zwischen* den Aufgaben unabhängig von der Matheleistung den Lösungserfolg positiv zu beeinflussen. Somit könnte eine niedrigere Matheleistung sogar durch einen flexiblen Umgang mit den Repräsentationen kompensiert werden. Dies ist z.B. damit erklärbar, dass es sich sowohl bei der Mathenote als auch bei den HRT1-4-Ergebnissen zu großen Teilen um die Widerspiegelung von *Rechen*kompetenzen und weniger von Problemlösekompetenzen handelt. Entsprechend sind bei den eingesetzten problemhaltigen Textaufgaben sicherlich vielfältigere Fähigkeiten gefordert.

Zum anderen scheinen sprachliche Kompetenzen (erfasst über die Deutschnote im Gymnasium und über den ELFE1-6 in der Grundschule) von großer Bedeutung. Da es sich bei den verwendeten Aufgaben um *Text*aufgaben handelt, scheint dies naheliegend. Dieser Aspekt wird in vielen Forschungsarbeiten auch immer wieder hervorgehoben. Gerade das Textverstehen, im Sinne der Konstruktion eines mentalen Modells bzw. (episodischen) Situationsmodells, scheint für die erfolgreiche Bewältigung dabei unabdingbar (z.B. Kintsch & Gerrno, 1985; Reusser, 1990; Mayer & Hegarty, 1996; Thevenot, 2010). Für fundiertere Aussagen über das Zusammenspiel von mathematischen und sprachlichen Kompetenzen und dem Einsatz von verschiedenen Repräsentationsformen sind weitere Untersuchungen notwendig. Allgemeingültige Aussagen sollten nur mit Vorsicht aus den hier berichteten Zusammenhängen abgeleitet werden. Denn in den unterschiedlichen Schulformen wurden z.B. verschiedene Maße zur Erfassung mathematischer und sprachlicher Fähigkeiten verwendet. Hier stellt sich in jedem Fall die Frage, inwieweit Schulnoten mit Testwerten vergleichbar sind. Darüber hinaus wurden viele der Aufgaben nicht richtig gelöst. Dies war im Besonderen in der Grundschule der Fall. Somit müssen die hier berichteten Ergebnisse definitiv überprüft werden und dies an einer möglichst großen Stichprobe, um auch kleine Effekte, bei bspw. selten auftretenden Phänomenen entdecken und abbilden zu können.

10.2 Methodische Überlegungen

Nachdem die bereits berichteten (quantitativen) Ergebnisse differenzierter betrachtet wurden, soll im Nachfolgenden das methodische Vorgehen reflektiertet werden.

Exploratives Vorgehen

Da bisher wenig vergleichbare Arbeiten vorliegen, musste zum Teil sehr explorativ gearbeitet werden. Dies brachte den Vorteil, dass für die methodische Umsetzung viel Freiraum vorhanden war, was speziell in der Pilotstudie auch unbedingt notwendig war. Da über den Umgang von Schülern mit problemhaltigen Textaufgaben äußerst wenig bekannt ist, konnte nicht auf einen Fundus von Erkenntnissen diesbezüglich zurückgegriffen werden. Somit stellte sich am Anfang der Forschungsarbeit die Frage, wie Schüler überhaupt beim Lösen jener Aufgaben vorgehen und welche Repräsentationen sie letztendlich selbst generieren. Um einen möglichst umfassenden und detaillierten Einblick zu erlangen, wurde ein besonderer Schwerpunkt auf die Durchführung einer Videostudie gelegt. Dadurch konnte das Lösungsverhalten der Schüler in möglichst natürlicher Form erfasst werden. Durch gezieltes Nachfragen von Seiten der Versuchsleitung nach der Beendigung der Bearbeitung jeder einzelnen Aufgabe konnte dies noch vertieft werden. Somit wurden keine (voreiligen) Vorannahmen an das Material herangetragen, sondern es wurde zunächst relativ unbedarft gesichtet. Natürlich gab es trotz dieses sehr induktiven Vorgehens bereits zu Beginn der Studie durchaus Annahmen, Ideen oder Vorstellungen, die das Untersuchungsdesign prägten und sicherlich auch die erste Sichtung des Videomaterials teilweise und wahrscheinlich eher geringfügig beeinflussten. So konnte ein möglichst umfassendes erstes Bild vom tatsächlichen Lösungsvorgehen der Schüler gewonnen werden. Im Hinblick auf möglichst allgemeingültige Aussagen mussten jedoch Verallgemeinerungen und Idealisierungen vorgenommen werden. Endresultate dieses Vorgehens waren die Erweiterung des Modellierungskreislaufes von Verschaffel und Kollegen (2000) und das darauf aufbauende Kodiersystem, welches Aspekte des Lösungsprozesses erfasst, die über die Stufen und Phasen des erweiterten Modellierungskreislaufes hinausgehen.

Ein solches exploratives Vorgehen birgt jedoch auch Nachteile. So wurde die Pilotstudie an einer relativ geringen Anzahl von (ausschließlich) Grundschülern durchgeführt. Hier stellt sich die Frage, ob die beobachteten Lösungsprozesse überhaupt auf Schüler weiterführender Schulen, oder gar Studenten und schließlich die gesamte Population, übertragbar sind. Ein erster Hinweis auf eine mögliche Generalisierbarkeit konnte anhand der im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit durchgeführten Hauptuntersuchung erbracht werden. Denn hier nahmen sowohl Grundschüler als auch Gymnasiasten der 6. und 9. Klasse teil. Sowohl der erweiterte Modellierungskreislauf als auch das entwickelte Kodiersystem konnten in der Gymnasialstufe ohne Weiteres eingesetzt werden. Darüber hinaus konnten die Lösungswege bei der Bearbeitung verschiedener Aufgaben (z.B. aus dem Bereich der Kombinatorik oder der Arithmetik) verortet und rekonstruiert werden.

Zugang zu internen Prozessen und retrospektives Interview

Durch die konzipierte Videostudie und die Anwendung des Kodiersystems auf das Videomaterial wat es nicht nur möglich, das externalisierte Lösungsvorgehen der Schüler abzubilden bzw. zu erfassen, sondern dadurch konnte auch ein Zugang zu internen Repräsentationsformen und internen Lösungsvorgehen gewonnen werden. Die ermittelten Kennwerte für die Beobachterübereinstimmungen basierend auf den Daten aus der Hauptstudie legen nahe, dass dies in einem zufriedenstellenden Ausmaß gelang. Dies war sicherlich auch deswegen gut möglich, weil die verwendeten problemhaltigen Textaufgaben anhand einer überschaubaren Anzahl von Lösungsschritten bearbeitet werden können. Somit konnten interne Prozesse bzw. interne Repräsentationen ebenfalls retrospektiv gut rekonstruiert werden.

Allerdings können hier keine Aussagen darüber getroffen werden, ob die durch den Schüler im Interview berichteten internen Prozesse bzw. Repräsentationen tatsächlich 1:1 mit externen Prozesse bzw. Repräsentationen verglichen werden können. Sind interne Prozesse genauso abgelaufen bzw. sahen interne Repräsentationen genauso aus wie der Schüler dies berichtet? Oder gibt es hier nachträgliche Verzerrungen, Rekonstruktionen, etc.? In diesem Zusammenhang stellt sich auch die Frage, ob interne depiktionale Repräsentationen beim mathematischen Modell so selten berichtet wurden, weil sie tatsächlich so selten vorkamen oder aber weil sie vielleicht dem Bewusstsein gar nicht zugänglich waren. Dies kann an dieser Stelle nicht beantwortet werden, bedarf jedoch weiterer Klärung. Dass die depiktionalen Repräsentationen „vergessen“ wurden oder nicht lösungsrelevant erschienen, scheint eher unwahrscheinlich, da die Schüler im Interview explizit danach gefragt wurden.

Eventuell wäre die Methode des lauten Denkens eine sehr fruchtbare Alternative, weil dadurch ein noch direkterer Zugang zu den internen Prozessen möglich wäre. Allerdings könnte das laute Denken u.U. mit dem Lösungsprozess interferieren und dadurch das eigentliche Lösungsvorgehen behindern oder verzerren, besonders bei den Grundschülern. Ob dem so ist, müsste jedoch mithilfe von weiteren Forschungsarbeiten überprüft werden. Bereits vorhandene Forschung zu diesem Thema weist in keine eindeutige Richtung (für einen Überblick s. Konrad, 2010). Die Methode des lauten Denkens scheint jedoch für komplexere Aufgaben besser geeignet zu sein als das retrospektive Interview, da es mit zunehmender Komplexität der Aufgaben durchaus schwieriger werden könnte, das gesamte Lösungsvorgehen im Anschluss daran zu rekonstruieren. Da in der vorliegenden Forschungsarbeit der Fokus jedoch auf den *spontanen* Lösungsprozessen der Schüler lag, sollten diese möglichst nicht beeinflusst oder behindert werden, auch auf die Gefahr hin, dass etwaige Informationen verloren gehen. Dem potenziellen Verlust von Informationen konnte sowohl durch die überschaubare Struktur der Aufgaben und ihrer Lösungswege als auch das gezielte Nachfragen im Interview entgegengewirkt werden.

Problemhaltige Textaufgaben

Trotzdem stellt sich natürlich die Frage, inwieweit die hier gefundene Erkenntnisse auf andere problemhaltige Textaufgaben oder darüber hinaus auf andere Aufgabenformen, wie z.B. klassische Modellierungsaufgaben, übertragen werden können.

Bei den problemhaltigen Textaufgaben handelt es sich um ein buntes Sammelsurium von Aufgaben, die auch für Schüler höherer Klassenstufen ihren anspruchsvollen Charakter anscheinend nicht verlieren. Anhand der Haupterhebung konnte gezeigt werden, dass sich die Lösungswege verschiedener Aufgaben, die durch Schüler unterschiedlicher Klassenstufen bearbeitet werden, mithilfe des Kodiersystems rekonstruieren lassen. Trotzdem wurden lediglich fünf problemhaltige Textaufgaben eingesetzt. Somit bleibt offen, ob die Generalisierbarkeit auf andere Aufgaben möglich ist.

Schülermerkmale

In der vorliegenden Arbeit wurden Schülermerkmale nur sehr am Rande berücksichtigt. In diesem Zusammenhang sind somit relativ wenige Aussagen möglich. Natürlich scheint es sehr naheliegend, dass diverse Aspekte des Lösungsprozesses nicht nur von den Aufgabenspezifika abhängen können, sondern auch von Personenmerkmalen. Hier wurden lediglich die Mathenote bzw. mathematische Grundkenntnisse und die Deutschnote bzw. das Leseverständnis erfasst. Dies bedarf auf jeden Fall weiterer Differenzierungen. Die ersten Ergebnisse deuten aber auf den Einfluss mathematischer und sprachlicher Fähigkeiten hin. Gerade das Textverstehen scheint in diesem Zusammenhang von großer Bedeutung.

Ferner wurden lediglich Grundschüler der 3. und 4. Klasse und Gymnasiasten der 6. und 9. Klasse querschnittlich untersucht. Somit sind generell keine prozessualen, entwicklungsbedingten, geschweige denn kausalen Aussagen möglich. Somit wären sowohl Längsschnittuntersuchungen als auch die Betrachtung anderer Schulformen (z.B. Realschulen, Hauptschulen, Montessorischulen, etc.) von großem Interesse.

Als letzter Punkt sei noch erwähnt, dass im Fokus der vorliegenden Arbeit die *individuellen* Lösungsprozesse der Schüler standen. Dadurch war die praktische Umsetzung der Videostudie enorm (zeit)intensiv. Sicherlich ist das Videographieren von Gruppenarbeiten oder ganzen Klassen personell, finanziell und zeitlich weniger aufwendig. Allerdings stellt sich dann die Frage, inwieweit auf Basis der Gruppenlösung die Rekonstruktion individueller Lösungsprozesse überhaupt möglich ist. Denn hier ist sicherlich die Leistung der Gruppe mehr als die Summe der Leistung einzelner Gruppenmitglieder. Und letztendlich soll es um die individuellen (Problemlöse)kompetenzen gehen; das Individuum soll in die Lage versetzt werden, Probleme selbstständig zu bewältigen, Entscheidungen zu treffen und sich die Welt (mithilfe der Mathematik) zu erschließen.

Alles in allem lässt sich festhalten, dass der gewählte mixed-methods-Ansatz als durchaus fruchtbar erachtet werden kann. Dennoch konnten mit der vorliegenden Arbeit nicht alle Fragen beantwortet werden. Es ergaben sich viele neue Fragen, die durch weitere Forschungsarbeiten eventuell geklärt werden können. Auf mögliche zukünftige Forschungsfragen soll im Nachfolgenden eingegangen werden.

10.3 Ausblick

Da bisher relativ wenig über die Rolle von selbstgenerierten Repräsentationen bei der Bearbeitung von (problemhaltigen) Textaufgaben bekannt ist, öffnet sich für zukünftige Forschungsanliegen ein weites Feld. Grundlegend scheinen die Replikation der hier beschriebenen Untersuchung und die Überprüfung der berichteten Ergebnisse von großer Bedeutung zu sein.

Ferner wäre überlegenswert, ob die einzelnen Aspekte des Lösungsprozesses, die hier zunächst mithilfe der Videotechnik und anschließend anhand eines Kodiersystems extrahiert wurden, auf eine ökonomischere Art und Weise erfasst werden können, z.B. durch Fragebögen, die die Lösenden selbst ausfüllen. Hier stellt sich natürlich die Frage, ob interne Prozesse bzw. Repräsentationen so überhaupt erfasst werden können und ob Kosten und Nutzen dadurch in einem günstigeren Verhältnis zueinander stehen würden. Darüber hinaus sind Weiterführungen der vorliegenden Arbeit in vielfältige Richtungen denkbar.

So sollte auf jeden Fall empirisch untersucht werden, ob und wenn ja, inwieweit der Einsatz von problemhaltigen Textaufgaben im Schulkontext (genauso wie der Einsatz von klassischen Modellierungsaufgaben oder generellen Anwendungs- und Problemaufgaben) einen Einfluss auf die mathematische Grundbildung, z.B. im Sinne der PISA-Konzeption (*mathematical literacy*), hat. Tragen solche Aufgaben also in der Tat (nachweislich) dazu bei, dass das Individuum die Rolle erkennt und versteht, die die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abgeben kann und sich auf eine Art und Weise mit der Mathematik befassen kann, „die den Anforderungen des Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektiertem Bürger entspricht" (OECD, 2004, S. 42)?

Weiterhin sollten die spontanen Lösungsprozesse bei der Bearbeitung (problemhaltiger) Textaufgaben unter Berücksichtigung der selbstgenerierten Repräsentationsformen längsschnittlich betrachtet werden. Dadurch wären prozessuale, entwicklungsbedingte und u.U. auch kausale Aussagen möglich. Dadurch könnten z.B. Erkenntnisse über das Zeitfenster zwischen dem Anfang der 4. Klasse und dem Ende der 6. Klasse gewonnen werden. Mit den Ergebnissen der hier vorliegenden Arbeit kann darüber leider nichts ausgesagt werden. Dabei wäre es von großem Interesse, zu erfahren, ob die Veränderungen zwischen den Viert- und Sechstklässlern (oder allgemeiner zwischen den

Grundschülern und Gymnasiasten) sich sukzessive vollziehen oder eher sprunghaft sind. Dabei sollten natürlich weitere Schulformen berücksichtigt werden. Auch legen manche der hier berichteten Befunde nahe, dass es eine Art Asymptote gibt, was z.B. den Lösungserfolg oder aber auch die Flexibilität im Umgang mit den Repräsentationsformen betrifft. Ist es so, dass es ein bestimmtes Niveau gibt, dem sich die Schüler im Mittel annähern oder gibt es lineares Wachstum oder kehren sich bestimmte Zusammenhänge mit höherem Alter oder aber in Abhängigkeit von der jeweiligen Schulform um? In diesem Zusammenhang wäre eventuell auch die Betrachtung von spezifischen Gruppen spannend (z.B. Hochbegabte, Schüler mit einer Rechenschwäche, Schüler mit Migrationshintergrund, etc.). So verglichen bspw. Montague und Applegate (1993a) lernbehinderte Schüler mit durchschnittlichen und überdurchschnittlichen Schülern beim Lösen von Textaufgaben. Neben einem geringeren Lösungserfolg zeigten die lernbehinderten Schüler u.a. „an inability to adequately represent problems“ (S. 190) im Sinne von z.B. Wissen über und Verwendung von Strategien wie paraphrasieren oder auch visualisieren.

Ebenso könnten auch internationale Vergleiche von Aspekten der individuellen Lösungsprozesse bei der Bearbeitung von Problem- oder Anwendungsaufgaben sehr aufschlussreich sein. Brenner, Herman, Ho und Zimmer (1999) verglichen in ihrer Untersuchung z.B. Sechstklässler aus China, Taiwan, Japan und den USA hinsichtlich ihrer repräsentationalen Flexibilität. Sie konnten zeigen, dass die asiatischen Schüler den amerikanischen Schülern in allen Subtests überlegen waren.

Ferner sollten die sprachlichen Kompetenzen der Lösenden stärker berücksichtigt werden, da jene einen deutlichen Einfluss auf den Lösungserfolg zu haben scheinen. Ob dies jedoch bei allen Personen im selben Ausmaß der Fall ist, bleibt zunächst offen. Vor diesem Hintergrund müsste auch verglichen werden, ob die Tatsache, dass man die Textaufgabe selbst liest oder sie einem vorgelesen wird, einen Einfluss auf den Lösungsprozess bzw. den Lösungserfolg hat.

Ebenso könnte betrachtet werden, inwieweit sich die individuellen Lösungsprozesse und der individuelle Lösungserfolg von denen in Gruppenarbeiten unterscheiden. Gerade bei jüngeren Kindern könnte eine Gruppenarbeit entlastend wirken und somit die vielfältigere Nutzung von verschiedenen Repräsentationsformen und somit eventuell den Lösungserfolg positiv beeinflussen.

Generell scheinen also komplexere Modelle vonnöten, mit deren Hilfe das Zusammenspiel mehrerer (aufgabenspezischer, personenspezifischer und repräsentationaler) Faktoren näher betrachtet werden kann.

Sind die einzelnen Zusammenhänge und Wirkmechanismen näher und fundierter untersucht, können eventuell auf Grundlage der gewonnenen Erkenntnisse diverse Interventionen konzipiert werden. Auf die Entwicklung konkreter Interventionsmaßnahmen soll an dieser Stelle jedoch verzichtet werden, da dies den Rahmen sprengen würde. Darüber hinaus erscheint dies auch verfrüht, da die Erforschung selbstgenerierter Repräsentationen bei der Bearbeitung von (problemhaltigen) Textaufgaben noch in den Kinderschuhen steckt. Unabhängig davon, wie spätere Interventionen aussehen werden, sollte in jedem Fall darauf geachtet werden, dass individuelles, „abweichendes" Lösungsvorgehen nicht im Keim erstickt wird und auch vermeintlich schwere Aufgaben den Schülern zugemutet werden dürfen. Acevedo Nistal und Kollegen (2009) diskutieren in diesem Zusammenhang zwei instruktionale Maßnahmen: die aktive Unterstützung bei der Repräsentationsauswahl und den aktiven Vergleich und die Bewertung verschiedener Repräsentationsformen.

Neben diversen Forschungsfragen, die sich alle auf den Lösenden, in aller Regel die Schüler, beziehen, könnte auch die Lehrerseite genauer betrachtet werden. So drängen sich Fragen danach auf, ob Lehrer solche Problem- und Anwendungsaufgaben im Rahmen des alltäglichen Mathematikunterrichts überhaupt einsetzen und wenn ja, in welchen Ausmaß. Werden solche Aufgaben eingesetzt, was wünschenswert wäre, sollte erforscht werden, ob Lehrer im Bezug auf diese Aufgaben über eine entsprechende diagnostische Kompetenz verfügen. Diese „wird als ein Personenmerkmal angesehen, das Lehrkräfte in die Lage versetzt, sachgerechte diagnostische Urteile abzugeben, die für die Planung, Gestaltung und Evaluation pädagogischen Handelns und die Bewertung von Lernergebnissen nötig sind" (Schrader, 2009). Sind Lehrkräfte also bspw. in der Lage, angemessene Problemaufgaben für spezifische Klassen oder gar Schüler auszuwählen? Sind ihnen die kritischen Punkte bei den Aufgaben bewusst? Kennen sie unterschiedliche Lösungswege besonders unter Berücksichtigung verschiedener Repräsentationsformen? Sehen sie den Nutzen der aufgaben- und personenspezifischen Verwendung verschiedener Repräsentationsformen? Um nur einige Aspekte diagnostischer Kompetenzen im Umgang mit Anwendungs- oder Problemaufgaben zu skizzieren. Somit werden durch solche

Aufgaben auch enorme Anforderungen an die Lehrkräfte, und nicht nur an die Schüler, gestellt.

Darüber hinaus wäre der erweiterte Modellierungskreislauf eventuell als Handreiche, sowohl für Lehrer als auch für Schüler, eine gute Möglichkeit zur Reflexion über die Anforderungen, die eine spezifische Aufgabe stellt. Auch könnte er als Leitschema für die Aufgabenbewältigung, und hierbei den Einsatz verschiedener Repräsentationsformen, dienen. Sicherlich müsste eine solche Handreiche auf die Bedürfnisse der Lehrer und Schüler abgestimmt werden, im Sinne einer möglichst einfachen, gut umsetzbaren und anschaulichen Schematisierung. Schüler könnten auf einer solchen Grundlage z.B. den eigenen Lösungsprozess besser nachvollziehen und überwachen. Ein ähnliches Ansinnen findet sich auch in der Untersuchung von Maaß (2004), die eine vereinfachte Schematisierung zur Vermittlung von Wissen über den Modellierungsprozess bei Schülern der 7. und 8. Klasse einsetzte (s. Abbildung 3, S. 19). Für Lehrer wäre dies sicherlich auch ein wertvolles Werkzeug. Sie könnten auf einer solchen Grundlage z.B. aufgabenspezifische Lösungswege hinsichtlich der Anzahl der Analyseschritte, der möglichen Repräsentationsformen, etc. einordnen. Darüber hinaus kann ein vereinfachter, erweiterter Modellierungskreislauf auch als Basis für den Austausch zwischen Schülern und Lehrern dienen, denn ihnen wird dadurch eine gemeinsame Kommunikationsgrundlage an die Hand gegeben. Als wahrscheinlich wichtigster Punkt sei hier noch erwähnt, dass somit die legitime Verwendung verschiedener Repräsentationsformen präsenter würde. Sicherlich werden im Unterrichtsgeschehen nach wie vor externe Repräsentationen im Vordergrund stehen, da es vorrangig nicht nur um die Kommunikation des Lösenden mit sich selbst, sondern meist mit seiner Umwelt, geht. Trotzdem scheint eine Verschiebung der starken Ausrichtung auf deskriptionale Repräsentationen etwas mehr zu den depiktionalen Repräsentationen durchaus überlegenswert.

10.4 Fazit

Das Lösen von Problemaufgaben ist für Schüler verschiedener Klassenstufen weiterhin eine besondere Herausforderung. Dabei stellt neben dem Textverstehen die Konstruktion eines adäquaten mathematischen Modells eine besondere Schwierigkeit dar. Gerade weil es für das Lösen solcher Aufgaben keine Algorithmen gibt, kein Schema F, dessen konsequente Anwendung zum Erfolg führt: „Man kann das Sachrechnen offenbar nur zu einem (unwesentlichen) Teil so lehren und einüben wie eine Fertigkeit, wie etwa das Addieren 2-stelliger Zahlen im Kopf. Man kann es nicht am Verstand vorbei unterrichten" (Winter 1994b, S. 11). Somit scheinen bei der Lösung problemhaltiger Textaufgaben je nach Aufgabencharakteristika und Fähigkeiten des Lösenden verschiedene Repräsentationsformen und Vorgehensweisen erfolgsversprechend zu sein. In diesem Zusammenhang sind im Besonderen die Verwendung multipler Repräsentationen bei der Konstruktion des mathematischen Modells und darüber hinaus der flexible Einsatz verschiedener Repräsentationsformen bedeutsam.

11. ZUSAMMENFASSUNG

„Hä, aber auf welcher Seite endet das?
Auf der linken oder auf der rechten?“

Problembewältigung stellt eine essentielle (kognitive) Aktivität im alltäglichen Leben, wie auch im Berufsleben, dar. Bereits in der Grundschule wird diese Fähigkeit, z.B. bei der Lösung von mathematischen Textaufgaben, gefordert und gefördert. Trotzdem bereitet dies Schülern verschiedener Klassenstufen nach wie vor große Schwierigkeiten.

Das Lösen von Textaufgaben erfordert eine Vielzahl kognitiver Operationen. Dies ist besonders dann der Fall, wenn es sich bei den Aufgaben nicht um Routineaufgaben handelt. Für die Bearbeitung von Textaufgaben können Schüler auf verschiedene Repräsentationen zurückgreifen, wobei sowohl interne und externe als auch depiktionale (abbildende) und deskriptionale (beschreibende) unterschieden werden können.

Da bisher kaum empirische Forschungsarbeiten zum Umgang von Schülern mit problemhaltigen Textaufgaben vorliegen, und darüber hinaus sehr wenig über die selbstgenerierten Repräsentationen bei der Bearbeitung von Textaufgaben bekannt ist, ist die vorliegende Arbeit z.T. explorativ angelegt. Im Fokus stehen die spontanen und individuellen Lösungsprozesse von Schülern verschiedener Klassenstufen bei der Bearbeitung von problemhaltigen Textaufgaben. Dabei wurde vorrangig untersucht, auf welche Repräsentationsformen die Schüler bei ihren Lösungsprozessen zurückgreifen.

Insgesamt 268 Schüler verschiedener Klassenstufen (Grundschüler der 3. und 4. Klasse; Gymnasiasten der 6. und 9. Klasse) wurden in Einzeluntersuchungen gebeten, jeweils fünf problemhaltige Textaufgaben zu lösen. Diese wurden ursprünglich im Hinblick auf die Primarstufe entwickelt, scheinen jedoch auch für Schüler höherer Klassenstufen ihren anspruchsvollen Charakter nicht zu verlieren. Für die Aufgabenlösungen standen den einzelnen Schülern verschiedene Materialien zur Verfügung. Von Seiten der Versuchsleitung wurden keinerlei Hilfestellungen gegeben. Nach jeder Aufgabe wurden die Schüler zu ihren Vorgehensweisen mittels halbstrukturiertem Interview befragt. Das individuelle Vorgehen wurde durch Videoaufzeichnungen festgehalten.

Das gewonnene Videomaterial wurde durch drei geschulte Beobachter anhand eines selbstentwickelten Kodiersystems quantifiziert und schließlich statistisch ausgewertet.

Allgemein kann gesagt werden, dass alle Schüler Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der fünf Textaufgaben aufwiesen. So gab es nicht einen Schüler, der alle fünf Aufgaben richtig lösen konnte. Trotzdem nahm die Anzahl der richtigen Lösungen mit höherer Klassenstufe signifikant zu. In diesem Zusammenhang ergaben sich jedoch unterschiedlich starke Zuwächse in Abhängigkeit von der jeweiligen Aufgabe und ihren Anforderungen.

Hinsichtlich der selbstgenerierten Repräsentationsformen ergaben sich u.a. folgende Ergebnisse. Erstens operierten die Grundschüler im Vergleich zu den Gymnasiasten sehr stark intern deskriptional, d.h., sie waren versucht, die gesamten Aufgaben durch Kopfrechnen zu bewältigen. Zweitens griffen die Schüler mit höherer Klassenstufe eher auf verschiedene Repräsentationsformen zurück, was für einen flexibleren Umgang mit ihnen spricht. Drittens scheint die Verwendung multipler Repräsentationen bei der Konstruktion des mathematischen Modells nicht per se zu einer richtigen Lösung zu führen. Aber sie verhindert, unabhängig von der Klassenstufe, eine gänzlich falsche Aufgabenbearbeitung bzw. -lösung. Im Bezug auf das Lösungsvorgehen konnte kein eindeutiges Ergebnis erzielt werden. Hier scheinen je nach Aufgabenanforderungen (und wahrscheinlich auch Personenfähigkeiten) ganzheitliche und zergliedernde Vorgehensweisen unterschiedlich gut geeignet zu sein im Hinblick auf den Lösungserfolg. Nachfolgende Untersuchungen müssen die hier berichteten Ergebnisse überprüfen.

Die Ergebnisse legen jedoch nahe, dass hinsichtlich des Umgangs von Schülern mit anspruchsvollen Textaufgaben nach wie vor Handlungsbedarf bestehen sollte. Gerade der im Mathematikunterricht gelegte Schwerpunkt auf deskriptionale Repräsentationsformen im Sinne von Rechnungen und Gleichungen scheint bedenklich. Vielmehr sollte eine Schulkultur etabliert werden, die den flexiblen Einsatz von verschiedenen Repräsentationsformen, und hier im Besonderen die Verwendung depiktionaler Repräsentationen, als legitim und durchaus notwendig erachtet.

LITERATURVERZEICHNIS

Acevedo Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J. & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM Mathematics Education, 41*, 627-636.

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education, 33*, 131-152.

Ainsworth, S. & Van Labeke, N. (2004). Multiple forms of dynamic representation. *Learning and Instruction, 14*(3), 241-255.

Aufschnaiter, S. v. & Welzel, M. (2001). *Nutzung von Videodaten zur Untersuchung von Lehr-Lernprozessen: Aktuelle Methoden empirischer pädagogischer Forschung*. Münster: Waxmann.

Baddeley, A.D. (2002). Is working memory still working? *European Psychologist, 7*(2), 85-97.

Baroody, A.J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A.J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (S. 1-33). Mahwah, NJ: Erlbaum

Bauer, M.I. & Johnson-Laird, P.N. (1993). How diagrams can improve reasoning. *Psychological Science, 4*(6), 372-378.

Betsch, T., Funke, J. & Plessner, H. (2011). *Denken – Urteilen, Entscheiden, Problemlösen*. Heidelberg: Springer.

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen. Diskussion. *Mathematische Semesterberichte, 32*(2), 195-232.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *Mathematik lehren, 128,* 18-21.

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do teachers deal with modelling problems? In C.Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Hrsg.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (S. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 86-95.

Borromeo Ferri, R. (2007). *Mathematisches Modellieren einführen und unterrichten – Anregungen zur Umsetzung*. ISTRON-Tagung an der Universität Münster.

Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens. Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Vieweg & Teubner.

Bortz, J. & Döring, N. (2009). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. überarb. Aufl.). Berlin: Springer.

Bos, W. & Tarnai, C. (1999): Content analysis in empirical social research. *International Journal of Educational Research*, *31*, 659-671.

Breidenbach, W. (1969). *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen.* Hannover: Schroedel.

Brenner, M.E., Herman, S., Ho, H. & Zimmer, J.M. (1999). Cross-national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 541-557.

Brenner, M.E., Mayer, R.E. , Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Reed, B.S. & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra. *American Educational Research Journal*, *34*(4), 663-689.

Bruner, J.S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.

Burkhardt, H. (1981). *The Real World and Mathematics*. Glasgow: Blackie.

Carpenter, T.P., Hieber, J. & Moser, J.M. (1981). Problem Structure and First-Grade Children's Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(1), 27-39.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(3), 179-202.

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, *5*, 121-152.

Cohen, S.A. & Stover, G. (1981). Effects of teaching sixth grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly, 16*(2), 175-200.

Cox, R. (1996). *Analytical reasoning with multiple external representations*. Dissertation, University of Edinburgh.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction, 9*, 343-363.

Cummins, D.D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction, 8*(3), 261-289.

De Corte. E. & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal a Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). The Effect of Semantic Structure on First Graders' Strategies for Solving Addition and Subtraction Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 363-381.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R.J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Hrsg.), *The nature of mathematical thinking* (S. 253-284). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Duncker, K. (1974). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer.

Eck, C., Garcke, H. & Knabner, P. (2008). *Mathematische Modellierung*. Berlin: Springer.

English, L.D. (2010). Young children's early modelling with data. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(2), 24-47.

Feger, H (1983). Planung und Bewertung von wissenschaftlichen Beobachtungen. In H. Feger & J. Bredenkamp (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie: Themenbereich B, Methodologie und Methoden: Serie 1 Forschungsmethoden der Psychologie, Band 1 Datenerhebung* (S. 1-75). Göttingen: Hogrefe.

Flick, U. (1991). Stationen des qualitativen Forschungsprozesses. In U. Flick, E. v. Kardoff, H. Keupp, L. v. Rosenstiel & S. Wolff (Hrsg.), *Handbuch qualitative Sozialforschung: Grundlagen, Konzepte, Methoden und Anwendungen* (S. 147-173). München: Beltz – Psychologie Verlags Union.

Flick, U. (2010). Triangulation in der qualitativen Forschung. In U. Flick, E. v. Kardoff & I. Steinke (Hrsg.), *Qualitative Forschung. Theorie, Methoden, Anwendung in Psychologie und Sozialwissenschaften* (S.309-318). Reinbeck: Rowohlt.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Heidelberg: Springer.

Frensch, P.A. & Funke, J. (Hrsg.). (1995). *Complex problem solving: The European perspective*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to be Useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*, 3-8.

Funke, J. (2003). *Problemlösendes Denken*. Kohlhammer: Stuttgart.

Galbraith, P.L. (2007). Beyond the low hanging fruit. In W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (S. 79-88). New York: Springer.

Gibb, E.G. (1956). Children's thinking in the process of subtraction. Journal of *Experimental Education*, *25*, 71-80.

Glenberg, A. M., Meyer, M. & Lindem, K. (1987). Mental models contribute to foregrounding during text comprehension. *Journal of Memory and Language*, *26*, 69-83.

Goldin, G.A. & Kaput, J.J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L.P. Steffe & P. Nesher (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik Des Sachrechnens in Der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Grewe, W. & Wentura, D. (1997). *Wissenschaftliche Beobachtung. Eine Einführung.* Weinheim: Beltz.

Haffner, J., Baro, K., Parzer, P. & Resch, F. (2005). *HRT 1-4: Heidelberger Rechentest. Erfassung mathematischer Basiskompetenzen im Grundschulalter*. Göttingen: Hogrefe.

Hegarty, M., Mayer, R.E. & Monk, C.A. (1995). Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*(1), 18-32.

Heinze, A., Star, J.R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 535-540.

Hodel, J., Waldis, M., Gautschi, P. & Reusser, K. (2006). Die Erfassung von Sichtstrukturen und Qualitätsmerkmalen im Geschichtsunterricht. Methodologische Überlegungen am Beispiel der Videostudie "Geschichte und Politik im Unterricht". In G.-A. Hilke & M. Sauer (Hrsg.), *Geschichtsdidaktik empirisch. Untersuchungen zum historischen Denken und Lernen* (S. 155-188). Berlin: LIT-Verlag.

Hron, A. (1994). Interview. In G.L. Huber & H. Mandl (Hrsg.), *Verbale Daten. Eine Einführung in die Grundlagen und Methoden der Erhebung und Auswertung*(S.119-140). Weinheim: Beltz.

Jacobs, J.K., Kawanaka, T. & Stigler, J.W. (1999). Integrating qualitative and quantitative approaches to the analysis of video data on classroom teaching. *International journal of educational research, 31*, 717-724.

Janík, T, Seidel, T. & Najvar, P. (2009). Introduction: On the power of video studies in investigating teaching and learning. In T. Janík & T. Seidel (Hrsg.), *The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom* (S. 7-19). Münster: Waxmann.

Kaiser-Meßmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht. Theoretische Konzeptionen* (Band 1). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann,T. Jahnke, G. Kaiser & J. Meyer (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (Band 2, S. 66-84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G. & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 196-208.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302-310.

Kaput, J.J. (1987a). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (S. 19-26). London: Lawrence erlbaum associates.

Kintsch, W. (1986). Learning from text. *Cognition and Instruction, 3*, 87-108.

Kintsch, W. & Greeno, J. (1985). Understanding word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*(1), 109-129.

Klieme, E. & Bos, W. (2000). Mathematikleistung und mathematischer Unterricht in Deutschland und Japan: Triangulation qualitativer und quantitativer Analysen am Beispiel der TIMS-Studie. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 3*, 359-379.

Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 476-490). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Kosslyn, S.M. (1994). *Image and brain.* Cambridge, MA: MIT Press.

Kuhn, D. (1999). Metacognitive development. In L. Balter & C. Tamis Le-Monda (Hrsg.), *Child psychology: A handbook of contemporary issues* (S. 259–286). Philadelphia, PA: Psychology Press.

Lange, B. (2008). Imagination aus der Sicht von Grundschulkindern. Datenerhebung, Auswertung und Ertrag für die Schulpädagogik. In P. Mayring & M. Gläser-Zirkuda (Hrsg.), *Die Praxis der qualitativen Inhaltsanalyse* (2. Aufl., S. 37-62). Weinheim: Beltz.

Lauter, J. (1991). *Fundament der Grundschulmathematik*. Donauwörth: Auer.

Lenhard, W. & Schneider, W. (2006). *ELFE 1-6: Ein Leseverständnistest für Erst- bis Sechstklässler*. Göttingen: Hogrefe.

Lesh, R. & Doerr, H.M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on Mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H.M. Doerr (Hrsg.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, teaching, and learning* (S. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Mayer, R.E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2. Aufl.). New York: W.H. Freeman and Company.

Mayer, R.E. (2005). Cognitive Theory of Multimedia Learning. In R.E. Mayer (Hrg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 31-48). New York: Cambridge University Press.

Mayer, R.E. & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R.J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Hrsg.), *The nature of mathematical thinking* (S. 29-53). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim: Beltz.

Mayring, P., Gläser-Zikuda, M. & Ziegelbauer, S. (2005). Auswertung von Videoaufnahmen mit Hilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse – ein Beispiel aus der Unterrichtsforschung. *Medienpädagogik*, *9*, 1-17. Zugriff am 12. Juni 2012. Verfügbar unter http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0168-ssoar-3414.

Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend (2002). *Rahmenplan Grundschule. Allgemeine Grundlegung Teilrahmenplan Mathematik*. Grünstadt: Sommer Druck & Verlag.

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz. (2007). *Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5 - 9/10)*. Zugriff am 1. Juni 2012. Verfügbar unter http://lehrplaene.bildung-rp.de/schulart.html?tx_abdownloads_pi1[action]=getviewdetailsfordownload&tx_abdownloads_pi1[uid]=219&tx_abdownloads_pi1[category_uid]=118&tx_abdownloads_pi1[cid]=5785&cHash=dc7c966f0c67503d91e2a66b6c0e2e10.

Montague, M. & Applegate, B. (1993). Mathematical problem-solving characteristics of middle school students with learning disabilities. *The Journal of Special Education*, *27*, 175-201.

Moreno, R. & Mayer, R.E. (2000). A coherence effect in multimedia learning: The case for minimizing irrelevant sounds in the design of multimedia instructional messages. *Journal of Educational Psychology*, *92*, 117-125.

Müller, G.N. & Wittmann, E.C. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe* (3. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.

Nathan, M.J., Kintsch, W. & Young, E. (1992). A theory of algebra word problem comprehension and its implications for the design of computer learning environments. *Cognition and Instruction*, *9*(4), 329-389.

Nesher, P., Hershkowitz, S. & Novotna, J. (2003). Situation model, text base and what else? Factors affecting problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 151-176.

OECD (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills. A New Framework for Assessment.* Paris: OECD.

OECD. (2004). *Lernen für die Welt von morgen. Erste Ergebnisse von PISA 2003.* Paris: OECD.

OECD (2009). *Learning mathematics for life: a perspective from PISA*. Paris: OECD.

Palmer, S.E. (1978) Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch & B.L. Lloyd (Hrsg.), *Cognition and categorization* (S. 259-302). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Pape, S.J. & Tchoshanov, M.A. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory into Practice*, *40*(2), 118-127.

Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer*. New York, NY: Basic Books.

Pedhazur, E.J. & Pedhazur Schmelkin, L. (1991). *Measurement, Design, and Analysis: An Integrated Approach*. Hillsdale: Erlbaum.

Petko, D., Waldis, M., Pauli, C. & Reusser, K. (2003). Methodologische Überlegungen zur videogestützten Forschung in der Mathematikdidaktik. Ansätze der TIMSS 1999 Video Studie und ihrer schweizerischen Erweiterung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35*(6), 265-280.

Pollak, H.O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *2*, 393-404.

Pollak, H.O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (Hrg.), *New trends in mathematics teaching IV* (S. 232-248). Paris: Unesco.

Polya, G. (1995). *Schule des Denkens*. Bern: Francke.

Prenzel, M., Duit, R., Euler, M., Lehrke, M. & Seidel, T. (2001). (Hrsg.). *Erhebungs- und Auswertungsverfahren des DFG-Projekts "Lehr-Lern-Prozesse im Physikunterricht – eine Videostudie"*. Kiel: IPN.

Radatz, H. & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim: Franzbecker.

Rasch, R. (2008). *42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren*. Seelze: Kallmeyer.

Reisberg, D. (1987). External representations and the advantages of externalizing one's thought. In E. Hunt (Hrg.), *The Ninth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (S. 281-293). Hillsdale, N.J.: Erlbaum Associates.

Reusser, K. (1985). *From situation to equation. On formulation, understanding and Solving "situation problems"* (Technical Report No. l43). Boulder: Institute of Cognitive Science, University of Colorado.

Reusser, K. (1990). *Vom Text zur Situation zur Gleichung: Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von mathematischen Textaufgaben*. Dissertation, Universität Bern.

Reusser, K., Pauli, C. & Waldis, M. (Hrsg.). (2010). *Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität – Ergebnisse einer internationalen und einer schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht*. Münster: Waxmann.

Riley, M.S. (1981). *Conceptual and procedural knowledge in development*. Unveröffentlichte Masterarbeit, University of Pittsburgh.

Riley, M.S. & Greeno, J.G. (1988). Developmental Analysis of Understanding Language about Quantities and of Solving Problems. *Cognition and Instruction, 5*(1), 49-101.

Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Hrg.), *The development of mathematical thinking* (S. 153-196). New York: Academic.

Schell, L. & Burns, P. (1962). Pupil performance with three types of subtraction problems. *School Science and Mathematics*, *62*(3), 208-214.

Schneeberger, M. (2009*). Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog*. Münster: Waxmann.

Schneider, W. (2008). The development of metacognitive knowledge in children and adolescents: Major trends and implications for education. *Mind, Brain, and Education*, *2*, 114-121.

Schnotz, W. (1996). Lesen als Textverarbeitung. In O. Ludwig & H. Günther (Hrsg.), *Schrift und Schriftlichkeit. Ein interdisziplinäres Handbuch internationaler Forschung* (2. Halbband, S. 972-982). Berlin/New York: De Gruyter.

Schnotz, W. (2002). Towards an Integrated View of Learning from Text and Visual Displays. *Educational Psychology Review, 14*(2), 101-120.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R.E. Mayer (Hrg.), *Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Schnotz, W. (2003). Informationsintegration mit Sprache und Bild. In G. Rickheit, W. Deutsch & T. Herrmann (Hrsg.), *Psycholinguistik. Ein internationales Handbuch* (S. 577-587). Berlin/New York: De Gruyter.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A. & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. De Corte, T. de Jong & J. Elen (Hrsg.), *Use of representations in reasoning and problem solving* (S. 11-35). London: Routledge.

Schnotz, W. & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representations. *Learning and Instruction, 13*, 141-156.

Schnotz, W. & Kürschner, C. (2007). A reconsideration of cognitive load theory. *Educational Psychology Review, 19*(4), 469-508.

Schrader, F.-W. (2009). Anmerkungen zum Themenschwerpunkt Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 23*(3-4), 237-245.

Schwamborn, A., Thillmann, H., Leopold, C., Sumfleth, E. & Leutner, D. (2010). Der Einsatz von vorgegebenen und selbst generierten Bildern als Textverstehenshilfe beim Lernen aus einem naturwissenschaftlichen Sachtext. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *24*(3-4), 221-233.

Seidel, T. & Prenzel, M. (2010). Beobachtungsverfahren: Vom Datenmaterial zur Datenanalyse. In H. Holling & B. Schmitz (Hrsg.), *Handbuch Statistik, Methoden und Evaluation* (S. 139-152). Göttingen: Hogrefe.

Seidel, T., Prenzel, M., Duit, R. & Lehrke, M. (2003). *Technischer Bericht zur Videostudie „Lehr-Lern-Prozesse im Physikunterricht"*. Kiel: IPN.

Shores, J.H. & Underhill, R.G. (1976). An analysis of kindergarten and first grade children's addition and subtraction problem solving modeling and accuracy. Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, California.

Shrout, P.E. & Fleiss, J.L. (1979). Intraclass correlations: Uses in assessing rater reliability. *Psychological Bulletin, 86*, 420-434.

Siegler, R.S. (2001). *Das Denken von Kindern*. München: Oldenbourg.

Skemp, R.R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics*. London: Penguin Books.

Stachowiak, H. (1973). *Allgemeine Modelltheorie*. Wien: Springer.

Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Neuwied: Luchterhand.

Strauss, S. (2000). Theories of cognitive development and their implications for curriculum development and teaching. In B. Moon, M. Ben-Peretz & S. Brown (Hrsg.), *Routledge international companion to education* (S. 33-50). London: Routledge.

Sweller, J. (2005). Implications of Cognitive Load Theory for Multimedia Learning. In R.E. Mayer (Hrg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 19-30). New York: Cambridge University Press.

Sweller, J., van Merrienboer, J.G. & Paas, F.G.W.C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. Educational Psychological Review, 10, 251-296.

Thevenot, C. (2010). Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a mental model. *Acta Psychologica, 133*, 90-95.

Treilihs, V., Burkhardt, H. & Low, B.C. (1980). *Formulation processes in mathematical modelling.* Nottingham, England: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

van Dijk, T.A. & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83*(6), 301-312.

Van Meter, P. & Garner, J. (2005). The Promise and Practice of Learner-Generated Drawing: Literature Review and Synthesis. *Educational Psychology Review*, *17*(4), 285-325.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Walther, G., Selter, C., Bonsen, M. & Bos, W. (2008). Mathematische Kompetenz im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In W. Bos, M. Bonsen, J. Baumert, M. Prenzel, C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 49-85). Münster: Waxmann.

Weick, K.E. (1985). Systemic observational methods. In G. Lindzey & E. Aronson (Hrsg.), *Handbook of social psychology* (3. Aufl., S. 567-634). New York and Hillsdale, N.J.: Random House.

Wiese, H. (2003). Iconic and non-iconic stages in number development: The role of language. *Trends in Cognitive Sciences*, *7*(9), 385-390.

Winter, H. (1994a). Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. *Grundschule*, *3*, 10-13.

Winter, H. (1994b). *Sachrechnen in der Grundschule: Problematik des Sachrechnens*; *Funktionen des Sachrechnens*; *Unterrichtsprojekte*. Frankfurt am Main: Cornelsen.

Wirtz, M. & Caspar, F. (2002). *Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität*. Göttingen: Hogrefe.

Wirtz, M. & Nachtigall, C. (2004). *Deskriptive Statistik* (3. Aufl.). Weinheim: Juventa.

Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. *Cognitive Science*, *21*(2), 179-217.

EHRENWÖRTLICHE ERKLÄRUNG

Hiermit versichere ich, dass mir die geltende Promotionsordnung des Fachbereichs 8 (Psychologie) der Universität Koblenz-Landau, Campus Landau, bekannt ist.
Ich habe diese Dissertation selbst angefertigt und habe alle von mir benutzten Hilfsmittel und Quellen in meiner Arbeit angegeben. Die Hilfe eines Promotionsberaters habe ich nicht in Anspruch genommen.
Alexis Paulus hat mich entgeltlich als studentische Hilfskraft bei der Datenerhebung und Dateneingabe unterstützt. Nelli Buchmann, Susanne Lauer und Beate Biskup-Ackermann haben unentgeltlich als Forschungspraktikanten bei der Datenerhebung, Kodiersystemerstellung und Videokodierung mitgewirkt. Miriam Heinzen war unentgeltlich als Forschungspraktikantin an der Erstellung des Literaturverzeichnisses und dem Layouten einiger Abbildungen beteiligt. Ferner haben Nelli Buchmann, Beate Biskup-Ackermann und Alexis Paulus eine Vorabversion dieser Arbeit gelesen und mich auf Fehler und Unstimmigkeiten hingewiesen.
Darüber hinaus haben keine weiteren Dritte unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen von mir für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.
Auch habe ich die vorgelegte Arbeit noch nicht als Prüfungsarbeit für eine staatliche oder andere wissenschaftliche Prüfung vorgelegt und weder die gleiche noch eine in wesentlichen Teilen ähnliche oder eine andere Abhandlung bei einer anderen Hochschule bzw. anderen Fakultät als Dissertation eingereicht.
Ich versichere, dass die oben gemachten Angaben nach meinem besten Wissen der Wahrheit entsprechen und ich nichts verschwiegen habe.

Landau in der Pfalz, den 13. Juli 2012

Katharina Hohn

DANKSAGUNG

Von Herzen danke ich …

… *Wolfgang Schnotz* und *Renate Rasch* für die Betreuung vor Ort.

… *Rita Borromeo Ferri* für immer offene Türen und konstruktive Ratschläge.

… *Beate Biskup-Ackermann, Nelli Buchmann* und *Alexis Paulus* für wunderbare Ideen und schier grenzenloses Engagement.

… *Beate Goebels* für Vertrauen in mich und meine Arbeit.

… *Christian Vitense* für tausende von E-Mails voller Witz, Aufmunterungen, Interesse und Ehrlichkeit.

… *meinen Eltern* und *Großeltern* für bedingungslose Unterstützung, Rückhalt, Verständnis, Wärme und Liebe.

LEBENSLAUF

Katharina Hohn

Geboren am 09. November 1984 in Templin

1991 - 1996	Grundschule Hans-Fallada, Feldberg
1996 - 2000	Kooperative Gesamtschule Hans-Fallada, Feldberg
2000 - 2004	Gymnasium Carolinum, Neustrelitz
18.06.2004	Abschluss: Abitur
2004 - 2009	Psychologiestudium an der Friedrich-Schiller-Universität, Jena
2006 - 2009	Zertifikatsstudium der Religionswissenschaft an der Friedrich-Schiller-Universität, Jena
30.09.2009	Abschluss: Diplom in Psychologie Titel der Diplomarbeit: „Religiosität und Wohlbefinden. Über den vermittelnden Einfluss von Bedürfnisbefriedigung auf den Zusammenhang zwischen religiöser Einstellung und subjektivem Wohlbefinden.“
2009 - 2012	Promotionsstipendiatin im Rahmen des DFG-Graduiertenkollegs „Unterrichtsprozesse“, Universität Koblenz-Landau, Campus Landau

Landau in der Pfalz, den 13. Juli 2012